4. Számelmélet, számrendszerek

I. Elméleti összefoglaló

A maradékos osztás tétele:

Legyen a tetszőleges, b pedig nullától különböző egész szám. Ekkor léteznek olyan, egyértelműen meghatározott q és r egész számok, amelyekre $a = bq + r$ és $0 \leq r < |b|$.
(q-t hányadosnak, r-et maradéknak nevezzük.)

Oszthatóság fogalma

A ***b* egész számot az *a* egész szám osztójána**k nevezzük, ha van olyan q egész szám, amelyre $a = bq$.
(Ugyanezt a kapcsolatot így is kifejezhetjük: a osztható b-vel vagy a többszöröse b-nek.) Jelölése: $b|a$.

A továbbiakban számon, mindig egész számot értünk.

Az oszthatóság tulajdonságai:

- Minden a-ra $a|a$, $1|a$ és $a|0$.
- Ha $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$.
- Ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a = b$ vagy $a = -b$.
- Ha $b|a$ igaz, tetszőleges a szám esetén, akkor $b = 1$ vagy $b = -1$.
- Ha $0|a$, akkor $a = 0$.
- Ha $a|1$, akkor $a = 1$ vagy $a = -1$.
- Ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|b + c$, valamint $a|b - c$.
- Ha $a|b$ és d tetszőleges (egész) szám, akkor $a|bd$, továbbá $ad|bd$.
- $a - b|a^n - b^n$, ahol n tetszőleges természetes szám.
- $a + b\big|a^{2k} - b^{2k}$, ahol k tetszőleges természetes szám.
- $a + b\big|a^{2k+1} + b^{2k+1}$, ahol k tetszőleges természetes szám.

Oszthatósági szabályok:

- Az utolsó számjegyek alapján dönthető el a : 2; 4; 8; 5; 25; 10; 100; 1000… , általában a $2^n \cdot 5^k$ alakú számokkal való oszthatóság, mégpedig a következőképpen:
  - 2-vel, 5-tel, illetve 10-zel pontosan akkor osztható egy szám, ha az utolsó számjegy 2-vel, 5-tel, illetve 10-zel osztható.
  - 4-gyel, 25-tel, illetve 100-zal való oszthatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy a szám utolsó két jegyéből álló, legfeljebb kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel, 25-tel, illetve 100-zal.
  - 8-cal, 125-tel, illetve 1000-rel pontosan akkor osztható egy szám, ha az utolsó három számjegyéből álló, legfeljebb háromjegyű szám osztható 8-cal, 125-tel, illetve 1000-rel.
  - Általában a $2^n \cdot 5^k$ alakú számmal pontosan azok a számok oszthatók, amelyek utolsó m számjegyéből álló (legfeljebb) m jegyű szám osztható $(2^n \cdot 5^k)$-vel, ahol $m = max\{n; k\}$.
- Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, illetve 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 3-mal, illetve 9-cel.

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Az a és b pozitív számok **legnagyobb közös osztója** a d pozitív szám, ha

- $d|a$ és $d|b$, valamint
- ha egy c számra $c|a$ és $c|b$ teljesül, akkor $c|d$ is fennáll.

Jelölése: $d = (a;b)$.

Megjegyzés:

- Bizonyítható, hogy két pozitív szám legnagyobb közös osztója egyértelműen meghatározható.
- Két szám legnagyobb közös osztója, a közös osztók közül a legnagyobb.

Két pozitív számot **relatív prímnek** nevezzük, ha legnagyobb közös osztójuk 1.

a és b pozitív számok **legkisebb közös többszöröse** a k pozitív szám, ha

- $a|k$ és $b|k$, valamint
- ha egy c számra $a|c$ és $b|c$, akkor $k|c$ is fennáll.

Jelölése: $k = [a;b]$.

Megjegyzés:

- Bizonyítható, hogy két pozitív szám legkisebb közös többszöröse egyértelműen meghatározható.
- Két szám legkisebb közös többszöröse, a pozitív közös többszörösök közül a legkisebb.

Meghatározásuk: Két vagy több pozitív szám **legnagyobb közös osztóját** a számok prímhatvány felbontásából megkapjuk, ha a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb kitevőjű hatványra emeljük, majd ezeket összeszorozzuk.
Két vagy több pozitív szám **legkisebb közös többszörösét** megkapjuk, ha a számok prímhatvány felbontásában az összes előforduló prímszámot az előforduló legnagyobb hatványon összeszorozzuk.

A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös tulajdonságai:
Legyenek *a, b, c* pozitív számok

- $(ca;cb) = c(a;b)$
- ha $c|ab$ és $(a;c) = 1$, akkor $c|$b.
- $a|c$ és $b|c \Leftrightarrow [a;b]|c$
- $(a;b)[a;b] = ab$
- Ha $a < b$, akkor $(a;b) = (a;b-a)$. (A legnagyobb közös osztó általánosabb értelmezése esetén a feltételre nincs szükség.)

Prímszám, összetett szám:

Azokat a pozitív számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztójuk van, **prímszám**oknak nevezzük.
Azokat a pozitív számokat, amelyeknek kettőnél több pozitív osztójuk van, **összetett szám**oknak nevezzük.
Tételek:

- Ha a p prímszámra $p|ab$, akkor $p|a$ vagy $p|b$.
- Végtelen sok prímszám van.
- **A számelmélet alaptétele**: Bármely összetett szám felbontható véges sok prímszám szorzatára, s ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

- Ha az n összetett szám prímhatvány felbontása: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ($p_1, p_2, \dots, p_k$ különböző prímszámok, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ pozitív egész számok), akkor az ***n* szám pozitív osztóinak a száma**: $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Számrendszerek:

Tétel: Legyen a 1-nél nagyobb rögzített egész szám.
Ekkor bármely n pozitív egész szám egyértelműen felírható a következő alakban:

$$n = b_0 \cdot a^k + b_1 \cdot a^{k-1} + \dots + b_{k-1} \cdot a + b_k\,, \qquad \text{ahol } 0 \le b_i \le a - 1 \text{ és } b_0 \ne 0.$$

Az n szám fenti előállítását, az n szám a alapú számrendszerben való felírásának nevezzük és így jelöljük:

$$n = {b_0 b_1 \dots b_{k-1} b_k}_a \quad \text{vagy} \quad n = \overline{b_0 b_1 \dots b_{k-1} b_k}_a$$

(Ez utóbbi jelölést a szorzattól való megkülönböztetés miatt használjuk.)

Megjegyzések:

- A tízes számrendszerben az alap jelölésétől eltekintünk.
- Az a alapú számrendszerben előforduló számjegyek: 0, 1, 2,…, $a - 1$.
- A 10-nél nagyobb alap esetén a szükséges számjegyeket az ABC betűivel jelöljük, $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, stb.

II. Kidolgozott feladatok

1. Milyen számjegyek írhatók a és b számjegyek helyére, ha
   a) $18 | \overline{37a19b}$
   b) $75 | \overline{830a1b5}$

Megoldás:

a) Egy szám pontosan akkor osztható 18-cal, ha 2-vel és 9-cel osztható, mert 2 és 9 legkisebb közös többszöröse 18. Egy szám akkor páros, ha az utolsó számjegye páros, tehát b lehetséges értékei: 0, 2, 4, 6, 8. Egy szám akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel. A számjegyek összege: $20 + a + b$. A lehetséges számpárok:

b	0	2	4	6	8
a	7	5	3	1	8

b) Egy szám akkor és csak akkor osztható 75-tel, ha 3-mal és 25-tel osztható, mivel $[3; 25] = 75$. 25-tel akkor osztható a szám, ha 00-ra, 25-re, 50-re vagy 75-re végződik. Mivel az utolsó számjegy 5, ezért b lehetséges értékei: 2, illetve 7. Egy szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. Itt a számjegyek összege: $17 + a + b$. Ez alapján a és b lehetséges értékei:

b	2	2	2	7	7	7	7
a	2	5	8	0	3	6	9

2. Határozzuk meg a és b legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, ha
   a) $a = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2$, $b = 6^3 \cdot 15^2 \cdot 770^2$;
   b) $a = 1386$, $b = 1932$!

Megoldás:

a) Először meghatározzuk b prímhatvány felbontását.
$b = 6^3 \cdot 15^2 \cdot 770^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2$.

$(a; b) = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2$, $\quad [a; b] = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2$.

b) **I. Megoldás**: Megoldhatjuk a feladatot a számok prímhatvány felbontása segítségével: $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$.

$(a; b) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $[a; b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 = 63756$.

