



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem

Információs Technológiai és Bionikai Kar



*Katolikus
Pedagógiai
Intézet*

Középiskolai fizikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2022. november 9.

MÉRNÖKI INTUÍCIÓ FEJLESZTÉSE: ELEKTROMÁGNESES FELADATOK ZÁRT ALAKÚ ÉS NUMERIKUS MEGOLDÁSA

2022. 11. 09.



prof. Szabó Zsolt
az MTA doktora

Az előadás tartalma

1. Mérnöki intuíció.
2. A PPKE-ITK Elektromágneses terek előadásának áttekintése.
3. Módszertan.
4. Példa: Az elektromos tér Gauss törvénye. Kapacitás számítás.
TEM típusú hullámvezetők.

Mérnöki intuíció

Intuíció (*intuitus*: betekintés) → ösztönös megérzés, lényeglátás, ráérzés

- az a képesség, hogy valamit logikus érvelés nélkül azonnal megértsünk

Valamilyen mérnöki (fizikus) probléma logikus levezetés nélküli, ösztönös felismerés útján történő megoldása.

- tanulható készség
- segíti az innovációt

Általános a tudományban, például

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

eltolási áram (displacement current) → J. C. Maxwell, intuitív módon mechanikai modell alapján, Treatise on Electricity and Magnetism (1873)

- a fény elektromágneses hullám, rádióhullámok, elektromágneses spektrum

P-ITFIZ-0014: Elektromágneses terek

Kredit:4

Heti óraszám: Elmélet: 2 Gyakorlat: 2

Tárgyleírás:

A klasszikus elektrodinamika mérnöki szemléletű bemutatása. Főbb témák:

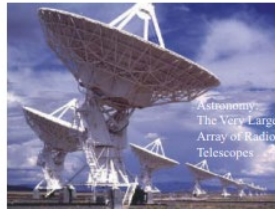
- Az elektromágneses tér forrásai. A Maxwell egyenletek integrálos és differenciális alakja.
- Elektrosztatika. A Gauss törvény alkalmazása nagy szimmetriájú elrendezések megoldására. Elektromos tér által végzett munka, a skalárpotenciál fogalma. Elektromos dipólusok, és a polarizáció. Elektromos erő és forgatónyomaték. Vezetők és szigetelők elektromos tulajdonságai. Kapacitás számolások.
- Magnetosztatika. Egyenáramok és a Biot-Savart törvény. Az Ampere törvény alkalmazása nagy szimmetriájú elrendezések megoldására. A vektorpotenciál fogalma. Mágneses terek számítása. A mágneses dipólus és a mágnesezettség. Mágneses erő és forgatónyomaték. Mágneses anyagok. Mágneses áramkörök számítása.
- Időben lassan változó elektromágneses jelenségek. Ohm törvénye. A mágneses indukció és Faraday törvénye. Induktivitás számítások. A skin hatás. Elektromos áramkörök.
- Nagyfrekvenciás elektromágneses jelenségek. Az elektromágneses hullámok fogalma. Elektromágneses energia, impulzus és információterjedés. Síkhullámok transzmissziója és reflexiója. Elektromágneses rezonátorok. Hullámvezetők és távvezetékek. Nagyfrekvenciás ekvivalens áramkörök. Elektromágneses hullámok keltése, egyszerű antennák.
- Elektromágneses terek numerikus szimulációja

Követelmények: Az aláírás megszerzésének feltétele az, hogy a kiadott hat házi feladatból legalább hármat elégséges (2) osztályzattal el kell készíteni. Vizsgaidőszakban: kollokvium.

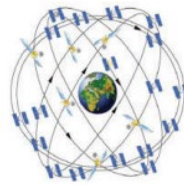
Módszertan

- hallgatói motiváció: miért kell ezt tudnom?
- alapfogalmak részletes ismertetése
- egyszerűtől a bonyolultig
- többféle megközelítés: ugyanazon feladat zárt alakú megoldásának többféle módon történő logikus levezetése és számítógépes szimulációja
- házi feladat, ami megoldható az előadások/gyakorlatok alapján

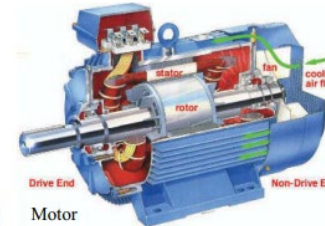
Hallgatói motiváció:



Astronomy:
The Very Large
Array of Radio
Telescopes

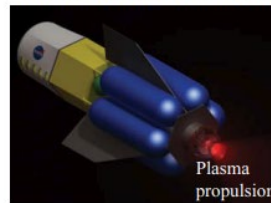


Global Positioning System (GPS)

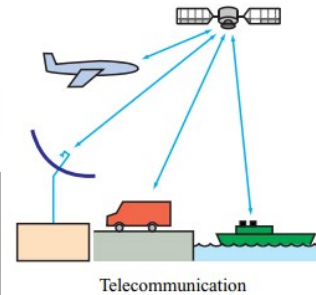


Motor

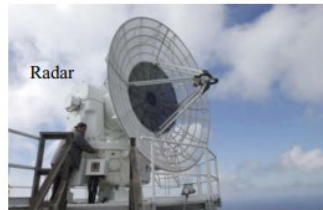
LCD
Screen



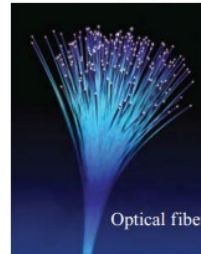
Plasma
propulsion



Telecommunication



Radar

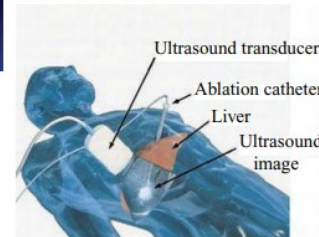


Optical fiber



Electromagnetic sensors

Cell
phone



Microwave ablation for
liver cancer treatment

Az elektromos töltésre vonatkozó Gauss törvény

a skálár szorzat megadja az $\mathbf{E}$ párhuzamos komponensét az $\hat{\mathbf{n}}$ vektorral (merőleges lesz a felületre)

a felület normál vektora (merőleges a felületre és egységnyi hosszú)

a zárt felület belsejébe levő összes töltés

a vákuum elektromos permittivitása

zárt felületen integrálunk

azt jelöli, hogy ez egy felületi integrál

az elektromos térerősség (N/C)

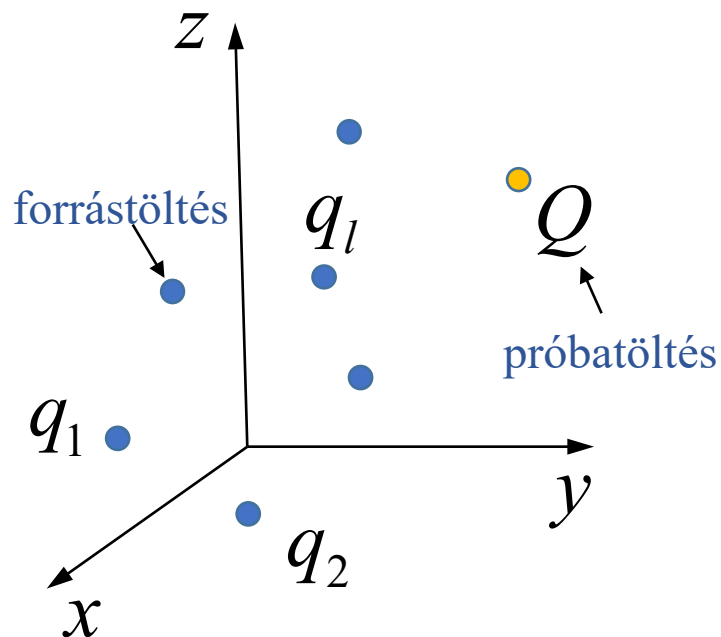
a felületelem (m^2)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

- az egyenlet bal oldala egy zárt felület elektromos fluxusa, az egyenlet jobb oldala a zárt felület belsejében levő összes töltés osztva az ϵ_0 állandóval

Az elektromos töltések elektromos teret hoznak létre. Ennek az elektromos térnek tetszőleges zárt felületre vonatkozó fluxusa arányos a zárt felület belsejében levő töltésmennyiséggel.

