Katolikus Pedagógiai Intézet

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

TEHETSÉGGONDOZÁS A FIZIKÁBAN:

Segédanyagok középiskolai tanárok számára

KÖZÉPISKOLAI FIZIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE

ÖSSZEÁLLÍTOTTA: TASNÁDI PÉTER

Időpont:	**2019. október 18. péntek, 10^{00} – 14^{45} óra**
Helyszín:	**PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar**
	1083 Budapest, Práter u. 50/a

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

TEHETSÉGGONDOZÁS A FIZIKÁBAN:

Segédanyagok középiskolai tanárok számára

KÖZÉPISKOLAI FIZIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE, 2019

TARTALOMJEGYZÉK:

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

KVANTUMFIZIKA

MIT ÉS HOGYAN TANÍTSUNK?

Bevezetés

A kvantumfizika jellegzetesen a XX. század terméke. A század elejére a klasszikus fizika szinte teljes világképet alkotott. Néhány apró kivételtől eltekintve a Newton törvények, a Maxwell egyenletek és a termodinamika főtételei minden jelenség magyarázatára alkalmasak voltak. A két apró felhőcske a fizika tiszta égboltján a feketetest sugárzás, és a fotoeffektus volt. Amikor Planck a sugárzás energiáját kvantálta és levezette a róla elnevezett sugárzási törvényt, majd a fény kvantumos tulajdonságára alapozva Einstein értelmezte a fotoeffektust, akkor a klasszikus fizikában megszokott, hétköznapi fogalmainkhoz is viszonylag jól illeszkedő világkép két évtized alatt szinte a feje tetejére állt.

Ebben a munkában ezekkel az előzményekkel nem foglalkozunk, mert a jelen továbbképzés első előadása összefoglalta (Juhász, 2019). Itt a kvantummechanika[1] legfontosabb problémájára fókuszálva, az anyag kettős természetére vonatkozó kísérleti és elméleti problémákat taglaljuk a középiskolai tanítás szempontjait szem előtt tartva.

Miután felidéztük a kvantumfizika megalkotóinak kételyeit röviden szólunk a tanítás lehetséges útjairól, majd a kvantumfizika kulcspontjait, a de Broglie hullámokat és az anyaghullámokkal végzett kétréses interferencia kísérleteket ismertetjük. Érintjük a hullámfüggvény kérdését, és a szuperpozició elvet. Végül a történeti útra alapozott tanítási utat javasolunk[2], ami alapul szolgálhat az atom és molekula szerkezet leírásához. Ez utóbbi témakört azonban nem részletezzük. Kitűnő feldolgozása pl. (Marx, 1978)

1. A kvantumfizika elvi problémái

A kvantumfizika alapjainak tárgyalása során a középiskolai tanításban többnyire a klasszikus fizikai képet, vele gyakran össze nem illő önkényes feltevésekkel kiegészítve, a történeti utat követve, toldozzuk-foltozzuk. A következő lépésben azonban, ha fogalmi leírást akarunk

[1] A kvantummechanika és kvantumfizika szavakat szinonimaként használjuk, jelezve, hogy a kezdetben kvantummechanikának nevezett elmélet napjainkra teljesen átfogó törvényrendszerré vált

[2] Az itt javasolthoz hasonló, de erősebben matematizált tanítási út található (Juhász és Tasnádi, 1986)-ban

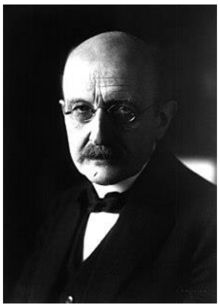
adni, akkor nem kerülhetjük el az anyaghullámok bevezetését és tulajdonságainak leírását. Mielőtt ebbe belefognánk, vázoljuk a fogalmi és didaktikai nehézségeket, amelyekkel a téma tárgyalásakor, tanárként szembesülünk.

Az első és még nem a fogalmi problémákat érintő probléma, hogy a kvantumfizika szinte a fizika minden más területének ismeretanyagára támaszkodik. Emiatt, és a téma különleges absztrakciós igénye miatt, a fizikaanyag lezárásaként, biztos klasszikus fizikai ismeretek birtokában kell és lehet belekezdenünk. Feldolgozásához alapvetőek a fényinterferenciára vonatkozó ismertek.

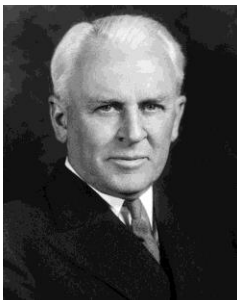
A következő probléma oka talán az, hogy a mikrorészekkel kapcsolatban nem rendelkezünk érzékszervi tapasztalatokkal, illetve tulajdonságaikat a makroszkopikus testekre vonatkozó ismereteink alapján akarjuk megérteni és a fizika más területein kialakult fogalmakkal szeretnénk leírni.

Kételyek

Az atomi részecskék leírásának problematikusságát mutatja, hogy a kvantumfizika kidolgozásában úttörő szerepet játszó kutatók gyakran maguk is visszarettentek következtetéseik végig vitelétől és teljes elfogadásától. Érdemes erre néhány példát felvillantani a kvantummechanika hőskorából.

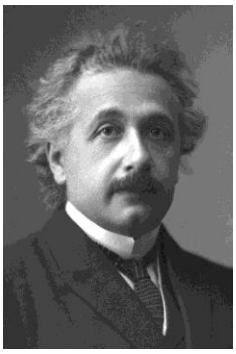


Planck (1858-1947) https://hu.wikipedia.org/wiki/Max_Planck) a feketetest sugárzás leírására általa bevezetett energia kvantum fogalmat, csak technikai segédletként értelmezte, ami számára nem változtatott azon, hogy a fény valójában hullám. Einstein volt az aki a fotoeffektus értelmezésekor fizikai valóságnak tekintette a fénykvantumokat.



Ezt Millikan (https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Andrews_Millikan) (1868-1953) a kor egyik legjobb kísérleti fizikusa nem akarta elfogadni és tíz évig végzett méréseket, hogy Einstein feltevését megcáfolja. Egyik, 1949-es cikkében azt írta; „I spent ten years of my life testing that 1905 equation of Einstein's and contrary to all my expectations, I was compelled to assert its unambiguous verification in spite of its unreasonableness" azaz:

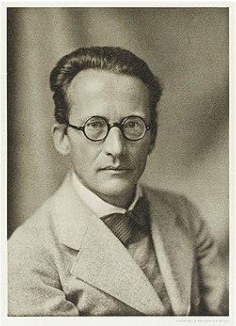
Életem 10 évét töltöttem azzal, hogy Einstein 1905-ös egyenletét ellenőrizzem, és minden várakozásom ellenére be kellett vallanom, hogy az egyenlet teljes ésszerűtlensége ellenére egyértelműen teljesül.



A fény és anyag kettős természetének elfogadtatásában jelentős szerepet játszó Einstein (https://hu.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein) (1879-1955) maga sem volt mentes a kételyektől. Bár hitt a sugárzás kvantáltságában, a hullámfüggvény valószínűségi értelmezését már ő sem fogadta el. Max Bornnak írt 1926-os leveléből származik a sokat idézett, a kvantummechanikával kapcsolatos kételyeit kifejező részlet: „Quantum mechanics is certainly imposing. But an inner voice tells me that it is not yet the real thing. The theory says a lot, but does not really bring us any closer to the secret of the 'old one'. I, at any rate, am convinced that He does not throw dice." (A kvantummechanika lenyűgöző. Az elmélet sokatmondó, mégis egy belső hang azt súgja, hogy egyáltalán nem visz közelebb bennünket az „öreg" (Isten) titkaihoz. Mindenesetre meggyőződésem, hogy Ő nem vet kockát.) Tömörebben gyakran csak annyi az idézet, hogy "Isten nem játszik kockajátékot". Einstein olyannyira kételkedett a kvantummechanika valószínűségi értelmezésében, hogy két munkatársával (Podolski és Rosen) megkonstruálta a híressé váló EPR (akkor még csak) gondolatkísérletet, amellyel bizonyítani kívánta, hogy a kvantummechanika nem teljes elmélet, és valószínűségi értelmezése teljesen abszurd. Ezt arra alapozta, hogy a kvantummechanika törvényeiből olyan nem lokális tulajdonságok következnek, amelyek két részecske kapcsolatát akkor is pillanatszerűen létrehozhatják, ha a részecskék nagyon távol vannak egymástól. Anélkül, hogy a pontos részletekbe belemennénk, ez annyit jelent, hogy például két egyszerre és korreláltan kibocsátott foton bármilyen messze is távolodik egymástól, ha egyiken mérést végzünk, akkor a másik foton hullámfüggvénye is összeomlik és például a spinje meghatározottá válik. Einstein annak ellenére nem hitt ebben, hogy a kvantumfizika törvényei szerint ez az esemény várhatóan bekövetkezik. A lehetőséget a fizikától idegen és teljesen abszurd „kísérteties" távolhatásnak tartotta[3]. Az EPR paradoxonban felvetett kérdést, ugyan jóval a kérdés felvetése után, 1982-ben, Aspect

[3] Az EPR paradoxonnal egyenértékű, de egyszerűbb gondolatkísérletet fogalmazott meg Bohm (Bohm, 1957). Ezt a fotonpár spinjére vonatkozó megfogalmazást diszkutálta Bell, és adott a paradoxon kísérleti eldöntésére vonatkozó javaslatot (Bell, 1964). A kísérlet közérthető leírása megtalálható Benedict Mihály jegyzetének elektronikus kiadásában (Benedict).

kísérletileg a kvantummechanikából levezethető eredmény javára döntötte el. Bármennyire is hihetetlen, de a nemlokális tulajdonságok beigazolódtak.