II. Megoldás: A legnagyobb közös osztót meghatározhatjuk az $(a; b) = (a; b - a)$ azonosság többszöri felhasználásával.

$$(1386; 1932) = (1386; 546) = (294; 546) = (294; 252) = (42; 252).$$

Mivel $252 = 42 \cdot 6$, ezért $(1386; 1932) = 42$. Az alkalmazott eljárást euklideszi algoritmusnak nevezzük.

$$[1386; 1932] = \frac{1386 \cdot 1932}{(1386; 1932)} = 63756.$$

3. Adjuk meg azokat az x és y pozitív egész számokat, amelyekre
   a) $(x; 36) = 9$ $\qquad$ b) $[y; 388] = 3492$

Megoldás:

a) x 9-nek többszöröse, de 2-nek nem. x: 9, 27, 45, …, általában $x = 9(2k + 1)$, ahol k természetes számot jelöl.

b) $388 = 2^2 \cdot 97$, $3492 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 97$ alapján y lehetséges értékei: 3^2, $3^2 \cdot 2$, $3^2 \cdot 2^2$, $3^2 \cdot 97$, $3^2 \cdot 2 \cdot 97$, $3^2 \cdot 2^2 \cdot 97$, azaz 9, 18, 36, 873, 1746, 3492.

4. Két pozitív szám legnagyobb közös osztója 18, legkisebb közös többszöröse 1080. Mi lehet ez a két szám?

Megoldás:

A feltétel szerint a és b számokra $(a; b) = 18$ és $[a; b] = 1080$. $1080 = 18 \cdot 60$ figyelembe vételével keressük azokat az x és y pozitív számokat, amelyekre: $a = 18x$, $b = 18y$ és

$$\left.\begin{array}{r}(x; y) = 1\\ [x; y] = 60\end{array}\right\}.$$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, így feltéve, hogy $x \leq y$,

x	1	4	3	5
y	60	15	20	12

ebből:

a	18	72	54	90
b	1080	270	360	216

Tehát a két pozitív szám lehet 18 és 1080, 72 és 540, 54 és 360, valamint 90 és 216.

5. a) Határozzuk meg az $n = 6^3 \cdot 7^4 \cdot 8^5 \cdot 9^6$ szám pozitív osztóinak a számát!
   b) Adjuk meg, hogy az $n = 6^3 \cdot 7^4 \cdot 8^5 \cdot 9^6$ számnak hány olyan pozitív osztója van, amelyik osztható 14-gyel?

Megoldás:

a) A pozitív osztók számát n prímhatvány felbontásából tudjuk meghatározni:

$$n = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 2^{15} \cdot 3^{12} = 2^{18} \cdot 3^{15} \cdot 7^4,$$

$$d(n) = 19 \cdot 16 \cdot 5 = 1520.$$

b) **I. Megoldás**: Ha egy osztó osztható 14-gyel, akkor az osztó prímtényezős felbontásában szerepel a 2 és a 7, tehát a 2 kitevője 1, 2,…, 18 lehet, ez 18 lehetőség; a 7 kitevője 1, 2, 3 vagy 4 lehet, ez 4 lehetőség. A 3 vagy nem szerepel az osztóban vagy 1, 2,…, 15 kitevővel szerepel, ez 16 lehetőség. Így egy osztót $18 \cdot 4 \cdot 16 = 1152$ féle módon készíthetünk el.

II. Megoldás: n 14-gyel osztható pozitív osztói, $\frac{n}{14} = 2^{17} \cdot 3^{15} \cdot 7^3$ pozitív osztói, számuk $18 \cdot 16 \cdot 4 = 1152$.

6. Adjuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelynek 18 pozitív osztója van!

Megoldás:

Ha az n pozitív szám prímhatvány felbontása $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$, akkor pozitív osztóinak a száma: $d(n) = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_s + 1)$. A feltétel szerint

$$18 = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_s + 1).$$

18-at felbontjuk pozitív egész számok szorzatára, majd a felbontásból n prímhatvány alakjára következtetünk, végül kiválasztjuk közülük a legkisebbet.

18=	18	$9 \cdot 2$	$6 \cdot 3$	$3 \cdot 3 \cdot 2$
n prímfelbontása	p^{17}	$p_1^8 \cdot p_2$	$p_1^5 \cdot p_2^2$	$p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3$
ezek közül a legkisebb:	$2^{17} = 131072$	$2^8 \cdot 3 = 768$	$2^5 \cdot 3^2 = 288$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

Tehát a 18 pozitív osztójú pozitív számok közül a legkisebb a 180.

7. Bizonyítsuk be, hogy két tetszőleges páratlan szám négyzetének a különbsége osztható nyolccal!

Megoldás:

A két páratlan szám $2a + 1$, illetve $2b + 1$ alakban írható fel. Ezek négyzetének különbsége:

$(2a + 1)^2 - (2b + 1)^2 = 4a^2 - 4b^2 + 4a - 4b = 4(a^2 - b^2 + a - b) = 4(a - b)(a + b + 1)$.
$(a - b)$ és $(a + b + 1) = (a - b + 2b + 1)$ különböző paritású számok, ezért az egyik páros, s így a szorzatuk osztható kettővel, ennek négyszerese pedig osztható nyolccal.

8. Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, amellyel tetszőleges n egész szám esetén osztható $n^5 - 5n^3 + 4n$?

Megoldás:

Alakítsuk szorzattá a kifejezést!

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

Öt egymást követő egész szám közül legalább kettő páros; két egymást követő páros szám közül pontosan az egyik 4-gyel is osztható, ezért a szorzat osztható nyolccal. Öt egymást követő egész szám közül pontosan az egyik 5-tel és legalább az egyik hárommal osztható. Ezért a szorzat osztható $[8;3;5] = 120$-szal. A vizsgált kifejezés tetszőleges n-re 120-szal osztható, de 120-nál nagyobb számmal nem, mert az első öt pozitív egész szám szorzata $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

9. Mutassuk meg, hogy ha egy (tízes számrendszerbeli) háromjegyű számot kétszer egymás mellé írunk, akkor 13-mal osztható számot kapunk!

Megoldás:

Legyen a háromjegyű szám $\overline{abc}$. (A felülvonással jelöljük, hogy itt nem egy három tényezős szorzatról van szó.) Bizonyítandó: $13|\overline{abcabc}$. Írjuk fel a hatjegyű számot 10 hatványai segítségével, majd csoportosítsuk a tagokat az alábbiak szerint:

$$\overline{abcabc} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c =$$
$$= a \cdot 100100 + b \cdot 10010 + c \cdot 1001 = 1001(100a + 10b + c)$$

Mivel $1001 = 13 \cdot 7 \cdot 11$, ezért az összes ilyen módon előállított hatjegyű szám osztható 13-mal.

Megjegyzés:

- A bizonyításból látszik, hogy az így kapott szám osztható 1001 összes osztójával.
- A bizonyítás egyszerűbbé válik, ha észrevesszük, hogy

$$\overline{abcabc} = \overline{abc000} + \overline{abc} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}\,.$$

10. Milyen számmal osztva ad azonos maradékot a 161 és a 215?

Megoldás:

Jelöljük a keresett számot x-szel, a közös maradékot m-mel, a hányadosokat q_1-gyel és q_2-vel!

$$161 = xq_1 + m$$

$$215 = xq_2 + m$$

A második egyenletből kivonjuk az elsőt és szorzattá alakítjuk a jobb oldalt:

$$54 = x(q_2 - q_1).$$

x csak 54 osztója lehet. ($x = 1$ nem megoldás.)

x	2	3	6	9	18	27	54
m	1	2	5	8	17	26	53

Tehát 161 és 215, 2-vel, 3-mal, 6-tal, 9-cel, 18-cal, 27-tel és 54-gyel osztva ad azonos maradékot.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $x = 5a + 9b$ osztható 23-mal, akkor $y = 3a + 10b$ is osztható 23-mal! Igaz-e az állítás megfordítása?

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy ha $23|x$, akkor tetszőleges c és d egész szám esetén $23|cx + 23d$.

Próbálkozzunk azzal, hogy x-et 3-mal, y-t 5-tel szorozzuk: $3x = 3(5a + 9b) = 15a + 27b$, $5y = 15a + 50b$. Vegyük észre, hogy ezek különbsége osztható 23-mal, pontosabban

$$3x + 23b = 5y \qquad (*)$$

Tehát $23|x \Longrightarrow 23|3x + 23b \Longrightarrow 23|5y$, és mivel $(5; 23) = 1$, ezért $23|y$. A (*) egyenlőségből, valamint abból, hogy $(3; 23) = 1$, következik, hogy az állítás megfordítása is igaz. Tehát $5a + 9b$ akkor és csak akkor osztható 23-mal, ha $3a + 10b$ osztható 23-mal.