Az elektromos tér definíciója



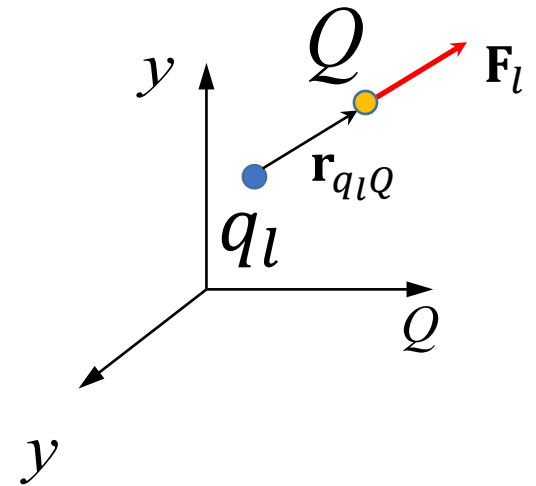
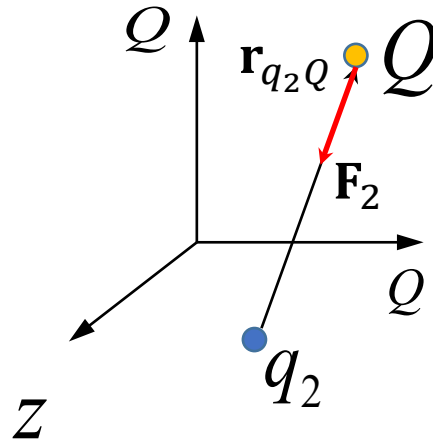
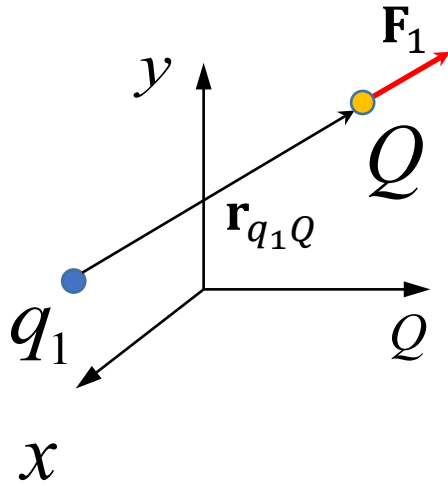
- Adott a $q_1, q_2, \dots, q_l, \dots$ elektromos töltés, amelyeket forrástöltésnek nevezünk.
Mindegyik forrástöltésnek ismert a helyzete és a mozgásállapota (sebessége, gyorsulása). A forrástöltések mozgásállapota tetszőleges.
- A geometriai tér egy pontjába helyezzünk el egy nyugalomban levő (nulla sebességű és gyorsulású) Q pozitív próbatöltést.
- A Q próbatöltésre ható erő legyen $\mathbf{F}$.

Az elektromos tér a nyugalomban levő egységnyi próbatöltésre ható erő.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad \text{mértékegysége:} \quad \frac{N}{C} = \frac{V}{m} \quad \begin{array}{l} \text{newton/coulomb} = \\ \text{volt/méter} \end{array}$$

Megjegyzés: ugyanazt az erőt kell kapnunk, ha a forrástöltések vannak nyugalomban és a próbatöltés elmozdulhat. Ha a forrástöltések nyugalomban vannak, akkor nem folynak áramok, tehát nincs mágneses tér ($\mathbf{B} = 0$).

- kísérleti tény, hogy az elektromos erőre érvényes a szuperpozíció elve



Az elektromos térre is érvényes a szuperpozíció elve.

$$\mathbf{F} = \sum_{l=1}^n \mathbf{F}_l = Q \sum_{l=1}^n \mathbf{E}_l = Q\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \sum_{l=1}^n \mathbf{E}_l$$

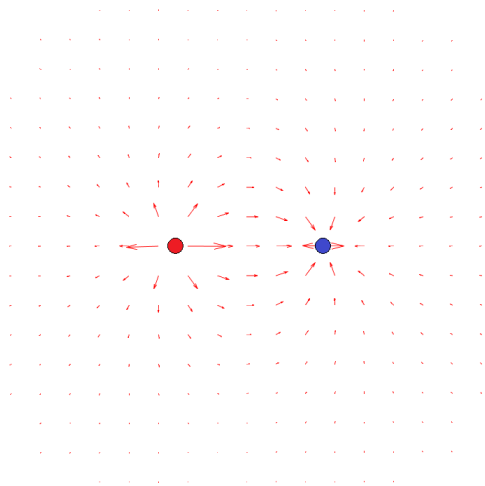
Ha több töltés hozza létre az elektromos teret, akkor a teljes elektromos tér az adott pontban jelenlevő összes elektromos tér vektori összege.

Az elektromos tér ábrázolása

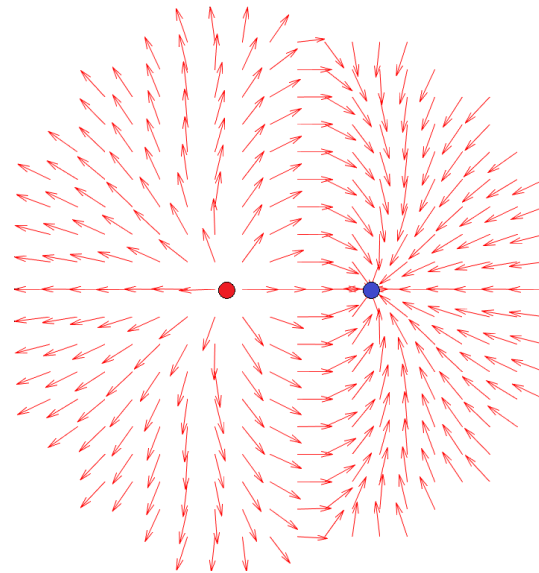
- Az elektromos tér vektormennyiség, aminek kétféle ábrázolási módja a leggyakoribb.

1. A geometriai tér bizonyos pontjaiban nyilakkal ábrázoljuk az elektromos teret. A nyíl hossza arányos az elektromos tér nagyságával, míg a nyíl iránya és irányítottsága megfelel az elektromos tér irányának és irányítottságának.

- például két egyforma nagyságú, de ellentétes előjelű töltés elektromos tere:



