

Jelenségközpontú, kísérletekkel támogatott feladatmegoldás, mint a szemléletformálás hatékony módszere

Juhász András
(ELTE, Fizikai Intézet)

1. Bevezetés

A feladatmegoldás a fizikatanítás egyik legfontosabb eszköze. Szerepe egyaránt fontos az ismeretek megértésében, a rögzítést segítő gyakorlás során, de a tanulói teljesítmény értékelésében is. Nem véletlen, hogy a tehetséggondozás, a felsőfokú tanulmányokra történő felkészítésben is alapvető szerepe van.

A fizikaórán a legkülönbébb feladatoknak van létjogosultsága. Ezek közt azonban kiemelt szerepe van a fizikai törvények matematikai megfogalmazásán alapuló számításos feladatok megoldásának.

1.2. A feladatmegoldás, mint a fizikai gondolkodás iskolája és próbája

A számításos feladatokkal kapcsolatban gyakran mondjuk, hogy ez a fizikai gondolkodás igazi iskolája. Az igazán jó feladatok (legyenek egyszerűek, vagy összetettek) valóban tükrözik a fizika gondolkodásmódjának legfontosabb jellemzőit.

A fizika a természeti jelenségek megfigyeléséből indul ki, a megfigyelések alapján fizikai mennyiségeket definiál, amikhez mérési utasítást, mértékegységet rendel. A fizikai törvények egy-egy jelenség, jelenségkör szempontjából alapvető fizikai mennyiségek közötti ok-okozati összefüggéseket fogalmaznak meg matematikai egyenletek alakjában. Fontos, hogy a törvények alapján végzett számítások egy-egy konkrét jelenségre vonatkozóan, kísérletileg is igazolható mennyiségi következtetésekre vezetnek.

Mivel a fizika lényegéhez tartozik a természeti jelenségekben felismert törvények matematikai alakban történő megfogalmazása, és az ezekkel végzett számítások a fizika tanítása elképzelhetetlen ennek érzékletes bemutatása nélkül. A számításos fizikafeladatok tehát azért nélkülözhetetlenek a középiskolában, mert nélkülük nem tudnánk bemutatni a fizika a természet kvantitatív leírására képes. Fontos azonban leszögezni azt is, hogy a feladatmegoldás nem célja, hanem csak egyik alapvető eszköze a fizikatanításnak.

1.2. Miért nehéz a diákok többségének a fizikai feladatok megoldása?

Tapasztalati tény, hogy a számításos fizikai feladatok megoldása a diákok többsége szerint nehéz feladat. Amíg a 7-8. évfolyamon a fizikatanítás hangsúlya a jelenségek megismerésén, a kísérleteken, méréseken van, és a számításos feladatok szerepe kisebb, a diákok általában kedvelik a fizikát. A középiskolában, ahol a jelenségek mennyiségi leírása, és ehhez kapcsolódva a számításos feladatmegoldás szerepe meghatározóvá válik, sokan fordulnak el a

fizikától. Ennek döntő oka a feladatmegoldások során átélt kudarc. A szakmódszertani kutatások szerint annak az egzakt vizsgálata, hogy miért nehéz a diákoknak a fizikai feladatok megoldása, és mely feladatok a nehezek, szinte lehetetlen. A feladatok nehézségének megítélése ugyanis erősen személyfüggő, függ a diák egyéni gondolkozásmódjától, előismeretitől, rutinjától. Néhány általános megállapítást azonban mégis tehetünk.

Általános vélemény szerint a fizikát a matematikai számítások teszik nehezzé. Ennek azonban ellentmond, hogy a matematika a tantárgyak kedveltségi sorrendjében lényegesen előbbre áll, mint a fizika. A fizikai feladatmegoldás igényli a matematikát, de többnyire nem a számítások elvégzése jelenti az igazi problémát. A matematika szóhasználatával élve a fizika feladatok mindig „szöveges feladatok”. A szöveges feladatok pedig minden esetben a számításokat megelőző gondolkodást igényelnek. Meg kell érteni a felvetett probléma lényegét, fel kell ismerni, hogy milyen megismert törvények, összefüggések segíthetnek a megoldásban és e törvények közt fel kell ismerni a logikai kapcsolatokat. Ezek vezetnek el a matematikai egyenletek felírásához, ami után már valóban csak számolási gyakorlaton múlik az eredmény. A feladatmegoldás tehát mindig két lépésből áll, az első a feladat matematikai modelljének, a megfelelő egyenleteknek a megtalálása, a második az egyenleteknek a megoldása. A fizikában a feladatmegoldás nehézsége többnyire az első lépésből fakad, mert a konkrét feladat (szituáció) esetén meg kell találnia a diáknak, hogy mely ismert törvényt lehet/kell felhasználnia, illetve a törvényből kiindulva, hogyan juthat el számítással a feladat kérdésének megválaszolásához. Az eredményes feladatmegoldás egyaránt megkívánja a szövegértést (ehhez kapcsolódva a szituáció elképzelését) a szükséges fizikai előismereteket, a törvények lényegi megértését, és a matematikai alapkompétenciákat. A feladatmegoldás fontos befejező lépéseként nem hagyható el a végeredmény számértékének és mértékegységének ellenőrzése, abból a szempontból, hogy az eredmény valóban reális-e.

1.3 A feladatmegoldás tanítása

Feladatmegoldás alapszinten

A középiskola kötelező fizikaóráin a kerettantervi törzsanyaghoz illeszkedő egyszerűbb feladatok megoldására helyezzük a hangsúlyt. Az egyszerű feladatoknak az új anyagként megjelenő törvény rögzítésében, és alkalmazásokkal illusztrált megértetésében van fontos szerepe. A feladatok megoldása így a tanítási folyamat szerves része.

Feladatmegoldás szervezett csoportos tehetséggondozás keretei között

Az érettségire, egyetemi tanulmányokra felkészítő fakultatív tehetséggondozó foglalkozásokon a feladatmegoldást, mint az egyes fizikai problémák kognitív megközelítését tanítjuk. A feladatmegoldás tanítását célszerű minden új témakör esetén a törzsanyag összefoglalásával és a kapcsolódó egyszerű feladatok ismételt tárgyalásával indítani. Ezen a szinten a legcélszerűbb módszer a frontális csoportmunka. A feladatmegoldást a tanár alapvetően célzott kérdésekkel vezeti, amikre a választ a diákoktól várja. A jó válaszok nyilvános dicséretével motiválja a közös munkát, miközben szükség esetén kiegészíti, korrigálja azokat, és végül mindenki számára világosan összefoglalva hangsúlyt ad a megoldás sarokpontjainak. Kezdetben a táblán a tanár dolgozik. A rendezett táblai munka mintát ad a diákoknak. A diákok a tanári táblát füzetükbe másolva, tanulják meg és rögzítik a feladatmegoldás logikáját legjobban

visszatükröző formákat. A forma nem cél, hanem eszköz a rendezett gondolkodás támogatására. A feladatmegoldás táblaképe tükrözi a megoldás menetét. A munka az egyszerű „behelyettesítéses” feladatokról indul, majd a témakör ún. „típuspéldáival” folytatódik. Itt már több egymásra épülő részfeladat összekapcsolása, egymásra építése jelenti a nehezítést, de a tárgyalt témakörből még nem lépünk ki. A legnehezebbek azok a feladatok, amelyek a fizika különböző témaköreinek összekapcsolását kívánják meg. Az ilyen összetett feladatok jó alkalmat adnak a különböző anyagrészek ismételtesére és egységbefoglalására is.

A fizikai példamegoldás tipikus algoritmusa:

a) Első lépés a teljes feladat tájékoztató elolvasása. Ennek során világossá válik, hogy egyetlen kérdést tartalmazó egyszerű feladatról van szó, vagy több egymásra épülő kérdést kell megválaszolni.

b) Ezután az újbóli szakaszolt olvasás közben rögzítjük a megadott adatokat és szükség esetén, vázlatos rajzon ábrázoljuk a szituációt, betűkkel jelölve az ismert paramétereket. A vázlatrajz elkészítése segít a probléma lényegi megértésében (frontális feladatmegoldás során a probléma megvitatásában). Itt válik egyértelművé, hogy milyen fizikai ismeretek, törvények alkalmasak a feladat (részfeladat) megoldására, továbbá összetett feladat esetén mi a logikai kapcsolat a feladat-részek között.

c) A szükséges törvény (törvények) matematikai kifejezésének felírása, a megoldás logikai útjának tisztázása a megoldás harmadik lépése. Fontos kérdés, hogy rendelkezésünkre áll-e minden szükséges adat a megoldáshoz? Ha nincs minden megadva, hogyan juthatunk hozzá a szükséges adatokhoz?

d) Az előző lépéseket követi a számítások elvégzése. (Gyakran ez a lépés – időtakarékosági okokból elmarad, ami hiba. A fizikai feladatmegoldás lényege ilyenkor sajnos lesikkad, hiszen a fizikai számításoknak éppen a végeredmény a célja. E számszerűsített végeredménynek van valóságértéke, aminek ellenőrzése hozzá tartozik a problémamegoldáshoz.

e) A feladatmegoldás befejezése az eredmény (részeredmény) értelmezése (gyakran ellenőrzése). Minden esetben ellenőrizni kell, hogy a kapott végeredmény reális érték-e, megfelelő-e a gyakorlati tapasztalatainknak, megfelelő-e a mértékegysége. Ezen túlmenően igyekeznünk kell arra is, hogy a rendszeresen oldjunk meg olyan feladatokat, ahol az eredmény kísérletileg is ellenőrizhető.

(Összetett feladat esetén a megoldás c, d, e pontjában foglaltak a részkérdéseknek megfelelően ismétlődnek.)

A feladatmegoldás tanítása nem ér véget a tananyaghoz kapcsolódó mintafeladatok közös feldolgozásával. Az közös iskolai feladatmegoldáshoz hozzá tartoznak a közös gondolatmenet ismételtesét jelentő kötelező házi- és fakultatív gyakorló feladatok. A közös gondolatmenet ismételtes a rögzítés fontos eszköze. (Kiváló példát ad a közösen feldolgozott feladatok és a megfelelő házi feladatok párba állítására a már klasszikusnak számító Dér - Radnai - Soós: Fizikai feladatok I., II. c. kiadvány.) A feladatmegoldás gyakoroltatása során fontos, hogy ne elégedjünk meg a formális reprodukcióval, hanem a bevésett formákon túl fordítsunk figyelmet a konkrét probléma elemzésére is. Így az egyszerű rutin-példák nagyon hasznos segítséget adnak a későbbiekben diákjainknak a nehezebb összetett feladatok megoldásában is.

1.4. – A tehetséggondozás személyes oldala - preconcepciók, egyéni félreértelmek korrigálása

A hatékony tehetséggondozás lehetetlen a diák és a tanár személyes kapcsolata nélkül. A kiscsoportos tehetséggondozás során a tanár a csoport átlagához igazodva vezeti a munkát. Emellett azonban feltétlenül szükség van arra, hogy a tanár egyénileg is foglalkozzon a diákjaival. A személyes kapcsolat egyik alapvető szerepe a diák motiválása, személyes biztatása. A másik fontos terület az egyéni megértési problémák okának megkeresése és korrigálása. Erre akkor van szükség, ha a kiscsoportos foglalkozás során észrevesszük, hogy valamelyik diákunk bizonyos kérdéseket rendszeresen félreértelmez, vagy rosszul közelít meg. Az ilyen megértési nehézségek hátterében általában korábban rögzült fogalmi félreértések húzódnak meg. Az esetek többségében ezek a félreértések még a gyermeki naiv természetszemlélet egy ún. „tévképzeteiben” gyökereznek. Ilyen tipikus probléma, hogy a mozgástanban sebesség, gyorsulás fizikai jelentéséből a vektor-jelleg kimarad és a köznapit értelmű „gyorsaság”, (tempó) fogalmakkal azonosul. Ennek következménye például, hogy a diák úgy gondolja, hogy a negatív gyorsulás jelentése lassulás, vagy az egyenes körmozgásnál nincs gyorsulás. Hasonlóan gyakori probléma, hogy a gyermeki természetes arisztotelészi mozgás-szemlélet keveredik az iskolában tanult newtoni szemlélettel. A diák ismeri a newtoni mechanika törvényeit, kritikus esetekben mégis az arisztotelészi szemlélet alapján okoskodik.

A gyakori, tipikus preconcepciók, tévképzetek problémára a tehetséggondozó órákon mindenképpen csoport-szinten is érdemes figyelmet fordítani. A fogalmi, gondolkodásbeli félreértések azonban gyakran a helyes ismeretek és a tévképzetes egyéni jellegű keverékből származnak. Ezek gyökerének megtalálása és a probléma megoldása a csoportos foglalkozások keretében nem megy. Ilyenkor a tanár személyes megbeszélés során ismerheti fel a probléma okát, amikor például egy rosszul megoldott feladat kapcsán elmondhatja a diákkal lépésről lépésre hogyan gondolkodott. Természetesen az ilyen személyes beszélgetésekben nem lehet semmi számonkérés.