Megjegyzés: Az állítás más alkalmasan választott számokkal való szorzással is igazolható. Például:

$$10(5a + 9b) = 50a + 90b = 9(3a + 10b) + 23a, \text{ vagy}$$

$$7(5a + 9b) = 35a + 63b = 4(3a + 10b) + 23a + 23b.$$

12. Melyek azok a pozitív négyjegyű számok, amelyek 6-tal osztva 4, 7-tel osztva 5, 8-cal osztva 6, 9-cel osztva 7 és 10-zel osztva 8 maradékot adnak?

Megoldás:

A keresett *n* szám a feltétel szerint:

$n = 6a + 4$, $n = 7b + 5$, $n = 8c + 6$, $n = 9d + 7$, $n = 10e + 8$, ahol a, b, c, d, e pozitív egész számokat jelölnek. Vegyük észre, hogy $n + 2$ osztható 6-tal, 7-tel, 8-cal 9-cel és 10-zel, tehát ezek legkisebb közös többszörösével is. $[6; 7; 8; 9; 10] = 2520$, ezért figyelembe véve, hogy n négyjegyű szám, n+2 lehetséges értékei: 2520, 5040, illetve 7560. A feltételnek megfelelő számok 2518, 5038 és 7558.

13. Bizonyítsuk be, hogy

a) $10|147^{2013} - 13^{1023}$ b) $11|2^{n+1} \cdot 3^{2n+3} + 8 \cdot 7^{n+1}$

ahol *n* természetes szám.

Megoldás:

a) Elég, ha megmutatjuk, hogy a két hatvány ugyanarra a számra végződik. Egy egész szám hatványainak a végződése csak az alap utolsó számjegyétől függ.

a hatvány	utolsó számjegye:	a hatvány	utolsó számjegye:
$\mathbf{7^1}$	7	$\mathbf{3^1}$	3
$\mathbf{7^2}$	9	$\mathbf{3^2}$	9
$\mathbf{7^3}$	3	$\mathbf{3^3}$	7
$\mathbf{7^4}$	1	$\mathbf{3^4}$	1
$\mathbf{7^5}$	7	$\mathbf{3^5}$	3

Megfigyelhető, hogy a 7 és a 3 hatványainak utolsó jegye periodikusan ismétlődik, a periódus hossza 4. A hatványok utolsó számjegyét megkapjuk, ha a kitevők 4-gyel való osztási maradékát meghatározzuk. Ez 2013 esetében 1, 1023 esetében pedig 3. Tehát 147^{2013} és 13^{1023} is 7-re végződik, ezért a különbségük osztható 10-zel.

b) **I. Megoldás**: Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait, majd adjunk az összeghez $54 \cdot 7^n - 54 \cdot 7^n = 0$-t.

$$2^{n+1} \cdot 3^{2n+3} + 8 \cdot 7^{n+1} = 2 \cdot 2^n \cdot 27 \cdot 9^n + 56 \cdot 7^n = 54 \cdot 18^n + 56 \cdot 7^n =$$
$$= 54 \cdot (18^n - 7^n) + 110 \cdot 7^n$$

Mindkét tag, és így az összeg is osztható 11-gyel. (Felhasználtuk, hogy $a - b | a^n - b^n$, ahol n tetszőleges természetes számot jelöl.)

II. Megoldás: Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.

A kifejezés értéke $n = 0$ esetén a kifejezés értéke: $2 \cdot 27 + 8 \cdot 7 = 110$, $n = 1$ esetén: $4{\cdot}243{+}8{\cdot}49{=}1364$, 11-gyel osztható számok. Feltéve, hogy igaz az állítás valamely n természetes számra, bizonyítjuk, hogy n+1-re is igaz, azaz teljesül: $11|2^{n+2}{\cdot}3^{2n+5}{+}8{\cdot}7^{n+2}$.

$$2^{n+2}{\cdot}3^{2n+5}{+}8{\cdot}7^{n+2} = 18 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^{2n+3} + 7 \cdot 8 \cdot 7^{n+1} =$$

$$= 7(2^{n+1} \cdot 3^{2n+3} + 8 \cdot 7^{n+1}) + 11 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^{2n+3}$$

Az összeg első tagja az indukciós feltétel szerint osztható 11-gyel, a második tag 11 egész számú többszöröse, így az összeg is osztható 11-gyel, amit bizonyítani akartunk.

14. Bizonyítsuk be, hogy $5^n + 3^n$ nem lehet négyzetszám!

Megoldás:

Vizsgáljuk meg $5^n + 3^n$ utolsó számjegyét! 5 minden hatványa 5-re végződik. 3 hatványainak utolsó számjegye 3, 9, 7, 1,…Ez e négy szám ismétlődik. Ezért az összeg utolsó számjegye 8, 4, 2 vagy 6. Ismert, hogy a négyzetszámok utolsó számjegye: 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9. Tehát páratlan n esetén $5^n + 3^n$ nem lehet négyzetszám. Vizsgáljuk meg az $n = 2k$ esetet! Az $5^{2k} + 3^{2k} = 25^k + 9^k = (24 + 1)^k + (8 + 1)^k$ összeg 4-gyel osztva 2 maradékot ad, holott a páros számok négyzete osztható néggyel, a páratlan számok négyzetei néggyel osztva 1 maradékot adnak, vagyis nincs olyan négyzetszám, amelyiket néggyel osztva 2 maradékot kapnánk. Tehát páros n esetén sem lehet a vizsgált kifejezés négyzetszám.

15. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi törtek nem egyszerűsíthetők egyetlen n, illetve k egész számra sem!

$a)$ $\dfrac{3n+1}{5n+2}$ $b)$ $\dfrac{8k^4 + 4k^2 + 1}{4k^3 + k}$

a) **I. Megoldás**: Tegyük fel, hogy egyszerűsíthető a tört egy $\boldsymbol{x \neq \pm 1}$ számmal! Ekkor

$$3n + 1 = kx \text{ és}$$

$$5n + 2 = lx\,,$$

ahol $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ egész számok. Szorozzuk meg az első egyenletet 5-tel, a másodikat 3-mal, majd vonjuk ki az így kapott első egyenletet a másodikból:

$$15n + 5 = 5kx$$

$$15n + 6 = 3lx,$$

$$1 = 3lx - 5kx = x(3l - 5k).$$

1 csak úgy írható fel két egész szám szorzataként, ha vagy mindkét tényező 1, vagy mindkét tényező -1. Ellentmondásra jutottunk azzal a feltétellel, hogy x 1-től és -1-től különböző egész szám. Tehát a tört nem egyszerűsíthető.

II. Megoldás: $\frac{3n+1}{5n+2}$ pontosan akkor egyszerűsíthető, amikor a reciproka egyszerűsíthető:

$$\frac{5n+2}{3n+1} = 1 + \frac{2n+1}{3n+1}$$

Ez utóbbi tört is pontosan akkor egyszerűsíthető, amikor a reciproka is:

$$\frac{3n+1}{2n+1} = 1 + \frac{n}{2n+1}.$$

Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva:

$$\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$

ami nem egyszerűsíthető.

III. Megoldás: Ha a tört egyszerűsíthető, akkor a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával egyszerűsíthető. Megmutatjuk, hogy $3n+1$ és $5n+2$ legnagyobb közös osztója 1. Eközben felhasználjuk, hogy $(a; b) = (a; a - b)$.

$$(5n + 2; 3n + 1) = (2n + 1; 3n + 1) = (2n + 1; n) = (1; n) = 1,$$

amit bizonyítani akartunk. (Látszik, hogy a III. megoldás során ugyanazokat az átalakításokat kellett elvégezni, mint az előzőben, de a leírás jóval egyszerűbb volt.)

b) **I. Megoldás**: (az a) második megoldásának gondolatmenete alapján.)

$$\frac{8k^4 + 4k^2 + 1}{4k^3 + k} = \frac{2k(4k^3 + k) + 2k^2 + 1}{4k^3 + k} = 2k + \frac{2k^2 + 1}{4k^3 + k}$$

Egy tört akkor és csak akkor egyszerűsíthető, ha a reciproka is:

$$\frac{4k^3 + k}{2k^2 + 1} = \frac{2k(2k^2 + 1) - k}{2k^2 + 1} = 2k - \frac{k}{2k^2 + 1},$$

$$\frac{2k^2 + 1}{k} = 2k + \frac{1}{k}.$$

Ez utóbbi tört nem egyszerűsíthető, ezért az eredeti sem.