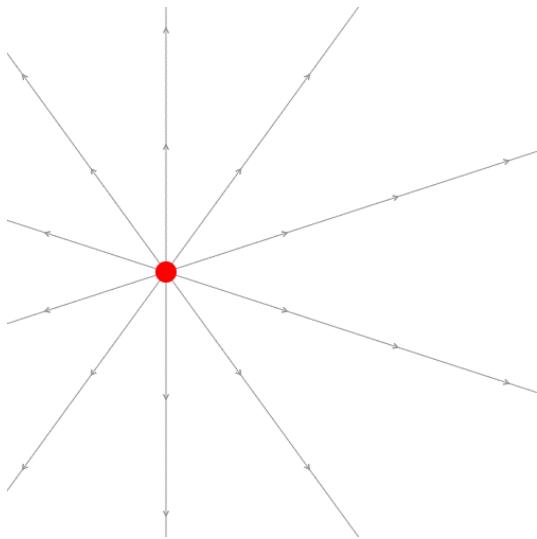
a nyílhossz arányos a E
nagyságával



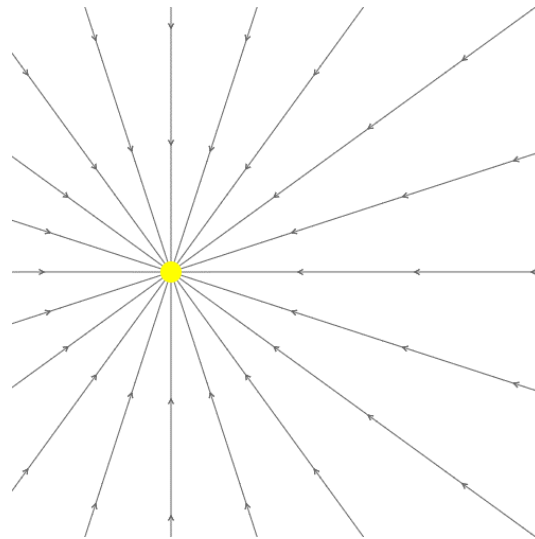
ugyanaz normalizált nyílhosszakkal

2. Erővonalakat használunk, amelyeknek a sűrűsége arányos az elektromos tér nagyságával.

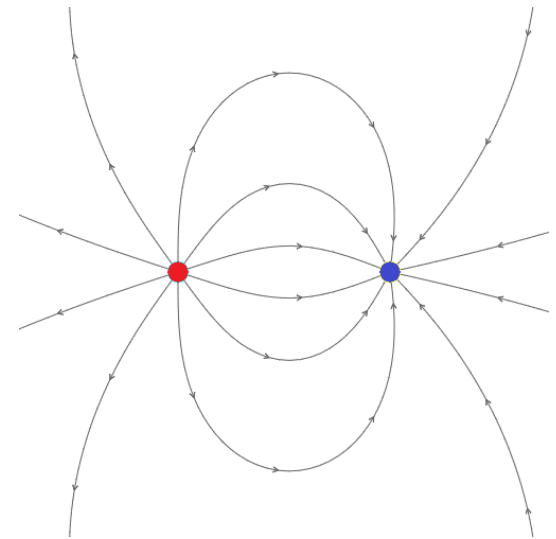
Az erővonal fogalma: elhelyezünk egy próbatöltést a geometriai tér egy pontjában, majd megnézzük, hogy milyen irányú elektromos erő hat rá. Elmozdítjuk egy kicsit a próbatöltést az erő irányába és újra megnézzük, hogy milyen irányú erő hat rá, majd újra elmozdítjuk a próbatöltést az erő irányába és így tovább. Folytonos vonallal összekötjük a pontokat. Az így kapott görbe egy erővonal. Az ábrát úgy szerkesztjük, hogy az erővonalak száma arányos legyen az elektromos tér nagyságával.



pozitív $+q$ töltés



negatív $-2q$ töltés



két egyforma nagyságú,
de ellentétes töltés

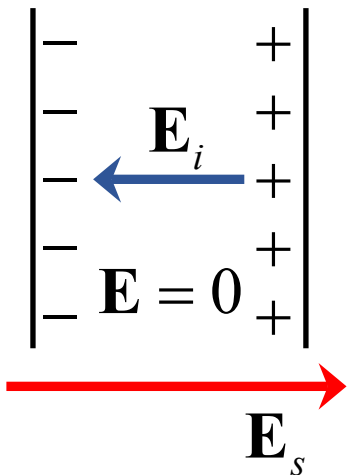
- Az elektromos erővonalak mindig a pozitív töltésből indulnak ki és a negatív töltéseken vagy a végtelenben végződnek.
- Az elektromos erővonalak soha nem metszik egymást. Ha metszenék, akkor az azt jelentené, hogy ugyanazon a helyen az elektromos tér két irányba is mutat, ami nem lehetséges.
- Az elektromos erővonal mindig a teljes elektromos térnek az irányába mutat.
- Az elektromos erővonalak száma mindig arányos az elektromos tér nagyságával. Például egy $+2q$ nagyságú elektromos töltésből kétszer annyi erővonal indul, mint egy $+q$ elektromos töltésből.
- Az elektromos erővonalak mindig merőlegesek a tökéletes vezetőkre (perfect electric conductor PEC - ilyen anyagok a fémek a mm-es hullámhosszakig) felületére.

Jó vezetők elektromos térben

- A tökéletes vezető (Perfect Electric Conductor – PEC) egy semleges töltésű ideális anyag, amiben korlátlan számú szabadelektron van és amelyek képesek egy külső elektromos tér hatására azonnal átrendeződni.
- A tökéletes vezetők jól modellezik a fémek elektromágneses viselkedését, nemcsak elektrosztatikus körülmények között, hanem még a mm hullámhosszú elektromágneses hullámok tartományában is.

A tökéletes vezetőknek tekintett anyagok elektromos tulajdonságai a következők:

1. Egy vezető anyag belsejében az elektromos tér nulla ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i = 0$).



- Ha a vezetőt külső elektromos térbe helyezzük, akkor a belsejében levő szabad elektronok elmozdulnak az elektromos tér irányával ellentétes irányba.
- Ha a hőmérséklet vagy az elektromos tér nagysága nem túl nagy, akkor az elektronok nem tudnak kilépni az anyagból.

2. Egy tökéletes vezető belsejében a töltéssűrűség nulla ($\rho = 0$).

- ez az elektromos térre vonatkozó Gauss törvény következménye

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \text{ha} \quad \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$$

Ez nem azt jelenti, hogy nincs töltés a vezető belsejében, hanem azt, hogy ugyanannyi pozitív töltés van, mint negatív.

3. Az összes indukált töltés a tökéletes vezető felületén található.

- ez nullától különböző felületi töltéssűrűséget eredményez

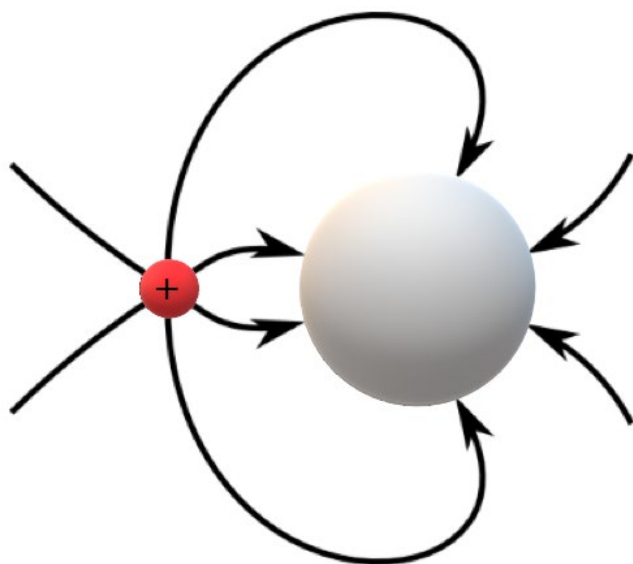
4. A tökéletes vezetők ekvipotenciális felületek.

- egy tökéletes vezető bármelyik a és b pontja esetén (a pontok lehetnek a vezető felületén is)

$$V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(b) = V(a)$$

5. A elektromos térerősség mindig merőleges a tökéletes vezetők felületére.

- ha nem így lenne, akkor az elektromos térerősség tangenciális komponensének a hatására a szabad töltések áramlanának, egészen addig, amíg a tangenciális komponens nem semlegesítődik



Példa: pozitív töltésű pontforrás egy földelt vezető gömb közelében (az ábrán az elrendezés elektromos erővonalai láthatók). A pontforrás (ami lehet egy ion vagy egy kémiai vegyület) és a fémgömb (pl. arany nanorészecske) között elektromos erő hat. A fémgömböt pl. szenzorként lehet alkalmazni.

A Gauss törvény alkalmazása

Nagy szimmetriával rendelkező töltéselrendezések esetén a Gauss törvény segítségével meg lehet határozni az elektromos teret.

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Ez akkor lehetséges, ha tudunk olyan Gauss felületnek nevezett speciális S zárt felületet választani amelyre

- az elektromos tér vagy párhuzamos vagy merőleges a felület normálisával, így a felületi integrálban szereplő skaláris szorzás algebrai szorzássá egyszerűsödik,
- az elektromos tér vagy állandó vagy nulla a felület darabjain, ez lehetővé teszi, hogy az elektromos teret kiemeljük a felületi integrálból.