A kételkedők sorából nem maradt ki Schrödinger (1887-1961) sem, (https://hu.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schr%C3%B6dinger) aki a hullám-egyenlet felírásával olyan matematikai eszközt adott a fizikusok és mérnökök kezébe, amelynek segítségével a technikai alkalmazásokhoz szükséges számítások elvégezhetővé váltak anélkül, hogy a felhasznált fogalmak tartalmát, interpretációját vizsgálni kellene. Így a konceptuális kérdéseket felvető ellentmondásra vezető gondolatokkal a fizikusok nagy része nem is foglalkozott. Ezt a felfogást fogalmazza meg a híres, Feynmannak tulajdonított talán kissé nyeglének tűnő szlogen: „shut up and calculate" (Tartsd a szád és számolj.). Maga Schrödinger azonban komoly ellenérzésekkel viseltetett a klasszikus fizikát felborító kvantumfizikai leírással szemben, a kvantumugrások például kifejezetten taszították: „Wenn wir zur dieser Herumspringerei zurückkehren müssen, dann bedauere ich, dass ich mich in die Sache eingemischt habe" Egy másik megfogalmazása ugyanennek: Schrödinger is to have said that if he had to put up with the verdammte Quantenspringerei, than he was sorry that he ever got himself in quantum theory. (Utóbbi állítólag Schrödinger és a betegágya szélén ülő Bohr közötti beszélgetésből származik. (Helge Kragh: Quantumspringerei, Schrödinger versus Bohr)). Így azután Schrödinger is, gyakorlatilag Einsteinnel egyidejűleg, konstruált egy máig is vitatott gondolatkísérletet a kvantumfizika ellentmondásosságának megmutatására. A példát többnyire „Schrödinger macskája" néven hivatkozzuk. A paradoxont Schrödinger eredetileg viccnek szánta, de azóta, az összefonódott állapotok kérdéskörében komoly kérdéssé vált. Elemzése nem célunk, leírása és értelmezése sok helyen megtalálható pl. (Gribbin, 2001), itt csak a kvantummechanika alkotóiban felmerülő kételyek illusztrációjaként említjük[4].

---

[4] A paradoxon lényege az, hogy egy élő macskát dobozba zárunk, és vele együtt zárt üvegben mérgesgázt valamint olyan radioaktív preparátumot is elhelyezünk, amelynek valamelyik atomja 50%-os valószínűséggel bomlik el pl. két hét alatt. Az egyetlen bomlás hatására a mérgesgázt tartalmazó üveg eltörik, a gáz kiszabadul és megöli a macskát. Kérdés, hogy két hét elteltével a doboz felnyitása nélkül megállapíthatjuk-e a macskáról, hogy még él, vagy már elpusztult. A kvantummechanika szemlélete szerint a macska 50-50 százalékban az élő és holt állapotokból adódódó kevert állapotban van és a csak a doboz kinyitásával, a méréssel lökjük valamelyik sajátállapotba.

A példákat még sorolhatnánk a kvantumfizika területén mélyen gondolkodó fizikusok interpretációs kétségeiről. Nyilvánvaló, hogy az ellentmondások és a fogalmi, értelmezésbeli problémák az oktatásra is átvetülnek és a fizika tanításában is óvatosan kell kezelnünk az értelmezés kérdését. A https://www.youtube.com/watch?v=Ec4t-a1XHEI kitűnő összefoglalót ad a problematikus kérdésekről.

2. Miért tanítsuk és mit tanítsunk?

Felmerülhet a kérdés, hogy ha a kvantumfizika ilyen sok félreérthető és nehezen emészthető fogalomra épül, ugyanakkor matematikai modellje sem egyszerű, akkor miért nem hagyjuk ki a középiskolai tantervekből, hiszen fogalmi nehézsége miatt a tévképzetek melegágyává válhat, és gyengítheti a természettudományokba vetett hitet is. A kvantumfizikára épülő, gyakorlati életben használt eszközök sokasága azonban mégis elkerülhetetlenné teszi a középfokú képzésben is a fontosabb törvények megismertetését. A kvantummechanika egyre nagyobb teret nyer a fizikai kutatásban, a nanotudományok, a laser fizika, az orvosi képalkotás, a félvezetők fizikája mind-mind kvantummechanikai jelenségen alapul. Mindezen túl a kvantummechanikán alapul néhány teljesen új és ígéretes technológia is például a kvantumszámítógép, a kvantum titkosítás stb. A kvantumfizika mára az egyetemi tanterveknek is szerves részévé vált, mind a mérnöki, mind a természettudományos területen. A gyakran absztrakt és túlmatematizált tárgyalásmód azonban jó néhány éve vita tárgyát képezi.

A kvantummechanika tárgyalására több lehetőség is adódik. A leginkább kézenfekvő talán a történeti út, ami a témakör története mentén a fogalmakat kialakulását követve dolgozza fel az anyagot. A történet követése módot ad a viták és a kételyek ismertetésére és a tananyag színesítésére az alapítókkal kapcsolatos anekdoták, érdekességek elmesélésével. Ennek persze könnyen lehet a következménye, hogy a tananyagból kimaradnak, a fontos és nehezen megérthető részek, a mese üressé, természettudományos szinten értéktelenné válhat. Ezt mindenképpen el kell kerülnünk. Egy másik lehetőség, hogy a technikai alkalmazások mentén a lézerek, tranzisztorok, stb. vezessük be a szükséges fogalmakat. Ez az út a szerteágazó alkalmazások miatt minden bizonnyal a tanár érdeklődésének szolgáltatja ki a tantervet és a fogalmak elméleti jelentése könnyen elsikkadhat benne. Természetesen választhatjuk a matematikai modellekre épített feldolgozást is, ez azonban középiskolák számára nyilvánvalóan nem követhető.

A kvantummechanika alapvetően változtatta meg a világról alkotott képünket és a természeti jelenségek megértését. A tanításban a legnehezebb a megszokott szemlélettől eltávolodó fogalmak megértetése. Sajnos nem követhető a Feynman által javasolt út, azaz a fogalmak mély definíciójának taglalása helyett annak megmutatása, hogy a Schrödinger egyenletre épülő számítások mindig helyes eredményre vezetnek. Schrödinger hullámegyenlete másodrendű parciális differenciálegyenlet, egzakt megoldással csak igen egyszerű esetekben bír, így a matematikai nehézségek ezt az utat lezárják a középiskolai tanításban. (Newton második törvénye is másodrendű differenciálegyenletre vezet, mégis régóta része a középiskolai tananyagnak. Ott azzal váltjuk ki a matematikai ismereteket, hogy néhány egyszerű esetben pl. állandó erő, harmonikus erő esetén kísérletekre támaszkodva közöljük a megoldást, és a továbbiakban olyan feladatokra szorítkozunk, amelyek tárgyalásához ezek az ismeretek elegendőek. Mint látni fogjuk hasonló érvelés néhány esetben a Schrödinger egyenlet megoldásakor is elegendő, azonban mivel a Schrödinger egyenlet parciális differenciálegyenlet, s a megoldandó feladatok is kevésbé kézzelfoghatóak, mint a mechanikában, ez az eljárás csak a feladatok szűk körében alkalmazható.)

Kénytelenek vagyunk megmaradni a fogalmi leírásnál, ami elkerülhetetlenné teszi a szóbeli hasonlatok és metaforák használatát. Ebben komoly segítséget nyújthat a számos kvantummechanikát népszerűsítő könyv. (Gribbin, 2001, 2004, Károlyházi, 1976) Az anyag kettős természete, a valószínűségi törvények, a határozatlansági elv, a szuperpozíció azonban egyáltalán nem nyilvánvaló fogalmak, nem szemléletesek és ellentmondanak a klasszikus szemléletből következő ismereteknek. Megértésük gyökeres változást igényel gondolkozásunkban, és a tanításban a fogalmi változtatás megvalósításához szükséges útkeresésre ösztönöz.

Segítségünkre lehet, hogy a vizualizációs technika fejlődése olyan eszközt ad kezünkbe, ami a nehéz matematikai leírás helyett szimulációkkal szemlélteti a hullámfüggvény tulajdonságait és a kvantummechanika rendszerek viselkedését. Jelenleg a tanítás ebbe az irányba, a fogalmi megértetés és a vizualizációs módszerek alkalmazása felé, tolódik. A kevés matematikát használó, fogalmi megközelítés lehetővé teszi, hogy a kvantummechanikát középiskolában, illetve egyetemi bevezető kurzusokban tanítsuk. Sok országban már több éve a felső középiskolai tantervek részévé vált (Anglia, Német és Olaszország, USA). Jelenleg Hollandiában és Franciaországban vált a tantervek részévé, és Norvégiában is tesztelnek kísérleti kvantummechanika modulokat. Hazánkban a kvantummechanika oktatásának nagy hagyományai vannak, azonban az 1980-as évektől bevezetett tankönyvek tudományos alapossága és matematika precizitása jócskán túlterhelte a középiskola korosztály befogadó képességét.