1.5. Idealizált modell-példák és a fizikafeladatok valóságtartalma

A fizika a természeti jelenségek értelmezésekor a legfontosabb meghatározó körülményekre, kölcsönhatásokra koncentrál. Ez azt jelenti, hogy a sokrétű bonyolult valóságot egyszerűsített, idealizált modellekkel helyettesíti. Ez jelenti a fizikai modellalkotás lényegét. A tankönyvekben, példatárakban található fizikafeladatok legtöbbször már ilyen idealizált esetekre – modellekre – vonatkoznak. Erre a fizikapéldák megfogalmazása egyértelműen utal (Pl. a kötélt súlytalan, nem nyúlik, a lejtőn nincs súrlódás, az elektromos ellenállás hőmérsékletfüggésétől tekintsünk el, a telep belső ellenállását hanyagoljuk el, stb.) Természetesen merül fel a kérdés a diákokban, hogy ilyen irreális feltevésekkel mi értelme van fáradságos számításokat végezni, hiszen azok eredmény biztosan más, mint a valóság. Felvetés jogos, hiszen a modellalkotás folyamatát a diák nem érzékeli, ugyanakkor a feladat megoldhatóságát épp a modell egyszerűsítései teszik lehetővé számára. A probléma két oldalról

közelítve tisztázható. Az egyik a fizikai modellalkotás lényegének megvilágítása, hiszen az említett egyszerűsítés ennek egyik megjelenési formája. A középiskolai példák közelítései azonban kétfélek, s ezt világosan el kell választanunk. Egyik részük az alkalmazott fizikai modell sajátossága és meghatározott pontossági igény mellett nem veszélyezteti a számítások valóságtartalmát. (Ilyen például a fonalinga, vagy fizikai inga lengésideje képletének meghatározásakor alkalmazott közelítés, vagy a merev asztallap deformációjának elhanyagolása.) A másik közelítés-típus kifejezetten a matematikai egyszerűsítést szolgálja, s gyakran csak a középiskola matematika eszközeinek hiányosságából fakad (pl. a közegellenállás elhanyagolása a hajítások esetén, vagy a csiga tömegének az elhanyagolása a csigán átvett kötéltre akasztott testek mozgásának leírásakor). Ez a csoportosítás természetesen nem szigorú, számos ponton átfedő lehet. (Tekinthetjük például az elméleti fizika lineáris közelítéseit is pusztán matematikai egyszerűsítéseknek.) Nagyon fontos azonban, hogy a közelítések felsorolása miatt ne vesszen el a fizikai törvények alkalmazásának hitele. Gyors eszű, okos diákok minden fizika példához könnyen találnak újabb és újabb elhanyagolásokat. Ezeknek nagy része azonban a jelenség szempontjából teljesen lényegtelen. (Ilyen például, hogy a csigán átvett fonal nyújthatatlan, vagy az asztalra tett könyv esetén az asztallap deformálódása elhanyagolható, s természetesen a statika példákban a tartó fonalak, lapok hőtágulását sem kell figyelembe venni.) Amikor az egyszerűsítéssel élünk, azt kell világosan látni, hogy milyen paraméterek mellett fogadható el az elhanyagolás. Ha a feladat a feltételeknek eleget tesz, az idealizálás mellett számított eredmény jól megközelíti a valóságot. Az igazi művészet az, hogy észrevegyük, ha valamelyik, általában elhanyagolt, másodrendűen kicsiny hatás az adott körülmények között döntővé válik. Ez jól érzékeltethető a nagyon hosszú fonalinga elméleti példáján keresztül. A fonalinga lengésidejét kis kitérések esetén a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$
 formulával szoktuk megadni. Amennyiben azonban az inga hosszát gondolatban

a Föld sugarának nagyságrendjére növeljük, akkor a megoldás kis kitérések mellett is rossz közelítésre vezet. Ekkor ugyanis egy addig nem is említett rejtett közelítés válik érvénytelenné. Az inga lengésidejének meghatározásakor magától értetődő módon feltételeztük, hogy a gravitációs erő a nehézségi erővel helyettesíthető, azaz homogén, mindenütt azonos irányú és nagyságú. A nagyon hosszú inga esetén azonban a gravitációs tér irányának változását már figyelembe kell venni.

2. Újszerű fizikafeladatok a jelenségek és a fizikapéldák összekapcsolására

A középiskolai alapszintű fizikaórákon és az emelt szintű fakultatív tehetséggondozó órákon egyaránt fontos, hogy olyan feladatokat adjunk a diákoknak, amelyeken keresztül bemutathatjuk a természet fizikai megismerésének lényegét: A fizika iskolában tanult törvényei alapján a természeti jelenségek széles köre értelmezhető. A fizikai törvények alapján végzett számítások tapasztalatilag ellenőrizhető valós eredményekre vezetnek. Ezeknek a számításoknak lehet célja a törvények működésének vizsgálata, de célja lehet gyakorlati problémák megoldása is.

A következőkben olyan újszerű feladat-típusokra mutatunk példákat, amelyek hangsúlyozott célja a fizikai számítások és a jelenségek, kísérletek összekapcsolása.

A feladatokat négy csoportba rendeztük:

Az első csoportba kerültek azok a hagyományos fizikapéldák, amelyek eredménye a megoldást követően gyorsan és egyszerűen kísérlettel is ellenőrizhető.

A második csoportban olyan feladatok találhatók, ahol a feladat alapproblémáját kísérleti bevezetés adja.

A következő csoport feladatai fotó-dokumentumokhoz kapcsolódnak. A feladat megoldásához szükséges adatokat a fotókon végzett mérésekkel a diákoknak kell meghatározni.

Az utolsó csoport feladatainak alapját videón bemutatott jelenségek, kísérletek adják. A videók számítógépes mozgáselemző programok segítségével kiértékelhetők. A feladat a kiértékeléssel kapott adatokkal végzett számítással oldható meg.

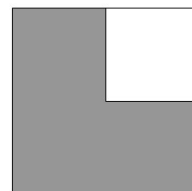
3. Hagyományos példatári feladatok – az eredmény egyszerű kísérleti ellenőrzésével kiegészítve

3.1. Homogén lemezből kivágott síkidom tömegközéppontjának meghatározása

Feladat:

Az a élhosszúságú d vastagságú lemez sarkából kivágunk – a rajzon látható módon – egy $\frac{a}{2}$ oldalú négyzetet darabot.

- Határozd meg az így kialakult idom tömegközéppontját számítással, majd kísérleti módszerrel is!



Megoldás:

A kivágott négyzet területe a teljes négyzet területének éppen negyed része. Mivel a kartonlap vastagsága mindenütt azonos, a kartonpapír tetszőleges darabjának tömege arányos a lap területével. Tekintsük egységnyinek a kivágott darab tömegét. A maradék lap tömege ekkor 3. Egészítsük ki a lapot a kivágott negyed darabbal teljes négyzetté. A teljes négyzet tömegközéppontja szimmetria okból a négyzet O középpontjában van. A kiegészítő négyzeté hasonló okból saját P_1 középpontjába esik. A háromszoros területű egyenlőszárú L alakú síkidom P_2 tömegközéppontja a szimmetria miatt az OP_1 egyenesre, a négyzetek átlójára esik. Tudjuk, hogy az $\overline{OP_1}$ szakasz hossza teljes négyzet $d = a\sqrt{2}$ hosszúságú átlójának negyede. Jelöljük x -szel az OP_2 távolságot, azaz az L alakú test tömegközéppontjának a teljes négyzet középpontjától mért távolságát.

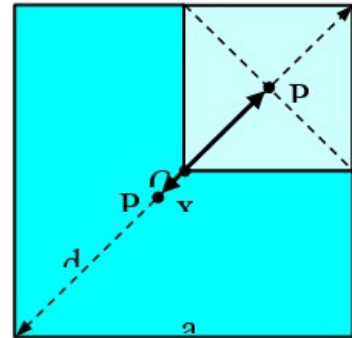
A kis négyzet és az L alakú test tömegét rendre a P_1 és P_2 pontban egyesítve, a két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontjának az O pontba kell esni. Így, fennáll, hogy

$$3x = \frac{d}{4},$$

azaz

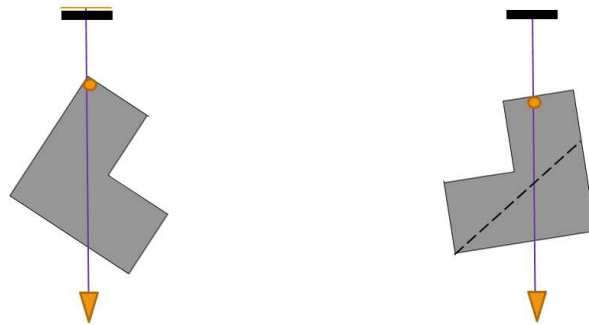
$$x = \frac{d}{12},$$

vagyis az L alakú idom tömegközéppontja az O ponttól a négyzet átlójának $\frac{1}{12}$ -ed résznyi távolságban az átló mentén.

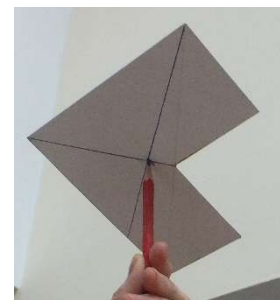


Az eredmény kísérleti ellenőrzése

A nagy négyzetlapból a kivágás után megmaradt síkidom tömegközéppontja (súlypontja) kísérletileg is egyszerűen meghatározható, mint a két ún. súlyvonal metszéspontja.



A tömegközéppont megtalálását azzal igazoljuk, hogy a feltételezett tömegközéppontban egy függőlegesen tartott hegyes ceruzával támasztjuk alá a kartonból kivágott alakzatot. Ha az alátámasztás valóban a kijelölt tömegközéppont alatt van, a lap közel vízszintes helyzetben egyensúlyban marad, ahogy ez az alulnézeti fotón is látszik.



3.2. Henger felületén lecsúszó kis test mozgása

Feladat:

Vízszintes talajon álló R sugarú korong tetejéről pontszerűnek tekinthető kis test csúszik le. A korong és a kis test közt a súrlódás elhanyagolható.

- A korong talppontjától mérve milyen távolságban ér talajt a kis test?

(Dér Radnai Soós: Fizikai feladatok I. 6.33. feladat alapján)

Megoldás:

A test, mozgásának első szakaszában a korong kerületén csúszik, majd elválik a felülettől és a második szakaszban lefelé irányított ferde hajítás parabola-pályáján mozog. A mozgás első szakasza körpályán történő egyre növekvő sebességű kényszermozgás. A körmozgás gyorsulásának sugár irányú komponensét (centripetális gyorsulás) a nehézségi erő sugárirányú komponensének és a korong felületére merőleges kényszererőnek az eredője adja. A test valamely, az ábra szerint α szöggel jelölt helyzetében:

$$mg \cos \alpha - K = \frac{mv^2}{R}$$

Az egyenlet jobb oldala a mozgás során növekszik, és mivel a baloldal első tagja csökken, a negatív előjelű második tagnak még inkább csökkennie kell. A test abban a β szöggel jelzett helyzetben válik el a korong kerületétől, ahol a K kényszererő zérussá válik. Ekkor a centripetális erőt csak a nehézségi erő centrális komponense adja:

$$mg \cos \beta = \frac{mv_o^2}{R},$$

ahol v_o a test sebessége ebben a pillanatban. Az egyenletből β értéke meghatározható, ha a v_o sebessége kifejezésére felhasználjuk a mechanikai energia-megmaradás törvényét.

A kinetikus energia értéke ($\frac{1}{2}mv_o^2$) megegyezik a korong tetejéről induló test Δh magasságcsökkenéséből adódó helyzeti energia-csökkenéssel:

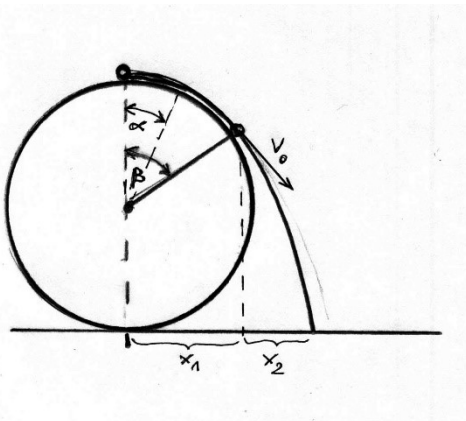
$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_o^2.$$

A Δh magasságcsökkenést a korong R sugarával és a β szöggel a

$$\Delta h = R - R \cos \beta$$

alakban fejezhetjük ki. A számolás végeredményeként

$$\cos \beta = \frac{2}{3}$$



adódik. Ez az a pont ameddig a kis test a korong palástján csúszik, itt leválik a korongról és mozgása az $R + R \cos \beta = 5/3 R$ magasságból, a vízszintestől β szöggel lefelé irányított, v_o kezdősebességű ferde hajítás.

A test talajra érkezésének távolsága (X) a henger és a talaj érintkezési pontjától mérve két szakasz összegeként adódik.

$$X = x_1 + x_2$$

Az első, x_1 szakasz a vízszintes elmozdulás azalatt, amíg a test a korong kerületén csúszik.

Ennek értéke:

$$x_1 = R \sin \beta$$

Az x_2 szakasz a test vízszintes irányú elmozdulása a hajítás során

$$x_1 = v_{ox} t.$$

Ez utóbbi megadásához a t idő értékét a hajított test függőleges irányú elmozdulását megadó

$$h = v_{oy} t + \frac{g}{2} t^2,$$

egyenletből fejezhetjük ki. A számolás során felhasználjuk, hogy

$$v_{oy} = v_o \sin \beta = v_o \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{és} \quad v_{ox} = v_o \cos \beta = v_o \frac{2}{3}.$$

A feladat végeredménye

$$X \approx 1,46 R$$

Kísérleti igazolás:

A kiszámított végeredmény kísérleti ellenőrzéséhez a feladatban megfogalmazott feltételeknek megfelelő körülményeket kell teremteni. Eszerint a kis test csúszik a henger felületén és a súrlódás eközben elhanyagolható. A kívánalmaknak jól megfelel, ha hengerként 20-25 cm átmérőjű kristályosító-csészét, vagy teflonbevonatú lábost használunk és a kis test 5-6 mm átmérőjű acél csapágygolyó.