- nagy szimmetriájú töltéselrendezések, amelyeknek a Gauss törvény segítségével meg lehet határozni az elektromos terét

Ponttöltés (töltés = q)	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ (a q töltéstől r távolságra)
Vezető gömb (össztöltés = Q)	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ (a gömbön kívül, a középponttól r távolságra) $\mathbf{E} = 0$ a gömb belsejébe
Egyenletesen töltött r_0 sugarú szigetelő gömb (össztöltés = Q)	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ (a gömbön kívül, a középponttól r távolságra) $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{r_0^3} \hat{\mathbf{r}}$ (a gömb belsejébe, a középponttól r távolságra)
Végtelen hosszú vonaltöltés (vonalmenti töltéssűrűség = ρ_l)	$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l}{s} \hat{\mathbf{s}}$ (s távolságra a vonaltól)
Végtelen kiterjedésű síkfelület (felületi töltéssűrűség = ρ_s)	$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$

Kondenzátorok

- A kondenzátor két elektródának nevezett vezetőből áll, amelyeknek a töltése $+Q$ és $-Q$. A jó vezetők potenciálja állandó, ezért a köztük levő feszültség egyértelmű

$$U = V(r_+) - V(r_-) = - \int_{r_+}^{r_-} \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

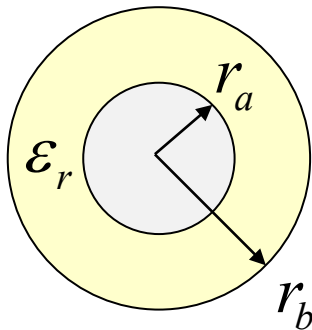
- Akármilyen bonyolult az elektródák geometriája, az elektromos tér arányos a vezetők töltésével (Gauss törvény). Az elektródák feszültsége is arányos az elektromos térerősséggel. Az arányossági tényezőt, ami csak a geometriai elrendezéstől és az anyagparaméterektől függ, kapacitásnak nevezzük, jele C .

$$C = \frac{Q}{U} \quad \bullet \text{ a kapacitás mértékegysége F (Farad)} \quad 1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$$

síkkondenzátor	hengerkondenzátor	gömbkondenzátor
$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$	$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$	$C = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}}$

Feladat: Hengerkondenzátor

Két nagyon hosszú, koncentrikus fémhenger között $\epsilon_r = 4$ elektromos permittivitású anyag található. A fémhengerek tökéletes vezetőből készültek, sugaraik $r_a = 1$ cm és $r_b = 2$ cm. A két fémhenger közé $U = 2.5$ V feszültséget kapcsolunk. Válaszoljuk meg a következő kérdéseket analitikus számításokkal és a MATLAB PDE toolbox végeelem megoldójával is és hasonlítsuk össze az eredményeket. Lásd a Hengerkond_PDE.m és a Calc_Capacit.m fileokat.

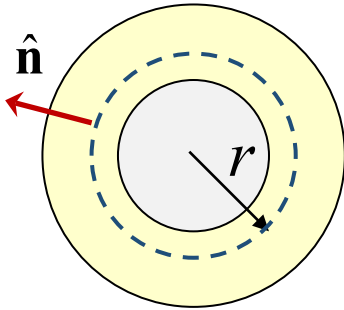


$$\begin{array}{ll} r_a = 1 \text{ cm} & U = 2.5 \text{ V} \\ r_b = 2 \text{ cm} & \epsilon_r = 4 \end{array}$$

- Határozzuk meg a belső fémhenger hosszegységre eső töltéssűrűségét
- Számítsuk ki az elektromos térerősség E_x és E_z komponenseit az $r = 1.5$ cm és a $\varphi = 0^\circ$ hengerkoordináták által megadott pontban.
- Határozzuk meg a hosszegységre eső kapacitást.
- Vizsgáljuk meg a numerikus megoldás konvergenciáját.

Analitikus megoldás

Az S zárt felület legyen egy r sugarú ($r_a < r < r_b$) és L magasságú koncentrikus henger. Ez egy speciális Gauss felület, mivel az elektromos térerősség párhuzamos a henger oldalán a normál vektorral és nagysága is állandó ezen a felületen. A henger alsó és felső körfelületein az elektromos térerősség merőleges a normál vektor irányára.



henger oldalán

$$\mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E = E$$

a két fedőkörön

$$\mathbf{E} \perp \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = q_{enc}^f$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \oint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \varepsilon_0 \varepsilon_r \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_{S_{oldal}} E da = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \int_{S_{oldal}} da = \varepsilon_0 \varepsilon_r E 2\pi r L$$

$$E = \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L} \frac{1}{r} q_{enc}^f$$

$$\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{q_{enc}^f}{L} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

az elektromos térerősség
sugárirányú

$$U = V(r_b) - V(r_a) = - \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{-q_{enc}^f}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r} dr = \frac{-q_{enc}^f}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln(r) \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{-q_{enc}^f}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

- a külső henger legyen földelve $V(r_b) = 0$ V, a belső henger potenciálja $V(r_a) = 2.5$ V

$$0 - V(r_a) = \frac{-q_{enc}^f}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

- a belső fémhenger hosszegységre eső töltéssűrűsége

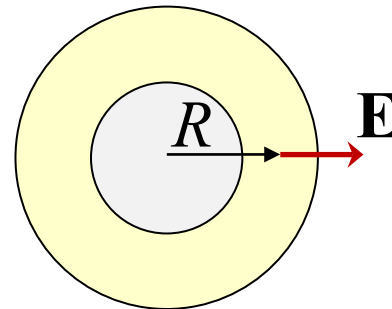
$$\frac{q_{enc}^f}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r V(r_a)}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = \frac{2\pi 8.85 \cdot 10^{-12} 4 \cdot 2.5}{\ln\left(\frac{2}{1}\right)} = 8.0261 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

- Megjegyzés: egy elektron töltése: $e^- = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

b. A pont koordinátái, ahol meg kell határozni az elektromos térerősséget

$$x = R \cos \varphi = 1.5 \cos 0^\circ = 1.5$$

$$y = R \sin \varphi = 1.5 \sin 0^\circ = 0$$



$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_{enc}^f}{L} \frac{1}{R} = \frac{V(r_a)}{R \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = \frac{2.5}{1.5 \cdot 10^{-2} \ln 2} = 240.4492 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_y = 0$$

c. A hengerkondenzátor kapacitása

$$q = CU \quad C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$$

- a hosszegységre vett kapacitás

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = \frac{2\pi 8.85 \cdot 10^{-12} 4}{\ln\left(\frac{2}{1}\right)} = 321.04 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} = 321.04 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

Elektrosztatikus feladatok megoldása a MATLAB PDE toolboxával

Az elektromágneses térszámító programcsomagok modellezési folyamatának főbb lépései

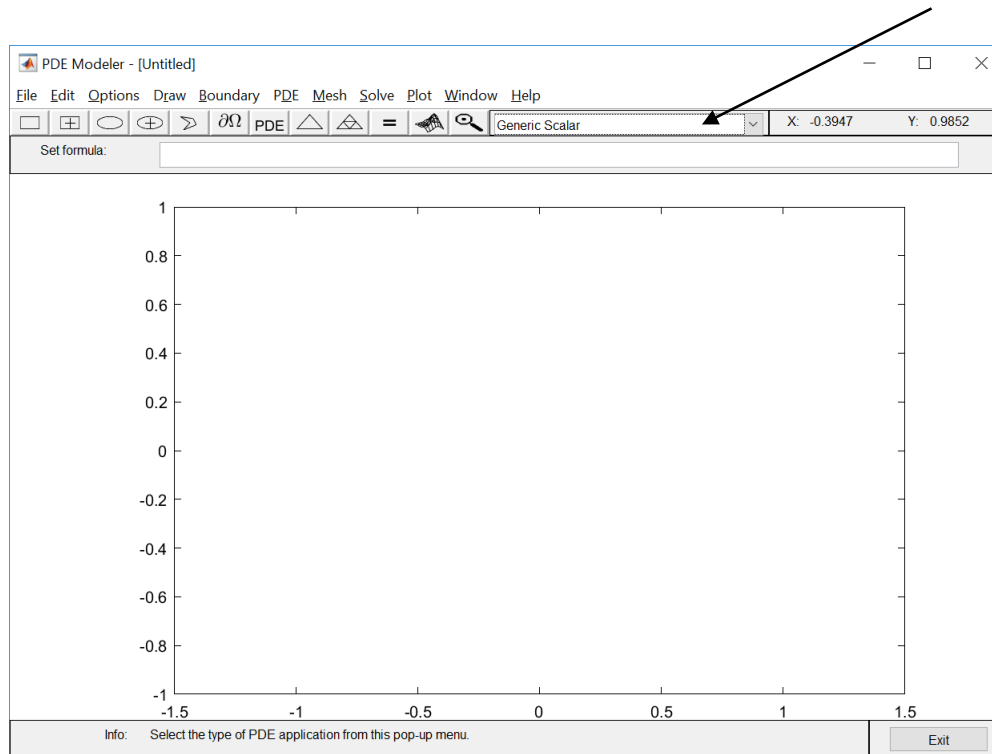
- a. kiválasztjuk a megoldandó feladattípust, beállítjuk a mértékegységeket
- b. megrajzoljuk a geometriát
- c. beállítjuk az anyagparamétereket
- d. hálót generálunk
- e. speciális megoldóbeállítások, megoldjuk a feladatot
- f. ábrázoljuk az eredményt, ha szükséges további számításokat végzünk

Numerikus megoldás

- indítsuk el a Matlabot

>> **pdetool**  a 2D végeselemes megoldó grafikus felülete, a feladat parancs sorból is megoldható lenne, de így egyszerűbb. A File/Save paranccsal a Matlab automatikusan elmenti a grafikus felületben végzett munkát, scriptet generál, ami utólag is szerkeszthető.