II. Megoldás:(az a) harmadik megoldásának gondolatmenete szerint.)

Meghatározzuk a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezések legnagyobb közös osztóját. Ha ez 1, akkor a tört nem egyszerűsíthető:

$$(8k^4 + 4k^2 + 1; 4k^3 + k) = (8k^4 + 4k^2 + 1 - 2k(4k^3 + k); 4k^3 + k) =$$
$$= (2k^2 + 1; 4k^3 + k) = \left(2k^2 + 1; 4k^3 + k - 2k(2k^2 + 1)\right) = (2k^2 + 1; -k) = (1; -k) =$$
$$= 1.$$

16. Bontsuk fel az 543-at két természetes szám összegére, amelyek közül az egyik 10-zel, a másik 17-tel osztható!

Megoldás:

A feltétel szerint: $10x + 17y = 543,$ ahol x és y természetes számok. Fejezzük ki a kisebb együtthatójú ismeretlent az egyenletből!

$$10x = 543 - 17y = (540 - 20y) + (3 + 3y)$$

A bal oldal és a jobb oldali összeg első tagja osztható 10-zel, ezért a második tagnak, $(3 + 3y)$ −nak is 10 többszörösének kell lennie, vagyis van olyan k egész szám, amelyre: $3 + 3y = 10k$ fennáll. Az előző módszert alkalmazva: $3y = (9k - 3) + k$. Mivel $3y$ és $(9k - 3)$ 3-mal oszthatók, ezért k is többszöröse 3-nak, azaz $k = 3n$, ahol n egész szám. Ezeket visszahelyettesítve:

$$y = 3k - 1 + n = 10n - 1,$$

$$x = 54 - 2y + k = 54 + 2 - 20n + 3n = 56 - 17n.$$

Ellenőrizzük, hogy az x-re és y-ra kapott kifejezésekre teljesül a $10x + 17y = 543$ feltétel:

$$10(56 - 17n) + 17(10n - 1) = 560 - 170n + 170n - 17 = 543.$$

Szükséges még, hogy x és y természetes szám legyen, azaz az $56 - 17n \geq 0$ és a $10n - 1 \geq 0$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesüljenek. Ezekből $1 \leq n \leq 3$. Tehát a feladatnak három megoldása van.

$n = 1$ esetén a számok: $10x = 390,\ 17y = 153,$

$n = 2$ esetén a számok: $10x = 220,\ 17y = 323,$ és

$n = 3$ esetén a számok: $10x = 50,\ 17y = 493.$

Megjegyzés: Az olyan egyenleteket, amelyek megoldását az egész számok halmazán, vagy az egész számok halmazának valamely részhalmazán keressük, diofantikus egyenletnek nevezzük. (Diophantosz; 3.század, Alexandria)

17. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek 19-cel nagyobbak, mint számjegyeik szorzata?

I. Megoldás:

A feltétel szerint $\overline{ab} = a \cdot b + 19$, ahol a és b olyan egész számok,

amelyekre $1 \leq a \leq 9$ és $0 \leq b \leq 9$.

$$10a + b = a \cdot b + 19 \Leftrightarrow a \cdot b - 10a - b + 19 = 0$$

Átrendezés után szorzattá alakítjuk a bal oldalt!

$$a(b - 10) - (b - 10) + 9 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 10) = -9 \Leftrightarrow (a - 1)(10 - b) = 9$$

A 9-et két olyan egész szám szorzatára kell bontanunk, amelyekre

$0 \leq a - 1 \leq 8$, illetve $1 \leq 10 - b \leq 10$.

$a - 1$	$10 - b$	a	b
1	9	2	1
3	3	4	7

A feltételeknek csak két szám felel meg: a 21 és a 47 $(21 = 2 + 19;\ 47 = 28 + 19)$.

II. Megoldás:

A feltétel szerint $\overline{ab} = a \cdot b + 19$, azaz $10a + b = a \cdot b + 19$, ahol a és b olyan egész számok, amelyekre $1 \leq a \leq 9$ és $0 \leq b \leq 9$.

Fejezzük ki az egyenletből a-t!

$$a \cdot b - 10a = b - 19 \Leftrightarrow a(b - 10) = b - 19$$

$$a = \frac{b - 19}{b - 10} = 1 - \frac{9}{b - 10} = 1 + \frac{9}{10 - b}.$$

Keressük azokat a 0 és 9 közé eső b egész számokat, amelyekre $\frac{9}{10-b}$ is egész. E tört értéke pontosan akkor egész, ha 9 többszöröse $(10 - b)$-nek.

$10 - b$	1	3	9
b	9	7	1
a	10	4	2

(Figyelembe vettük, hogy $(10 - b)$ nem lehet negatív szám.)
Az első számpár nem felel meg a feltételnek. A keresett kétjegyű számok a 21 és a 47.

18. Írjuk át a következő számokat a megadott számrendszerbe!
   a) $3051_6 =$ $\qquad\qquad\qquad _{10}$
   b) $3189_{10} =$ $\qquad\qquad\qquad _{4}$

Megoldás:

a) A hatos számrendszerben a helyiértékek jobbról balra haladva: 1, 6, 6^2, $6^3, \ldots$ Ez alapján
$$3051_6 = 3 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 1 = 679_{10}$$

b) **I. Megoldás**: Az előző megoldás gondolatmenete szerint felírjuk a 4 hatványait: 1, 4, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$, $4^6 = 4096$; $3189 < 4096$. 3189-et maradékosan elosztjuk a legnagyobb nála nem nagyobb 4 hatvánnyal: $3189 = 3 \cdot 1024 + 117$. A legnagyobb helyiértéken 3 áll. $117 < 256$, ezért a következő számjegy 0. Az eljárást folytatva $117 = 1 \cdot 64 + 53$, $\quad 53 = 3 \cdot 16 + 5$, $\quad 5 = 1 \cdot 4 + 1$.
Így $3189 = 3 \cdot 4^5 + 0 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 1 = 301311_4$

II. Megoldás: Figyeljük meg, hogy ha a 3189-et 4-gyel osztjuk, maradékul az utolsó számjegyet, 1-et kapunk. Ha most a hányadost osztjuk 4-gyel, maradékul – jobbról – a következő számjegyet kapjuk. Az eljárás helyességét mutatja az összeg következő alakja:

$$3189 = (3 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1) \cdot 4 + 1 =$$

$$\left((3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 3) \cdot 4 + 1\right) \cdot 4 + 1 =$$

$$\left(\left(\left((3 \cdot 4 + 0) \cdot 4 + 1\right) \cdot 4 + 3\right) \cdot 4 + 1\right) \cdot 4 + 1.$$

Az alábbi táblázat első oszlopába kerülnek az osztandók: az eredeti szám, majd a 4-gyel (alapszámmal) való osztás hányadosai, a második oszlopba pedig a maradék. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a hányados 0 nem lesz. A szám 4-es számrendszerbeli számjegyeit alulról felfelé olvassuk ki.

3189	1
797	1
199	3
49	1
12	0
3	3
0	

Tehát $3189 = 301311_4$.

III. Ajánlott feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromjegyű számot 6-tal megszorzunk, majd az eredeti számot a szorzat jegyei után írjuk, akkor olyan hat vagy hétjegyű számot kapunk, amelyik osztható 353-mal!

2. Igazoljuk, hogy két, hárommal nem osztható egész szám összege vagy különbsége osztható hárommal!

3. Bizonyítsuk be, hogy 9 darab egymást követő egész szám négyzetének összege
   a) nem lehet prímszám;
   b) nem lehet négyzetszám!
   (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2009;. haladók versenye)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha n 3-nál nagyobb páratlan természetes szám, akkor $n^4 - 18n^2 + 17$ osztható 64-gyel!

5. Melyek azok az egész számok, amelyek 5-tel osztva 4-et, 8-cal osztva 6-ot adnak maradékul?

6. Melyek azok a háromjegyű (pozitív) számok, amelyekkel 9858-at osztva 130-at, 7448-at osztva 24-et kapunk maradékul?

7. Tudjuk, hogy $13n + 11$ és $10n + 7$ pozitív egész számok nem relatív prímek. Mi lehet a legnagyobb közös osztójuk?

8. Két természetes szám összege 2916, legnagyobb közös osztójuk 108. Melyek ezek a számok?

9. Mely p prímszám esetén lesz $p + 10$ és $p + 20$ is prímszám?

10. Igazoljuk, hogy bármely két, háromnál nagyobb ikerprímszám összege osztható 12-vel! (Az olyan prímszámpárokat, amelyek különbsége 2, ikerprímeknek nevezzük.)

11. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha p prímszámot, n pedig pozitív egész számot jelöl:
$$1 + p + p^2 + \cdots + p^n = 2801\,!$$
(A tudományegyetemek természettudományi karaira felvételizők felvételi feladata 1988.)

12. a) Bizonyítsuk be, hogy $2012^{2012} + 2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015}$ osztható 10-zel.
    b) Bizonyítsuk be, hogy $2013^{2013} + 2015^{2015}$ osztható 2014-gyel!

13. Mely n természetes számokra osztható 1972-vel $S = 345^n + 179^n - 5^n - 26^n + 493^n$? (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1972; haladók versenye)

14. Bizonyítsuk be, hogy $13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n esetén osztható 24-gyel! (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011; haladók versenye)

15. Mutassuk meg, hogy $333^{444} + 444^{333}$ osztható 7-tel!

16. Oldjuk meg a prímszámok halmazán a következő egyenletet $x^y + 1 = z$!

17. Oldjuk meg a prímszámok halmazán a $6x + 7y + 14z = 210$ egyenletet!

18. Melyek azok az n egész számok, amelyekre $2n^2 + 11n - 21$ egy prímszám négyzetével egyenlő?

19. Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma egész, a háromszög területének mérőszáma a kerület mérőszámának háromszorosa. Mekkorák a háromszög oldalai?

20. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet!
$$(x + y)(xy + 1) = 4xy$$

21. Írjuk át a következő számokat a megadott számrendszerbe!
    a) 31021_4 10-es;
    b) 3189_{10} 5-ös;
    c) 1220221_3 9-es;
    d) 572_8 2-es számrendszerbe.

22. Állapítsuk meg az alábbi számokról, hogy párosak vagy páratlanok!
    a) 10110_2 b) 4324_5 c)20121_3 d) 4531_6
    Fogalmazzuk meg, hogyan dönthető el a kérdés általános esetben!

23. Milyen számjegy írható x és y helyébe, hogy igaz állítást kapjunk?
    a) $10|3x45y_6$ b) $12|237xy_9$

24. Válasszuk ki az 1,2, …,100 számok közül tetszőlegesen 51-et. Bizonyítsuk be, hogy a kiválasztott számok közül van két olyan, amelyek közül az egyik a másik osztója!

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromjegyű számot 6-tal megszorzunk, majd az eredeti számot a szorzat jegyei után írjuk, akkor olyan hat vagy hétjegyű számot kapunk, amelyik osztható 353-mal!

    Megoldás:

    $6 \cdot \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 6001 \cdot \overline{abc}$ osztható 353-mal, mert $6001 = 17 \cdot 353$.

2. Igazoljuk, hogy két, hárommal nem osztható egész szám összege vagy különbsége osztható hárommal!

Megoldás:

A hárommal nem osztható egész számok 3-mal osztva 1-et vagy 2-t adnak maradékul.
Ha a két, hárommal nem osztható szám ugyanazt a maradékot adja hárommal osztva, akkor a különbségük osztható hárommal. (Betűs kifejezéssel: $(3n+1)-(3k+1)=3(n-k);$ illetve $(3n+2)-(3k+2)=3(n-k)$).

Ha a két, hárommal nem osztható szám hárommal osztva különböző maradékot ad, akkor az összegük osztható hárommal. (Betűs kifejezéssel: $(3n+1)+(3k+2)=3(n+k+1)$).

3. Bizonyítsuk be, hogy 9 darab egymást követő egész szám négyzetének összege
   a) nem lehet prímszám;
   b) nem lehet négyzetszám!

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2009; haladók versenye)

Megoldás:

Jelöljük a középső számot n-nel! A kilenc szám négyzetének összege:

$(n-4)^2+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2$

$=9n^2+2\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2)=9n^2+60.$

a) $9n^2+60=3\cdot(3n^2+20)$ hárommal osztható, háromnál nagyobb szám ($3n^2+20\geq 20$), ezért nem lehet prímszám.

b) Ha egy szám négyzetszám, akkor prímhatvány felbontásában a prímszámok kitevője páros szám. $9n^2+60=3\cdot(3n^2+20)$ szám hárommal osztható, de kilenccel nem, mivel a második tényező nem osztható hárommal, ezért kilenc egymást követő egész szám négyzetének az összege soha sem négyzetszám.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha n 3-nál nagyobb páratlan természetes szám, akkor n^4-18n^2+17 osztható 64-gyel!

I. Megoldás:

Egészítsük ki teljes négyzetté a kifejezést!

$$n^4-18n^2+17=(n^2-9)^2-64$$

Azt kell csak megmutatni, hogy $(n^2-9)^2$ osztható 64-gyel. Ehhez elég belátni, hogy $n^2-9=(n-3)(n+3)$ osztható 8-cal. Mivel n páratlan, ezért $n-3$ és $n+3$ páros számok, mégpedig $n+3=(n-3)+6$ miatt az egyik 4-gyel is osztható. (Ha $n-3=4k+2$, akkor $n+3=4k+8$.) Ezért a szorzatuk osztható 8-cal, amit bizonyítani akartunk.

II. Megoldás:

Alakítsuk szorzattá az adott kifejezést!

$$n^4-18n^2+17=(n^2-1)(n^2-17)=(n-1)(n+1)(n^2-17)$$

A feltétel szerint az első két tényező szomszédos páros számok, ezért az egyik 4-gyel is osztható, így a szorzatuk osztható 8-cal. A harmadik tényezőt átalakítjuk a következőképpen:

$$n^2-17=n^2-1-16=(n-1)(n+1)-16.$$

Mindkét tag osztható 8-cal, így a vizsgált kifejezés osztható $(8 \cdot 8 =)64$-gyel.

Megjegyzés: A bizonyítások során csak azt használtuk fel, hogy *n* páratlan szám, ezért az állítás tetszőleges *n* páratlan számra igaz.

5. Melyek azok az egész számok, amelyek 5-tel osztva 4-et, 8-cal osztva 6-ot adnak maradékul?

Megoldás:

Érdemes megfigyelni, milyen maradékot adhat a szám $[5; 8] = 40$-nel osztva. Az első feltétel szerint a szám 40-nel osztva: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34 vagy 39 maradékot adhat. A második feltétel szerint a maradék 6, 14, 22, 30 vagy 38 lehet. A két feltétel egyszerre a $(40k + 14)$ alakú számokra teljesül, ahol $\boldsymbol{k}$ egész számot jelöl.

Megjegyzés: Hamarabb megkapjuk az eredményt, ha először megállapítjuk, milyen maradékok jöhetnek szóba a feltétel szerint, 8-cal való osztás alapján, majd ezek közül kiválasztjuk azt a maradékot, amely az 5-tel való osztási maradéknak is megfelel.

6. Melyek azok a háromjegyű (pozitív) számok, amelyekkel 9858-at osztva 130-at, 7448-at osztva 24-et kapunk maradékul?

Megoldás:

A keresett háromjegyű számot jelöljük *x*-szel, a hányadosokat q_1-gyel és q_2-vel! A feladat szerint

$$9858 = xq_1 + 130$$

$$7448 = xq_2 + 24.$$

Rendezés után az első egyenletből kivonjuk a másodikat és kiemeljük a közös tényezőt:

$$2304 = x(q_1 - q_2).$$

Ha van megoldás, az csak $2304 = 2^8 \cdot 3^2$ osztója lehet. A feladat szerint háromjegyű számot kell keresnünk. Figyelembe kell vennünk azt is, hogy a maradék kisebb az osztónál$\Rightarrow \boldsymbol{x} > 130$. 2304 háromjegyű osztói 2 hatványai szerint rendezve:

kétjegyű	kétjegyű	kétjegyű	$2^7 = 128 < 130$	$2^8 = 256$
kétjegyű	kétjegyű	$2^6 \cdot 3 = 192$	$2^7 \cdot 3 = 384$	$2^8 \cdot 3 = 768$
$2^4 \cdot 3^2 = 144$	$2^5 \cdot 3^2 = 288$	$2^6 \cdot 3^2 = 576$	négyjegyű	négyjegyű

A feladat feltételeit teljesítő számok a 144, a 192, a 256, a 288, a 384, az 576 és a 768.