Jónéhány próbálkozás történt arra, hogy a tanulókat a kvantummechanika jobb megértéséhez segítsük és megoldjuk a kvantummechanika tanításában felmerülő problémákat, beleértve a kvantummechanikában felmerülő tévképzetek vizsgálatát. (Krijtenburg-Lewerissa, 2017)

3. A középiskolai tanítás javasolt útja

Nyilvánvaló, hogy a középiskolában a fenti lehetőségek keverékéből érdemes kialakítani az adott tanulócsoporthoz illeszkedő tanítási módszert. A következőkben a módszertani javaslatok területén olyan utat követünk, ami véleményünk szerint a leginkább elfogadott álláspontot tükrözi, azaz a Bohr-Born féle valószínűségi értelmezést tárgyalását tekintjük a tanítás alapjának. Ez az értelmezés szorosan épül a fény kettős természetének felismerésére.

A mikrorészecskék kvantumfizikai leírása akkor hozott gyökeres változtatást a klasszikus fizikai szemlélettel szemben, amikor a fény kettős természete után a hullám-részecske kettősséget tetszőleges anyagi részecskékre kiterjesztették. A tanításban, mint már említettük, számos utat választhatunk, előnyösnek tartjuk azonban a történeti út követését és a mikrorészek szemléletünktől idegen viselkedését alátámasztó kísérletek (vázlatos) ismertetését. A kvantummechanikát megalapozó kísérletek többnyire bonyolultak, ezért egyszerűsített és a fénytanból ismert változataikkal való analóg tárgyalást javasoljuk.

A fizikaoktatás tartalmának keresésére irányuló kutatások szerint a kvantummechanikából középiskolai szinten, vagy az egyetemek bevezető kollégiumaiban mindenképpen érdemes feldolgozni az anyag kettős természetére vonatkozó kísérleteket és a hullámfüggvény valószínűségi jelentését bevezetését, továbbá a határozatlansági relációt és az alagúteffektust (Ez utóbbi a technikai alkalmazások sokasága miatt szükséges).

4. Az anyaghullámok

4.1 De Broglie hipotézise

A fény tulajdonságainak hullám-részecske kettőssége 1924-ben arra indította *Louis de Broglie (1892-1987)* francia fizikust (https://hu.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie), hogy feltételezze, ez a kettősség az anyagi világ általános sajátsága. Annak mintájára, hogy a hullám tulajdonságú fényhez részecske (foton) rendelhető, de Broglie a *részecskéknek* (elektron, proton stb.) *hullámot feleltetett meg*. A hullám jellemzőinek (λ, ν) meghatározásához a fotonra vonatkozó összefüggéseket fogadta el

Eszerint az E energiájú, m tömegű, v sebességű, részecskéhez

$$\nu = \frac{E}{h},$$

frekvenciájú és

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

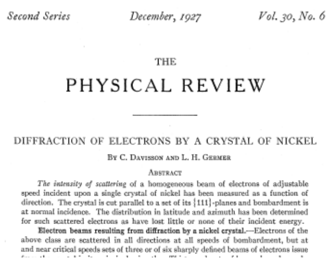
hullámhosszúságú síkhullám rendelhető.

De Broglie hipotézise jól illeszkedett az atomról alkotott kezdeti elképzeléshez, a Bohr-modellhez. Ha ugyanis elfogadjuk, hogy az elektronhoz a fenti egyenletek szerint hullám rendelhető, akkor a Bohr-féle elektronpályák önkényesnek tűnő kiválasztására magyarázat adódik. Az atommag körül az elektron olyan pályákon kering stabilan (sugárzás nélkül), amelyekre teljesül, hogy a pálya hossza éppen az elektron λ hullámhosszának egész számú többszöröse.

Megjegyzés: De Broglie doktori disszertációjában tisztán elméleti megfontolások alapján vetette fel a részecske hullám kettősség tetszőleges anyagi részecskére történő általánosítását. A gondolat annyira új volt, hogy Langevin a doktori bizottság elnöke elküldte a dolgozat kéziratát Einsteinnek, hogy véleményt kérjen. Szerencsére Einstein rendkívüli és előre vivő elméletként értékelte, így a dolgozat védése zöld utat kapott.

4.2 A mikrorészecskék hullámtermészetének kísérleti igazolása

A részecske hullám dualizmus kísérleti bizonyítékait a fizikusok azonnal elkezdték keresni. Érthető, hogy De Broglie részecske - hullám hipotézisét a legkönnyebben hozzáférhető részecskére az elektronra vonatkozóan sikerült először kísérletileg igazolni. *Davisson* és *Germer* 1927-ben kristályra bocsátott elektronnyaláb elhajlásával igazolta az elektron hullámtulajdonságát, és megmutatta a hullámhossz és a részecske impulzusa között de Broglie által feltételezett kapcsolat fennállását. Davisson és Germer eredeti kísérletének egyik módosított változatát mutatja sematikusan az alábbi ábra.


Second Series *December, 1927* *Vol. 30, No. 6*

THE

PHYSICAL REVIEW

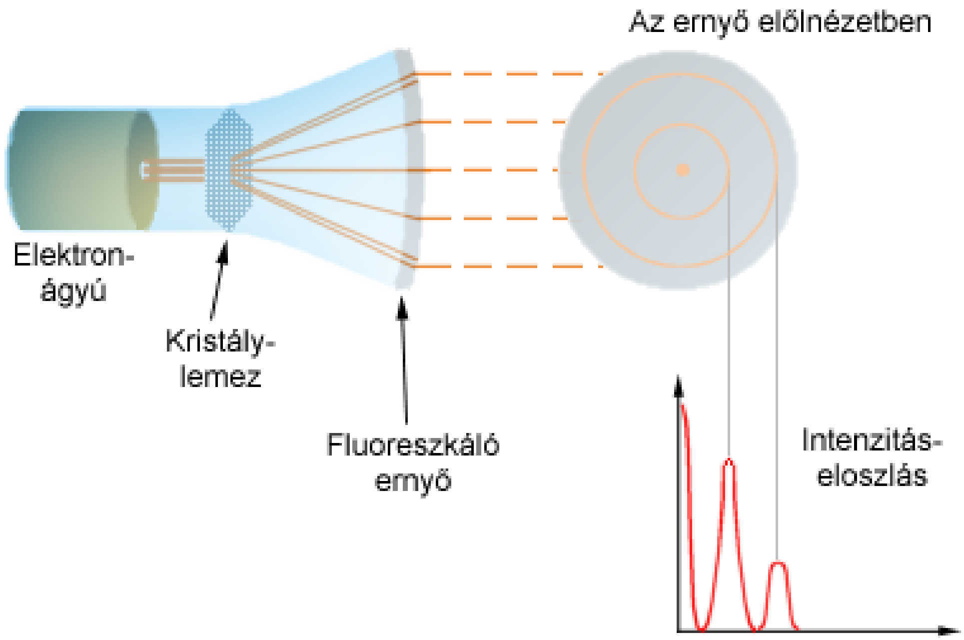
DIFFRACTION OF ELECTRONS BY A CRYSTAL OF NICKEL

By C. Davisson and L. H. Germer

Abstract

The intensity of scattering of a homogeneous beam of electrons of adjustable speed incident upon a single crystal of nickel has been measured as a function of direction. The crystal is cut parallel to a set of its {111}-planes and bombardment is at normal incidence. The distribution in latitude and azimuth has been determined for such scattered electrons as have lost little or none of their incident energy.

Electron beams resulting from diffraction by a nickel crystal.—Electrons of the above class are scattered in all directions at all speeds of bombardment, but at and near critical speeds sets of three or of six sharply defined beams of electrons issue

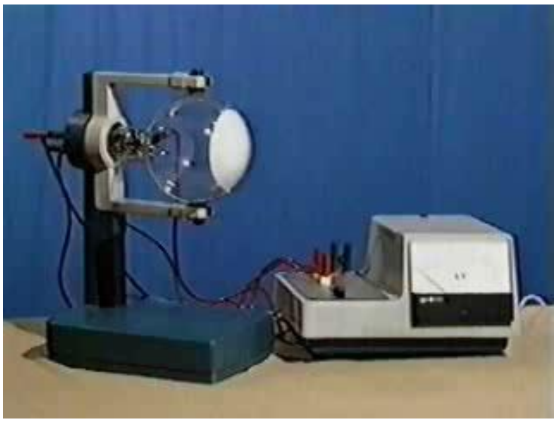


1. ábra A Davisson Germer kísérlet

Katódsugárcsőben a felgyorsított elektronok útjába vékony grafitkristályt vagy fémfóliát helyezünk el. A szabályosan rendeződött atomokon az elektronnyaláb elhajlik és a fluoreszkáló ernyőn koncentrikus gyűrűkből álló interferenciaképet hoz létre. Az interferenciakép alapján az elektronhullám hullámhosszúsága meghatározható.

Megjegyzések:

1. A kísérlet bemutatására jelenleg már kaphatóak tanszergyári eszközök. Amennyiben a fénytanban elegendő részletességgel tárgyaltuk a fényelhajlás tulajdonságait, és foglalkoztunk a röntgensugárzás kristályokon történő elhajlásával, akkor az ott tárgyaltak alapján könnyen meghatározhatjuk az elektronhullám hullámhosszát is. Az elektronhullám hullámhosszának meghatározása a fény hullámhosszának optikai rácson történő elhajlásából történő méréséhez hasonlóan az interferenciamaximumok távolságának mérésével végezhető el. A kristály és az ernyő távolságának ismeretében, az optikából ismert,



$$\lambda = a \sin \alpha \approx a \frac{d}{l}$$

összefüggéssel határozható meg. A λ hullámhossz és az elektronok impulzusa (sebessége) közti kapcsolatot szemléletesen bizonyítja, hogy a diffrakciós maximumok távolsága változik, ha a katódsugárcső gyorsító feszültségét változtatjuk. Mérésekkel a $\lambda = \frac{h}{mv}$ összefüggés igazolható.

