



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar



Katolikus
Pedagógiai
Intézet

Középiskolai fizikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2022. november 9.

A VALÓSZÍNŰSÉGI TÖRVÉNY IS TÖRVÉNY

ÉS NEM SZÉGYELLNIVALÓ

2022. november 9.

Tél Tamás

emeritusz professor, ELTE

Sokszor hallom tanároktól:

A ... tudományágban sajnos **csak** valószínűségi kijelentések tehetők.

Van jogom megítélni, hogy milyennek kellene lennie a természetnek?



„Képzeljük el, hogy a „világ”, az állandóan mozgásban levő tárgyak bonyolult elrendeződése egyetlen hatalmas sakkjátszma, az istenek játsszák, s mi csak megfigyelői vagyunk. Nem tudjuk, csupán *megfigyelhetjük* a játék szabályait.”

<https://pdfslide.net/download/link/feynman-mai-fizika-01>

Feynman alázatra tanít: **örüljünk** annak, ha felismerjük, milyen a természet (akkor is, ha nem ilyenek várjuk).

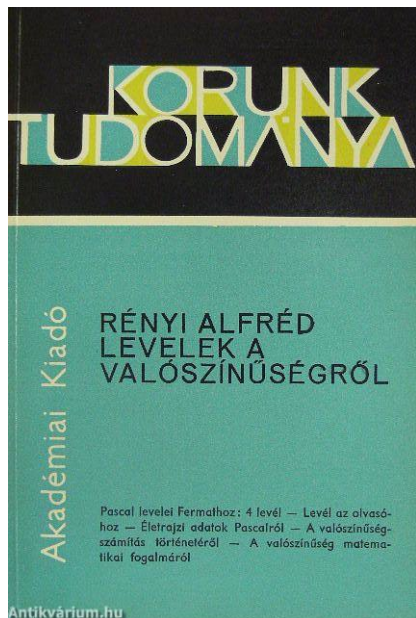
Ráadásul a valószínűségszámításnak eleve vannak törvényhez hasonló felismerései.

A valószínűség lényege

Rényi A.: Levelek a valószínűségről, 1969

könyve alapján

Pascal 4 fiktív levele 1654-ben Fermat-hoz, kb. 40 oldal



<https://mek.oszk.hu/00800/00859/00859.pdf>

Rényi Alfréd (1921-1970), világhírű matematikus, széles humán műveltséggel.

Korábbi, irodalmi szintű ismeretterjesztő műve:

Dialógusok a matematikáról, 1965,

<http://mek.oszk.hu/00800/00856/00856.pdf>



Idézetek

„az emberek azt hiszik, hogy ha valamit nem tudnak biztosan - már pedig biztosan szinte semmit nem tudnak - akkor nem tudnak semmit. ... A részleges tudás is tudás és a részleges bizonyosság is értékes lehet, különösen, ha tudom azt, hogy e bizonyosság milyen fokú.”

„minden véletlen esemény bizonyossági fokát azzal mérjük, hogy az hányadrésze a biztos esemény teljes bizonyosságának”

„ha számszerűen ismerjük egy esemény valószínűségét, akkor valami határozottat tudunk róla, jóllehet az tulajdonképpen bizonytalan”

„Nevezzük hát el a tudománynak ezt az új ágát, amelynek célja, hogy a véletlen, bizonytalan dolgokról biztos tudást nyújtson, valószínűségszámításnak”

„az A esemény gyakoriságának és az összes megfigyelt kísérletek számának hányadosát az A esemény relatív gyakoriságának nevezzük. Mármost mindenki, akinek elegendő tapasztalata van a szerencsejátékokban, tudja, hogy egy esemény relatív gyakorisága egy sok játszmából álló játszmasorozatban általában közel lesz egy meghatározott számhoz, mégpedig éppen ahhoz az értékhez, amelyet az illető esemény valószínűségének nevezünk.”

„A valószínűség tehát az a szilárd pont, amely körül a relatív gyakoriság a véletlentől függő, előre nem látható és szabálytalan módon ingadozni fog, de a valószínűségtől szeszélyes változásai során legtöbbször csak kevéssel fog eltérni.”

„a tényekből még a részleges bizonyosság fokát sem állapíthatjuk meg teljes pontossággal.”

„Tulajdonképpen bámulatos ez a megegyezés a logika és a tények, lehetőség és a megvalósulás között!”

„Hangsúlyoztam persze, hogy ez csak akkor érvényes, ha a szóban forgó esemény bekövetkezését, ill. be nem következését lényegében azonos körülmények között végrehajtott, és egymásra semmilyen kihatással nem bíró, egymástól független kísérletek sorozatában figyelhetjük meg.”

„egy esemény valószínűsége mindig egy, a mi véleményünktől független, meghatározott szám, amelynek értékét persze különböző emberek különbözőképpen becsülik meg.”

Az objektivitás indoklása Rényi szerint: „Az okság: ... a természetben az összes, egy jelenséget befolyásoló tényezők együtt pontosan meghatározzák a jelenség lefolyását, és azonos okok mindig azonos okozatra vezetnek.”

DE: nem mindig igaz, hogy ha többet tudnánk, kevésbé lenne véletlenszerű a jelenség.

Kvantummechanika: nincsenek rejtett paraméterek.

Káosz: a véletlenszerű viselkedés nem külső zaj miatti, belülről jön

Igaz viszont a statisztikus fizikában, pl. Maxwell--Boltzmann-eloszlás

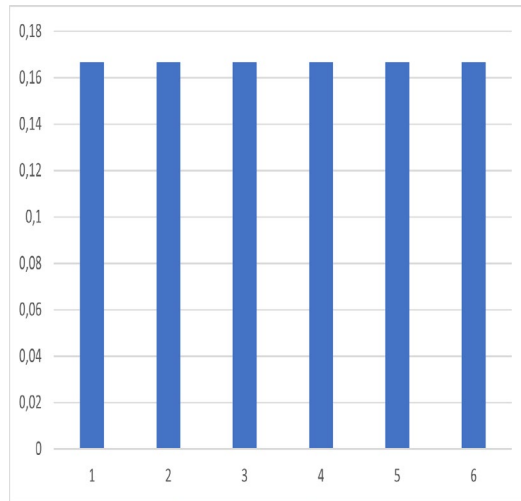
Még egy idézet a könyvből

„a világban a véletlen uralkodik és éppen ezért van benne rend és törvény, ami a véletlenek tömegéből a valószínűségeknek megfelelően bontakozik ki.”