- a legördülő menüből válasszuk a feladat típusának: Electrostatics



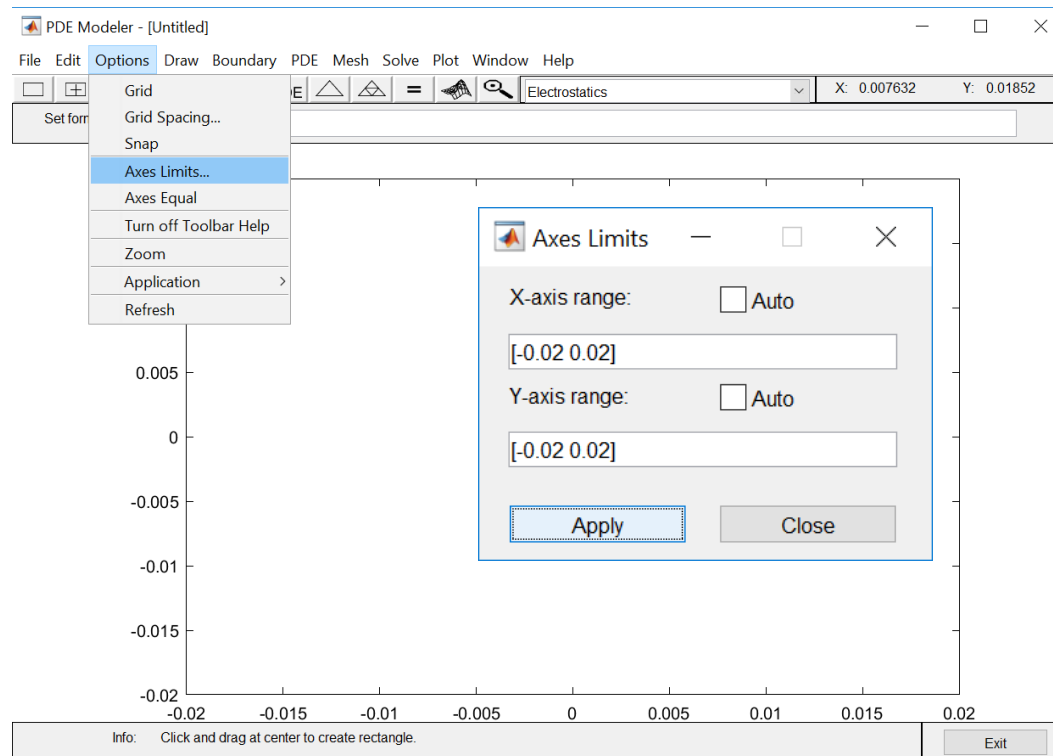
- Options menü - állítsuk be a megfelelő tengelyeket
Axes Limits... –re kattintva a megjelenő ablakban

x -range: $[-0.02 \ 0.02]$

y -range: $[-0.02 \ 0.02]$

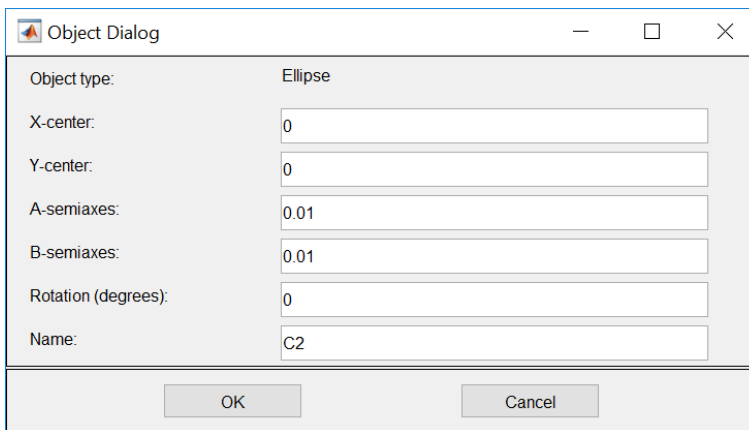
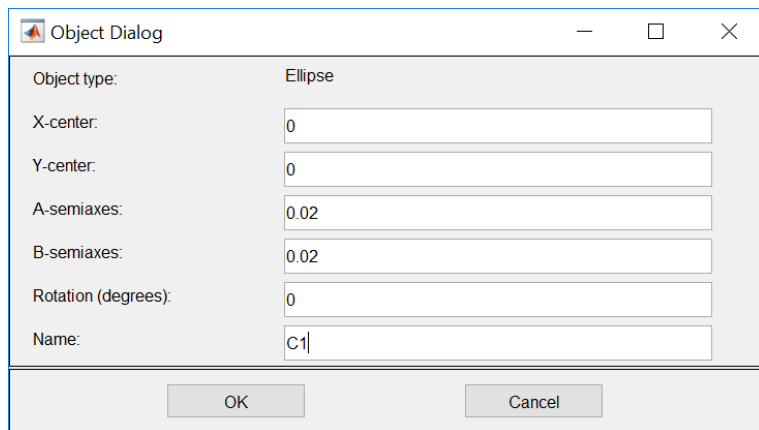
Apply aztán Close

- nem lesz azonos léptékű a két tengely ezért **Set Axis Equal** (ezt később, ha megrajzoltuk a geometriát)



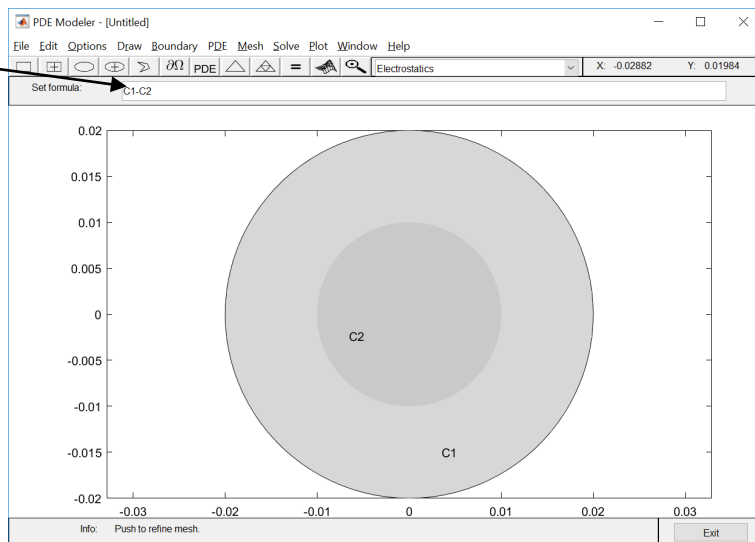
Rajzoljuk meg a geometriát, ehhez kattintsunk a **Draw menu -> **Draw mode****

- elemi alakzatokat használunk a kívánt geometria megrajzolásához. Ebben az esetben a geometria két körből áll, amit az **Ellipse/circle** segítségével adhatunk meg.