7. Tudjuk, hogy a $13n + 11$ és a $10n + 7$ pozitív egész számok nem relatív prímek. Mi lehet a legnagyobb közös osztójuk?

I. Megoldás:

Jelöljük a két szám legnagyobb közös osztóját *x*-szel! A feltétel szerint
$13n + 11 = ax$ és $10n + 7 = bx$, ahol $(a; b) = 1$. Szorozzuk meg az első egyenletet 10-zel, a másodikat pedig 13-mal, majd vonjuk ki az így kapott első egyenletből a másodikat!

$$130n + 110 = 10ax$$

$$130n + 91 = 13bx$$

$$19 = 10ax - 13bx.$$

Az egyenlet jobb oldala szorzattá alakítható:

$$19 = (10a - 13b)x.$$

19 prímszám, ezért csak úgy bontható két egész szám szorzatára, ha az egyik tényező 1, a másik 19, vagy az egyik tényező -1, a másik -19. A feltétel szerint a megadott két szám nem relatív prím, ezért $x \neq \pm 1$. Tehát x vagy 19, vagy -19. Mivel két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója pozitív, ezért, ha a két szám nem relatív prím, akkor legnagyobb közös osztójuk csak 19 lehet.
Ebben az esetben teljesülni kell $a -$ ra és $b -$ re: $10a - 13b = 1$. Ez fennáll például, ha $a = 4$ és $b = 3$. Ekkor $n = 5$; $13n + 11 = 76 = 4 \cdot 19$ és $10n + 7 = 57 = 3 \cdot 19$, tehát a két szám legnagyobb közös osztója 19.

II. Megoldás:

$$(13n + 11; 10n + 7) = (3n + 4; 10n + 7) = (3n + 4; n - 5) = (19; n - 5)$$
$$= \begin{cases} 1, \text{ha } 19 \nmid n - 5 \\ 19, \text{ha } 19 | n - 5 \end{cases}$$

Tehát, ha $13n + 11$ és $10n + 7$ nem relatív prím, akkor a legnagyobb közös osztójuk 19. Ez akkor áll fenn, ha $n = 19k + 5$ (ahol k természetesen számot jelöl).

8. Két természetes szám összege 2916, legnagyobb közös osztójuk 108. Melyek ezek a számok?

Megoldás:

Ha a keresett számok a és b, akkor $a + b = 1296$ és $(a; b) = 108$. Az utóbbi feltétel szerint $a = 108 \cdot x,\ b = 108 \cdot y,$ ahol $(x; y) = 1$. Ezekből $x + y = 12$. 12-t kell két, egymáshoz képest relatív prím összegére bontani.

x	1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~
y	11	~~10~~	~~9~~	~~8~~	7	~~6~~

A keresett számok, a megfelelő összetartozó x és y 108-szorosa: 108 és 1188, valamint 540 és 756.

Megjegyzés: A feladat megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy a+b többszöröse legyen $(a; b)$-nak.

9. Mely p prímszám esetén lesz $p + 10$ és $p + 20$ is prímszám?

Megoldás:

p nem lehet 2, mert egyetlen páros prímszám a 2, és két páros szám összege páros. $p = 3$ esetén 3+10=13 és 3+20=23 prímszámok.
Ha $p > 3$, akkor $p = 3k + 1$ vagy $p = 3k + 2$ alakú. Az első esetben $p + 20 = 3k + 21$, a második esetben $p + 10 = 3k + 12$. Ezek 3-nál nagyobb, hárommal osztható számok, tehát nem prímek. Tehát a 3 az egyetlen olyan p prímszám amelyre $p + 10$ és $p + 20$ is prímszám.

10. Igazoljuk, hogy bármely két, háromnál nagyobb ikerprímszám összege osztható 12-vel! (Az olyan prímszámpárokat, amelyek különbsége 2, ikerprímeknek nevezzük.)

Megoldás:

A feltétel szerint $p(> 3)$ és $p + 2$ prímszámok. Ebből következik, hogy $p + 1$ páros és osztható 3-mal, tehát $p + 1 = 6k$, ahol k pozitív egész szám. Ebből $p + (p + 2) = 2p + 2 = 12k$, amit igazolni akartunk.

11. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha p prímszámot, n pedig pozitív egész számot jelöl:

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^n = 2801\,!$$

(A tudományegyetemek természettudományi karaira felvételizők felvételi feladata; 1988.)

I. Megoldás:

A mértani sorozat első $n + 1$ tagjára alkalmazzuk az összegképletet, $p \neq 1$ figyelembe vételével: $\frac{p^{n+1}-1}{p-1} = 2801$. Az egyenlet átrendezhető a következő alakra:

$$p(2801 - p^n) = 2800.$$

Ebből adódik: $p|2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. p prímszám a szorzatnak csak akkor osztója, ha $p = 2$, vagy $p = 5$, vagy $p = 7$.

$p = 2$ esetén, $2 \cdot \frac{2^n-1}{1} = 2800 \Rightarrow 2^n = 1401$. Ez egyetlen pozitív egész n-re sem teljesül.

$p = 5$ esetén, $5 \cdot \frac{5^n-1}{4} = 2800 \Rightarrow 5^n = 2241$. Ennek az egyenletnek sincs megoldása a pozitív egész számok halmazán.

$p = 7$ esetén, $7 \cdot \frac{7^n-1}{6} = 2800 \Rightarrow 7^n = 2401$. $7^4 = 2401$, és mivel az $n \longmapsto 7^n$ függvény szigorúan monoton nő, ezért $7^n = 2401$ egyenlet egyetlen megoldása $n = 4$.

A feladat megoldása: $p = 7$ és $n = 4$.

II. Megoldás:

Vonjunk ki mindkét oldalból 1-et, majd alakítsuk szorzattá mindkét oldalt!

$$p(1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}) = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

A bal oldal osztható p-vel, de p^2-tel nem. A számelmélet alaptétele szerint p a jobb oldal prímtényezői közül csak a 7 lehet, amikor n=4.

12. a) Bizonyítsuk be, hogy $2012^{2012} + 2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015}$ osztható 10-zel.
    b) Bizonyítsuk be, hogy $2013^{2013} + 2015^{2015}$ osztható 2014-gyel!

Megoldás:

a) Vizsgáljuk meg a hatványok utolsó számjegyét! A 2-re és a 3-ra végződő számok hatványainak utolsó számjegyei négyesével periodikusan ismétlődnek. Az ismétlődő számok a 2 esetében : 2, 4, 8, 6, a 3 esetében: 3, 9, 7, 1. A hatvány utolsó számjegyét megkapjuk, ha megvizsgáljuk, hogy a kitevő néggyel osztva milyen maradékot ad. Ez a 2012 esetében 0, ezért 2012^{2012} 6-ra végződik, 2013 esetében 1, ezért 2013^{2013} 3-ra végződik. A 4-re végződő számok hatványai 4-re vagy 6-ra végződnek felváltva, a páros kitevőjű hatványok utolsó számjegye 6. 5 és így minden 5-re végződő szám pozitív egész kitevőjű hatványának utolsó számjegye 5. A hatványok egyesek helyén álló számjegyeinek az összege: 6+3+6+5=20, ezért az összeg nullára végződik, osztható 10-zel.

b) **I. megoldás**: Adjunk a kifejezéshez 1-et és vonjunk is ki 1-et!

$$2013^{2013} + 1 + 2015^{2015} - 1 = (2013^{2013} + 1^{2013}) + \left(2015^{2015} - 1^{2015}\right)$$

Mindkét tag osztható 2014-gyel. Ez igazolható az $a + b\big|a^{2k+1} + b^{2k+1}$, illetve az $a - b|a^n - b^n$ szabályokkal vagy a binomiális tétellel: $(2014 - 1)^{2013}$ minden tagja osztható 2014-gyel, kivéve $(-1)^{2013} = -1$, hasonlóan $(2014 + 1)^{2015}$ 2014-gyel osztva $+1$ maradékot ad. Az összeg osztható 2014-gyel.

II. Megoldás: $2015^{2015} = 2015^2 \cdot 2015^{2013}$azonosság alkalmazásával az összeg így írható: $(2015^{2013} + 2013^{2013}) + (2015^2 - 1)2015^{2013}$. Az első tag osztható az alapok összegével, ami 2014 kétszerese, a második tag első tényezője $(2015 - 1) \cdot (2015 + 1)$, tehát a második tag is osztható 2014-gyel. Az is kiderült, hogy a kifejezés $2 \cdot 2014 = 4028$-nak is többszöröse.