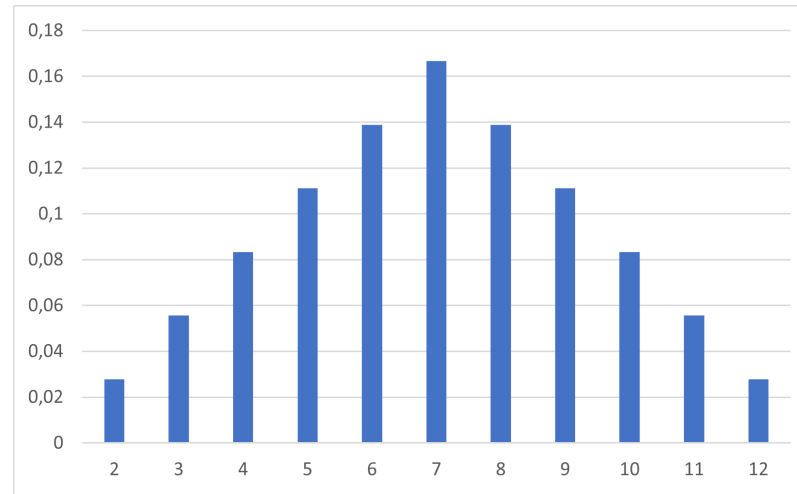
Lehet erre azt mondanunk, hogy **csak?**

Dobás több kockával

N = 1



N = 2



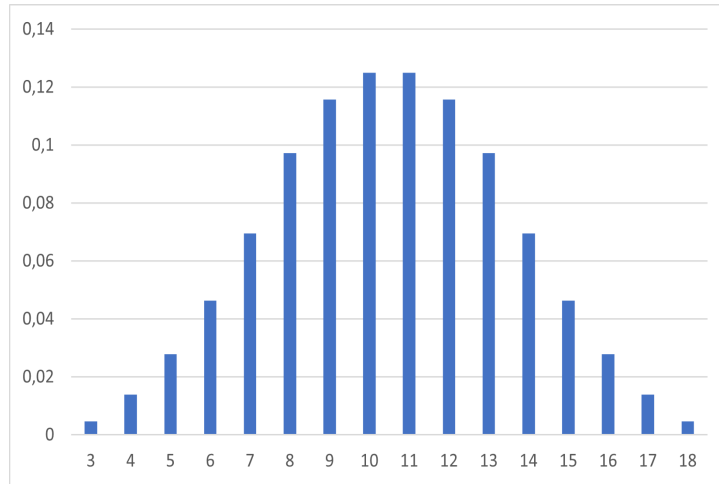
A valószínűségeloszlás is *objektív*

Rényi: A természet könyvének nyelve,
a 3. dialógus

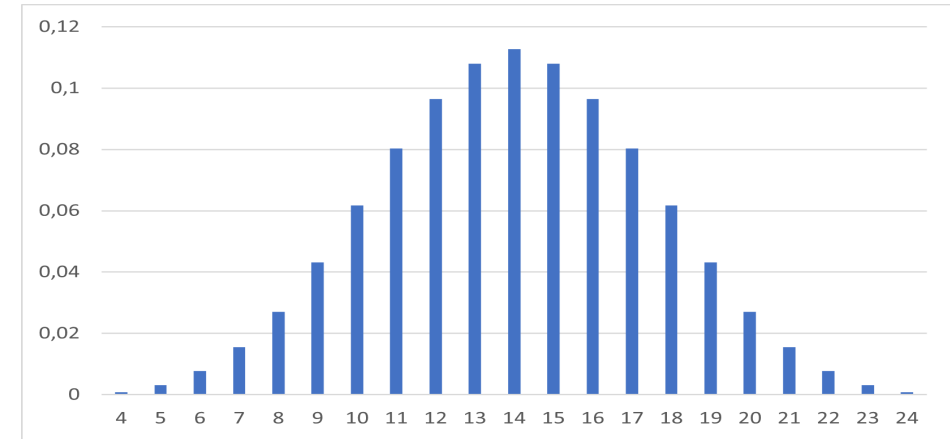
$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 \\ 3 &= 1 + 2 = 2 + 1 \\ 4 &= 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 \\ 5 &= 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 \\ 6 &= 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1 \\ 7 &= 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 \\ 8 &= \quad \quad \quad 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2 \\ 9 &= \quad \quad \quad \quad \quad 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3 \\ 10 &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4 \\ 11 &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 5 + 6 = 6 + 5 \\ 12 &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6 + 6 \end{aligned}$$

<https://mek.oszk.hu/05000/05028/html/dialogmatek0003.html>

N = 3



N = 4



Saját számolás: pl.

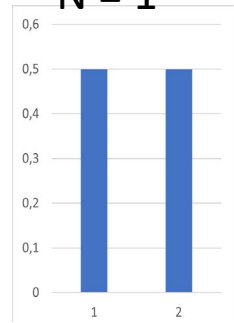
5=1+1+3=1+3+1=3+1+1=1+2+2=2+1+2=1+2+2,
azaz 6 eset

Megfigyelés:

felszélesség, σ :	3,	4,	4.5
N:	2,	3,	4
$\sigma/\sqrt{N}$:	2.1,	2.3,	2.25

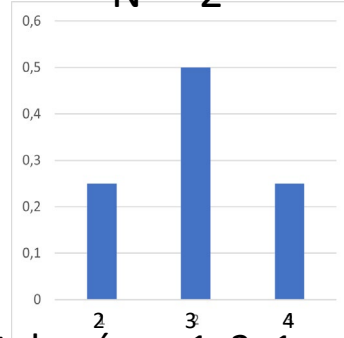
Dobás szabályos érmével (1,2 felirattal)