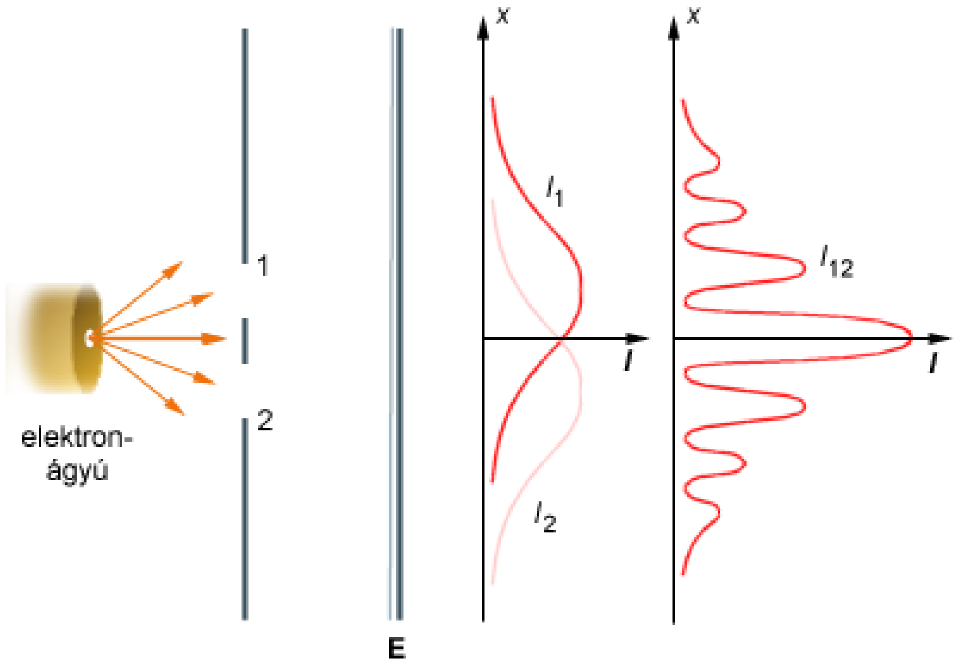
2. A részecske hullám dualitás igazolása az elektronra vonatkozóan természetesen nem bizonyítja, hogy minden anyagi részecske hullámként is viselkedik. (Elképzelhető, hogy ez csupán az elektron sajátossága.) A kísérleti fizikusok szívós munkával igazolták, hogy az elektronok mellett sokféle más atomi és atomcsoportokból álló részecske (neutronok, atomok, kis molekula csoportok, a bakiballnak nevezett C_{60}, molekulák, 400-nál több atomból álló szerves molekulák) is mutatnak hullámtulajdonságokat és eleget tesznek a De Broglie összefüggésnek. A bakiball molekulákkal (és a nagy szerves molekulákkal végzett kísérletek azért is jelentősek, mert ekkora atomcsoportok lényegében már klasszikus testnek tekinthetők, így átmenetet jelentenek a mikro- és makro-világ között. Ezek a kísérletek már elegendő bizonyítékul szolgálnak arra, hogy higgyünk abban, hogy a részecske hullám dualizmus minden test elválaszthatatlan tulajdonsága.

3. Az anyaghullámokkal végzett interferenciakísérletek technikailag rendkívül bonyolultak, pontos megértésük sok ismeretet kíván. A középiskolai tanításban el kell fogadnunk (illetve tanítványainkkal el kell fogadtatnunk), hogy a kísérleteknek csak elvi vázát, valamint az eredmények lényegét ismertetjük. A kísérletek és kísérleti eredmények ismertetése azonban nem hagyható el. A mikrorészecskék fizikáját éppen eléggé terheli a közvetlen érzékszervi tapasztalatszerzés hiánya, nem távolíthatjuk tovább a témakört a diákoktól azzal, hogy elvesszük a hangsúlyt a kísérleti tapasztalatszerzésről is. A kvantumfizika törvényeit következetesen mindig a kísérleti tapasztalatokra kell építeni. Ebben a kontextusban alapvető fontosságú a tanár személyiségének hitelessége. Amennyiben a korábbi tanulmányok során tanítványainkat meggyőztük a kísérletek szerepéről és saját szakmai tudásunkról, akkor jó esélyünk van arra, hogy a kvantufizika alapozó kísérleteinek egyszerűsített változatai alapján meggyőző tapasztalati alappal szolgáljunk a kvantumfizika meglepő tulajdonságainak elfogadtatásához.

4.2.1 A kétréses interferenciakísérlet

Az elektronok hullámtulajdonságát Davisson és Germer kristályrácson előállított interferenciaképpel bizonyította. A kísérleti tapasztalatoknak a fényhullámokra vonatkozóakkal való összekapcsolására egyszerűbb kísérletek inkább alkalmasak. A legegyszerűbb interferenciakísérlet, a kétréses interferencia, amelynek elvi vázlatát a 2. ábra mutatja. A kísérlet csak elvileg egyszerű, gyakorlati kivitelezése igen nehéz. A mérést csak 1961-ben sikerült O. Jönsson-nak elvégeznie, Zeitschrift Für Physics-ben megjelent cikkének angol fordítását az Am. J. Phys. (AJP) 1973-ban jözölte. (Jönsson, 1973). A kétréses elektroninterferencia kísérlet didaktikai értéke rendkívül nagy, ezért a kísérleti fizikusok komoly erőfeszítéseket tettek és tesznek arra, hogy viszonylag egyszerű eszközökkel is megvalósítható legyen. A legnagyobb problémát kezdetben a megfeklelő rések elkészítése jelentette, az elektronmikroszkópia fejlődése azonban lehetővé tette, hogy nano méretű réseket készítsenek és 2007-ben Frabboni és munkacsoportja már közönséges elektronmikroszkópban is sikerrel valósította meg a kísérletet. (Frabboni, 2007).

A kísérletet a fénytanban általában részletesen elemezzük. Itt lényegében pontosan ugyanazt ismételjük az elektronra vonatkozóan, amit a fény esetén már elmondtunk. A részletes elemzés bár sok tekintetben ismétlő jellegű mégis igen fontos, mert a részecskék merőben szokatlan viselkedését emeli ki. Az elektronágyúból kilépő elektronok útjába helyezett falon két kis nyílás van. A két résen áthaladó elektronnyaláb az *E* ernyőn interferenciaképet hoz létre. Az ábrán feltüntettük, hogy hogyan változik az ernyőn a sugárzási intenzitás (*I*), ha csak az egyik, ill. ha csak a másik rés van nyitva, valamint azt, hogy milyen az intenzitáseloszlás (*I*), ha mindkét rés nyitott. Ha a két rés közül csak az egyik van nyitva, akkor az ernyőn folytonos intenzitáseloszlást (I_1, ill. I_2 észlelünk, amelynek maximuma pontosan a nyitott réssel szemben van. Ha mindkét rés nyitott, az ernyőn jellegzetes intenzitáseloszlás - interferenciakép jelenik meg. Érdekes, hogy a legerősebb intenzitásmaximum éppen a kísérleti elrendezés tengelyébe esik, noha vele szemben nincs nyitott rés.



2 ábra Kétréses elektroninterferencia sematikus képe

Kísérletsorozatot végezve a berendezéssel a következőket szűrhetjük le:

- Ha az elektronnyaláb intenzitása elegendően kicsi, akkor a detektor mindig hasonló, impulzusszerű hangjelzést ad.

- Az ernyő adott pontján elhelyezett érzékelő teljesen véletlenszerűen jelez. Hosszabb, azonos időtartamokban ismételve a mérést, a kattanások száma az átlagos érték körül ingadozik. A detektor helyétől függően az átlagos beütésszám változik. Az átlagos beütésszámot ábrázolva a hely függvényében, a fotolemezen rögzített intenzitáseloszláshoz hasonló görbét kapunk. Két nyitott rés esetén az eloszlási görbe jellegzetes interferenciakép.

- Ha a gyenge sugárzást egyetlen érzékelő helyett egyszerre többel detektáljuk, további fontos megfigyelést tehetünk. Az ernyő különböző pontjaiban elhelyezett detektorok közül véletlenszerűen hol egyik, hol másik szólal meg, de *két detektor egyszerre soha nem jelez*.

A kísérleti tapasztalatok az elektron sajátos, klasszikus szemléletünk számára szokatlan tulajdonságaira mutatnak rá:

- Az elektronok *osztatlan egészként*, apró golyóként, csapódnak be az ernyő egy-egy pontjába.
- Nem tudjuk megmondani, hogy az ernyő mely pontjára melyik elektron érkezik, sőt még azt sem, hogy mikor csapódik be egy-egy elektron a kiválasztott pontba.
- Az elektronok becsapódása *véletlenszerű*.