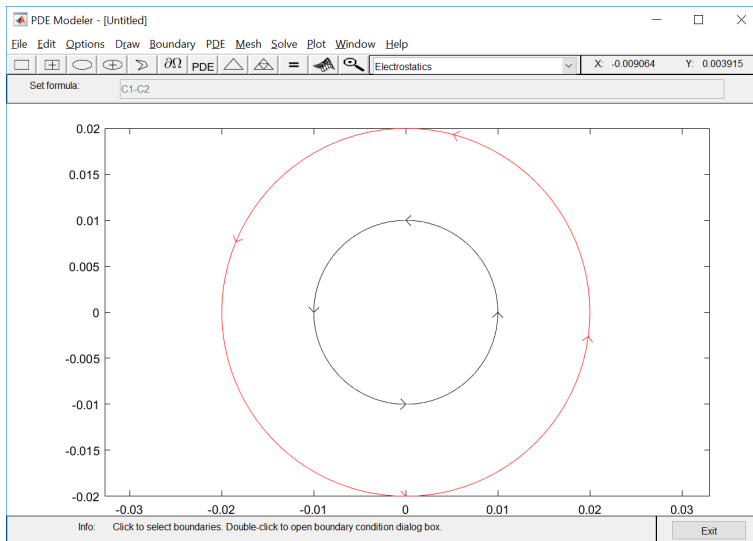
- a két kör átfedi egymást, ezért egyértelműsíteni kell a számolási tartományt

Set formula: C1-C2



A peremfeltételek megadása: kapcsoljunk 2.5 V feszültséget a kondenzátorra. A belső elektróda potenciálja 2.5 V, a külső elektródáé 0 V. Válasszuk a **Boundary menu** -> **Boundary mode** menüpontot.

- A Shift gomb lenyomásával kattintsunk a belső henger éleire. A kijelölt peremek feketék lesznek. Azután kattintsunk a **Boundary** -> **Specify Boundary Conditions...** menüpontra, a Dirichlet peremfeltételt válasszuk ($hV=r$). A $h=1$ és $r=2.5$ megadásával előírhatjuk a $V=2.5$ V peremfeltételt a belső fémhengeren. A külső kör peremein nem szükséges semmilyen beállítás, mivel a megoldó alapbeállítása a Dirichlet peremfeltétel a $h=1$ és $r=0$ értékekkel, ami a $V=0$ V peremfeltételt jelenti a külső fémhenger felületén.



Condition type:	Coefficient	Value	Description
☐ Neumann	g	0	Surface charge
☒ Dirichlet	q	0	
	h	1	Weight
	r	2.5	Electric potential

A PDE együtthatók megadása: Válasszuk a **PDE menu** -> **PDE mode** menüpontot.

- itt lehet előírni a két fémhenger közötti tartomány elektromos permittivitását
- **PDE menu** -> **Subdomain labels**, kattintsunk az 1 indexű tartományra, a PDE specification ablakban

$$\text{epsilon} = 4$$

$$\text{rho} = 0$$

beállításokkal megadjuk az elektromos permittivitást és a térfogati töltéssűrűséget.

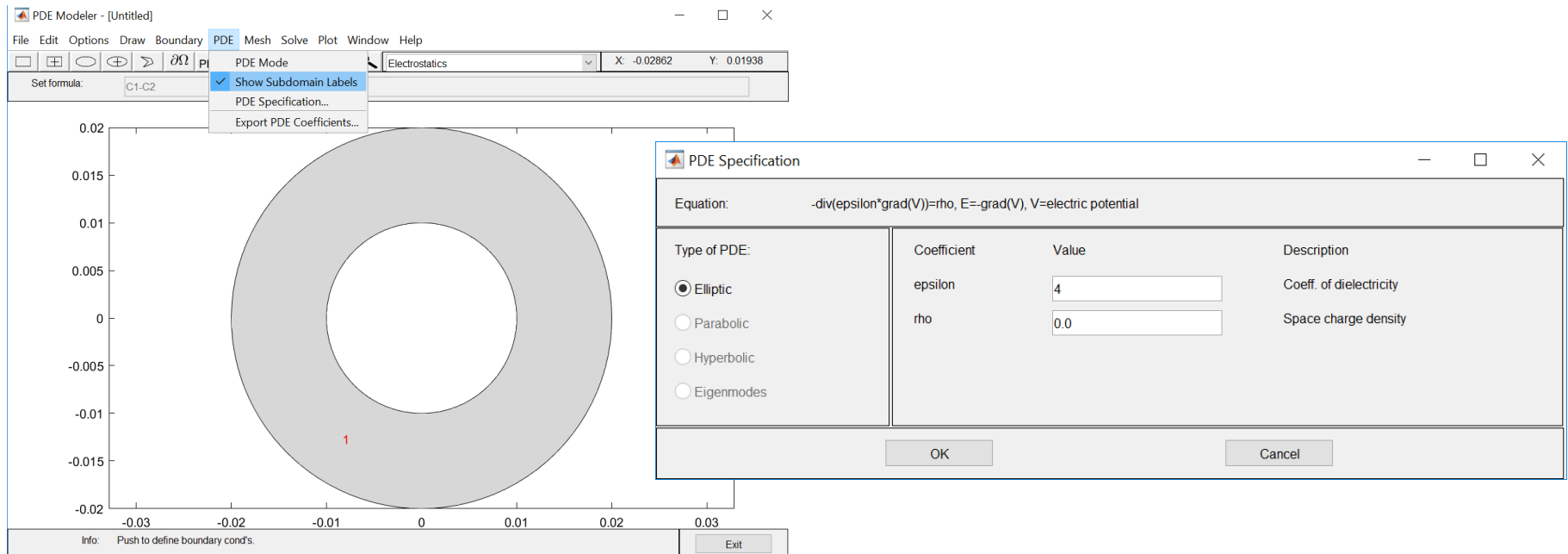
Mivel $\rho = 0$, ezért ebben az esetben a

$$-\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \nabla V) = \rho$$

egyenlet nem függ az elektromos permittivitástól és a

$$-\nabla \cdot (\nabla V) = 0 \qquad \nabla^2 V = 0$$

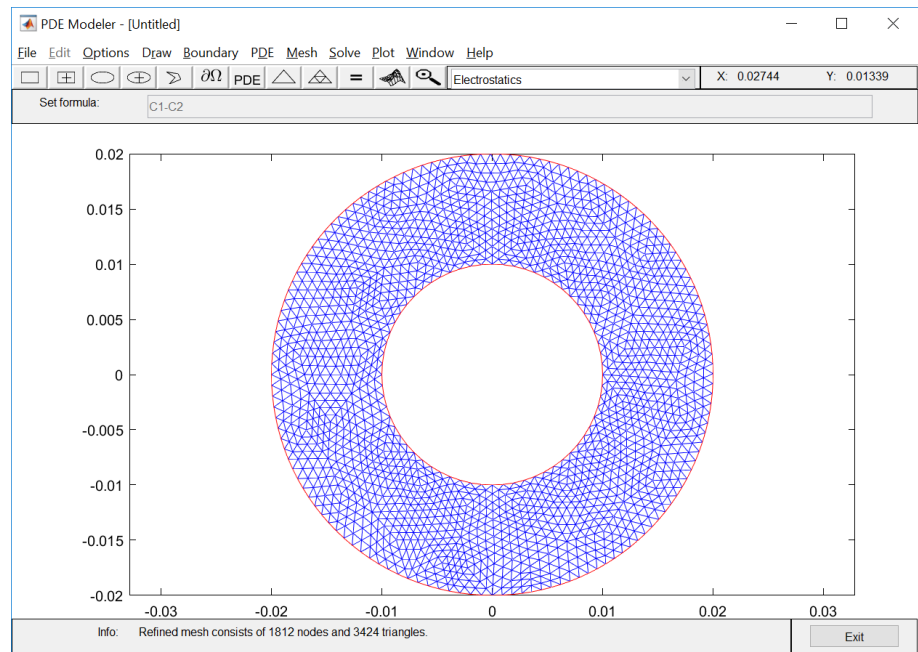
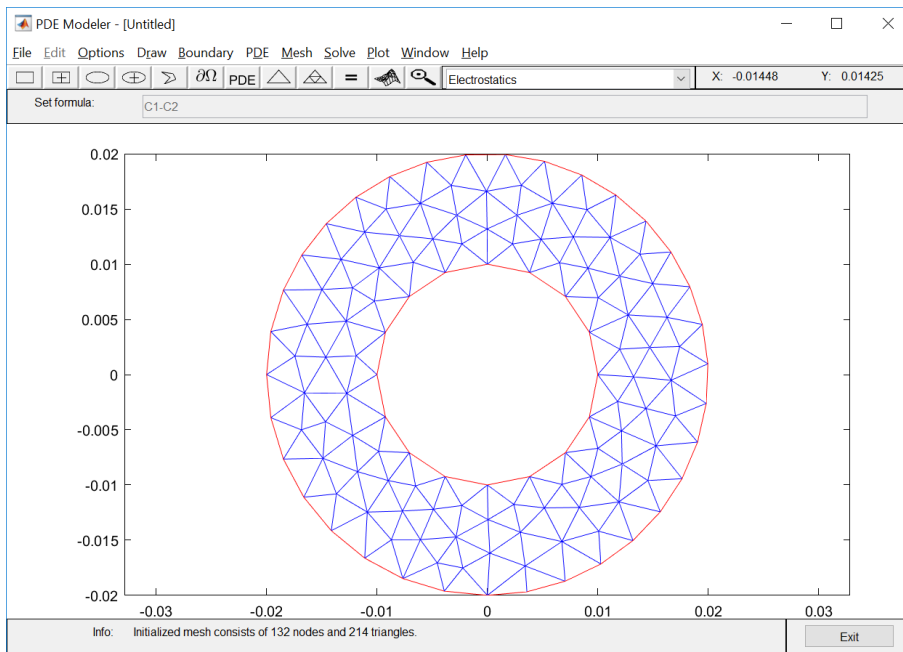
Laplace egyenletet kapjuk. A legtöbb feladat több dielektrikumot tartalmaz ezért itt is célszerű megadni az $\text{epsilon} = 4$ értéket. $\epsilon_0 \epsilon_r$ kellene, ami viszont kis értékeket és pontatlan eredményt adhat ha numerikusan képezzük a gradienst. Az utószámítások során figyelembe veszem az itt elhagyott ϵ_0 állandót.