N = 1



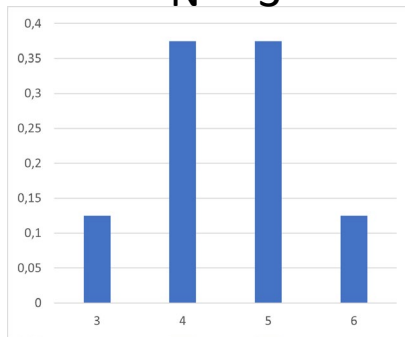
Esetek száma: 1,1

N = 2



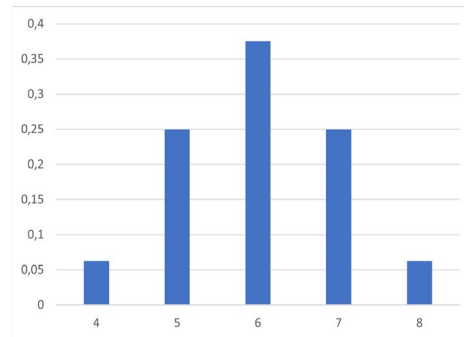
Esetek száma: 1, 2, 1

N = 3



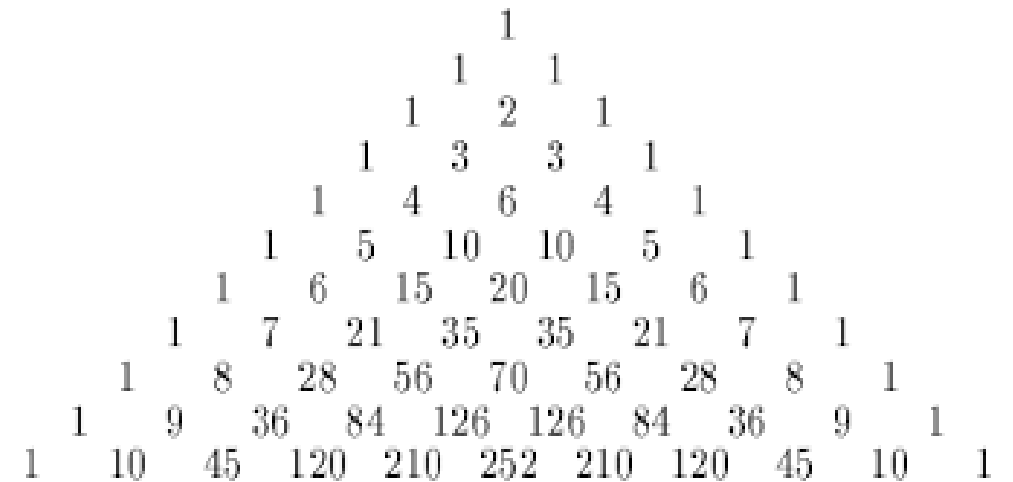
Esetek száma: 1, 3, 3, 1

N = 4

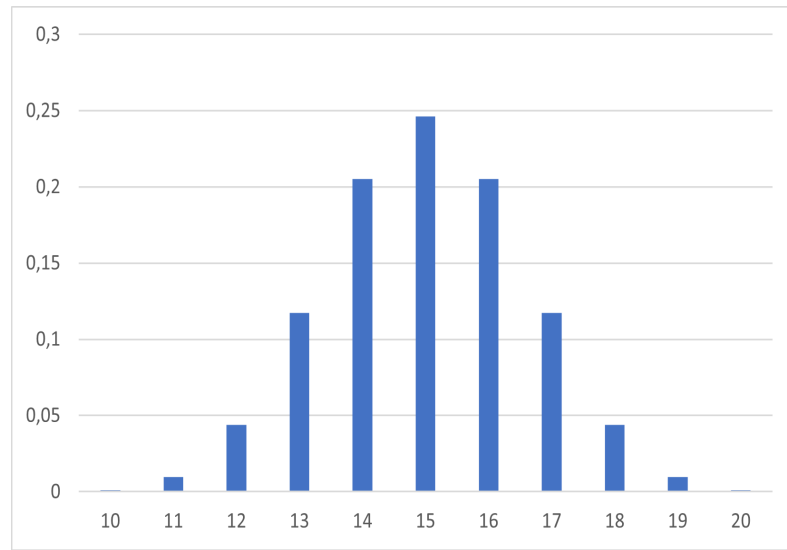


Esetek száma: 1, 4, 6, 4, 1

Pascal-háromszög



N=10

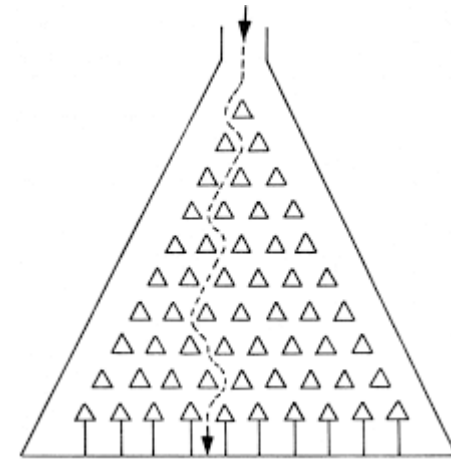
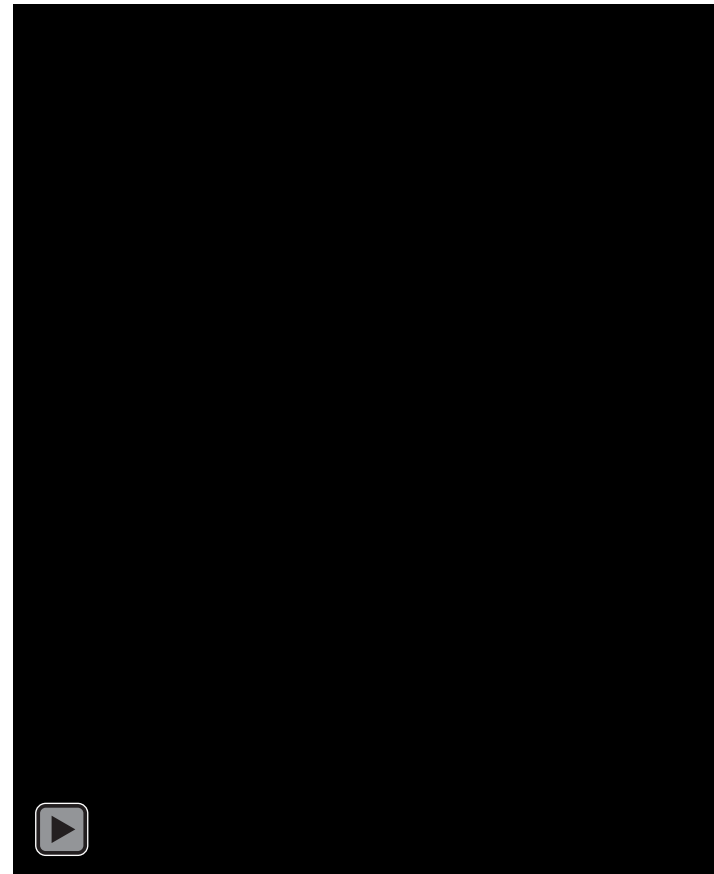


A vízszintes tengelyen $N + k$ áll, ahol k a fej (2-es) dobások teljes száma, $k = 0, 1, \dots, N$
A talált valószínűség a k fej bekövetkezése valószínűsége N – szer ismételt kísérletben

$$P(k, N) = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

„Kísérleti” megvalósítás:
Galton-deszka, 1889:
az egyedi folyamatok véletlenek

Galton-reklám



N=27

Általános alak

A görbék hasonlóak, ha N elég nagy. Mi a közös alakjuk?

$$P(k, N) = \frac{N!}{k! (N - k)!} \frac{1}{2^N}$$

Írjuk, hogy $k = N/2 + (k - N/2)$, és tegyük fel, hogy $k - N/2 \ll N$, az eltérés kicsi, a görbe éles. Használjuk, hogy nagy n -re $\ln n! \approx n \ln n$, és kis x -re $\ln(1 + x) \approx x - x^2/2$

$$P(k, N) \sim e^{-\frac{(k - N/2)^2}{N/2}} \quad \text{harang görbe, Gauss-eloszlás.}$$

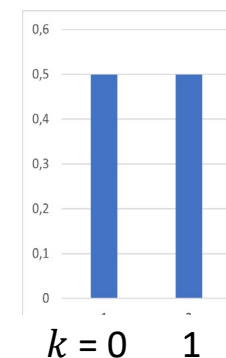
Szokásos írásmód:

$$P(k, N) \sim e^{-\frac{(k - \bar{k})^2}{2 \sigma^2}} \quad \text{ahol } \bar{k} = N/2 \text{ a } k \text{ átlaga, és a négyzetes átlagos eltérés, a félszélesség}$$

$$\sigma^2 = \overline{(k - \bar{k})^2} \quad \text{A pénzfeldobásban } 2\sigma^2 = N/2 \text{ azaz } \sigma = \sqrt{N}/2$$

Ez a *központi határeloszlás* tétel: N független esemény eredményeinek összege Gauss-eloszlás, melyben az átlag és a szórásnégyzet az egyedi események átlagának és szórásnégyzetének N -szerese.