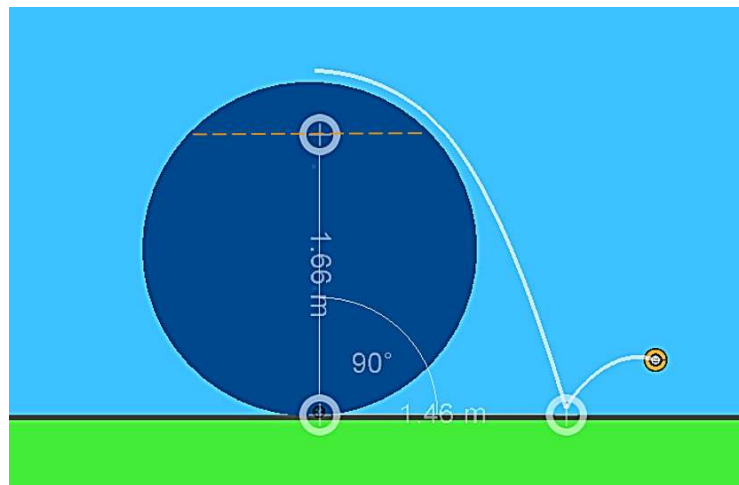
Helyezzük a hengert fehér papírlapra és jelöljük meg az érintkezés helyét (a hengert célszerű ebben a helyzetben oldalról megtámasztani, rögzíteni)! Helyezzünk a fehér lapra festékes felével lefelé fordított indigó-papírt!

A henger felső pontjáról elengedett golyó az idigóra esik és a fehér lapon nyomot hagy. Ismételjük meg néhányszor a kísérletet, majd a fehér lapot vegyük ki a henger alól és végezzük el az ellenőrző mérést! A mérés és a számítás eredménye 5% hibán belül megegyezik.

A számítás végeredménye jól reprodukálható „Algodo” vagy a magyar *Intellisense Zrt.* által kifejlesztett „*Fizika*” számítógépes mozgás-szimulációs program) alkalmazásával is.

(elérhető: <http://intellisense.sc/ist/>)

A szimuláció képernyőképét a következő ábra mutatja. Az $R=1$ m sugarú hengerről súrlódás nélkül lecsúszó test nyomvonalat húz. A test becsapódási távolsága a henger talppontjától $X=1,46$ m. A test $1,66$ m magasságban válik el a henger felületétől. A méréshez a program saját mérőrendszerét használtuk.



Megjegyzés:

Érdeemes megjegyezni, hogy a fenti eredmény reprodukálása valóban csak nagyon kis test és zérus súrlódás, azaz a kis test csúszása esetén valósítható meg. Ha ez nem teljesül, a golyó gördül (is) és a kezdeti helyzeti energia egy része forgási energiává is alakul, ezért a henger talppontjához közelebb csapódik a talajra. Kísérletileg ez jól bemutatható, ha a henger tetejéről néhány cm átmérőjű tömör gumilabdát indítunk. Szimuláció esetén a henger és a kis golyó súrlódását állítjuk nagyobbra, illetve a kis golyó sugarát változtatjuk. Mivel a szimulációs programban mindkét paraméter könnyen változtatható, ezért részletesen és külön-külön is vizsgálhatjuk a két paraméter hatását a becsapódási távolságra.

3.3 Kúpinga periódusidejének meghatározása

Feladat:

Mekkora a keringési ideje annak a kúpingának, melynek tartó zsinaga $L=0,5$ m hosszú, és a mozgás közben a zsinag 60° -os nyílásszögű kúp palástját súrolja?

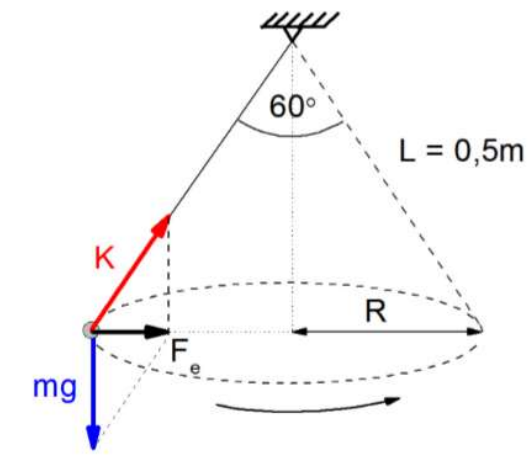
Megoldás:

Rajzoljuk fel oldalnézetből a kúpingát és jelöljük be az ingatestre ható erők vektorait! Mivel az ingatest egyenletes körmozgást végez, az ingatestre ható nehézségi erő (mg) és a K kötélerő vektori eredője a körmozgás síkjában fekszik és a középpont felé mutat. Az ingatest centripetális gyorsulását az eredő erő biztosítja.

Az ábrán látszik, hogy az erő paralelogramma fele hasonló háromszöget alkot a kúpínga fonala, a körpálya sugara, és a kúp magassága által meghatározott háromszöggel. Mivel a hasonló háromszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik, az F_e eredő erő nagysága kiszámítható

$$\frac{F_e}{mg} = \frac{L/2}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$F_e = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$



Newton II. törvénye szerint ez az erő biztosítja az egyenletes körmozgást végző m tömegű ingatest centripetális gyorsulását, azaz

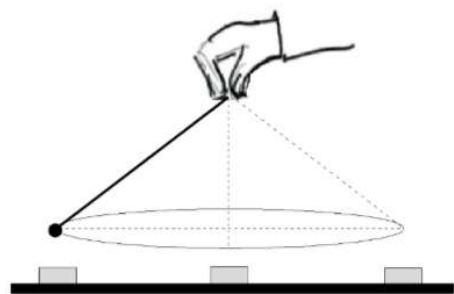
$$\frac{mg}{\sqrt{3}} = mR\omega^2$$

ahol $R = L/2$ a körpálya sugara. A szögsebességet a periódusidővel kifejezve $\omega = 2\pi/T$, és a zsinég megadott hosszát ($L = 0,5$ m) behelyettesítve a kúpínga keringési ideje ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L\sqrt{3}}{2g}} \approx 1,32 \text{ s}.$$

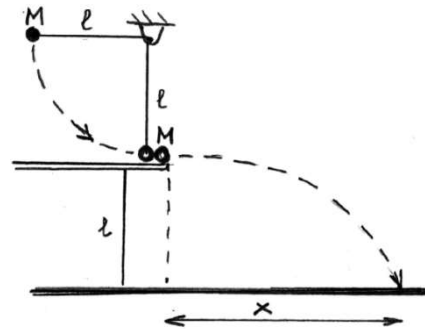
Az eredmény kísérleti ellenőrzése:

Készítsük el az $L = 0,5$ m hosszú ingát! Jelöljük ki az asztalra helyezett gyufásdobozokkal a kúpínga alapkörének átmérőjét és az alapkör középpontját! A kúpíngát kezünkben fogva a fonat tartó kezünket igazítsuk az alapkör középpontja fölé! A fonál végének finom körkörös mozgatásával hangoljuk be kúpíngánkat úgy, hogy az ingatest folyamatos mozgása során mindig éppen a kör két szélső pontját jelző gyufásdoboz fölött haladjon el! A kúpínga beállítását a diákok oldalnézetből kb. az asztal síkjának magasságából ellenőrizzék! Miután a kúpínga a kívánt módon stabilan kering, mérjük le 10 fordulat idejét stopperrel! A csekély kézügyességgel elvégezhető kísérlet esetén a mérés és a számítás eredménye jól megegyezik.



3.4. Feladat az energia-megmaradás, a rugalmas ütközés és a vízszintes hajítás vizsgálatára

M tömegű golyót – ingaként – l hosszúságú fonalra függesztünk. A felfüggesztési pont $2l$ magasságban van a talaj felett. Az ingát vízszintesig kitérítjük, majd elengedjük. A visszalendülő inga fonala éppen függőleges, amikor rugalmasan ütközik egy hasonló M tömegű golyóval. Az utóbbi golyó az ütközéskor l magasságú asztal szélén áll.



- Milyen távol ér talajt az inga által meglökött golyó, ha a távolságot az inga egyensúlyi helyzetének megfelelő függőleges talppontjától számítjuk?

(Dér Radnai Soós: Fizikai feladatok I. 4.39.)

Megoldás:

A vízszintes kitérítésből elengedett ingatest körív mentén gyorsulva mozog, amíg az ív alján rugalmasan ütközik az asztal szélén álló azonos tömegű golyóval. Két azonos tömegpont tökéletesen rugalmas ütközéskor az impulzus-megmaradás és az energia-megmaradás törvénye együtt úgy teljesül, hogy az ütköző testek sebességet cserélnek. A példánkban az inga az ütközés után függőleges helyzetben megáll, míg a meglökött golyó az ingától kapott sebességgel vízszintes hajításként mozog a földet érésig.

A kért hajítási távolság (x) meghatározásához a hajítás v_0 kezdősebességének és a hajítás t idejének értékére van szükségünk

$$x = v_0 \cdot t.$$

A hajítás ideje, a mozgásösszetevők függetlenségének elvét alapul véve, azonos a szabadesés idejével, amikor a test hajítási pont magasságából (ez feladatunkban pont az inga hosszával egyezik meg) a talajra ér, azaz

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

A vízszintes hajítás kezdősebessége megegyezik a vízszintes kitérítésből gyorsuló ingatest sebességével az inga függőleges helyzetében. Mivel a közegellenállás elhanyagolható, az ingára alkalmazható az energia-megmaradás törvénye, azaz a helyzeti energia lecsökkenése megegyezik az ingatest kinetikus energiájával az alsó pontban:

$$mgl = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Az innen kifejezett a v_0 sebességet és az előző formulával megadott t időt felhasználva a hajítás távolsága az első egyenletünk szerint adódik:

$$x = \sqrt{2gl} \cdot \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2l .$$

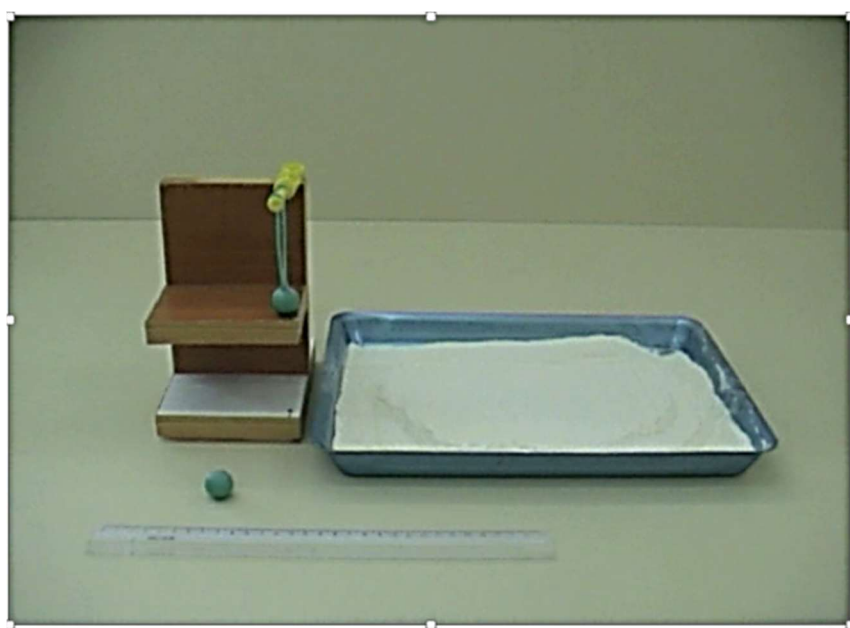
A számított eredmény kísérleti ellenőrzése

A kísérleti ellenőrzéshez össze kell állítani a feladatban leírt kísérletet. Az inga felfüggesztési pontja $2l$ magasságban legyen a talaj felett. Az inga felfüggesztési pontja alatt félmagasságban (l) kis asztalka szélén helyezzük el az ingatesttel megegyező tömegű rugalmas golyót. Az ingát célszerű bifilárisan felfüggeszteni, hogy biztosítani tudjuk, hogy az inga az általunk választott síkban mozogjon és centrálisan ütközzön az asztalkán lévő golyóval (Figyelem, bifiláris inga esetén az ingahossz nem a ferde helyzetű zsinetek hossza, hanem azok függőleges vetülete!) A feladatot ellenőrzéséhez szükségünk van a hajítás becsapódási pontja és az asztal széle közti vízszintes távolság mérésére. Ez több módon is megvalósítható:

- Legegyszerűbb, ha egy homokkal töltött lapos tálat helyezünk el a golyó földet érésének várható helyén. A homok megfogja a becsapódó golyót, így a becsapódási hely és az asztal széléről lelógatott függőőn távolsága jól lemérhető.
- Hasonlóan jó megoldás, ha a becsapódás várható helyére papírlapot fektetünk, amire festékes felével lefelé fordított indigót fektetünk. Az indigóra eső golyó nyomot hagy a papíron, így a becsapódási távolság az indigó eltávolítása után jól mérhető.

A kísérleti ellenőrzést, illetve erre a célra készített eszközt mutatja be a videó

https://www.youtube.com/watch?v=_Ufm-dKwb-4



4. Figyelemfelkeltő kísérlettel induló feladatok

4.1. Nyitott könyvben megszoruló golyó

Indító, jelenségbemutató kísérlet:

Keményfedelű, nyitott könyvbe pingpong labdát helyezünk és a könyvet, - ügyelve arra, hogy gerince vízszintes helyzetben maradjon és oldalai mindvégig szimmetrikusak legyenek a függőleges síkra - lassan összecsukjuk. A labda kissé felemelkedik a könyv gerincéről és ott megszorul.

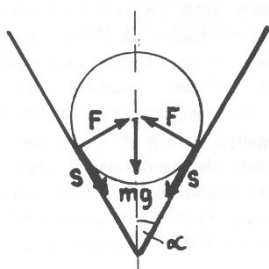


Feladat:

- Az elvégzett kísérletből kiindulva adj becslést a labda és a kartonlap közötti μ súrlódási tényezőre! Milyen más módszert (mérést) ajánlanál az eredmény ellenőrzésére?