- A későbbi számítások érdekében exportáljuk a PDE együtthatókat a **PDE-> Export PDE Coef** menüpontra kattintva.

Hálógenerálás: Háromszögekből álló végeelem hálót a **Mesh menu -> Mesh mode** menüpont segítségével generálhatunk. A kezdeti végeelem háló gyér és általában nem vezet kellően pontos megoldáshoz, ezért a hálót finomítani kell, a **Refine mesh** segítségével, akár egymás után többször is.

- A későbbi számítások érdekében exportáljuk a végeelem hálót az **Export Mesh** menüpont segítségével.

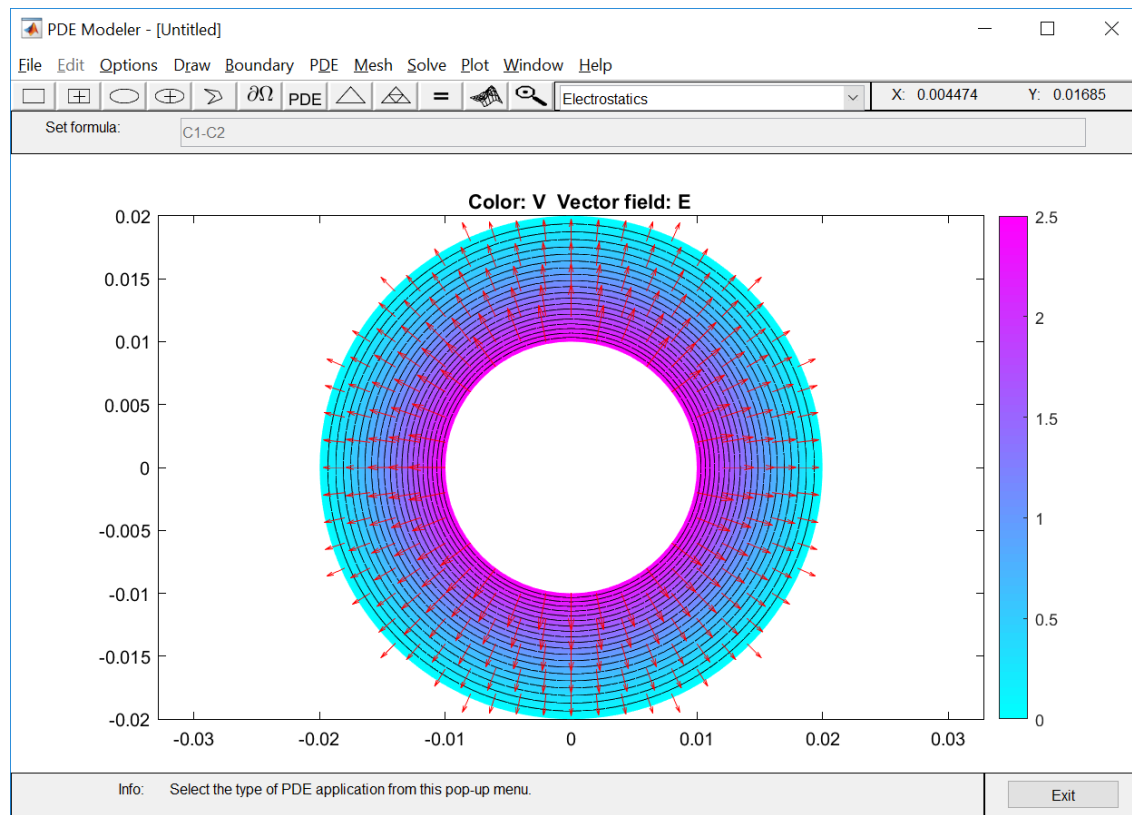


Megoldás: a **Solve** menu -> **Solve PDE** kiszámítja az U (mi jelölésünk V) skalár potenciált a végeelem háló csomópontjaiban.

- A későbbi számítások érdekében exportáljuk a megoldást (a V skalár potenciált) az **Export Solution** menüpont segítségével.

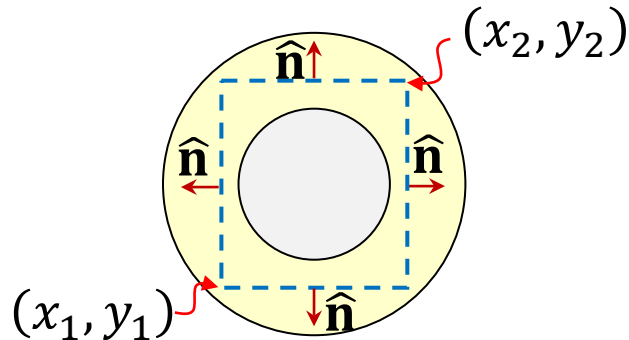
Plot -> **Parameters** menüpontnál megadhatjuk az ábrázolandó mennyiségeket, ebben az esetben

Color	electric potential
Contour	
arrows	electric field



- Ez ekvipotenciális vonalak és a színezés a potenciál értékét jelölik, a nyilak az elektromos térerősséget mutatják.
- Az exportált adatok felhasználásával a Calc_Capacit.m Matlab script kiszámítja a kívánt mennyiségeket.

- a belső elektróda össztöltésének kiszámításánál alkalmazott speciális Gauss felület egy téglatest



jobboldal: $\hat{n} = \hat{n}_x$

baloldal: $\hat{n} = -\hat{n}_x$

fent: $\hat{n} = \hat{n}_y$

lent: $\hat{n} = -\hat{n}_y$

- az elektromos indukció kiszámítása a Gauss felület különböző részein (`tri2grid()`)

```
%calculate the components of D required for the calculation of the flux of D on the
%sides of the rectangular closed surface (the other components are not
%required due to scalar product with the surface normal)
%down
Dy_d = tri2grid(p,t,Dy,x,y1);
%up
Dy_u = tri2grid(p,t,Dy,x,y2);
%left
Dx_l = tri2grid(p,t,Dx,x1,y);
%right
Dx_r = tri2grid(p,t,Dx,x2,y);
```

- a fluxus kiszámításához szükséges integrálást a trapéz (`trapz()`) módszerrel végzem

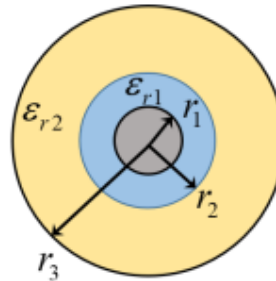
- mindenki egyéni számértékeket tartalmazó pdf formátumú házi feladatot kap, aminek megoldását két hét alatt kell elkészítenie

1. Házi feladat

A házi feladatot a következő linken kell beadni **.pdf** formátumban. Határidő: 2022. március 10., 23:50.