Az egyedi esemény: egyetlen dobás



Véletlen ingadozások Feynman: Mai fizika 1, 6. fejezet

A szórás úgy is értelmezhető, hogy az átlagtól való eltérés tipikusan σ nagyságrendű

$$(k - N/2) \approx \sqrt{N}/2$$

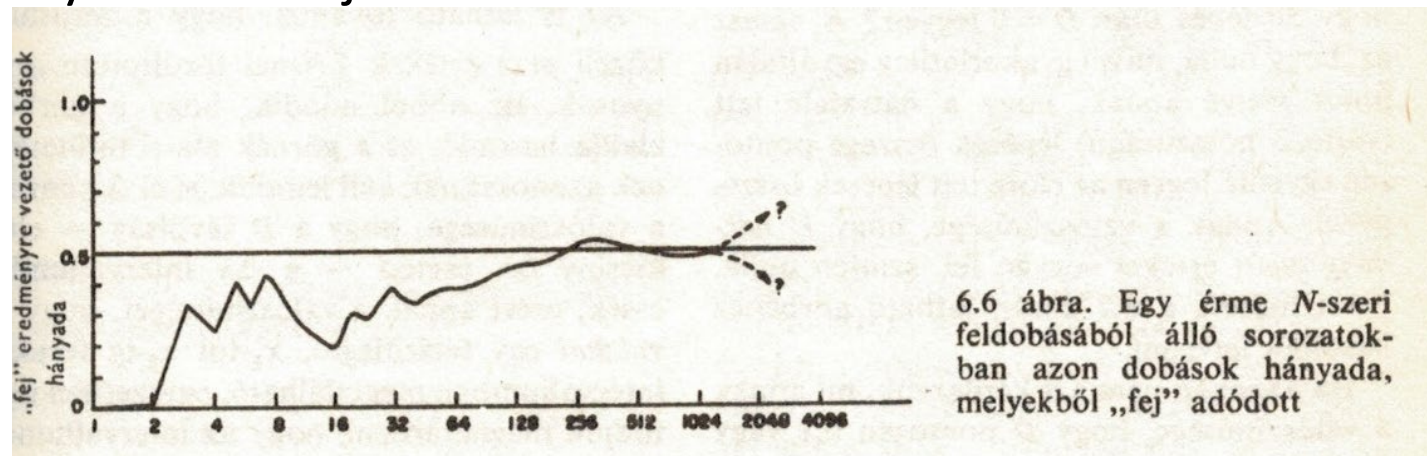
N -nel osztva a várható relatív eltérést kapjuk

$$\frac{k}{N} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{N}}$$

Relatív gyakoriság = valószínűség + véletlen ingadozás,
ami csökken N -nel. Ez a *nagy számok törvénye*.

1 százalékos pontossághoz $2\sqrt{N} = 100$ szükséges, tehát $N \approx 2500$

Feynman ábrája:



„egy esemény valószínűsége mindig egy, a mi véleményünktől független, meghatározott szám, amelynek értékét persze különböző emberek különbözőképpen becsülik meg.”
„Pascal”

Feynman utal arra is, hogy a kísérleti hiba is a véletlenek megnyilvánulása, ami csökken a kísérletek N számának növelésével.

Bolyongás Feynman: Mai fizika 1, 6. fejezet

Érmedobás dönti el, hogy egy test előre vagy hátra lépjen:
fej (írás) esetén pozitív (negatív) irányba

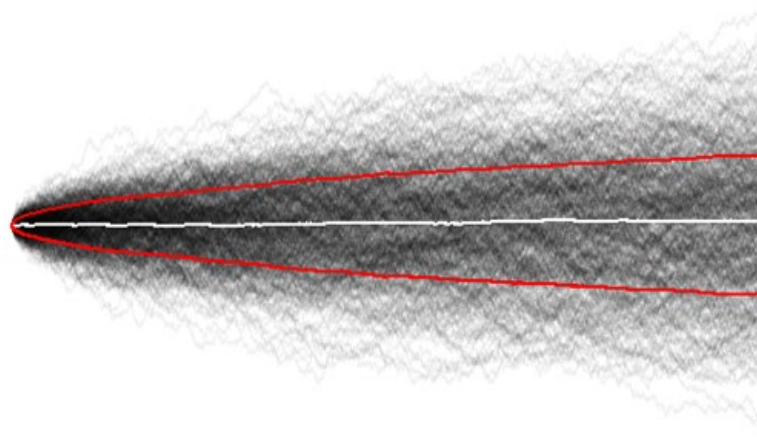
Az n teljes elmozdulás a k pozitív irányú teljes elmozdulás, és a negatív irányú $N - k$ különbsége

$$n = k - (N - k) = 2k - N = 2(k - \bar{k})$$

De k eloszlását már ismerjük, amiből annak a valószínűsége, hogy a bolyongás elmozdulása n legyen N lépés után, áthelyettesítéssel

$$P(n, N) \sim e^{-\frac{n^2}{2N}} = e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} \quad \text{ahol a bolyongásra vonatkozó szórás } \sigma = \sqrt{N}$$

Szimulálásban
500
bolyongásra:



A $\sigma = \sqrt{N}$ (piros) sávba az esetek 68%-a esik, a 2σ sávba az esetek 96%-a, a 3σ sávba 99.7%-a.
Ez a Gauss-eloszlás tulajdonsága.
A Gauss-eloszlás 3σ széles.

Gyakorló szimulálásra <https://demonstrations.wolfram.com/SimulatingTheSimpleRandomWalk/>

Ha minden egyes lépés a „hosszúságú”, a teljes elmozdulás hossza $x = a n$
 Az x elmozdulás előfordulási valószínűsége N lépés után

$$P(x, N) \sim e^{-\frac{x^2}{2 a^2 N}} = e^{-\frac{x^2}{2 \sigma^2}} \quad \sigma^2 = \overline{x^2} = a^2 N$$

Ha a lépések időben egyenközűen, τ_0 időnként történnek, a teljes eltelt idő
 $t = N \tau_0$ és

$$P(x, t) \sim e^{-\frac{x^2}{2 a^2 t / \tau_0}} = e^{-\frac{x^2}{2 \sigma^2}} \quad \sigma^2 = a^2 t / \tau_0$$

$$\overline{x^2} = \frac{a^2}{\tau_0} t$$

A D diffúziós állandó szokásos definíciója szerint $\overline{x^2} = \sigma^2 = 2 D t$, ebben a bolyongásban

$$D = \frac{a^2}{2 \tau_0}$$

Léteznek időfüggő valószínűségi eloszlások.

Mi határozza meg, hogyan változik $P(n, t)$ vagy $P(x, t)$ időben?

Valószínűségek mozgásegyenlete

Feltesszük, hogy a $P(n, t)$ valószínűséggel leírt rendszerben az n érték bizonyos valószínűséggel $n + 1$ -be megy át (pl. a bolyongó részecske egyet jobbra lép), s ez függ az időtől, azzal arányosan.

Az átmenet valószínűsége kis Δt idő alatt $\Delta t / \tau_+$, ahol τ_+ az *átlagos előrelépési idő*.