(Károly Ireneusz Fizika tanulmányi Verseny 1993 feladata.)

Megoldás:



A két kartonlap összezárásakor a labda kezdetben felfele mozdul el, majd megszorul. Ekkor labdára az mg nehézségi erő, a lapok által kifejtett, a lapok síkjára merőleges F nyomóerők és a lapok síkjában fekvő, S súrlódási erők hatnak. A megszorulás pillanata azt a határesetet jelenti, amikor a súrlódási erők maximálisak

($S = \mu F$) és a lapok síkja mentén lefelé mutatnak. Az egyensúlyi állapot feltétele, hogy a labdára ható erők függőleges komponenseinek összege zérus legyen. A rajz jelöléseit használva adódik:

$$2F - 2S - mg = 0,$$

$$2F \sin \alpha - 2 \mu F \cos \alpha = mg,$$

átrendezve

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha = \frac{mg}{F}$$

A tapasztalat szerint a megszorult labda az F nyomóerő növelése esetén is egyensúlyban marad. Ha $F \gg mg$, úgy a tört értéke zérushoz tart, tehát:

$$\sin \alpha = \mu \cos \alpha,$$

azaz

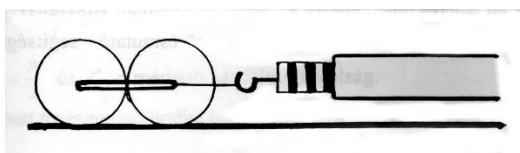
$$\mu = \operatorname{tg} \alpha .$$

A két kartonlap közötti szög tangense vonalzóval mérhető hosszúságok arányából kapható meg.

A versenyzők eszközeivel mérve:

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha = 0,25$$

A fenti értékkel jól egyező eredmény kapható más módszerekkel is. Ezek közül az egyik legegyszerűbb elvét mutatja az ábra. Két, belül gyertyával kiöntött és így megnehezített pingpong labdát egymáshoz ragasztva dinamóméterrel húzunk a vízszintes talajon. Az erőmérőt leolvasva (F) és a két golyó súlyát (G) lemérve a súrlódási tényezőt kiszámíthatjuk.



4.2 Leejtett gyufásdoboz rugalmas és rugalmatlan ütközése

Indító, jelenségbemutató kísérlet

Egy hosszirányban tartott zárt, teli gyufásdobozt 10-05 cm magasról függőleges helyzetben az asztalra ejtjük. A megismételt kísérletek tapasztalata, hogy a gyufásdoboz az asztallal ütközve kicsit visszapattan és felborul.

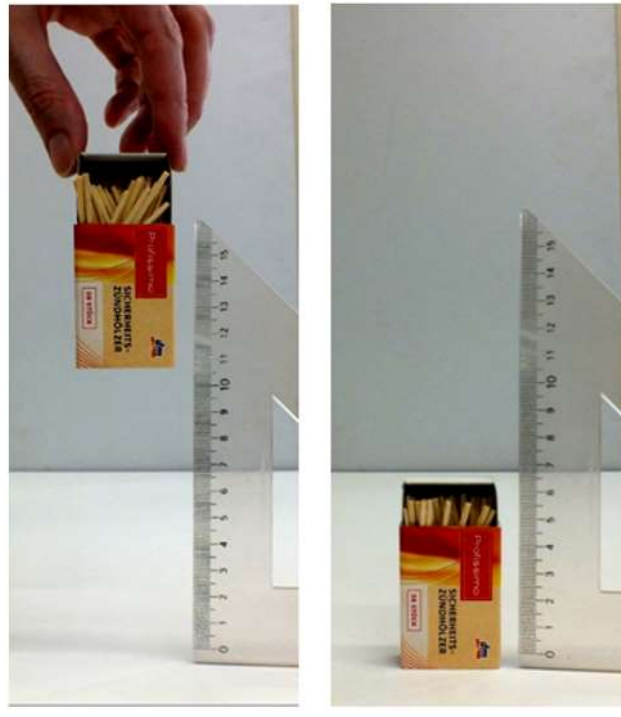
Ismételjük meg a kísérletet félig kihúzott „fiókkal”! A tapasztalat szerint a kihúzott fiók kissé beljebb csúszik, de a doboz állva marad.

Feladat:

- *Magyarázd meg a jelenséget!*

A mellékelt fotókon végzett mérések alapján, és felhasználva, hogy a gyufásdoboz tömege $M = 8$ g, becsüld meg a fiók és a tok közti súrlódási erőt!

(A 2015 évi KIV feladata, Stonavszki Tamás kísérlete alapján)



Megoldás:

Az első kísérletben a gyufásdoboz ütközése részlegesen rugalmas volt, ezt jelezte a doboz kismértékű felpattanása. Ennek hatására a dobozban lévő gyufaszálak helyzete is változott, ami a doboz borulását eredményezte.

A második kísérletben a doboz ütközése az asztallal rugalmatlan. A becsapódó doboz kinetikus energiáját a becsúszó fiók súrlódási munkája felemésztette.

A mellékelt fotókról leolvasható a leejtett gyufásdoboz helyzeti energiájának a megváltozása (ami azonos a becsapódó doboz kinetikus energiájával). A helyzeti energia megváltozását a gyufával telt doboz megadott m tömegét és a doboz tömegközppontjának Δh magasságváltozását felhasználva számítjuk (l. ábra)

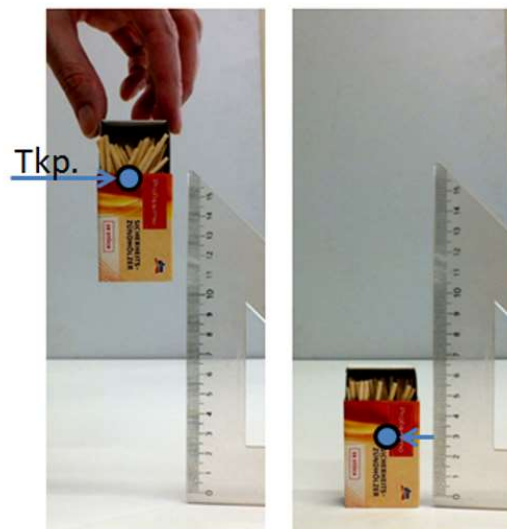
$$\Delta h = 13 \text{ cm}, \quad m = 8 \text{ g}$$

$$\Delta E_h = mg\Delta h \approx 8 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 0,13 = 10,2 \cdot 10^{-3} \text{ joule}$$

Ezt az energiát a becsúszó fiók súrlódási munkája emészti fel:

$$\Delta E_h = F_s \cdot \Delta s$$

A súrlódási erő keresett értékét az egyenletből határozzuk meg, miután a fotón lemértük a fiók kilógó hosszának Δs változását.



$$\Delta s \approx 1,5 \text{ cm}$$

$$F_s = \frac{\Delta E_h}{\Delta s} \approx 0,68 \text{ N.}$$

4.3. Rezgésidő meghatározása a rugó megnyúlásának mértékéből

Kiinduló kísérlet:

Egy állványba fogott spirálrugóra akasszunk egy kődarabot és mérjük meg vonalzóval a rugó Δx megnyúlását! A követ megemelve, majd elengedve indítsuk meg a rezgést!

Feladat:

A rugó egyensúlyi megnyúlásának mértékét ismerve számítsuk ki a rezgésidőt!

Megoldás

A rugóra akasztott rezgő test periódusidejét az ismert rezgésidő-képlet alapján határozhatjuk meg:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} .$$

Az m/D hányados értékét a rugóra akasztott test nyugalmi állapotára felírt erőegyensúlyból határozhatjuk meg

$$mg - D\Delta x = 0, \quad \longrightarrow \quad \frac{m}{D} = \frac{\Delta x}{g}$$

A keresett rezgésidő a Δx megnyúlás mért számértékét felhasználva:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta x}{g}} = \dots\dots$$

Az eredmény kísérleti ellenőrzése:

A számítással meghatározott rezgésidő kísérletileg ellenőrizhető. A számított eredménnyel jó egyezést kapunk, ha a rugóra akasztott követ rezgésbe hozzuk, 10 rezgés idejét stopperrel lemérjük, majd a kapott eredményt osztjuk tízzel.

4.4. Egyszerre ejtett és egymáson pattanó labdák

Bevezető kísérlet:

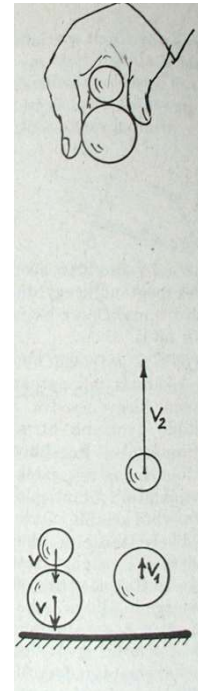
Ejtsünk le 1m magasságból pingpong labdát, majd rugalmas tömör műanyagból vagy gumiból készült ún. "trükk-labdát"! Figyeljük meg a labdák visszapattanási magasságát!

Ejtsük le ezután 1 méterről egymásra helyezve, *egyszerre* a két labdát! Az alsó legyen a nagyobb tömegű tömörgumi, a felső a pingpong labda!

Azt tapasztaljuk, hogy ütközés után a felső labda az ejtési magasságot messze meghaladó magasságba ugrik fel. Magyarázzuk meg a jelenséget!

Kísérletértelmezés:

A labdák talajra érkezésekor kettős ütközés zajlik le. Az alsó labda először a talajjal ütközik, majd kicsivel később, már visszafelé haladva összeütközik a lefelé haladó felső labdával. A felső labdát tehát nem egyszerűen a talaj löki felfelé, hanem a már vele szemben haladó alsó labda.



A feladat közvetlen kísérleti bevezetése

Ismételjük meg a bevezetőben leírt kísérletet és figyeljük az alsó labdát!

- Az alsó labda visszapattanási magassága a kettős ütközéskor lényegesen kisebb, mint amikor csak egyedül ejtjük le, a felső labdát egy másikra cserélve jól látható, hogy az alsó labda felpattanási magassága is változik.

Feladat:

A fentiek szerint két egymásra helyezett m_1 és m_2 tömegű gumilabdát egyszerre ejtünk le.

- *Határozd meg számítással, hogy milyen $\frac{m_1}{m_2}$ tömegarány esetén marad az alsó (m_1) labda ütközés után a talajon nyugalomban?*
(Tegyük fel, hogy minden ütközés függőleges egyenes mentén történik és tökéletesen rugalmas.)
- *Milyen magasra ugrik ekkor a második (m_2) labda?*

Megoldás:

a.)

Ha a labdák mérete sokkal kisebb az ejtés magasságánál (h_1), akkor mindkét labda becsapódási sebességét (v_0) azonosnak tekinthetjük:

$$v_0 = \sqrt{2gh_1} \quad v_0 = \sqrt{2gh_1}$$

Az alsó labda, a talajjal történő tökéletesen rugalmas ütközés után a becsapódási sebességgel azonos nagyságú, de ellentétes irányú, tehát felfelé irányuló $-v_0$ sebességgel rendelkezik.

A második labda a már $-v_0$ sebességgel felfelé mozgó alsó labdába ütközik. Ez az ütközés is tökéletesen rugalmas. Az impulzus- és energia-megmaradás tételét leíró két egyenlet, figyelembe véve, hogy az alsó labda ütközés utáni sebességének zérusnak kell lennie, az

$$\begin{aligned} -m_1 v_0 + m_2 v_0 &= m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} m_2 v_0^2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{aligned}$$

alakot ölti. Az első egyenletből v_2 -t kifejezve és a másodikba behelyettesítve, továbbá felhasználva v_0 -nak h_1 -gyel kifejezett értékét azt kapjuk, hogy

$$gh_1(m_1 + m_2) = \frac{1}{2} m_2 \frac{2gh_1(m_1 + m_2)^2}{m_2^2}.$$

Innen a labdák keresett tömegaránya: $\frac{m_1}{m_2} = 3$

b.)

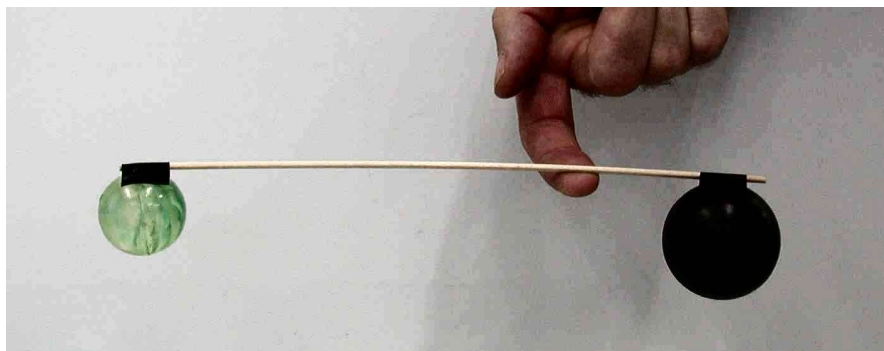
A kapott tömegarányt felhasználva fejezzük ki m_1 értékét m_2 -vel és írjuk be az energia-megmaradást kifejező egyenletbe! A visszapattanó labda mozgási energiája az emelkedés során helyzeti energiává alakul. Ezt felhasználva adódik, hogy a második labda az eredeti ejtési magasság négyszeresére pattan fel

$$h = 4h_1.$$

A megoldás kísérleti igazolása

A számítás eredményének igazolására olyan labdákra van szükségünk, amelyek megfelelnek a 3:1 tömegarálynak. A feltétel jó közelítéssel teljesíthető, ha a kereskedelembe kapható különböző méretű, azonos anyagú tömör műgumi labdák közül olyanokat választunk, amelyek átmérőjének aránya kissé kevesebb, mint 3/2!