<https://www.dropbox.com/request/BcjrUAJ903ufciEPUchH>

Két nagyon hosszú koncentrikus fémhenger között $\epsilon_{r1} = 5.07$ és $\epsilon_{r2} = 8.1$ elektromos permittivitású szigetelő anyag található, ahogy az alábbi ábrán látható. A sugarak $r_1 = 0.48$ cm, $r_2 = 2.44$ cm és $r_3 = 2.94$ cm. A külső fémhengert földeljük és $U = 2$ V feszültséget kapcsolunk az elektródák közé.



1. Ábra Az elrendezés geometriája. A belső fémhenger sugara r_1 , a külső fémhengeré r_3 . A két fémhenger közötti teret kétféle szigetelő anyag tölti ki. Az ϵ_{r1} elektromos permittivitású anyag az $r_1 < r < r_2$ térrészben, az ϵ_{r2} elektromos permittivitású anyag pedig az $r_2 < r < r_3$ térrészben található.

Analitikus számításokkal határozza meg:

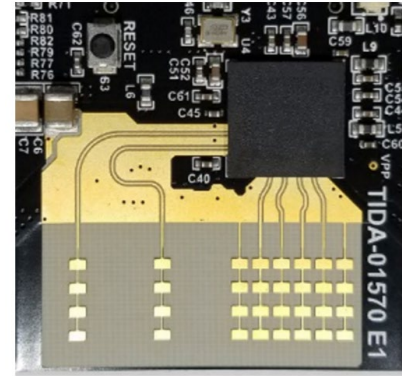
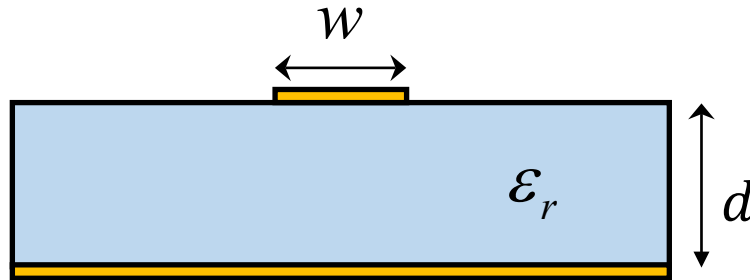
1. A belső fémhenger hosszegységre eső töltéssűrűségét. (25 p)
2. Az elektromos térerősséget és az elektromos indukciót az $r = 1.30$ cm és $\varphi = 0^\circ$, valamint az $r = 2.12$ cm és $\varphi = 75^\circ$ hengerkoordináták által meghatározott pontokban. (10 p)
3. Számítsa ki a hosszegységre eső kapacitást. Milyen kondenzátorkapcsolásnak felel meg ez az elrendezés? (5 p)

A tehetségprogram résztvevőinek kötelező, mindenkinek ajánlott.

4. Oldja meg a feladatot a Matlab PDE toolboxának segítségével is és vizsgálja a megoldás konvergenciáját a végeelem háló sűrűségének a függvényében. (10 p)

Mikroszalag hullámvezető

Automotive 77-GHz Radar

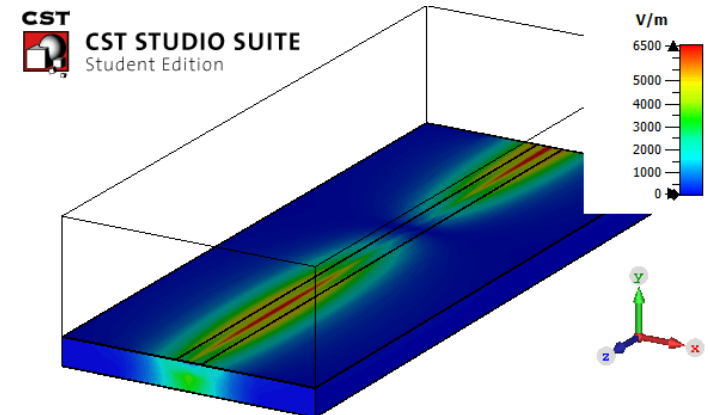
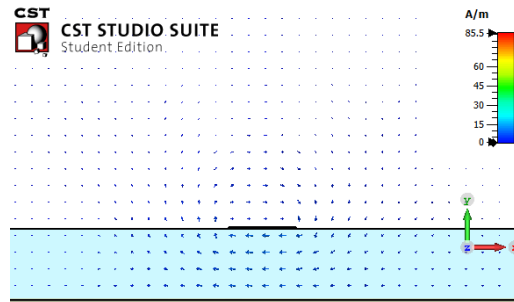
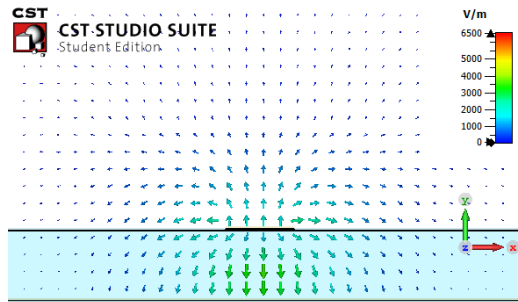


<http://www.ti.com/lit/ug/tiduen3/tiduen3.pdf?ts=1588497655393>

hordozó: Isola_IS680-345 $d = 0.76 \text{ mm}$

$\epsilon_r = 3.45$ $w = 1.72 \text{ mm}$

- TEM jellegű hullámterjedés esetén $E_z = 0$ $H_z = 0$) a tranzverzális elektromos és mágneses tér komponensekre Laplace egyenlet adódik $\Rightarrow$ hasonló megoldás mind statikus terek esetén



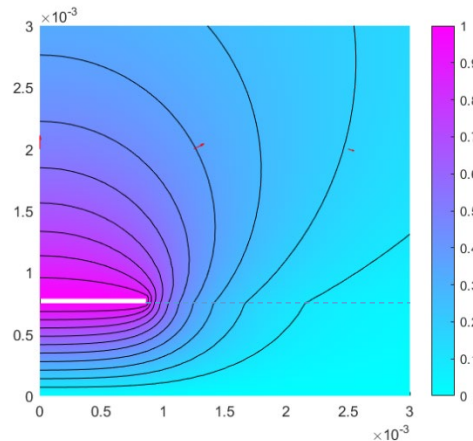
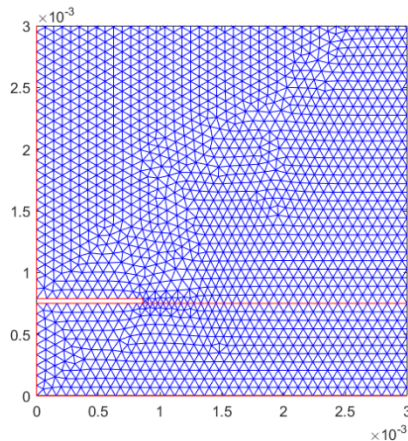
$$\lambda = \frac{v_p}{T} = v_p f = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} f$$

- a mikroszalag hullámvezető effektív elektromos permittivitása és karakterisztikus impedanciája

$$\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{d}{w}}} \quad \epsilon_{eff} = 2.7353$$

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \ln \left(\frac{8d}{w} + \frac{w}{4d} \right), & \text{ha } \frac{w}{d} \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{eff}} \left[\frac{w}{d} + 1.393 + 0.667 \ln \left(\frac{w}{d} + 1.444 \right) \right]}, & \text{ha } \frac{w}{d} \geq 1 \end{cases}$$

FE



$$\epsilon_{eff} = \frac{C}{C_a} \quad Z_0 = \frac{1}{c_0 \sqrt{C C_a}}$$

$$\epsilon_{eff} = 2.6973$$

$$Z_0 = 48.9 \, \Omega$$

Lásd a microstrip_EpsEff_half_FE.m file-t

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!