Az osztatlan egészként becsapódó elektronok tapasztalatával a klasszikus szemlélet szerint ellentmondásban áll az ernyőn felfogható interferenciakép. *Az interferencia térben kiterjedt hullámokra utal.*

Különösen érdekes az a tény, hogy az interferenciakép akkor is kirajzolódik, ha az elektronnyaláb intenzitása olyan kicsi, hogy biztosak lehetünk benne, hogy egyszerre csak egyetlen elektron tartózkodik a berendezésben. Ilyenkor nem lehet tehát szó több elektronhullám interferenciájáról - az elektron látszólag önmagával interferál, majd becsapódik az ernyő valamelyik pontjára. A hulláminterferenciának megfelelő intenzitáseloszlás sok-sok elektron becsapódásának eredménye. Az intenzitás-maximumok, ill. -minimumok helyét az elektronok de Broglie-hullámhosszát felhasználva a hulláminterferencia klasszikus szabályai szerint lehet meghatározni.

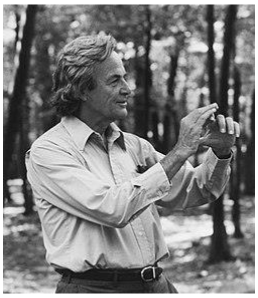
Összefoglalva: Az elektroninterferencia kísérleti tényére építve a mozgó elektronhoz (általában minden részecskéhez) hullámvonulat rendelhető. A hullámcsoportot a $\Psi(x,t)$ hullámfüggvény jellemzi, amelynek közelítő hullámhosszát a de Broglie-összefüggés adja meg.

Megjegyzések:

1. A kétréses interferencia szemléltetésére kitűnő szimulációs programok állnak rendelkezésre https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/quantum-wave-interference Ezeknek bemutatása nagyban segít a kísérleti berendezések elvi felépítésének és az eredményeknek a pontos megértésében. A szimulációval "játszó" diákokban az interferenciakísérletből adódó eredmények vizuálisan is rögzülnek. Megfelelő tanári irányítás mellett a tananyag fogalmi szintű elsajátítása is könnyebbé válik. A "megfelelő tanári irányítás" azonban csak akkor lehetséges, ha a tanár maga is befektette az időt a program használatának elsajátításába. Bár a programok kezelése nagyon egyszerű, a lehetőségek megismerése és a szimuláció tanórai beépítése csak saját tapasztalatok megszerzésével érhető el.

2. Az interferencia kísérlet rendkívüli jelentőségű. A tanulók felé erőteljesen hangsúlyozni kell a kísérletből adódó kérdéseket és hangsúlyosan kiemelni, hogy a válaszok nem nyilvánvalóak.

Az egyetlen részecskével végzett kétréses interferenciakísérlet a következő kérdéseket veti fel! Hogyan lehetséges, hogy a mind a kibocsátáskor, mind az észleléskor pontosan lokalizált részecske, amely sokkal kisebb, mint a rések szélessége, információt szerez arról, hogy a nagy távolságban lévő rések közül csak az egyik, vagy mindkettő nyitva van-e? Miért nem tudjuk követni a részecskék pályáját, anélkül, hogy a hozzá rendelt hullámfüggvény lerombolódna? Hogyan érthetjük meg az interferencia kép keletkezését, ha a részecskék egymással biztosan nem lépnek kölcsönhatásba és egyenként véletlenszerűen csapódnak be az ernyőre?
A kérdésekre adott válasz a kvantumos viselkedés lényegét, a részecske hullám kettősség elfogadását igényli. El kell fogadnunk és a tanulókkal el kell fogadtatnunk, hogy a kibocsátáskor és észleléskor részecskeként viselkedő objektumok a forrás és a becsapódás közötti terjedés során, amikor nem követjük nyomon (nem figyeljük meg) őket, hullámként viselkednek, nemlokálissá válnak. A klasszikus (makroszkopikus) részecskék a forrás és az ernyő között is meghatározott pályán haladnának, a kvantumos viselkedésű mikrorészek pályája azonban nem követhető. A mikrorészekről elvileg sem szerezhető ilyen információ. A részecske hullám kettősség egyben a véletlenszerűség és determinisztikus viselkedés kettősségére is vezet. Az ernyőn kialakuló kép egyértelműen mutatja a részecskesokaság előre jósolható eloszlását, de semmit sem mond az egyes részecskék előre jósolhatatlan becsapódási helyéről.



A probléma lényegére a kétréses interferenciakísérlet Feynman (1918-1988) (https://hu.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman) által javasolt változata mutat rá. Feynman gondolatkísérletet javasolt annak megfigyelésére (Feynman, 1985), hogy eldöntsük, melyik résen mentek át az egyes elektronok. Bár gondolatkísérlet Feynman által adott részletes tárgyalása mind didaktikai, mind a kérdéskör fogalmi megértése szempontjából rendkívül tanulságos, itt csak a kísérlet legfontosabb eredményeit ismertetjük. A gondolatkísérletet eredményeként megállapítható, hogy amennyiben minden elektront kísérletileg megfigyelünk, és kiderítjük, hogy melyik résen ment át, akkor a rések mögötti ernyőn nem interferenciakép rajzolódik ki. Az ernyőn kapott kép ebben az esetben megegyezik azzal, amit akkor kapnák, ha hol csak az egyik, hol csak a másik rés lenne nyitva. Amennyiben a megfigyelés nem terjed ki minden elektronra, akkor azok az elektronok, amelyekről nem észleltük, hogy melyik résen mentek át az interferenciaképet rajzolják ki. Azaz, ilyenkor hosszabb idő alatt a külön külön nyitott rések mögötti és az interferenciakép együttese észlelhető. Az eredményt Feynman azzal magyarázza, hogy a mikrorészeken, nem végezhetünk úgy mérést, hogy ne befolyásolnánk állapotukat, s ez már elegendő ahhoz, hogy a hullámszerű kép megváltozzék.

A gondolatkísérlet eredménye jól érzékeltethető a következőképpen. Az elektron, amíg nem figyeljük meg, kiterjedt felhőként viselkedik. Amennyiben a felhőbe "bedugjuk egyik ujjunkat", és ujjunk "vizes lesz" akkor az egész felhő összeugrik az adott pontba. Ha azonban két ujjunkat dugjuk egyszerre a felhőbe, akkor legfeljebb az egyik lehet vizes[5]. Az észleléskor az elektron osztatlan egészként viselkedik. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az elektron kiterjedt hullámfüggvényét az észleléssel leomboltuk.

Végül megjegyezzük, hogy Feynman gondolatkísérletét Tavabi és munkacsoportja elektronmikroszkópban végzett méréssel megvalósította 2017-ben (Tavabi, 2019)

4.3 A hullámfüggvény valószínűségi értelmezése

Az egyedi elektronok véletlenszerű becsapódása nyomán a de Broglie-féle hullámok fizikai értelmezését *Max Born* (1882-1970) adta meg. (https://hu.wikipedia.org/wiki/Max_Born)

[5] A metaforát Károlyházi Frigyes használta személyes beszélgetés során.

Eszerint az elektronok $\Psi(x,t)$ hullámfüggvénye az ernyő különböző pontjaiban a becsapódás valószínűségét határozza meg. Mivel azonban a hullámfüggvény negatív értékű is lehet, nem azonosítható közvetlenül a valószínűséggel. Az elektron becsapódási valószínűsége az ernyő adott helyén a kiszemelt helyen vett hullámfüggvény abszolút értékének négyzetével[6] arányos. Ez olvasható le a kétréses interferencia-kísérlet intenzitásgörbéiről is. Egyetlen rés esetén az ernyőn mérhető intenzitás a berendezés szimmetriatengelyében:

$$I_1 = I_2 \propto |\psi_{10}|^2 = |\psi_{20}|^2$$

Két nyitott rés esetén:

$$I_{12} \propto |\psi_{10} + \psi_{20}|^2 = 4|\psi_{10}|^2$$

$$I_{12} \propto 4I_1 = 4I_2 \ ,$$

azaz két rés esetén az intenzitás az ernyő közepén éppen négyszerese az egyetlen rés esetén kapott intenzitásnak.

Általánosan megfogalmazva: Az anyaghullámokat leíró $\Psi(x,t)$ hullámfüggvény (állapotfüggvény) ismeretében megmondható, hogy az adott részecske a térnek valamely kis ΔV tartományában milyen valószínűséggel mutatható ki. A részecske megtalálási valószínűsége a tetszőlegesen kiszemelt ΔV térfogatban arányos a hullámfüggvény adott r helyen vett abszolút értékének négyzetével:

$$P(r) = |\psi(r)|^2 \, \Delta V \, ,$$

ahol $P(r)$ a megtalálási valószínűséget jelenti az r-nél levő ΔV térfogatban, $|\psi(r)|^2$ pedig a hullámfüggvény r helyen vett abszolút értékének négyzetét jelöli.

---

[6] A ψ-függvény általában ún. komplex függvény, amely $\Psi = \alpha + i\beta$ alakban írható fel. Itt α és β a szokásos hullámfüggvények, és $i = \sqrt{-1}$. Mivel fizikai jelentése csak valós függvénynek lehet, ezért kellett a megtalálási valószínüségét a ψ-függvény abszolút értékének négyzetével kapcsolatba hozni. Definíció szerint: $|\psi|^2 = (\alpha + i\beta) \cdot (\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2$ .Látható, hogy amennyiben $\beta \equiv 0$, azaz az állapotfüggvény valós, akkor $|\psi|^2 = \psi^2$

Figyelembe véve, hogy az egész térben a vizsgált részecske biztosan megtalálható - azaz ennek a valószínűsége 1 -, adódik, hogy

$$\sum |\psi|^2 \Delta V = 1$$

ill.

$$\int_V |\psi|^2 \, dV = 1 .$$

A hullámfüggvény négyzete tehát a részecske térbeli megtalálási valószínűségsűrűségét jellemzi.