A labdák leejtése előtt mutassuk be, hogy tömegarányuk valóban 1/3. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, ha a két labdát szigetelő szalaggal hurkapálca két végére rögzítjük, majd megkeressük, hogy hol kell alátámasztanunk a pálcát, hogy a "mérleg" egyensúlyban legyen.



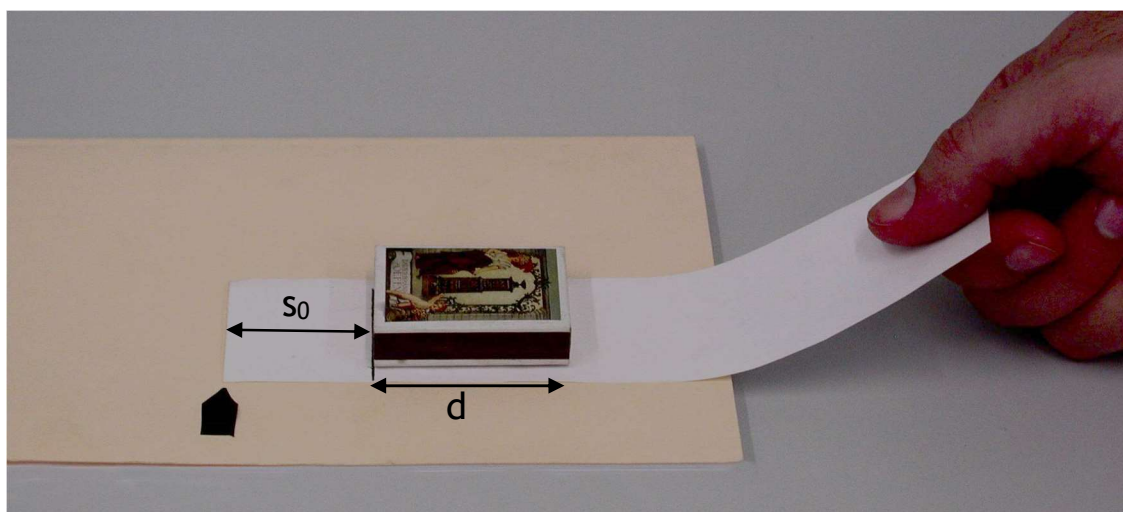
A tömegek aránya az erőkarok arányának reciprokával egyezik meg. Ezután a két labdát egymásra helyezve ejtsük le! Jól látszik, hogy az alsó labda a talajon marad.

A feladat második részének kísérleti igazolása nehezebb. Ha ugyanis a labdákat elegendően magasról ejtjük ahhoz, hogy méretük elhanyagolható legyen, az esés során fellépő energiavesztés már jelentős. Nem várhatjuk tehát, hogy a felpattanás mérhető magassága kisebb, mint 20-25% -os hibával megegyezzek a számított értékkel.

4.5. Súrlódással gyorsított és fékezett hasáb mozgása

Bevezető kísérlet:

Vízszintes asztallapra egy A4-es papírlapot, erre egy hasonló lapból kivágott papírcsíkot fektetünk, majd a felső lap közepére egy gyufásdobozt (vagy hasonló méretű fahasábot) teszünk. A felső lap szélét az ábrán látható módon megfogva, a papírt egy hirtelen vízszintes rántással kirántjuk. Miközben a papír kicsúszik a hasáb alól, az is elmozdult valamennyit a húzás irányába. Ezt az elmozdulást lehet megmérni a kísérlet megismétlése során, ha a papírlapon bejelöljük a hasáb kezdeti helyzetét. A kísérlet során mérhető hosszúságadatokat az ábra mutatja.



A rajzon s_0 a felső papírlap hasáb alól kilógó részének hossza, d a hasáb hossza, $2x$ a hasáb által megtett út.

Feladat:

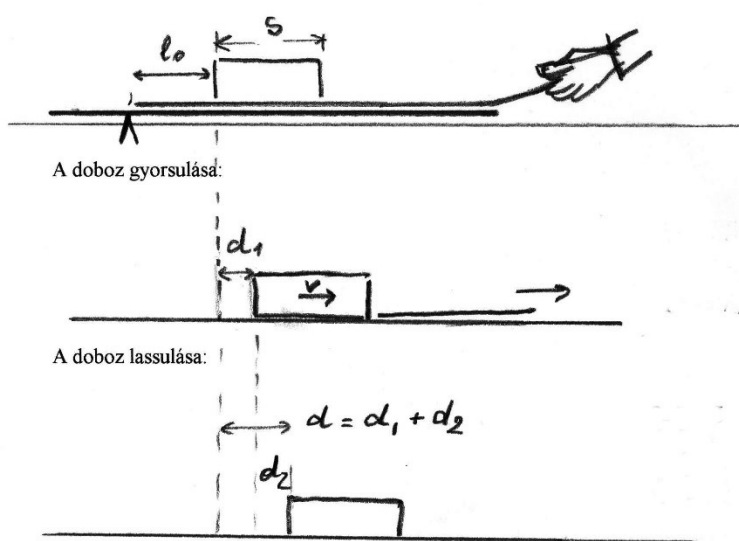
Ismételd meg a papírlappal és a fahasábbal bemutatott kísérletet!

- Becsüld meg csupán hosszúságmérések segítségével, hogy hányszor volt nagyobb a megrántott papírlap átlagsebessége a doboz átlagsebességénél?
- Mérd meg a papírlap és a doboz közötti súrlódási együtthatót!
(Ehhez rögzítsd a papírlapot ragasztószalaggal a mellékelt kartonra, és a lejtőre állított felületen csúsztasd le a fahasábot!)
- Méréseid eredményét felhasználva becsüld meg, hogy mekkora átlagsebességgel mozgott a papírlap a fahasáb alatt!

Megoldás:

A feladott kérdések megválaszolásához figyeljük meg a jelenséget és gondoljuk végig a test mozgásának részleteit! Amikor a felső lap mozogni kezd, akkor μmg súrlódási erőt fejt ki a testre a mozgás irányában. Első közelítésben feltételezhetjük, hogy mindaddig ez az erő gyorsítja a hasábot, míg a felső papírlap ki nem csúszik alóla. A hasáb tehát egyenletesen gyorsul és így v sebességet ér el. Ezután a v sebességű test az alsó papírlapon csúszik tovább, amíg a sebességgel ellentétes irányú μmg súrlódási erő fékező hatására megáll. A hasáb tehát útjának felét gyorsulva, felét pedig lassulva teszi meg.

Végezzük el a fenti megfontolások után újból a kísérletet úgy, hogy közben elvégezzük a szükséges méréseket is!



a) A papírlap és a hasáb átlagsebességét a mozgás első szakaszán értelmezve hasonlítjuk össze. Mivel a két mozgás ideje azonos, az átlagsebességek aránya a megtett utak arányával egyezik meg. A rajz jelöléseinek felhasználásával:

$$\frac{v_{\text{papír}}}{v_{\text{test}}} = \frac{s_o + d + x}{x} = s_o + d$$

b) A fáhasáb és a papírlap közti μ csúszási súrlódási együttható értékét egyszerűen lehet meghatározni, ha a papírt kartonra ragasztva lejtőt készítünk. A lejtőt laposabbra, ill. meredekebbre állítva keressük meg azt az α szöveget, amelynél a lejtőre helyezett fáhasáb egy kis kezdőlökés után lassú egyenletes sebességgel éppen lecsúszik! Ekkor a testre ható $\mu mg \cos \alpha$ súrlódási erő éppen megegyezik a lejtő síkjára merőleges kényszererő és a nehézségi erő $mg \sin \alpha$ eredőjével. A μ súrlódási tényező ebből: $\mu = \tan \alpha$, azaz a lejtő háromszögének két befogóját lemérve egyszerűen meghatározható.

c) A papírlap átlagsebességének értékét az $(s_o + d + x)$ elmozdulás és a mozgás τ idejének ismeretében adhatjuk meg. Ez utóbbit a hasáb mozgásáról a bevezetőben mondottak alapján határozzuk meg. A hasáb a súrlódási erőből egyenletesen gyorsítva teszi meg útjának első felét, azaz

$$x = \frac{\mu g}{2} \tau^2.$$

Mivel x értékét méréssel meghatároztuk, az egyenletből a τ idő kifejezhető.

A papírlap átlagsebessége tehát

$$v_{\text{papír}} = \frac{s_o + d + x}{\sqrt{\frac{2x}{\mu g}}}.$$

Megjegyzés:

A feladat megoldása során tett egyszerűsítő feltételezéseket és a számított végeredmény helyességét fénykapus méréssel ellenőriztük. A kísérletet megismételtük úgy, hogy a testre elhanyagolható tömegű kódlécet rögzítettünk.

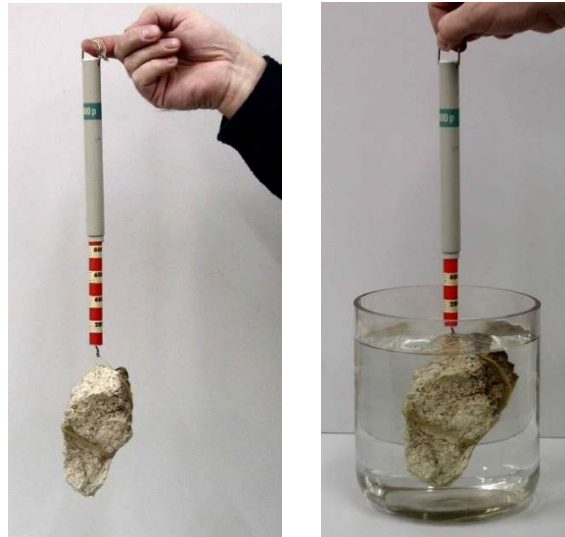
A papír kirántásakor az egyenletes osztású kódléc a fénykapu szárai között mozgott. A számítógép által felvett adatok bizonyítják, hogy a mozgás valóban egyenletesen gyorsulónak tekinthető. A számítógépes mérésekből adódó átlagsebesség és a fenti gondolatmenet szerint számított érték kb. 5%-on belül egyezett. A kapott eredmény igazolja, hogy a súrlódási erő változásától is eltekinthetünk. Jogos ugyanis az észrevétel, miszerint a lapra gyakorolt nyomóerő és ezért a súrlódási erő is változik, amikor a felső papírlap kezd kicsúszni a hasáb alól.

5. Jelenségről készült foto-dokumentumokon alapuló feladatok

5.1. Sűrűség-meghatározás Arkhimédész módszerével

Kődarab súlyát megmérve levegőben, majd vízbe merítve, meghatározható a kő sűrűsége. A bemutatott fényképfelvételek a kísérletről készültek.

- *A fotóról leolvasott mérési adatok alapján számítsd ki a kőzet sűrűségét!*



(A képeken látható rugós erőmérő 10 N felső erőhatárig tud mérni – ez felel meg az 1000 jelzésértéknek, Az egymást követő piros és fehér sávok 1 N erőintervallumot jelölnek.)

Megoldás:

A kő sűrűségének meghatározására szükségünk van a kő tömegére és a térfogatára.

$$\rho_K = \frac{m_K}{V_K}$$

A kő levegőben mért súlya $F_1 = m_K g = 8,2 \text{ N}$, innen a kő tömege

$$m_K = 0,82 \text{ kg}$$

A követ vízbe lógatva az erőmérő $F_2 = 5 \text{ N}$ erőt mutat. A mért erő a kő levegőben mért súlyának és a víz által kifejtett felhajtóerőnek a különbsége

$$F_2 = m_K g - V_K \rho_{\text{víz}} g,$$

ahol V_K a kő térfogata, $\rho_{\text{víz}}$ a víz sűrűsége ($\rho_{\text{víz}} = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Innen, az ismert adatok és a mért erőértékek felhasználásával a kő térfogata:

$$V_K = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

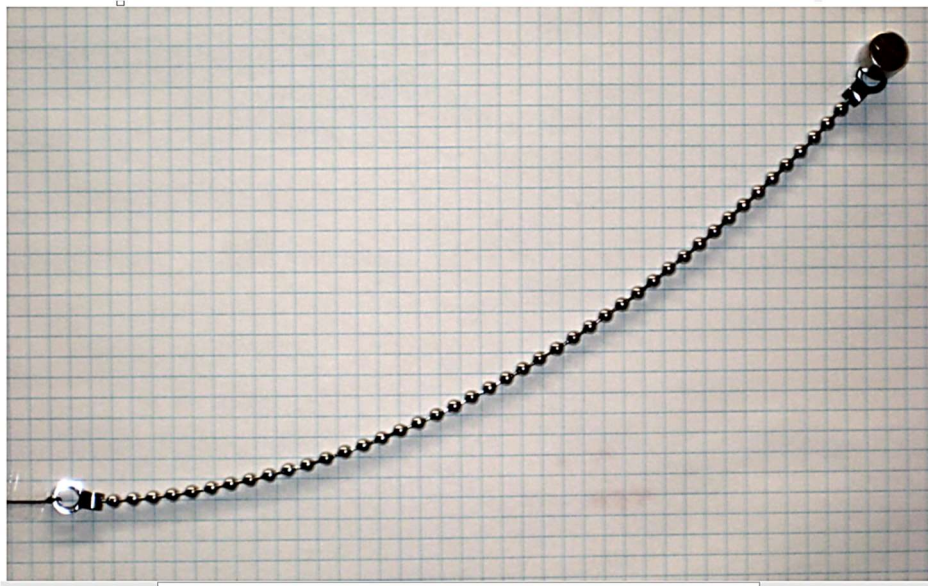
A kő keresett sűrűsége

$$\rho_K = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

5.2. Felfüggesztett lánc alakját meghatározó erők

Feladat:

Egy vékony, hajlékony nyaklánc egyik végét felfüggesztettük, a másik végét egy cérnaszál segítségével vízszintes irányba húzzuk $F = 0,1 \text{ N}$ erővel. A fotó oldalról, négyzethálós háttér előtt mutatja a mozdulatlanul tartott lánc alakját.