Az $n \rightarrow n - 1$ átmenet valószínűsége kis Δt idő alatt $\Delta t / \tau_-$, ahol τ_- az *átlagos hátralépési idő*.

Δt idővel később a $P(n, t + \Delta t)$ valószínűség ezért kisebb lesz, $P(n, t)$ -vel is arányosan.

A $P(n, t + \Delta t) - P(n, t)$ megváltozásához adódó járulék $-\Delta t \left(\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-} \right) P(n, t)$

A megváltozáshoz pozitív járulékot ad az $(n - 1) \rightarrow n$ átmenet $\Delta t / \tau_+$ -szal arányosan, és az $(n + 1) \rightarrow n$ átmenet $\Delta t / \tau_-$ -szal arányosan

Rövid idő alatt más átmenet nem történhet.

A Δt idő alatti megváltozás tehát

$$P(n, t + \Delta t) - P(n, t) = \frac{\Delta t}{\tau_+} P(n - 1, t) + \frac{\Delta t}{\tau_-} P(n + 1, t) - \Delta t \left(\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-} \right) P(n, t)$$

A kis Δt -vel osztva a bal oldalon $P(n, t)$ időderiváltja jelenik meg

$$\frac{d}{dt}P(n, t) = \frac{1}{\tau_+}P(n-1, t) + \frac{1}{\tau_-}P(n+1, t) - \left(\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-}\right)P(n, t)$$

Ez az ún. *master* egyenlet (vagy vezéregyenlet).

Az eloszlás $P(n, 0)$ kezdeti alakja ismeretében *egyértelműen* megadja azt t idővel később.

Széleskörű alkalmazás: részeg ember hazafelé, sorbanállási problémák, születési-kihalási folyamatok.

Átrendezve

$$\frac{d}{dt}P(n, t) = -\left(\frac{1}{\tau_+} - \frac{1}{\tau_-}\right)\frac{P(n+1, t) - P(n-1, t)}{2} + \left(\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-}\right)\frac{P(n+1, t) - P(n, t) - (P(n, t) - P(n-1, t))}{2}$$

Ha az n változóhoz közel folytonos $x = na$ rendelhető, ahol a kicsi x -hez képest, $a = \Delta x$:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = -\left(\frac{1}{\tau_+} - \frac{1}{\tau_-}\right)a \underbrace{\frac{P(x+a) - P(x-a)}{2a}}_{\frac{\partial P}{\partial x}} + \left(\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-}\right)\frac{a^2}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{a} \frac{P(x+a) - P(x)}{a}}_{\frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial x} \big|_{x+a/2}} - \underbrace{\frac{1}{a} \frac{P(x) - P(x-a)}{a}}_{\frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial x} \big|_{x-a/2}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -f \frac{\partial P}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Fokker--Planck-egyenlet, 1914-17

$$f = \left(\frac{1}{\tau_+} - \frac{1}{\tau_-} \right) a = u^+ - u^- \quad \text{drift}$$

egységnyi idő alatti előjeles
átlagsebesség

$$D = \left(\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-} \right) \frac{a^2}{2} \quad \text{diffúzió}$$

egységnyi idő alatti átlagos
négyzetes elmozdulás

Az eloszlás $P(x, 0)$ kezdeti alakja ismeretében *egyértelműen* megadja azt t idővel később:
 $P(x, 0) \rightarrow P(x, t)$, minden időre, éppúgy, mint a fizika egyenletei.

Az eloszlások egy $P^*(x, t)$ *határeloszláshoz* tartanak, mely *független* a kezdeti eloszlástól.

Irreverzibilis változást ír le.

Diffúziós folyamat

Drift hiányában, $f=0$, $\tau_+ = \tau_- = \tau$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Egzakt megoldása

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4 \pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4 D t}}$$

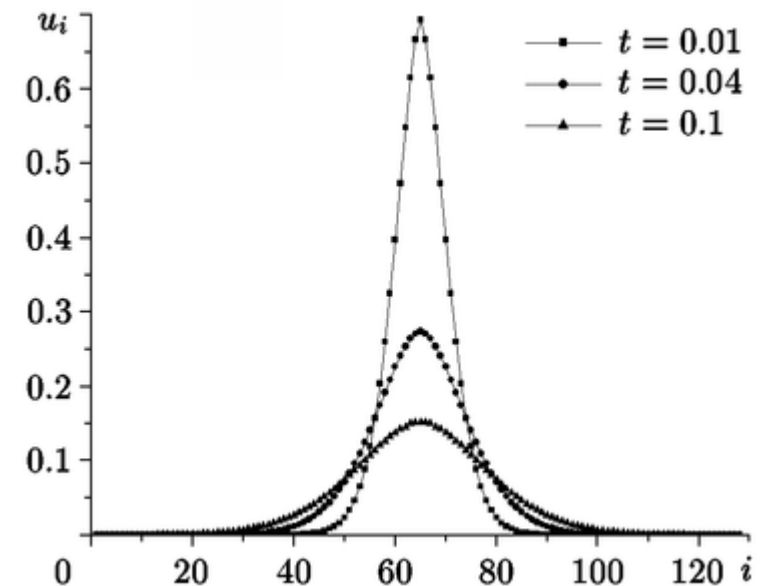
ahogy a bolyongásban már láttuk,
de most egyenlet megoldása

$$D = \frac{a^2}{\tau} = \frac{a^2}{\tau^2} \tau = v^2 \tau \quad v = a / \tau \quad \text{"mikroszkopikus" sebesség}$$

Ha az a lépésköz és ezzel a v sebesség is véletlenszerűen változik:

$$D = \overline{v^2} \tau$$

diffúziós egyenlet



Brown-mozgás, termikus diffúzió

Ha a bolyongás *termodinamikai egyensúlyban* levő közegben zajlik, akkor a termikus diffúziós állandó:

$$D_T = \overline{v^2}_T \tau = \frac{kT}{m} \tau \quad m \text{ a bolyongó részecske tömege,} \quad \text{ez az Einstein-reláció 1905}$$

Budó: Kísérleti fizika I. 137 §: $D_T \sim \bar{v}_T \bar{a} = \bar{v}_T \bar{v}_T \tau$, becslés a kinetikus elmélet alapján

Fick második törvénye, 1855

a $c(x, t)$ koncentrációra

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = D_T \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Fick első törvénye az anyagáramra

$$j = -D_T \frac{\partial c}{\partial x}$$

Anyagmegmaradás miatt $\partial c(x, t)/\partial t = -\partial j/\partial x$

A koncentráció és a teljes tömeg $c(x, t)/M$ viszonya pontosan megfelel a $P(x, t)$ valószínűségnek: $\frac{c}{M} = P$.

A fizika a matematika előtt fedezte fel a diffúziós egyenletet.

A hődiffúzió egyenlete a $T(x, t)$

hőmérsékleteloszlásra, Fourier, 1822

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

α hődiffúziós együttható, a hőáram

$$j \sim -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}$$

Ezek igazából valószínűségi fizikai törvények (csak nem nevezzük őket így).