Megjegyzés:

Érdemes a de Broglie hullámhossz nagyságrendjét néhány jellegzetes mikrofizikai és hétköznapi életből vett példával illusztrálni. Határozzuk meg a katódsugárcsőben 100 V feszültséggel gyorsított elektron és proton hullámhosszát. Az *U* feszültséggel gyorsított, *Q* töltésű, *m* tömegű részecske hullámhossza a $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ összefüggésből számítható ki, ha felhasználjuk, hogy a munkatétel szerint a részecske impulzusa: $p = mv = m\sqrt{\frac{2QU}{m}} = \sqrt{2QUm}$.

Ebből az elektron és a proton tömegét, valamint töltését behelyettesítve az elektron hullámhosszára $3{,}9 \times 10^{-9}$ m a protonéra pedig 9×10^{-11} m adódik. Határozzuk meg egy makroszkopikus méretű test pl. az 1t tömegű 1o8 km/ó sebességű személygépkocsi hullámhosszúságát is. Azt kapjuk, hogy $\lambda_{gepk} = 2{,}2 \cdot 10^{-38} m$. Összehasonlításképpen emlékeztetünk arra, hogy a vörös fény hullámhossza 6-700 nm = $6\text{-}7 \times 10^{-7}$m. Megállapíthatjuk, hogy a gépkocsi esetén esély sincsen arra, hogy olyan méretű akadállyal találkozzék, amelyen elhajlást szenved.

A hullámtermészet a kvantumfizika alapfeltevése, azonban világos, hogy hétköznapi világunkban egyáltalán nem jelenik meg. A fenti példák mutatják, hogy ezért a Planck állandó kicsiny értéke felelős, hiszen a makroszkopikus testek de Broglie hullámhossza ezért vélik extrém módon kicsinnyé. Mindennek ellenére a a fizikusok egyre nagyobb és nagyobb méretű részecskékkel végeznek interferencia kísérleteket, hogy kimutassák azok hullámtulajdonságát, kutatva ezzel a mikro és makrovilág határvonalát.

4.4 Az anyaghullámok tulajdonságai

Louis de Broglie az mv impulzusú részecskéhez $\lambda = \frac{h}{mv}$ hullámhosszúságú végtelen síkhullámot rendelt ($\Psi = \Psi(x,t)$). Az impulzus és a hullámhossz kapcsolatát a kísérletek a mérési hibán belül igazolták. A síkhullámról a bevezetés szintjén a tanulóknak elegendő annyit mondanunk, hogy hullámfrontjai egymással párhuzamos síkok. Humán osztályokban a hullámfüggvény matematikai alakjának felírása nélkül érdemes bemutatni a térben terjedő síkhullámokról, illetve a síkban terjedő egyenes hullámokról készített szimulációt. Tudatában kell lennünk, hogy amikor a részecskékhez anyaghullámot rendelünk, nem mondjuk meg, hogy mi „hullámzik", azaz a hullám kitérése milyen fizikai mennyiség változását írja le." Ha a diákok nem kérdeznek rá közvetlenül, akkor erről célszerű hallgatni, míg a valószínűségi értelmezésig el nem jutunk.

Megjegyzés:

1. A hullámfüggvény tárgyalásának szintje a tanulók hullámtani ismereteinek mélységétől függ. A legegyszerűbb esetben mind rajzban, mind pedig az algebrailag felírt hullámfüggvény esetén egydimenziós esetre szorítkozunk. Az ábrák a térben és időben periodikus hullámfüggvényről készített pillanatfelvételt, vagy egyetlen pontban a hullám lefolyását mutatják. A vízszintes tengelyre az idő vagy helykoordináta, a függőlegesre pedig a hullámfüggvény kitérése kerül.

2. A tapasztalat szerint a síkhullámot a tanulók nehezen fogadják el az elektron képeként, nehezebben, mint a hullámcsomag elképzelést (a hullámcsomaggal a következő pontban foglalkozunk). Ennek oka valószínűleg az, hogy a tanulók számára a végtelen kiterjedésű síkhullám és az eddigiekben mindig pontszerűnek képzelt elektron semmiképpen sem egyeztethető össze. A diákok klasszikus fizikában gyökerező szemléletének van valóságtartalma. A mozgó részecske kiterjedésének mindenképpen végesnek kell lennie, hiszen az elektronok a katódból kilépve véges sebességgel, mérhető idő alatt érik el a fluoreszkáló ernyőt, továbbá, az ernyőn minden egyes elektron becsapódását egy-egy pontszerű felvillanás jelzi. Ez mindenképpen ellentmond a "végtelen kiterjedésű síkhullám" elképzelésnek.

3. Egyszerűen megmutatható, hogy a síkhullám elképzelés ellentmond a relativitáselméletnek is. Írjuk le a részecskét de Broglie szerint a $\lambda = h / mv$ hullámhosszú,

$$\psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

hullámfüggvénnyel. (Ezt a függvényt tekinthetjük a síkhullám terjedési irányában vett egyenes mentén vett képnek.) Kézenfekvőnek tűnik, hogy a hullám terjedési sebessége a részecske sebességével azonos.

A hullám terjedési sebessége:

$$v = \lambda \cdot \nu$$

amely az $E = h\nu$, valamint a $\lambda = h / mv$ összefüggések felhasználásával

$$v = \frac{h}{mv}\frac{E}{h} = \frac{E}{mv}$$

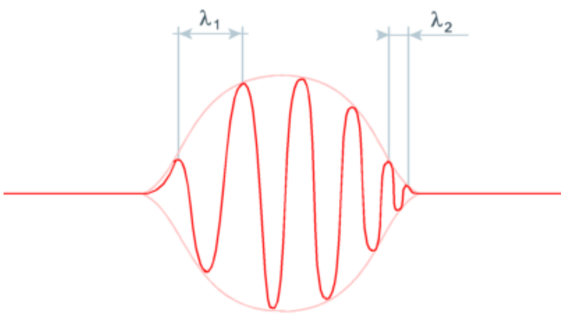
alakban fejezhető ki. A relativitáselmélet értelmében egy részecske teljes energiája:

$$E = mc^2,$$

ahol *m* a mozgó részecske relativisztikus tömege. Ezt visszahelyettesítve az előző kifejezésbe a hullám terjedési sebességére $v = c$ eredmény adódik. A részecske terjedési sebessége eszerint megegyezne a fénysebességgel, ami ellentmondásban van a relativitáselmélet alapfeltevésével.

4.5 A hullámcsomag

A síkhullámmal kapcsolatos problémák megszüntethetőek, és a Davisson-Germer kísérlet tapasztalatainak is eleget teszünk, ha a részecskéhez nem végtelen kiterjedésű síkhullámot, hanem az AH3. ábrán bemutatott *véges hullámvonulatot* - *hullámcsoportot* rendeljük hozzá. A továbbiakban ezt a hullámcsoportot jelöljük $\Psi(x,t)$-vel és *hullámcsomag*nak nevezzük.

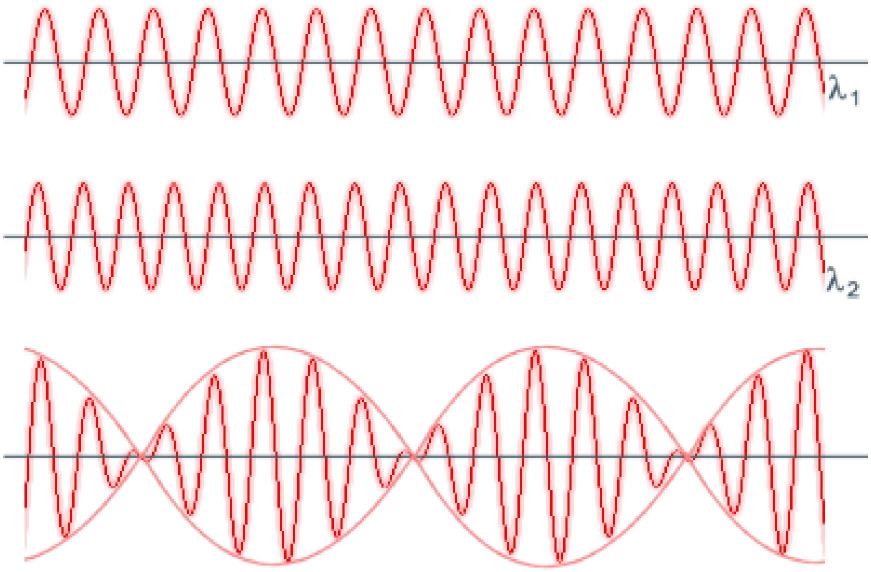


3. ábra Hullámcsomag

Hullámcsoport esetén a hullámfüggvény amplitúdója csak a tér kisebb-nagyobb tartományában különbözik zérustól (3. ábra). A hullámcsoporttal reprezentált részecske (elektron) nem végtelen kiterjedésű, hanem a térnek abban a tartományában található, ahol $\Psi(x,t) \neq 0$.