- Állapítsd meg az ábra alapján, hogy mekkora a lánc súlya!

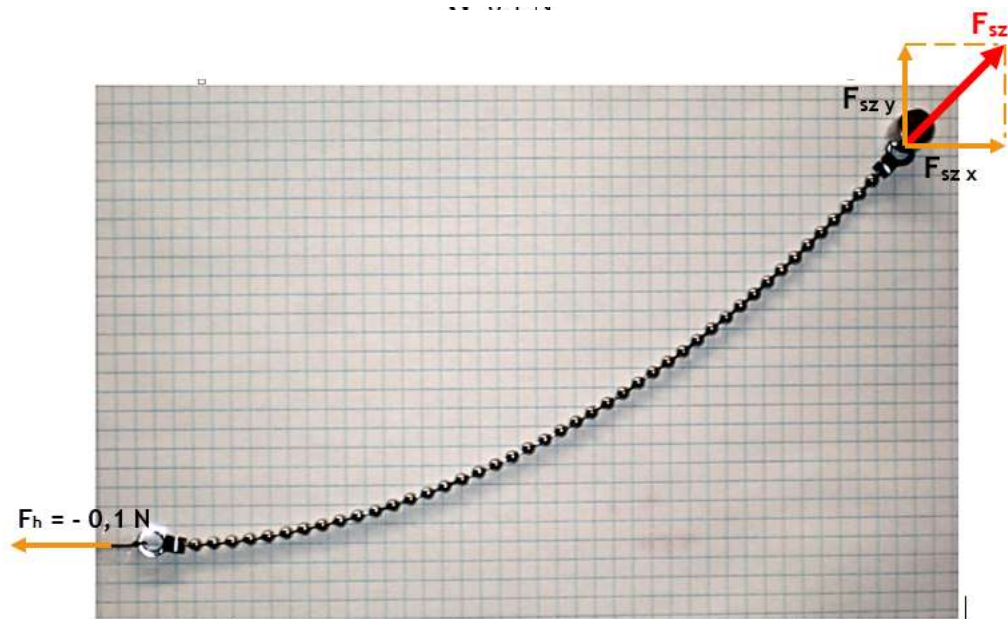
Megoldás:

A lánc egyensúlya esetén a külső erők eredője zérus. Ez természetesen a ható erők vízszintes és függőleges irányú komponenseinek előjeles összegére is igaz, azaz

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0.$$

A láncra függőleges irányú erőként hat a feladatban G súlyerő, az alsó végéhez vízszintesen csatlakozó zsinórral negatív irányban kifejtett ($F_h = 0,1 \text{ N}$) nagyságú húzóerő. Erővel hat a láncra a felső karikát tartó szög is. A szög által kifejtett F_{sz} erő nyilvánvalóan egy egyenesbe esik a csatlakozó lánc vonalával és azzal ellentétes irányú. A szög által kifejtett erő iránya a lánc háttérében lévő négyzetháló segítségével pontosan megállapíthatóan a vízszintessel 45° -ot zár be. Ez a ferde erő két azonos nagyságú függőleges és vízszintes összetevőre bontható (lásd ábra) A szög által kifejtett vízszintes erőösszetevő tart egyensúlyt a lánc alján ható $0,1 \text{ N}$ nagyságú húzóerővel. A szög függőleges irányú és a 45° -os irány miatt ugyancsak $0,1 \text{ N}$ nagyságú erő-komponense a lánc súlyerejével egyezik meg, azaz

$$G = 0,1 \text{ N}$$



5.3. Vízszugárral bemutatott ferde hajítás

A fotó egy ferdén felfelé irányított kerti locsolócsőből kifolyó vízszugárról készült.

A locsolófej bejelölt hossza 9 cm.

- A fotón végzett hosszúságmérések alapján végzett számítással határozd meg a csőből kifolyó víz sebességét!

- Becsüld meg mennyi idő alatt lenne tele a vízszugár alá tartott 10 literes vödör!

(A számításnál használd fel, hogy a hajítás két egyidejű mozgásból tehető össze.

Az egyik összetevő a kezdősebesség irányába eső egyenletes mozgás.

A másik összetevő a függőleges irányú szabadesés.

A hajítási pályán mozgó test helyét, az elhajítás kezdetétől mért tetszőleges t időpillanatban megadhatjuk, mint a két összetevő mozgás irányában t idő alatt történő elmozdulások eredőjét.)



Megoldás



Jelentse v_0 a locsolócsőből kilépő víz kezdősebességét és jelölje θ pont a cső nyílását!

A rajzoljuk rá a fotóra hajítás egyenes vonalú egyenletes mozgásösszetevőjének ferde egyenesét! Eztán válasszuk ki egy nem túl közeli A pontot az egyenesen. A locsolócső nyílásán kilépő vízrészecskék t idő elteltével a kijelölt A pontban, a nyílástól $\overline{OA}$ távolságnyra lennének, ha kizárólag az indítási irányban haladnának v_0 kezdősebességüket megtartva, azaz

$$\overline{OA} = v_0 \cdot t .$$

Valójában a t idővel ezelőtt a csőből kilépett vízrészecskék nem az A pontban, hanem a függőlegesen alatta, a lefotózott vízszugárra eső B pontban találhatók. A vízrészecskék ugyanis a kilépéstől számított t idő alatt szabadeséssel lefelé is mozogtak. A szabadesés következtében fellépő függőleges elmozdulása az $\overline{AB}$ szakasznak felel meg. Felírhatjuk tehát a szabadesés útképletét

$$\overline{AB} = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

A felírt két összefüggésben a t időparaméter értéke azonos. Ezt felhasználva (a második egyenletből kifejezett időt behelyettesítve az elsőbe) megkapjuk a hajítás v_0 kezdősebességét, mint a fotóra bejelölt két elmozdulás és a nehézségi gyorsulás függvényét.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{g}{2} \cdot t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2\overline{AB}}{g}} \\ \overline{OA} &= v_0 \cdot \sqrt{\frac{2\overline{AB}}{g}} \longrightarrow v_0 = \overline{OA} \sqrt{\frac{g}{2\overline{AB}}} \end{aligned}$$

(Az elmozdulások valós értékének meghatározásához a két bejelölt elmozdulás és a locsolófej hosszát kell lemérni a fotón. Mivel a locsolófej hosszát ismerjük, és a képen is lemértük, az arány ismertében a fotón mért elmozdulások valós méretét is megkapjuk.)

5.4. A Coca Cola cukortartalma

Feladat:

A fényképfelvétel két vízben úszó, felbontatlan Coca Cola dobozt mutat. A kétfajta Cola abban különbözik, hogy a „Cola-light” nem tartalmaz cukrot. A doboz magassága mindkét esetben 13,5 cm. A dobozokban egyformán 2,5 dl ital van.

- *Becsüld meg a Coca-Cola cukortartalmát!*

Feltételezzük, hogy a két dobozban lévő ital térfogata egyformán 2,5 dl, továbbá azt, hogy az italok összetételében csak a cukortartalom jelent különbséget! A dobozok magassága egyformán 13,5 cm.

- Határozzuk meg a fotó alapján, mennyi a Coca-Cola cukortartalma!



Megoldás

A Cola-Cola doboza mélyebben merül a vízbe, azaz a cukortartalom miatt nehezebb doboz úszásához nagyobb felhajtóerőre van szükség. A Coca-Cola cukortartalmának súlya megegyezik annak a víznek a súlyával, ami Cola-light doboz vízszint felé emelkedő térfogatrésznének felel meg.

Jelölje M a Colában lévő cukortartalom tömegét! Az ebből eredő nehézségi erővel (Mg) pontosan annyi felhajtóerő tart egyensúlyt, ami a Cola-light doboz vízből kilógó ΔV térfogatának megfelelő vízmennyiség súlya.

$$Mg = \rho_{\text{víz}} \cdot \Delta V g$$

$$\Delta V = \frac{D^2}{4} \pi \cdot \Delta h$$

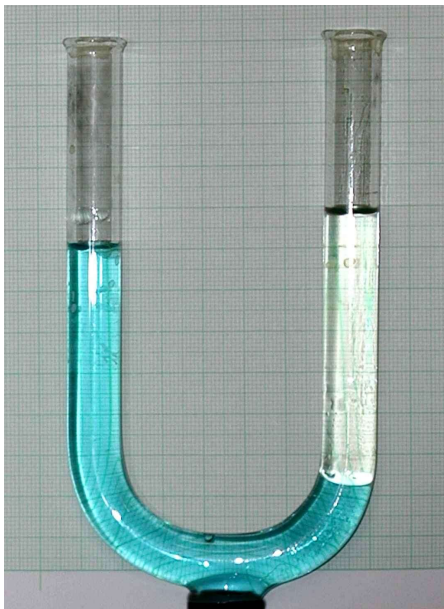
A ΔV térfogat értékét a fotón vonalzóval elvégezhető hosszmérések alapján tudjuk meghatározni. Le kell mérnünk a képen a hengeres doboz magasságát (h), átmérőjét (D) és a Cola-light dobozának a vízszint feletti magasságát (Δh). Mivel a doboz valós magasságát a feladat megadta (13,5 cm), a többi fotón mért adatot is arányosan átszámolhatjuk valós adatokká.

A kapott eredmény szerint a 2,5 dl Coca-Cola kb. 25,5 g cukrot tartalmaz.

5.5 Ismeretlen folyadék relatív sűrűségének meghatározása

Feladat

U alakú csőbe kék festékkel színezett vizet öntöttünk, majd a cső jobboldali szárába, a víz fölé, a vízzel nem keveredő folyadékot öntöttünk. A folyadékszintek állását az edény két szárában a fotó mutatja.



- Határozd meg a vízre öntött folyadék sűrűségét! (a víz sűrűsége 1000 kg/m^3)

Megoldás

Vizsgáljuk a hidrosztatikai egyensúlyt a víz és a ráöntött folyadék határán! A határfelületre a felette lévő folyadékoszlop

$$p_1 = h_1 \rho_F g$$

nyomást gyakorol. A határfelület nyugalomban van, mert a cső másik szárában a határréteg magassága fölött áll a víz és ennek p_2 hidrosztatikai nyomása egyensúlyt tart a p_1 nyomással. Azaz

$$p_1 = p_2$$

$$h_1 \rho_F g = h_2 \rho_{\text{víz}} g$$

Innen a folyadék keresett sűrűségét kifejezve kapjuk:

$$\rho_F = \frac{h_2 \rho_{\text{víz}}}{h_1}$$

A h_1 és h_2 értéke a fotón a cső mögé helyezett mm-papír osztásvonalairól leolvasható, ($h_1 = 6,5 \text{ cm}$, $h_2 = 5,7 \text{ cm}$).

Az ismeretlen folyadék sűrűsége: $\rho_F = 877 \text{ kg/m}^3$

6. Videó-felvételekhez kapcsolt fizikafeladatok

Diákjaink számára természetes, hogy a film- illetve a videofelvételeket valóság-dokumentumoknak tekintsék. A videofelvételek a fizikai feladatok valósághoz kapcsolásában változatosan használhatók fel. A következőkben ilyen alkalmazásokra mutatunk példákat.

6.1. *Súlymérés a liftben* *videofelvételből indított feladat*

A YouTube internetes videó megosztó portálon megtekinthető film az ELTE Lágymányosi épületében működő liftben készült.

<https://youtu.be/duzT7bex9TI>

A kísérletet bemutató személy az épület 2. emeletén beszáll a liftbe és ott rááll egy fürdőszobamérlegre. A nyugalomban lévő liftben a mérleg a „normál” súly értékét mutatja. Ezután a lift felfelé indul az 5. emeletre. Az induló liftben mérlegen leolvasható súly rövid időre megnő, majd visszaáll a nyugalmi értékre. A célemelet elérése előtt a mérleg által mutatott súly értéke rövid időre ismét változik – kissé csökken, de a lift megállásával újra visszaáll.

Feladat:

Nézd meg figyelmesen a filmet és jegyezd fel, hogy milyen értékeket mutatott a mérleg az álló, a felfelé induló liftben, a lift folyamatos emelkedése közben, majd a közvetlenül a megállás előtt! Töltsd ki a táblázatot!

a lift mozgása	a lift áll	a lift felfelé indul	a lift egyenletesen halad felfelé	a lift lefékez
a mérleg által mutatott érték				

- Magyarázd el miként értelmezhető a mérlegről kg egységekben leolvasható érték, ha az ember a nyugalomban lévő liftben áll a mérlegen!
- Értelmezd röviden a mérleg által mutatott érték növekedését az induló liftben!
A mérlegen álló személy mozgásegyenletét felírva számítsd ki a lift gyorsulásának értékét!
- Értelmezd a lift lassulása során a mérleg állásának változását! Határozd meg a lift lassulását!

- A videót többször lejátszva mérd meg a mobiltelefonod stopperével a lift gyorsulásának, egyenletes haladásának és lassulásának időtartamát! A mért időtartamokat s a mérlegelés eredményeit felhasználva becsüld meg mekkora az épületben egy emelet magassága!

Megoldás

A videón a mérlegről leolvasható értékeket a táblázat mutatja

a lift mozgása	a lift áll	a lift felfelé indul	a lift egyenletesen halad felfelé	a lift lefékez
a mérleg által mutatott érték	76 kg	82 kg	76 kg	70 kg

Az adatokból kitűnik, hogy az álló és az emeletek közt egyenletes utazósebességgel mozgó liftben a mérleg egyformán 76 kg értékeket mutat. A felfelé induló liftben a mérleg ennél többet, megálláskor kevesebbet mutat.