Maxwell--Boltzmann-eloszlás

A jól ismert valószínűségi fizikai törvény a molekulák sebességeloszlása ideális gázban, T hőmérsékleten: a Maxwell—Boltzmann-eloszlás, 1860

$$P_{MB}(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Itt v adott irányú sebesség.
A Gauss-eloszlás általános tulajdonsága, hogy a szórásnégyzet a számláló átlaga: $\overline{mv^2} = kT$ (ekvipartíció)

Ez a Gauss-eloszlás *nem* határeloszlás.

Az eredete a Boltzmann-törvény: az i -edik állapot valószínűsége termikus egyensúlyban

$$P_i \sim e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

a fizika általános valószínűségi törvénye, 1868

Bármilyen átlag számolható

Langevin

A drift lehet „helyfüggő” is: $f(x)$.
Ekkor a Fokker--Planck-egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial(fP)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Az $f(x)$ drift tehát a determinisztikus mozgást írja le, melyre $\dot{x} = f(x)$

Ez egy zajos mozgásegyenlet-család (a *Langevin-egyenlet*, 1908) x változójának időfüggő eloszlása, melyre

$$\dot{x} = f(x) + \sqrt{2D} \xi(t)$$

ahol a ξ (fehér) zaj tag átlagosan zérus, és pillanatnyi erőssége egységnyi.

A zaj lefutása ezen megszorításokkal mindig más és más.

A Brown-mozgás példájában: $f=0$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D_T \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\dot{x} = \sqrt{2D_T} \xi$$

A Langevin-egyenlet a mikroszkopikus, zajos „*egyedi életutat*” leíró mozgásegyenlet, a Fokker-Planck pedig a sok ilyen részecske *együttes* követését jellemző eloszlást adja meg.²²

Sebesség-eloszlás a Brown-mozgásban

A bolyongás vízben történik, s a részecskére hat a közegellenállási erő, Stokes-törvény.

A determinisztikus mozgásegyenlet (Newton-törvény) $m \dot{v} = -\gamma m v$

Ezen kívül hat rá véletlen erő, ami a tömeggel osztva: $\xi(t)$.

A Langevin-egyenlet v -re:

$$\dot{v} = -\gamma v + \sqrt{2D_v} \xi(t)$$

A sebesség diffúziós állandója $D_v = \frac{kT}{m} \gamma$
(az Einstein-reláció következménye)

$$P(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(v-v(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$$

$v(t) = v_0 e^{-\gamma t}$ a $\dot{v} = -\gamma v$ egyenlet megoldása, v átlaga
 $\sigma^2(t) = kT/m(1 - e^{-\gamma t})$ a sebesség szórásnégyzete

A Fokker--Planck-egyenlet (a drift $f = -\gamma v$)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, t) = \frac{\partial(\gamma v P)}{\partial v} + D_v \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$$

A megoldás:

Hosszú idő után a $P^*(v)$ határeloszláshoz tart: $P^*(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi kT/m}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = P_{MB}(v)$

Itt kezdetben minden részecske v_0 sebességű.

Bármilyen más kezdőfeltétellel is P^ -hoz tart.*

Az MB eloszlás magához vonzza az összes többi! *Így áll be a termikus egyensúly.*

Kvantumvalószínűség

A közismert valószínűségi mozgásegyenlet, az időfüggő Schrödinger-egyenlet, 1925 (Marx: 15. fejezet)

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = V(x) \Psi(x, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \hat{H} \Psi(x, t)$$

Ez *természettörvény*, de nem közvetlenül a valószínűséget adja, hanem a valószínűségi *amplitudót*.
 $i \hbar$ -sal osztva

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{i}{\hbar} V(x) \Psi(x, t) + \frac{i \hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

Az utolsó tag diffúziós tag *imaginárius* diffúziós együtthatóval: $\frac{\hbar}{2m}$ mértékegysége $\frac{m^2}{s}$, mint D_T -é.

A valószínűség az amplitudó abszolút négyzete

$$P(x, t) = \Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$$

P -re következik egyenlet, mely úgy kezdődik, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \quad \text{de a jobb oldalon } \Psi \text{ és } \Psi^* \text{ deriváltja szorzódik, } P \text{ nem jelenik meg.}$$

Ez *nem* Fokker—Planck-egyenlet, és *nem* létezik Langevin-szerű egyenlet sem (ami a rejtett paraméterekre utalna)!

A kvantumvalószínűség különbözik a klasszikustól!

Ha Ψ az i -edik energia sajátállapot φ_i , akkor $\hat{H}\varphi_i = E_i\varphi_i$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i = E_i \varphi_i \quad \rightarrow \quad \varphi_i(x,t) = e^{\frac{-i}{\hbar} E_i t} \varphi_i(x) \quad \rightarrow \quad P_i(x,t) = P_i(x) = \varphi_i^2(x) \quad \text{ha } \varphi_i \text{ valós}$$

$$\text{A } j \text{-edik sajátállapottal } \varphi_j \text{-vel: } \varphi_j(x,t) = e^{\frac{-i}{\hbar} E_j t} \varphi_j(x) \quad \rightarrow \quad P_j(x,t) = P_j(x) = \varphi_j^2(x) \quad \text{ha } \varphi_j \text{ valós}$$

$\Psi = c_i \varphi_i + c_j \varphi_j$ kevert/szuperponált állapot is lehetséges állapot, de *nem* energia sajátállapot!

Időfüggése az összetevők időfüggéseinek összege (az időfüggő Schr.-egyenlet *lineáris*):

$$\Psi(x,t) = c_i e^{\frac{-i}{\hbar} E_i t} \varphi_i(x) + c_j e^{\frac{-i}{\hbar} E_j t} \varphi_j(x) \quad \text{Legyenek itt a } c \text{-k valósak: } c_i^2 + c_j^2 = 1$$

A kvantumvalószínűség:

$$P(x,t) = \Psi(x,t)\Psi(x,t)^* = [c_i e^{\frac{-i}{\hbar} E_i t} \varphi_i(x) + c_j e^{\frac{-i}{\hbar} E_j t} \varphi_j(x)][c_i e^{\frac{i}{\hbar} E_i t} \varphi_i(x) + c_j e^{\frac{i}{\hbar} E_j t} \varphi_j(x)]$$

$$P(x,t) = c_i^2 \varphi_i^2(x) + c_j^2 \varphi_j^2(x) + c_j c_i \varphi_j(x)\varphi_i(x)e^{\frac{-i}{\hbar}(E_j - E_i)t} + c_i c_j \varphi_i(x)\varphi_j(x)e^{\frac{i}{\hbar}(E_j - E_i)t}$$

$$P(x,t) = c_i^2 \varphi_i^2(x) + c_j^2 \varphi_j^2(x) + c_j c_i \varphi_j(x) \varphi_i(x) [e^{\frac{-i}{\hbar}(E_j - E_i)t} + e^{\frac{i}{\hbar}(E_j - E_i)t}]$$

$$P(x,t) = \underbrace{c_i^2 P_i(x) + c_j^2 P_j(x)}_{\text{klasszikus valószínűség}} + \underbrace{2c_j c_i \varphi_j(x) \varphi_i(x) \cos[(E_j - E_i)t/\hbar]}_{\text{kvantum interferencia, nem fejezhető ki a } P\text{-kel}}$$

klasszikus valószínűség kvantum interferencia, nem fejezhető ki a P -kel

A valószínűségek *rezeg* az $(E_j - E_i)/\hbar$ frekvenciával.