Megjegyzés:

1. A hullámcsomag bevezetésekor erőteljesen támaszkodni kell a szemléletre és a csillapított rezgéssel vett analógiákra, ahol a csökkenő amplitúdó ellenére felismerhető a mozgás periodicitása. A hullámcsomag azonban egyáltalán nem periodikus függvény, a hullámzás jellegű kitérés függvényben egy-egy periódus fedezhető fel. Ennek alapján képzelhetjük úgy, hogy a teljes csomaghoz hozzárendelhető valamilyen hullámhosszúság. Az ábra mutatja, hogy a csomag két széléhez különböző hullámhossz rendelhető.
2. A hullámcsomag kép rendbe szedhető, ha megmutatjuk, hogy az ábrán bemutatott hullámcsomagot több különböző hullámhosszúságú szinusz hullám szuperpozíciójaként lehet előállítani. A kicsit eltérő hullámhosszúságú hullámokból egyre többet összeadva különböző hullámcsomagok keletkeznek. A humán osztályok szintjén a hullámok összeadásának számítógépes bemutatásánál meg is állhatunk. Elegendő annyit mondani, hogy a csomag terjedési sebessége az amplitúdó maximumának terjedési sebességével azonos, ami általában nem egyezik az összetevő hullámok sebességével.
3. A legegyszerűbb eset két egymástól kicsit eltérő frekvenciájú hullámnak a szuperpozíciója, a 3. ábrán bemutatott ún. "*lebegési görbe*". A lebegés jellegzetes hullámképe egymást szabályosan követő hullámcsomagokból áll.
4. A Fourier tétel szerint általában tetszőleges, periodikus, vagy nem periodikus zavar előállítható periodikus függvények összegeként, (vagy hullámszám szerinti integráljaként.) A tétel kimondása nélkül érdemes ezt számítógépes szimulációkkal érzékeltetni. Nagyon jól használható például a https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/fourier program.



3. ábra Két, kissé eltérő frekvenciájú tiszta szinuszhullám szuperpoziciója

Több különböző hullámhosszúságú összetevő esetén a lebegési görbe csomagok közötti távolság egyre növekszik. Megmutatható, hogy amennyiben λ_1-től λ_2-ig minden lehetséges hullámhosszú síkhullám (λ folytonosan változik) részt vesz a hullámcsomag kialakításában, akkor a csomagok végtelen messzire távolodnak egymástól, azaz az eredő hullám a tér korlátozott tartományára kiterjedő egyetlen hullámcsoporttá válik. A hullámcsoport Δx kiterjedése annál nagyobb, minél kevésbé tér el egymástól λ_1 és λ_2 értéke, ill. annál kisebb, minél tágabb az összetevő síkhullámok hullámhossztartománya.

A λ_1 és λ_2 hullámhosszhatárok közé eső végtelen sok különböző hullámhosszúságú hullám eredőjeként adódó hullámcsoport nem szabályos szinusz hullám, nincs pontosan meghatározható hullámhossza. A hullámcsoportot csak közelítő λ értékekkel jellemezhetjük. A hullámcsoporthoz rendelt λ olyan szinuszos síkhullámnak a hullámhossza, amely viszonylag jól fedésbe hozható a csoport hullámvonulatával. Az interferenciakísérletekkel igazolt de Broglie-összefüggés a hullámcsoportra jellemző közelítő λ értéket határozza meg, ill. hozza kapcsolatba a részecske impulzusával. (A λ közelítő jellegéből adódó impulzusbizonytalansággal a következő szakaszban foglalkozunk.)

A *hullámfüggvény a részecske helyét* (a hullámcsomag szélességén keresztül), és a részecske *impulzusát* (a de Broglie-hullámhosszon keresztül), *röviden a részecske állapotát jellemzi.*

Megjegyzés:
A hullámcsoport bevezetésével feloldódik a de Broglie-hullámokkal jellemzett részecske terjedési sebességének és a relativitáselméletnek látszólagos ellentmondása. A térben lokalizált részecske sebessége ugyanis nem a hullám fázissebességével, hanem az egész hullámcsomag előrehaladási sebességével, az ún. *csoportsebességgel* azonos. A hullámvonulat fázissebességének nincs szemléletes fizikai tartalma.

A fentiek illusztrációjaként foglalkozzunk egy egyszerű esettel! Állítsuk elő az

$$y_1 = A sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{és} \quad y_2 = A sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

hullámok szuperpozíciójából adódó hullámot, és határozzuk meg a csoportsebességet, ha a két összetevő hullám fázissebessége azonos, tehát

$$v_f = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

A $\sin\alpha + \sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosság felhasználásával és a $k = 2\pi/\lambda$ hullámszám bevezetésével adódik, hogy

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{\Delta kx - \Delta\omega t}{2}\sin(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

ahol $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ a hullámszámok, ill. a körfrekvenciák közötti eltérés, és

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad , \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Amennyiben $\Delta\omega << \bar{\omega}$ és $\Delta k << \bar{k}$, az eredő hullám a 3. ábrán láthatóhoz hasonló. A gyorsan változó, kicsiny hullámhosszúságú hullám amplitúdóját egy lassú, nagy hullámhosszúságú függvény modulálja. A két hullám összege végtelen sok hullámcsomag egymásutánjaként fogható fel.

A hullámcsomag sebességét, az ún. csoportsebességet esetünkben az amplitúdómoduláció terjedése szabja meg;

$$v_{cs} = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

A $\Delta k \to 0$, ill. $\Delta\omega \to 0$ határesetben $v_{cs} = \frac{d\omega}{dk}$

Felhasználva az

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \text{és} \quad k = \frac{p}{\hbar}$$

valamint az

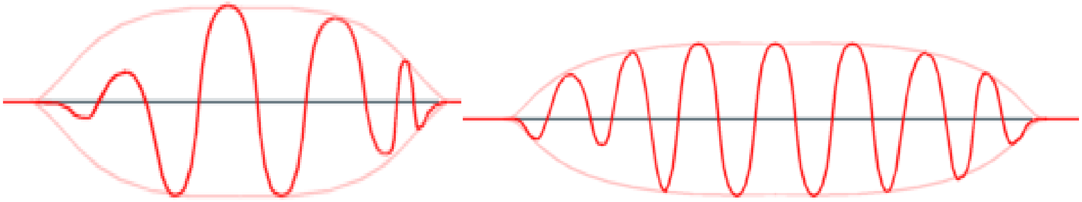
$$E = \sqrt{m_0^{\,2} c^4 + p^2 c^2}$$

összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$v_{cs} = \frac{dE}{dp} = v$$

4.5.1 A hullámcsomag szétfolyása

A tapasztalat szerint a hullámcsomag mozgása során nem őrzi meg alakját. Ha pillanatfelvételeket készítünk róla, akkor kiderül, hogy a csomag szétterül.



4. ábra Szétfolyó hullámcsomag

A 4. ábra az x tengely mentén v sebességgel mozgó részecskének megfelelő hullámvonulat terjedését szemlélteti. A $t = 0$ pillanatban a részecske az $x_1 \pm \frac{\Delta x_1}{2}$ helyen található (Δx_1 a hullámcsomag kiterjedését jelöli). A későbbi $t = T$ időpillanatban a részecske már elmozdult korábbi helyéről, a hullámcsoport az x tengely mentén eltolódva az $x_2 \pm \frac{\Delta x_2}{2}$ helyen található.

Az ábra érdekes jelenségre utal. A részecske mozgása során az őt jellemző hullámvonulat *térbeli kiterjedése megnő*. A jelenséget a hullámcsoportról már elmondottak segítségével szemléletesen értelmezhetjük. Megállapítottuk, hogy a hullámcsoportot csak közelítő λ hullámhosszal jellemezhetjük. Az ilyen közelítő hullámhossz megadása azonban nem teljesen egyértelmű, több olyan ideális síkhullám is található, amelyek hullámhossza kicsit különböző, a hullámcsoport amplitúdó ingadozását azonban mindegyik egyaránt jól közelíti. Tegyük fel, hogy az ábrán bemutatott hullámcsoport egyformán jól jellemezhető a λ_1 és λ_2 ($\lambda_1 \rangle \lambda_2$) hullámhosszakkal, ill. a de Broglie-összefüggés értelmében a $p_1 = mv_1$ és a $p_2 = mv_2$ impulzusokkal ($p_1 \langle p_2$). Így a mozgó részecske helye T idő elteltével egyaránt megadható az

$$x_2 = x_1 + v_1 T\ ,$$

ill. az

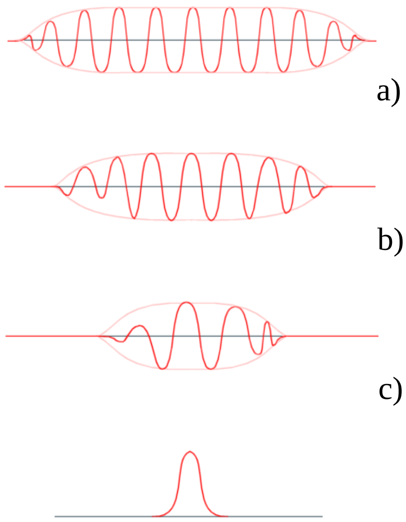
$$x_2' = x_1 + v_2 T$$

kifejezéssel. Ez csak akkor lehetséges, ha a hullámcsomag kezdeti Δx_1 kiterjedése T idő alatt $\Delta x_2 = \Delta x_1 + (v_2 - v_1)T$ értékűre növekedett. Az 4. ábra azt is jól érzékelteti, hogy a hullámcsoport kiszélesedése nem a hullámhosszak növekedésének, hanem új maximum- és minimumhelyek megjelenésének következménye. A kiszélesedett hullámvonulatnak a terjedés irányába eső tartománya inkább a kisebb (λ_2) a hátsó része inkább a nagyobb (λ_1) hullámhosszal jellemezhető. A fenti példa általános törvény speciális esete. A hullámcsomagok részletesebb matematikai vizsgálata mutatja, hogy *a magára hagyott* (erőmentesen mozgó) *hullámcsomag mindig szétterül. A szétfolyás annál gyorsabb, minél keskenyebb volt az eredeti szélesség.*

5. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy a szabadon mozgó részecskékhez (pl. elektronhoz) hullámcsoport rendelhető. Már ebből következik, hogy a mozgó részecske pontos helyéről nem beszélhetünk. A "részecske helye" kifejezésen a hullámcsoport Δx kiterjedésének megfelelő tartományt kell értenünk, ennél pontosabb helymeghatározás lehetetlen. A következőkben a hullámcsomag sajátságaiból kiindulva a kvantummechanika egyik legfontosabb alapösszefüggésével, a *Heisenberg féle határozatlansági relációval* foglalkozunk. A relációt Hisenberg német (1901-1976) fizikus mondta ki. (https://hu.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg)A mozgó részecskéhez rendelt hullámcsomagot térbeli kiterjedése, Δx, valamint átlagos hullámhossza (ill. annak egyértelműsége vagy éppen nagy bizonytalansága) jellemzi.

Az 5. ábrán néhány egyszerű, elképzelt hullámvonulatot mutatunk be. Az első rajzon (a.) szélesen kiterjedt hullámvonulat látható, középső része szinte egyetlen tökéletes szinuszhullám. Az ilyen hullámcsoporttal jellemzett részecske helyéről csak igen keveset mondhatunk - a részecske a térnek abban a széles tartományában található, amelyre a hullámvonulat kiterjed. A részecske impulzusát azonban igen pontosan megmondhatjuk, hiszen a hullámcsoport λ -ja jól meghatározható. A b.) hullámcsoport kiterjedése kisebb, de egyúttal a középső szabályos tartomány mérete is csökkent, a torzult periodicitású szélső tartományok relatív aránya megnőtt. Az így jellemzett részecske helyét jóval pontosabban ismerjük, mint az előző esetben, a jellemző hullámhossz, ill. az ehhez kapcsolódó impulzus megadása azonban sokkal bizonytalanabb, mint a korábbi hullámvonulatnál. A c) és különösen a d) ábrán a hullámcsomag már nagyon élesen egy helyre korlátozódik, olyannyira, hogy a hullám periodicitása is nehezen ismerhető fel. Az ilyen hullámcsomag csak nagyon széles hullámhossztartományba eső harmonikus hullámok összetételével állítható elő. Az ilyen hullámcsomaggal jellemzett részecske helyét jó pontossággal ismerjük, impulzusa felől azonban csak nagy bizonytalansággal nyilatkozhatunk.



5. ábra Különböző szélességű hullámcsomagok

A fenti ábrákra támaszkodó szemléletes gondolatmenetből arra következtethetünk, hogy *a részecskék helye és impulzusa nem határozható meg egyszerre tetszőleges pontossággal.* Az ábrasor alapján egyszerű becslést adhatunk a hely és impulzus együttes pontosságára. A részecske helyének bizonytalanságát a hullámcsomag kiterjedésével, azaz a

$$\Delta x \approx n\lambda = \frac{nh}{p}$$

mennyiséggel becsülhetjük meg. Az impulzus pontossága a hullámhossz pontosságán múlik, s az utóbbi nyilván annál pontosabb, minél több hullámvonulatból áll a hullámcsomag. Így a hullámhossz $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ relatív bizonytalansága $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{1}{n}$. Mivel $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p}$, így

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{1}{n}$$

A hely és az impulzus bizonytalanságára adott becslésből a hely és impulzus bizonytalanságának szorzatát kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h \, .$$

A speciális alakú hullámfüggvényekre intuitív úton kapott összefüggés tetszőleges jelalak esetén az alábbi, csekély mértékben módosított formában áll fenn:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ezt a Heisenberg által 1927-ben kimutatott összefüggést *határozatlansági relációnak* nevezzük. Hasonló összefüggés teljesül természetesen mindhárom hely- és impulzuskomponensre, azaz

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

A határozatlansági reláció - mint látni fogjuk - jól használható bizonyos fizikai mennyiségek nagyságrendi becslésére. Ezekben a becslésekben a határozatlansági relációt többnyire

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$$

alakban használjuk.

A makroszkopikus szemléletünk számára rendkívül szokatlan határozatlansági reláció annak a következménye, hogy a mikrofizikai mérésekben a mérőeszköz mindig befolyásolja a mérés eredményét. A makroszkopikus mennyiségek mérésekor természetes, hogy tetszőleges pontosságú mérés esetén található olyan módszer, amellyel a mérőeszköz hatása kiküszöbölhető az eredményből. A mikrofizikai mérésekre ez nem teljesül!

Megjegyzések:
1. A határozatlansági reláció nem a mérési pontatlanság, hanem a mikrorészecskék hullámfüggvénnyel való leírásának következménye. Vegyük észre, hogy a hullámfüggvény egyszerre ad információt a mikroobjektum helyéről és impulzusáról, és a kettő közötti összefüggésről, így nemhogy pontatlanabb a klasszikus leírásnál, hanem inkább sokrétűbb, gazdagabb nála.
2. A határozatlansági összefüggés igazolására sok gondolatkísérletben követték végig a mérőeszköz és a mért mennyiség közötti kölcsönhatást. A legismertebb példa az ilyen gondolatkísérletek közül, a "Heisenberg féle mikroszkópkisérlet" (Juhász és Tasnádi, 1986)
3. Végül megjegyezzük, hogy az impulzus- és helykoordinátára vonatkozó határozatlansági relációhoz hasonló összefüggés áll fenn pl. a részecskék megfelelő *szög- és impulzusmomentum koordinátáinak bizonytalansága* között is, azaz

$$\Delta\alpha \cdot \Delta N_\alpha \geq \frac{\hbar}{2}$$

ahol α az adott tengely körül vett elfordulás mértéke, N_α pedig az erre a tengelyre vonatkozó perdület (impulzus momentum). Általában a rendszer tetszőleges q koordinátájának és a hozzá tartozó p impulzusnak a bizonytalanságára teljesül, hogy

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ugyancsak érvényes a

$$\Delta E \cdot \tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

összefüggés is, ahol ΔE az energia bizonytalansága, τ pedig az adott folyamat időbizonytalanságát jelöli. Ez utóbbi határozatlansági összefüggésből azonnal következtethetünk például arra, hogy ha az elektron gerjesztett állapotának energiája ΔE szélességű, akkor az alapállapotba történő visszatérés - azaz a megfelelő energiájú foton kisugárzása - τ időtartam erejéig bizonytalan. A gerjesztett állapot élettartama így

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E}$$

nagyságúra becsülhető.

Irodalom:

Bell, J.S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox, Physics. **1** (3): 195–200. doi:10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195

Benedict Mihály: http://titan.physx.u-szeged.hu/%7Emmquantum/kvantum_1resz.pdf

Bohm, D., Aharonov, Y.: (1957), Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky, Phys. Rev., 108, (1070–1076)

Feynman, R. P., Leighton, R. B.,and Sands, (1985) M.: Mai Fizika 3. Műszaki Kiadó, Budapest, p. 150

Frabboni, S., Gazzadi, G. C. and G. Pozzi (2007): Young's double-slit interference experiment with electrons, AJP 75, 1053; doi: 10.1119/1.2757621

Gribbin, John (2001): Schrödinger macskája Budapest, Akkord Kiadó

Gribbin, John (2004): Schrödinger kiscicái és a valóság keresése Budapest, Akkord Kiadó

Jönsson, Claus (1973): Electron Diffraction at Multiple slits, AJP 42.

Juhász András és Tasnádi Péter. (1986):. Atomfizika és Kvantummechanika, (1986) In: Fizika, szerk. Holics L., Műszaki Kiadó, Budapest p. 990

Juhász András (2019): A modern fizika középiskolai tanításának feladatai és nehézségei, Középiskolai Fizikatanárok Szaktárgyi Továbbképzése, PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

Károlyházi Frigyes (1976): Igaz varázslat, Gondolat zsebkönyvek, Gondolat, Budapest

Marx György (1978): Életrevaló atomok, Akadémiai Kiadó, Budapest

Krijtenburg-Lewerissa, Pol, K. H. J., Brinkman, A. and van Joolingen, W. R. (2017): Insights into teaching quantum mechanics in secondary and lower undergraduate education, Phys. Rew. Phys. Educ. Res. 19. (010109-1-010109) DOI: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.010109

Nairz, Olaf, Arndt, Markus and Zeilinger, Anton (2003): Quantum interference experiments with large molecules, AJP, 71, 319 doi: 10.1119/1.1531580

Tavabi, Amir H., Boothroyd, Chris B., Yücelen, Emrah, Frabboni, Stefano, Gazzadi, Gian Carlo, Dunin-Borkowski, Rafal E. and Pozzi, Giulio: (2019) The Young-Feynman controlled double-slit electron interference experiment, www.nature.com/scientificreports