A nyugalomban a mérleg felfelé ható erőt (**K**) fejt ki a ráálló személyre, ez kompenzálja a Föld vonzásából származó nehézségi erőt (**- mg**). Így teljesül, hogy a testre ható erők eredője zérus, a mérlegen álló ember mozgásállapota nem változik.

$$K - mg = 0$$

Mivel g nehézségi gyorsulás értéke állandó, következik, hogy a mérleg által kifejtett erő arányos a test tömegével. Így egyszerű átskálázással az igazából erőt mutató mérleg átskálázható tömegmérésre. A mérleg skáláján közvetlenül leolvasott kg értékeket g értékével ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) megszorozva megkapjuk a mérleg által a testre kifejtett erő értékét newton (N) egységekben. Esetünkben tehát a nyugalomban lévő liftben a kísérleti személyt $K = 760 \text{ N}$ erővel tartja egyensúlyban a mérleg.

A felfelé induló liftben a kísérleti személy a mérlegen állva (a lifttel együtt) felfelé gyorsul. Ez Newton II. törvénye értelmében megkívánja, hogy az emberre ható erők eredője zérustól különböző, a gyorsulás irányába mutató erő legyen. Az induló liftben a mérlegen álló személy felfelé mutató (pozitív) gyorsulását a mérleg által kifejtett megnövekedett nyomóerő biztosítja. A kísérleti személy mozgásegyenlete:

$$K_{ind} - mg = ma$$

Innen az ember (és a lift) felfelé irányuló gyorsulása:

$$a = \frac{K_{fel}}{m} - g \approx \frac{820}{76} - 10 \approx 0,8 \text{ m/s}^2$$

A lift a célemelet előtt lassít, pozitív sebessége rövid idő alatt zérusra csökken, a mérlegen álló személy a lassuló lifthez hasonlóan lefelé, negatív irányba gyorsul. Ez akkor teljesülhet, ha a testre ható erők eredője zérustól különböző negatív erőérték.

A kísérleti személy mozgásegyenlete fékezésakor

$$K_{f\acute{e}kez} - mg = -ma$$

A mozgásegyenletet a keresett gyorsulásra rendezve:

$$-a = \frac{K_{f\acute{e}kez}}{m} - g \approx \frac{700}{76} - 10 \approx 0,8 \frac{m}{s^2}$$

$$a \approx -0,8 \frac{m}{s^2}$$

Eredményünk szerint a lift indulásakor és megállásakor a gyorsulás iránya ellentétes, de annak nagysága megegyezik.

A video ismételt lejátszásakor az induláskor a gyorsulás ideje $t_1 \approx 2$ másodperc, az egyenletes emelkedése $t_2 \approx 13$ másodperc.

A lift 2 másodpercig tartó $0,8$ m/s gyorsulás esetén

$$v = at \approx 0,8 \cdot 2 = 1,6 \frac{m}{s}$$

utazósebességet szerzett, miközben az egyenletesen változó mozgás útképlete szerint h_1 utat tett meg felfelé:

$$h_1 = \frac{a}{2} \cdot t_1^2 \approx 1,6 \text{ m}$$

Az $1,6 \frac{m}{s}$ sebességgel emelkedő lift útja 13 másodperc alatt

$$h_2 = vt_2 \approx 1,6 \cdot 12 \approx 19 \text{ m}$$

Mivel a fékezés során a lift gyorsulásának csak előjelében különbözik az indulási gyorsulástól, a lassulás során megtett út is megegyezik a gyorsulási szakasszal, azaz

$$h_3 \approx 1,6 \text{ m}$$

A lift a 2. emeletről a 7.-ig öt emelet magasságának megfelelő utat tett meg. A megtett út becsült hossza

$$h = h_1 + h_2 + h_3 \approx 22 \text{ m}$$

Egy emelet teljes magasságának (belső légtér és födémvastagság) méréseink alapján becsült értéke a lift teljes útjának ötöde, azaz kb. $4,5$ m.

6.2. Körhinta periódusidejének meghatározása (Fotóból kiinduló, videó alapján ellenőrzött feladat)

Feladat

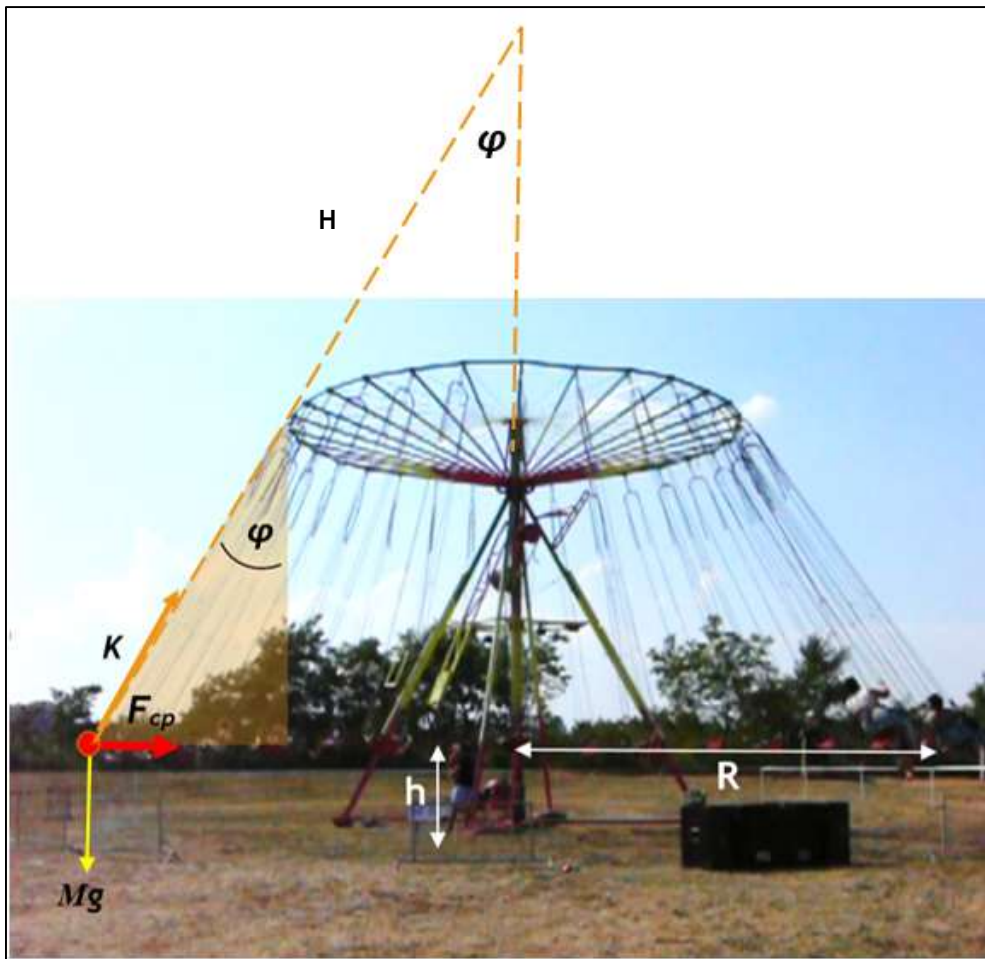
A mellékelt fénykép forgó körhintáról készült. Becsüljük meg a fotó segítségével a körhinta körbefordulásának idejét, ha tudjuk, hogy a körhinta kezelője (a tartórúd mellett áll), magassága $h=1,7$ m.



Megoldás

A forgó körhinta láncon lógó székei és a benne ülők egyenletes körmozgást végeznek. Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele, hogy a mozgó testre ható erők eredője a körmozgás síkjában fekvő és a kör középpontja felé mutasson. A forgó körhinta körmozgást végző m tömegű utasára ható erőket a fotóra rárajzoltuk, azokkal a hosszúságokkal együtt, amiknek valós értékét felhasználva a feladat alábbiak szerint megoldható.

A bejelölt hosszúságok a fotón vonalzóval lemérhetők, majd a mérési eredmények a kezelő magasságának valós értékét ismerve ($h=1,7$ m) átszámíthatók a körhinta valódi adataivá. Az R sugarú körmozgást végző M tömegre az Mg nehézségi erő és ferde helyzetű láncban ébredő K húzóerő hat. Ezek eredője biztosítja a vízszintes irányú, középpont felé mutató centripetális gyorsulást. Mivel a körmozgás síkjának magassága nem változik, igaz, hogy a K erő függőleges komponense a nehézségi erővel egyezik meg ($K_y = Mg$), míg vízszintes összetevő $K_r = Mg \cdot \tan \alpha$, a centripetális gyorsulást biztosító eredőt adja.



A körmozgás dinamikai alapegyenlete tehát

$$Mgtg\alpha = MR\omega^2$$

Az egyenletből a szögsebesség és a periódusidő kapcsolatát felhasználva

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \cdot tg\alpha}}$$

A periódusidő kiszámításához szükségünk van a körpálya R sugarának ismeretére és a lánc irányát jellemző $tg \alpha$ értékére. Ez utóbbi a rajzzal kiegészített fotóról szintén meghatározható, mint a nagy háromszög két befogójának aránya

$$tg\alpha = \frac{R}{H}$$

A számításhoz felhasznált, mérésből származó adatok:

$$R \approx 8,2 \text{ m}, \quad H \approx 11,3 \text{ m}, \quad tg\alpha \approx 0,72$$

A körhinta számított periódusideje: $T \approx 6,2 \text{ s}$

A számított eredmény ellenőrzéseként a körhintáról készített videofelvétel az internetről lehívható és periódusidő stopperrel közvetlenül lemérhető.

<https://www.youtube.com/watch?v=LjQI1UzUI9E>

6.3. Rezgésidő számítása soros és párhuzamos rugókapcsolás esetén

Az eredmény ellenőrzése videofelvétel alapján végzett méréssel

Feladat

Két, pontosan egyforma spirálrugót egymásután kapcsolva M tömeggel megterhelünk, majd rezgésbe hozva megmérjük a T_1 rezgésidőt. Ha a két rugót párhuzamosan kapcsolva ugyanazon M tömeggel terheljük T_2 rezgésidőt mérünk.

- Mekkora a mért két rezgésidő aránya?

Megoldás

A párhuzamosan egymásmellé kapcsolt rugók eredő rugóállandója az párhuzamos rugók rugóállandóinak egyszerű összege:

$$D_{\text{eredő}} = D_1 + D_2 + \dots + D_N ,$$

két egyforma párhuzamosan kötött rugó esetén tehát $D_{\text{eredő}} = 2D$. A párhuzamosan kapcsolt rugókra akasztott M tömeg rezgésidője:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2D}} .$$

Sorba kapcsolt rugók eredő rugóállandóját "reciprokos összegzéssel" kapjuk meg

$$\frac{1}{D_{\text{eredő}}} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \dots + \frac{1}{D_N} ,$$

Két pontosan egyforma D rugóállandójú sorba kapcsolt rugó eredője:

$$D_{\text{eredő}} = \frac{D}{2} .$$

A sorba kapcsolt rugókra akasztott M tömeg rezgésének periódusideje:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D/2}}$$

A két rezgésidő aránya tehát

$$\frac{T_1}{T_2} = 2$$

Ellenőrző mérés

A feladat számított eredménye a jelenséget bemutató videofilm segítségével, időméréssel ellenőrizhető. A video elérhető:

<https://www.youtube.com/watch?v=qsmLtDUvE8I>

A video három részből áll. Az első kísérlete bemutatja, hogy az egymástól független két rugó, azonos terhelés esetén, egyszerre rezeg, azaz a rugók D direkciós állandója a feladatnak megfelelően egyforma.

A második kísérletben a két rugót egymás mellé akasztjuk egy vízszintes rúdra, majd párhuzamosan lógó két rugó alsó végét könnyű vízszintes léccel kapcsoljuk egymáshoz. Az összekötő lécre súlyt akasztunk és a rendszert rezgésbe hozzuk.

- *Mérjük le stopperrel 10 rezgés idejét és a jegyezzük fel az ebből adódó T_2 rezgésidőt!*

A film harmadik kísérlete a sorba kötött rugók rezgését mutatja be. A két rugó sorban egymáshoz kapcsolva állványon függ. Az alsó rugó szabad végén terhelésként lóg az előző kísérletben használt súly és a rugókat ott összekötő lécc. (A párhuzamos rugókapcsolás esetén is a két test együttes tömegének rezgésidőjét mértük.)

- *Mérjük le stopperrel ismét a 10 rezgés idejét és a jegyezzük fel az ebből adódó T_1 rezgésidőt!*
- *Hasonlítsuk össze a számított eredményünket a mért rezgésidők arányával!*

Videofelvételek számítógépes kiértékelésére épülő fizikafeladatok

A számítógép képernyőjén megjelenített videofelvételek azonban alkalmas szoftverekkel elemezhetők, a bemutatott mozgások kvantitatív szinten kiértékelhetők. A számítógépes video-kiértékelő programok új lehetőséget teremtenek tapasztalati valósághoz kapcsolódó fizikafeladatoknak kitűzéséhez. Az esetek többségében a feladat a videofelvétel megtekintésével indul, majd a mozgás gyors számítógépes kiértékelése következik. A kiértékelés során kapott adatokra épül a tulajdonképpeni számítási feladat. A következőkben két különböző, videofelvételek mozgásait kiértékelő, ingyenesen hozzáférhető szoftver alkalmazására mutatunk példákat.