A kezdeti valószínűség:

$$P(x,0) = c_i^2 P_i(x) + c_j^2 P_j(x) + 2c_j c_i \varphi_j(x) \varphi_i(x)$$

A kezdőfeltételt *nem felejtí el* a kvantum rendszer, csillapítatlanul inog.

A mikrovilágban nincs súrlódás. Ezt nem is írhatja le a Fokker--Planck-egyenlet.

Ha adott pillanatban energiamérést végzünk és E_i -t kapunk,

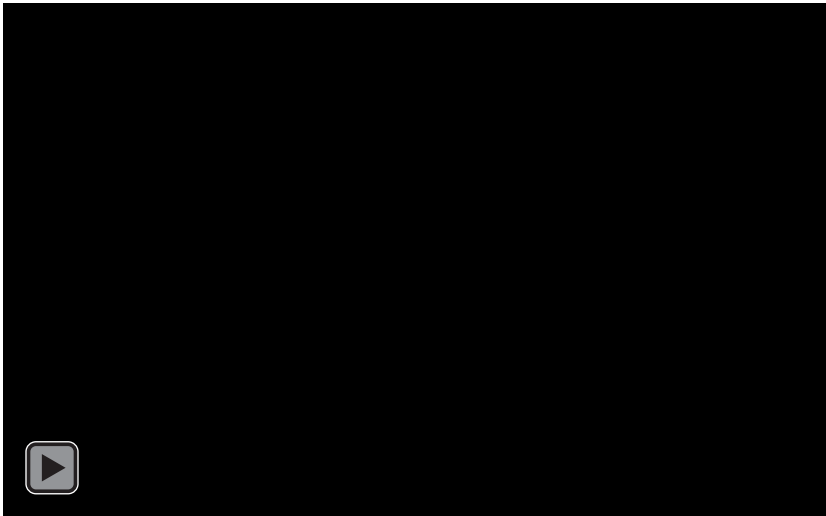
ennek valószínűsége c_i^2 és ezzel a valószínűséggel $P(x,t)$ átvált az időfüggetlen $P_i(x)$ -be:

$P(x,t) \rightarrow P_i(x)$ történik c_i^2 valószínűséggel, és $1 - c_i^2$ valószínűséggel E_j és $P(x,t) \rightarrow P_j(x)$

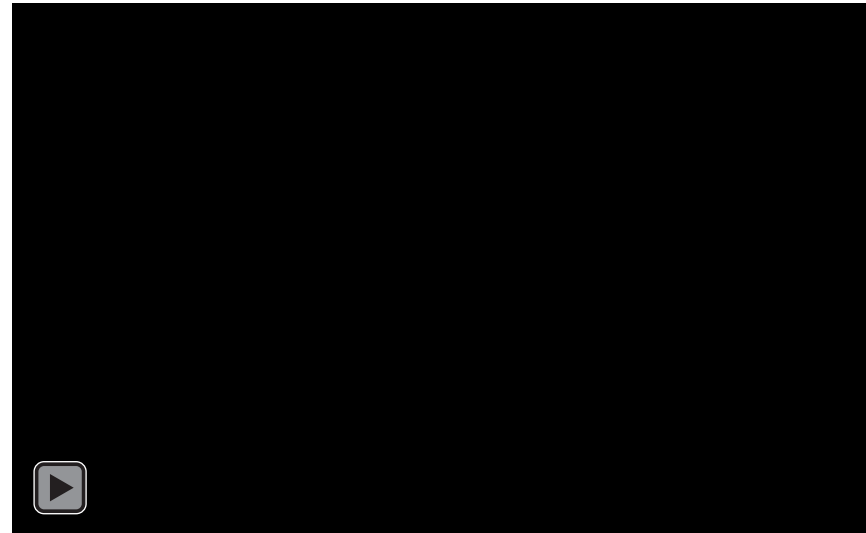
Ez csak kvantumban lehetséges.

Példák

$j = 2, i = 1$ potenciálgödör, L széles,
 $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$



$j = 3, i = 1, L$ széles,
 $c_1 = c_3 = 1/\sqrt{2}$



A rezgés gyorsabb, mert az energiakülönbség nagyobb

A szimulációk innét:

https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations_html5/sims/SuperpositionStates/SuperpositionStates.html

Mérhető következmények, pl. ammóniamézer, Feynman 8, 100. fejezet

Káoszvalószínűség

Emlékeztető, a Brown-mozgás sebességének időfüggő valószínűségeloszlása:

$$P(v, t) \sim e^{-\frac{(v-v(t))^2}{2\sigma^2(t)}} \quad v(t) = v_0 e^{-\gamma t} \text{ a zajmentes mozgás, a } \dot{v} = -\gamma v \text{ megoldása,}$$
$$\sigma^2(t) = kT/m(1 - e^{-\gamma t})$$

Zajmentes ($T = 0$) esetben az eloszlás szélessége $\sigma^2 = 0$: *éles* valószínűségi csúcs mozog a testtel

Ha a változó a háromdimenziós $\mathbf{x}$ vektor, a drift $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, a Langevin- és Fokker--Planck-egyenletek:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sqrt{2D} \boldsymbol{\xi}(t) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})P(\mathbf{x}, t)) + D\Delta P$$

A zajmentes eset:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})P(\mathbf{x}, t))$$

A determinisztikus mozgásegyenlet,
akár Newton-egyenlet is lehet

Degenerált Fokker—Planck-egyenlet (nincs bene
diffúzió), mely valószínűséget rendel a determinisztikus
mozgáshoz, 1998. Mindig P^* határeloszláshoz tart.

Egyszerű háromváltozós mozgás esetén a P^* határeloszlás olyan éles csúcs lesz, mely együtt mozog a testtel, s esetleg megáll ott, ahol a test.

Kaotikus mozgásban a közel induló mozgások szétválnak. Az egyedi mozgás *előrejelezhetetlen*.

A mozgások együttese ezért sokféle lehet. A határeloszlás mindig kiterjedt.

Ez a P^* határeloszlás jellemzi a hosszú idejű mozgást.

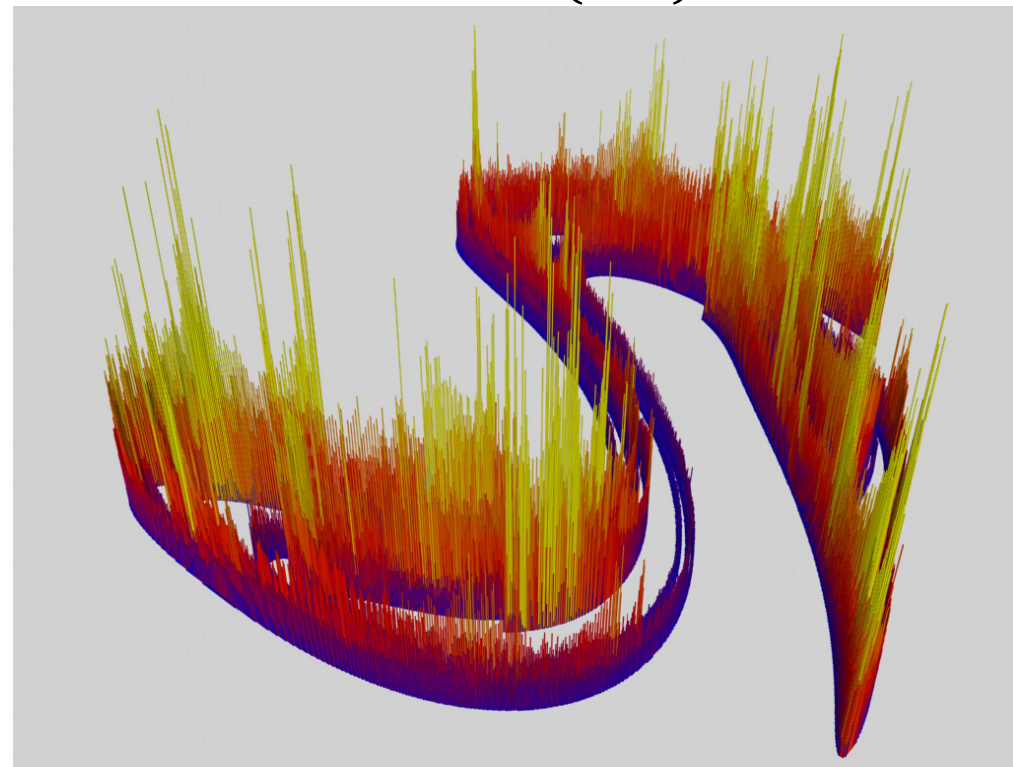
Valószínűségi nyelven (vagyis sok kísérlet eredményként) *a káosz teljesen pontosan jelezhető előre*.

Példa: gerjesztett
anharmonikus oszcillátor

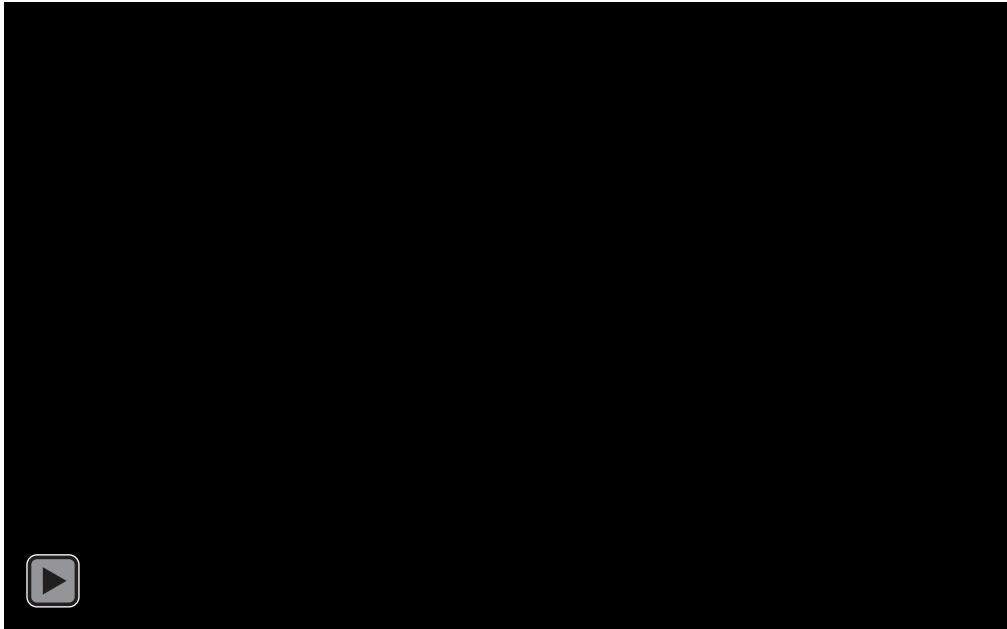
$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -a x - b x^3 - c v + A \cos \omega t\end{aligned}$$

*A Newton-egyenlethez is
tartozik nemtriviális
valószínűségeloszlás
(ha kaotikus mozgást ír le)*

A gerjesztett anharmonikus oszcillátor $P^*(x, v)$ határeloszlása
egész számú
gerjesztési
periódus után:



Összefoglalás

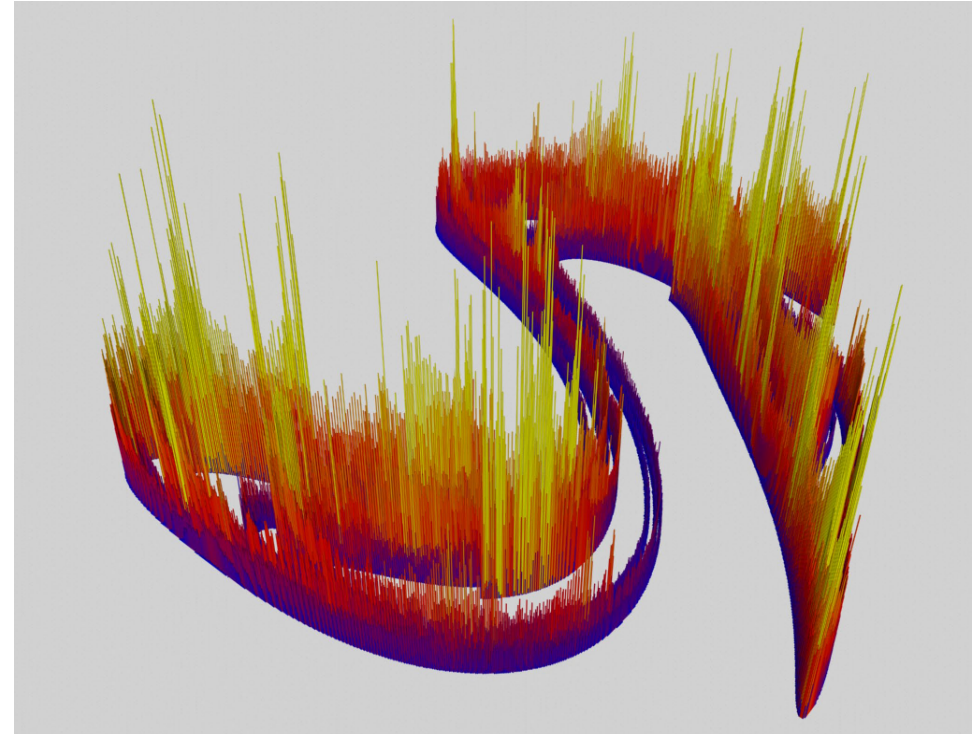


Mikroszkopikus világ

Az emberi kultúra gyöngyszemei. A rendszerek csak így írhatók le: valószínűségi törvényekkel

Mondhatjuk, hogy... ~~csak~~ valószínűségi kijelentések tehetők?

Mondjuk inkább ... **csakis** valószínűségi kijelentések tehetők.



Makroszkopikus világ