A „Tracker” mozgáselemző program alkalmas bármely átlagos videofelvételen látható síkbeli mozgás mennyiségi kiértékelésére. A mérés során a program a képről-képre követi a mozgó test általunk kiválasztott pontjának helyzetét a képek időpontjához rendelve. A pont kiválasztása történhet képenként történő rákattintással, de megfelelően kontrasztos felvétel a program egyszeri kattintás után képes automatikusan is követni a kiválasztott pontot. A számítógép a kiválasztott pont pozíciójának megváltozását pixel-egységekben méri, ami azonban könnyen átskálázható szabványos hosszúságegységgé. Ez utóbbihoz arra van szükség, hogy ismerjük a videoképen a mozgás síkjába eső valamely hosszúság reális értékét, amit kijelölve kalibrálhatjuk a hosszmértéket.

A „Tracker” mozgáselemző szoftver az internetcímről ingyenesen letölthető



<https://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>

A „LabCamera – Kinematika” mérőprogram „in situ” kísérletek és speciális videofelvételek mozgásainak automatikus kiértékelésére és a mozgásjellemzők (elmozdulás-komponensek, sebesség-komponensek és gyorsulás-komponensek) időfüggésének adatait tudja megadni, illetve ezeket a számítógép képernyőjén azonnal grafikusán megjeleníteni. A program működése szín-felismerésen alapul. A mozgó testnek tehát jellegzetes, a környezetétől különböző színűnek kell lennie, videoklipp és élő kísérlet esetén egyaránt. (Az „in situ” kísérletet mozgását a számítógép webkamerán keresztül tudja érzékelni.) A magyar fejlesztésű LabCamera számítógépes program a „Kinematika” mérőprogram mellett, a természettudományok tanításában jól felhasználható további funkciót is tartalmaz.

A teljes szoftver fizikatanárok számára regisztráció után az



<http://intellisense.se/ist/>

<http://labcamera.com>

<http://resources.intellisense.education/>

angol nyelvű honlapról ingyenesen letölthető. Ugyanezen honlapon található a középiskolai fizikatanításban jól felhasználható, kiértékelésre alkalmas videók, továbbá a videók iskolai alkalmazását, kiértékelését segítő angol nyelvű szakanyagok is.

6.4. Nehézségi gyorsulás meghatározása a Hold felszínén - az első Hold-séta történelmi videofelvétele alapján.

A tudomány számára történelmi jelentőségű dátum 1969. július 20, amikor először lépett ember a Holdra. Az egész világon ismert videofelvételek örökítik meg, ahogyan az Apollo 11 parancsnoka Neil Armstrong, társával Edwin Aldrinnal sétál, sőt páros lábbal elrugaszkodva fel is ugrik a Holdon.



A szabadon letölthető videó elérhető:

<http://www.youtube.com/watch?v=efzYblYVUFk&feature=related>

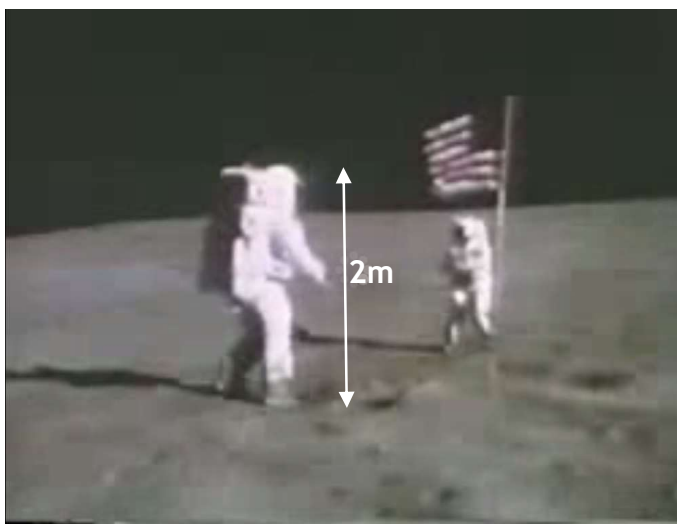
A számítógépre letöltött videó mozgáselemző programmal (pl. az ingyenesen hozzáférhető „Tracker” programmal) kiértékelhető.

Feladat

A számítógépes mozgáskiértékelő programmal a felugró űrhajós mozgását követve a videón határozzuk meg a nehézségi gyorsulás értékét a Hold felszínén!

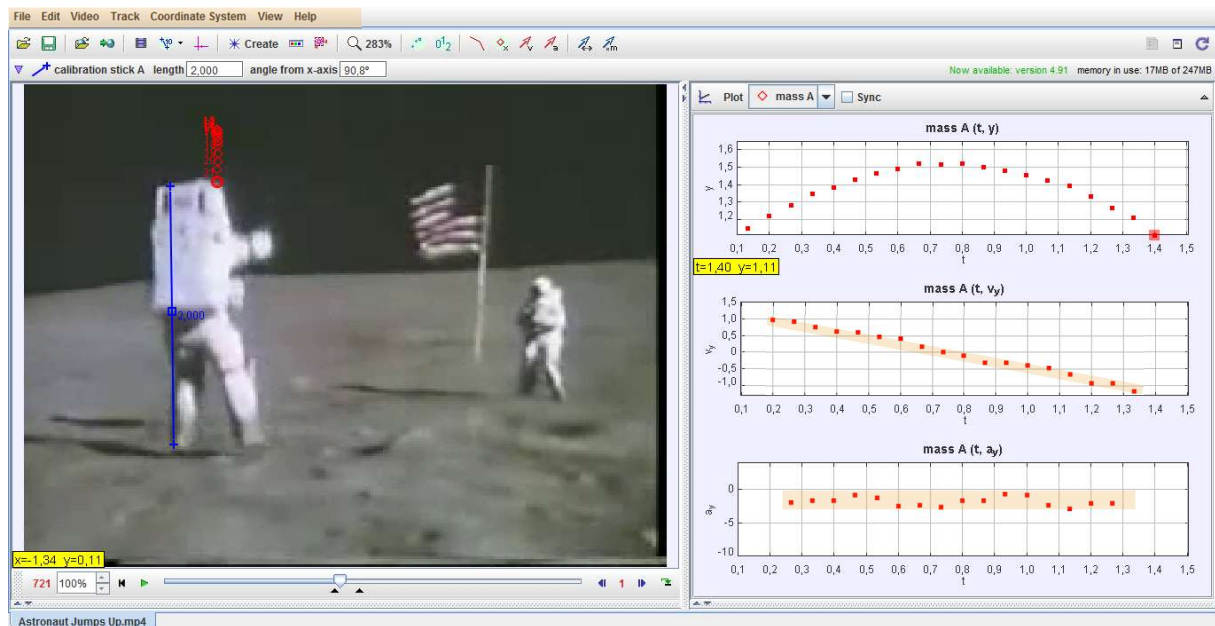
Megjegyzés

A számítógépes program a hiteles távolságméréshez esetünkben felhasználható, hogy a felugrás előtt, még kiegyenesedve álló űrhajós teljes magassága 2 m (ábra).



Megoldás

A páros lábbal felugró űrhajós mozgása, attól kezdve, hogy az asztronauta elemelkedett a talajtól egészen az újbóli talajfogásig, függőleges hajítás. A „Tracker” mozgáskiértékelő program ábrákon látható grafikonjai ezt bizonyítják (a függőleges elmozdulás – idő függvény fordított állású parabola, a sebesség - idő grafikon negatív lejtésű egyenes, a negatív tartományban futó vízszintes egyenes.)



A bemutatott grafikonokra illesztett függvények alapján a gravitációs gyorsulás mért értéke a Holdon

$$g_{\text{Hold}} \approx 1,9 \text{ m/s}^2$$

(A nehézségi gyorsulás irodalmi érték $g_{\text{Hold}} \approx 1,6 \text{ m/s}^2$, ami a földi nehézségi gyorsulásnak közel hatoda.)

Megjegyzés

A mozgáskiértékelést attól a pillanattól kezdjük, amikor a páros lábbal felugró űrhajós elemelkedik a Hold talajától, és addig futassuk, amíg a két lába újra talajt fog. A mozgás követésére ajánljuk a „hátizsák” felső sarkának kiválasztását.

A holdi nehézségi gyorsulás meghatározása után a feladat további kérdésekkel bővíthető. Néhány érdekes, szemléletformáló kérdés:

- Mekkora a súlya a szkafanderbe öltözött űrhajósnek a Holdon, ha Földön a mérleg 110 kg tömeget mutat?
- Mekkora a Hold tömege, ha átmérője $D = 3479 \text{ km}$?
- Mekkora a Hold közepes sűrűsége? Hogy viszonylik ez az érték a Föld átlagsűrűségéhez?

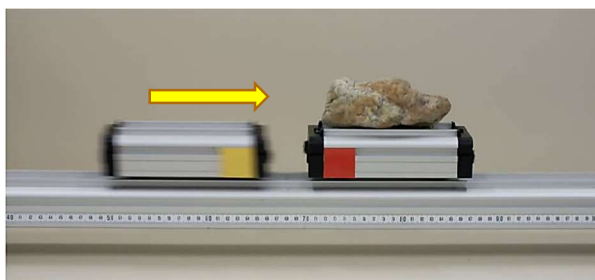
6.5. Dinamikus tömegmérés ütköztetési kísérlettel

Feladat

- A LabCamera Kinematika program alkalmazásával vizsgáljátok meg egy ismert tömegű és egy ugyanolyan, de ismeretlen tömegű kővel nehezített másik kiskocsi rugalmatlan ütközését bemutató videót! A számítógépes programból kinyert ütközés előtti és utáni sebességek értékének ismeretében határozzátok meg a kocsin lévő kő ismeretlen tömegét!

A jelenségbemutató videó elérhető:

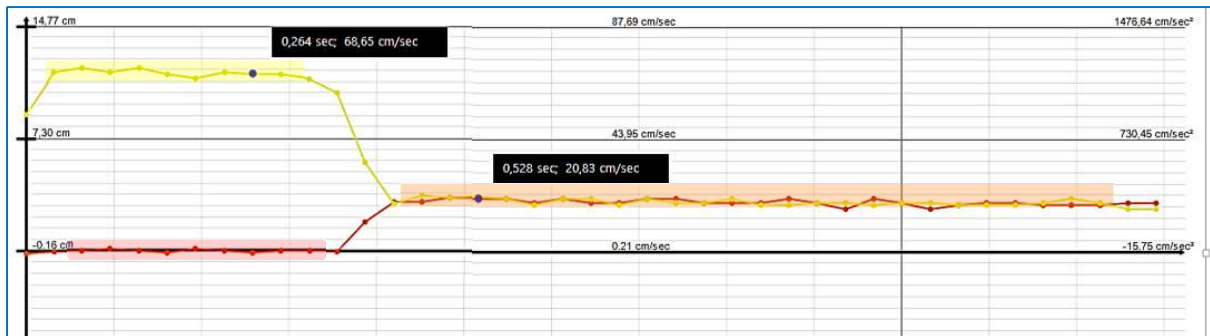
<https://youtu.be/UFWwVGk4NAY>



A sín közepén mágneses ütközővel felszerelt piros jelzésű kiskocsi áll. A kocsi ismeretlen tömegű kődarabot rögzítettünk, a kocsi saját tömege $m_p = 0,5 \text{ kg}$. Az álló piros kocsinak balról nekiszalad a sárga jelzésű, $m_s = 0,5 \text{ kg}$ tömegű kocs. A sárga kocsin szintén mágneses ütköző van, a kocsikon lévő mágnesek közt vonzó erő működik. Ütközéskor a kocsik összetapadnak és közös sebességgel haladnak tovább.

Megoldás

A mérőprogram sebesség - idő grafikonjáról készített fotót az ábra mutatja. A kocsik sebesség – idő grafikonja az ütközés átmeneti szakaszát leszámítva vízszintes egyenes szakaszokból áll. Ez azt jelenti, hogy az ütközés előtt mozgó sárga kocsi és az ütközés után együtt mozgó két kiskocsi is pozitív irányú egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A sebességértékek a mérőprogram képernyődiagramján a kurzor segítségével olvasható le. (A kurzorral az ábrázolt mérési pontok valamelyikére kattintva a pillanathoz tartozó idő és a pillanatnyi sebesség olvasható le a pont felett megjelenő táblácskán. A méréshez olyan pontot érdemes kiválasztani, ami a pontsorra átlagosan jól illeszkedő képzeletbeli egyenesre esik. Az ábrán a pontokra utólag illesztett egyenes sávját is berajzoltuk.)



Eredményeink szerint a sárga jelzésű kiskocsi ütközés előtti sebessége

$$v_{s1} \approx 68,6 \text{ cm/s.}$$

Az ütközés után együtt haladó két kocsi közös sebessége

$$v_{s2} = v_{p2} = v_2 \approx 20,8 \text{ cm/s.}$$

Az ütközés során a kocsikra csak “belső” erők, a mágnesek közt ható vonzóerők hatnak, ezért a kiskocsik ütközésére érvényes a zárt pontrendszerekre vonatkozó lendület-megmaradási tétel. Eszerint a rendszert alkotó testek lendületösszege az ütközés előtt és után megegyezik:

$$m_s \cdot v_{s1} = (M + m_s) \cdot v_2,$$

ahol M a piros kocsi saját tömegének ($m_p = 0,5 \text{ kg}$) és a kocsira helyezett kődarab ismeretlen nagyságú tömegének ($m_{kő}$) összegét jelöli ($M = m_p + m_{kő}$).

A sebesség-grafikonról leolvasott adatokat és a kiskocsik ismert tömegét felhasználva a fenti egyenlet megoldásaként adódik M értéke:

$$M = \frac{m_s \cdot v_{s1}}{v_2} - m_s \approx \frac{0,5 \cdot 68,6}{20,8} - 0,5 \approx 1,15 \text{ kg}$$

A kő tömegének keresett értékét ($m_{kő}$) megkapjuk, ha M értékéből levonjuk a piros kiskocsi ismert nagyságú ($m_p = 0,5 \text{ kg}$) tömegét:

$$m_{kő} = M - m_p \approx 1,15 - 0,5 \approx 0,65 \text{ kg.}$$