13. Mely n természetes számokra osztható 1972-vel $S = 345^n + 179^n - 5^n - 26^n + 493^n$? (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1972; haladók versenye)

Megoldás:

Bontsuk fel 1972-t prímhatványok szorzatárra! $1972 = 4 \cdot 493 = 2^2 \cdot 17 \cdot 29$. Mivel 4, 17 és 29 páronként relatív prímek, ezért S pontosan akkor osztható 1972-vel, ha 4-gyel, 17-tel és 29-cel osztható.

Csoportosítsuk a tagokat és használjuk fel, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$a - b | a^n - b^n!$$

$$S = (345^n - 5^n) + (179^n - 26^n) + 493^n$$

Az első tag osztható $(345 - 5) = 340 = 20 \cdot 17$ -tel, a második tag osztható $(179 - 26) = 153 = 9 \cdot 17$ -tel. Az összeg mindhárom tagja osztható 17-tel, így az összeg is osztható 17-tel. A 29-cel való oszthatóság bizonyításához csoportosítsuk a tagokat az alábbiak szerint!

$$S = (345^n - 26^n) + (179^n - 5^n) + 493^n$$

Az első tag osztható $345 - 26 = 319$-cel, a második tag $179 - 5 = 174$-gyel. Mivel $319 = = 11 \cdot 29$, $174 = 6 \cdot 29$ és $493 = 17 \cdot 29$, ezért az összeg mindhárom tagjával együtt az S összeg is osztható 29-cel.

S négy tagja páratlan, ezek összege páros, az ötödik tag páros. Kérdés, hogy 4-gyel milyen feltétel mellett osztható az összeg. Írjuk fel a hatványalapokat $4k + l$ alakban!

$$S = (4 \cdot 86 + 1)^n + (45 \cdot 4 - 1)^n - (4 + 1)^n - (6 \cdot 4 + 2)^n + (123 \cdot 4 + 1)^n$$

Vegyük észre, hogy $(4k + l)^n$ ugyanazt a maradékot adja 4-gyel osztva, mint l^n. Ez bizonyítható a binomiális tétellel, vagy ha észrevesszük, hogy $(4k + l)^n = \overbrace{(4k + l) \cdot (4k + l) \cdots (4k + l)}^{n}$ szorzat polinom alakjának az l^n-től különböző tagjai oszthatók 4-gyel. Ezek alapján $(4 \cdot 86 + 1)^n$, $(4 + 1)^n$, $(123 \cdot 4 + 1)^n$ maradéka 4-gyel osztva 1, $(45 \cdot 4 - 1)^n$ maradéka 4-gyel osztva páros n esetén 1, páratlan n esetén -1. $(6 \cdot 4 + 2)^n$ maradéka 4-gyel osztva 2, ha $n = 1$, illetve 0, ha $n > 1$.

Így a maradékok összege 4-gyel osztva páros n esetén és $n = 1$-re 2, 1-nél nagyobb páratlan n-re 0.

Tehát S pontosan akkor osztható 1972-vel, ha n 1-nél nagyobb páratlan szám.

14. Bizonyítsuk be, hogy $13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n esetén osztható 24-gyel! (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011; haladók versenye)

I. Megoldás:

Egy szám pontosan akkor osztható 24-gyel, ha 3-mal és 8-cal osztható. Ezeket alkalmas átalakításokkal és az $a - b | a^n - b^n$ oszthatósági szabály alkalmazásával igazoljuk.

$$13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 = (13^n - 1) + 3 \cdot 5^{n-1} + 9$$

Az összeg minden tagja osztható 3-mal, ezért az összeg is osztható 3-mal.

$$13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 = 13^n - 5^n + 5^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 = (13^n - 5^n) + 8(5^{n-1} + 1)$$

Az összeg mindkét tagja osztható 8-cal, ezért az összeg is osztható 8-cal.

II. Megoldás:

Az állítást teljes indukcióval igazoljuk.

$n = 1$-re $13^1 + 3 \cdot 5^0 + 8 = 24$ osztható 24-gyel.

Feltéve, hogy a állítás valamely n pozitív egész számra teljesül, bizonyítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz $24|13^{n+1} + 3 \cdot 5^n + 8$.

$$13^{n+1} + 3 \cdot 5^n + 8 = 13 \cdot 13^n + 3 \cdot 5 \cdot 5^{n-1} + 8 =$$

$$= 13 \cdot (13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8) - 24 \cdot 5^{n-1} - 24 \cdot 4.$$

Az összeg első tagja az indukciós feltevés szerint osztható 24-gyel, így az összeg mindhárom tagja osztható 24-gyel, tehát az összeg is 24 többszöröse.

15. Mutassuk meg, hogy $333^{444} + 444^{333}$ osztható 7-tel!

Megoldás:

Vegyük észre, hogy $333 = 7 \cdot 47 + 4$ és $444 = 7 \cdot 63 + 3$. A binomiális tétel szerint $(7a + b)^n$ polinom alakjában csak a b^n tag nem osztható 7-tel, ezért $333^{444} + 444^{333}$ 7-tel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint $4^{444} + 3^{333}$. Felhasználjuk, hogy két páratlan, azonos kitevőjű hatvány összege osztható az alapok összegével. Ehhez végezzük el a következő átalakítást:
$4^{444} + 3^{333} = 4^{333} \cdot 4^{111} + 3^{333} = (4^{333} + 3^{333})$+$4^{333}(4^{111} - 1) =$
Az első tag a fentiek szerint osztható 7-tel. A második tag második tényezője $(4^3)^{37} - 1 = 64^{37} - 1$, ami osztható 63-mal, s így 7-tel is. Tehát $4^{444} + 3^{333}$, és ezzel együtt a feladatban szereplő összeg is osztható 7-tel.

16. Oldjuk meg a prímszámok halmazán a következő egyenletet $x^y + 1 = z$!

Megoldás:

Ha x páratlan prím, akkor $(x^y + 1)$ 2-nél nagyobb páros szám, tehát nem lehet prím. Ezért $x = 2$ és a $2^y + 1 = z$ egyenletet kell megoldani a prímszámok halmazán. Ha $y = 2$, akkor $z = 5$, ami megoldás. Ha $y \geq 3$, akkor y páratlan és $z = 2^y + 1^y$ legalább 9 és osztható 3-mal, tehát nem lehet prímszám. A feladat feltételeinek egyetlen számhármas tesz eleget: $x = 2, y = 2$ és $z = 5$, vagy másképp jelölve: $(2; 2; 5)$.

17. Oldjuk meg a prímszámok halmazán a $6x + 7y + 14z = 210$ egyenletet!

Megoldás:

$$6x = 7(30 - y - 2z)$$

alapján $6x$, és így az x prímszám osztható 7-tel, tehát $x = 7$. Osszuk el az egyenletet 7-tel, és rendezzük y-ra!

$$6 = 30 - y - 2z$$
$$y = 24 - 2z.$$

A jobb oldalon páros szám áll, ezért y is páros, tehát $y = 2$. Innen $2z = 22$, $z = 11$. Az egyenlet megoldása csak az $x = 7$, $y = 2$, $z = 11$ számhármas lehet és ez megoldás is, mert. $6 \cdot 7 + 7 \cdot 2 + 14 \cdot 11 = 42 + 14 + 154 = 210$.

18. Melyek azok az n egész számok, amelyekre $2n^2 + 11n - 21$ egy prímszám négyzetével egyenlő?

Megoldás:

Alakítsuk szorzattá a $2n^2 + 11n - 21$ kifejezést! Például a $2n^2 + 11n - 21 = 0$ egyenletet megoldjuk és felírjuk a gyöktényezős alakot:

$$n_1 = \frac{3}{2}, \qquad n_2 = -7\,; \quad 2n^2 + 11n - 21 = 2\left(n - \frac{3}{2}\right)(n + 7) = (2n - 3)(n + 7).$$

Tehát keressük a $(2n - 3)(n + 7) = p^2$ egyenlet megoldásait, ahol *n* egész számot, *p* prímszámot jelöl. $p^2 = 1 \cdot p^2 = (-1) \cdot (-p^2) = p^2 \cdot 1 = (-p^2) \cdot (-1) = p \cdot p = (-p) \cdot (-p)$. Az első négy esetben:

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{p^2}$	$\boldsymbol{p}$
2	9	3
1	8	nincs ilyen prím
-6	-15	nincs ilyen prím
-8	19	nincs ilyen prím

A következő két esetben $2n - 3 = n + 7 \Longrightarrow n = 10$, $p = 17$ (p pozitív).
A feladatnak két megoldása van: $n = 2$ és $n = 10$.

19. Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma egész, a háromszög területének mérőszáma a kerület mérőszámának háromszorosa. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:

A derékszögű háromszög oldalaira a szokásos jelölést alkalmazva: $a^2 + b^2 = c^2$ a Pitagorasz-tétel, továbbá $ab = 6(a + b + c)$ a feltétel szerint. Az utóbbi egyenletből adódó

$$6c = ab - 6(a + b) \qquad (*)$$

egyenletet négyzetre emeljük, $36c^2 = a^2b^2 + 36(a^2 + b^2 + 2ab) - 12ab(a + b)$, majd kivonjuk a $36c^2 = 36(a^2 + b^2)$ kifejezést mindkét oldalból. Szorzattá alakítás után kapjuk:

$$ab(ab - 12a - 12b + 72) = 0.$$

Minthogy $ab > 0$, ezért a második tényező 0. Ezt ismét szorzattá alakítjuk:

$$(a - 12)(b - 12) - 72 = 0$$
$$(a - 12)(b - 12) = 72.$$

Mivel a és b is pozitív egész szám, a következő esetek lehetségesek feltéve, hogy $a \le b$.

$a-12$	$b-12$	a	b	c	K	T
1	72	13	84	85	182	546
2	36	14	48	50	112	336
3	24	15	36	39	90	270
4	18	16	30	34	80	240
6	12	18	24	30	72	216
8	9	20	21	29	70	210
-9	-8	3	4	5	12	6
nem megoldás					$\boldsymbol{6 \neq 3 \cdot 12}$	

Tehát a feltételnek hat derékszögű háromszög felel meg.

Megjegyzés: A hamis megoldás a (*) egyenlet négyzetre emeléséből adódott. A 3, 4, 5 értékek behelyettesítése után a bal oldalon 30, a jobb oldalon $12-42=-30$ áll, amelyek négyzete egyenlő.

20. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet!

$$(x+y)(xy+1)=4xy$$

I. Megoldás:

A feltétel szerint $(xy+1)|4xy$, valamint két egymást követő természetes szám relatív prím, azaz $(xy+1;xy)=1$, ezért $(xy+1)|4$. Ez csak a következő esetekben teljesülhet: $xy+1=1$ vagy $xy+1=2$ vagy $xy+1=4$.

Az első esetben $xy=0$, másrészt az eredeti egyenletből: $x+y=0$. Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x=0$ és $y=0$.

A második esetben $xy=1$, ami csak $x=y=1$ esetben teljesül a természetes számok halmazán. Ez jó is, mert behelyettesítve az eredeti egyenletbe a $2\cdot 2=4\cdot 1$ egyenlőséget kapjuk.

A harmadik esetben $xy=3$. Ez az egyenlőség csak úgy teljesül, ha x és y közül az egyik 1, a másik 3, így az eredeti egyenlet bal oldalán $4\cdot 4$, a jobb oldalán pedig $4\cdot 3$ áll, amelyek nem egyenlők. Ez az eset nem ad megoldást.

Az egyenlet megoldásai a természetes számok halmazán a $(0;0)$ és az $(1;1)$ számpár.

II. Megoldás:

Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd rendezzük az egyenletet az alábbiak szerint!

$$x^2y+xy^2+x+y=4xy$$

$$x^2y-2xy+y+xy^2-2xy+x=0$$

$$y(x^2-2x+1)+x(y^2-2y+1)=0$$

$$y(x-1)^2+x(y-1)^2=0$$

A bal oldalon a két tag mindkét tényezője nem negatív. Két nem negatív szám összege akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha mindkét szám nullával egyenlő. Tehát az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $y(x-1)^2=0$ és $x(y-1)^2=0$. Az első egyenlőség alapján $y=0$ vagy $x=1$. Ha $y=0$, akkor a második egyenletből $x=0$, ha $x=1$, akkor a második egyenletből $y=1$ adódik. A feltételeknek két számpár felel meg, a $(0;0)$ és az $(1;1)$.

21. Írjuk át a következő számokat a megadott számrendszerbe!

a) 31021_4 10-es;

b) 3189_{10} 5-ös;

c) 1220221_3 9-es;

d) 572_8 2-es számrendszerbe.

Megoldás:

a) $31021_4=3\cdot 4^4+4^3+0\cdot 4^2+2\cdot 4+1=841$

b) Elosztjuk a 3189-et 5-tel (a számrendszer alapszámával), feljegyezzük a maradékot, majd a hányadossal végezzük el ugyanezt addig, amíg 0-t nem kapunk hányadosként. A kapott maradékokat fordított sorrendben felírva megkapjuk a szám 5-ös (megadott) számrendszerbeli alakját.

3189	4
637	2
127	2
25	0
5	0
1	1
0	

$3189_{10} = 100224_5$.

c) Egyik lehetőség, hogy a megadott 3-as számrendszerbeli számot átírjuk 10-es számrendszerbe, majd ezt 9-esbe. Most más utat választunk. Csoportosítsuk a számjegyeket kettesével jobbról balra haladva $1|22|02|21_3$, és figyeljük meg a 3 hatványai szerinti helyiértékeket!

$1 \cdot 9^3$	$3 \cdot 9^2$	$1 \cdot 9^2$	$3 \cdot 9$	$1 \cdot 9$	3	1
3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3	1
1	2	2	0	2	2	1

A legfeljebb kétjegyű hármas számrendszerbeli számok értékét kiszámolva, megkapjuk a 9-es számrendszerbeli számjegyeket. $21_3 = 7_9, 02_3 = 2_9, 22_3 = 8_9, 01_3 = 1_9$.
Tehát $1220221_3 = 1827_9$

d) A c)-ben megfigyelt eljárás fordítottját alkalmazzuk. Felhasználjuk, hogy $8 = 2^3$. A 8-as számrendszerben adott szám minden számjegyét átírjuk kettes számrendszerbe: $5 = 101_2,\ 7 = 111_2,\ 2 = 010_2$. Figyelni kell arra, hogy három számjegyet használjunk fel akkor is, ha a kettes számrendszerben felírt szám nullával kezdődik.
$572_8 = 101111010_2$

22. Állapítsuk meg az alábbi számokról, hogy párosak vagy páratlanok!
a) 10110_2 b) 4324_5 c)20121_3 d) 4531_6
Fogalmazzuk meg, hogyan dönthető el a kérdés általános esetben!

Megoldás:

a) A 2-es számrendszerben felírt számot összegként fogjuk fel. Az összegnek minden tagja páros, ezért az összeg is páros.

b) Ismét egy összeggel van dolgunk. Ennek az összegnek a tagjait megkapjuk, ha egy-egy 5 hatványt megszorozzuk a megfelelő számjeggyel. Az 5 minden hatványa páratlan, ezért a számjegy páros vagy páratlan volta határozza meg a tag párosságát. Ebben az esetben három páros és egy páratlan szám összege, páratlan.

c) A három minden természetes kitevőjű hatványa páratlan. Az összeg két tagja páratlan a többi páros, ezért ez a szám páros.

d) A hat minden pozitív egész kitevőjű hatványa páros, ezek egész számszorosa is az. A szám párosságát az egyesek helyén álló szám határozza meg. A szám páratlan.

Páros alapszám esetén a szám utolsó (egyesek) helyén álló számjegye alapján állapítjuk a szám párosságát. Ha az utolsó számjegy páros, akkor a szám páros, ha ez páratlan, akkor a szám is az.

Páratlan alapszám esetén megállapítjuk, hogy a szám páros, vagy páratlan sok páratlan számjegyet tartalmaz-e. Ha a páratlan számjegyek száma páros, akkor a szám páros, ellenkező esetben páratlan.

23. Milyen számjegy írható x és y helyébe, hogy igaz állítást kapjunk?
   a) $10|3x45y_6$ b) $12|237xy_9$

Megoldás:

a) A hatos számrendszerben felírt szám számjegyei, így x és y is, 0 és 5 közötti egész számok. Egy szám akkor osztható 10-zel, ha 2-vel és 5-tel osztható. Egy hatos számrendszerbeli szám akkor páros, ha az egyesek helyén páros szám áll. Ezért y lehetséges értékei: 0, 2, 4. Mivel $5|6^n - 1$, ahol n természetes szám, így a 6-nak minden hatványa 5-tel osztva 1-et ad maradékul. Ez alapján egy 6-os számrendszerbeli szám 5-tel való osztási maradékát a számjegyek összegének osztási maradéka adja meg. Tehát a szám akkor osztható 5-tel, ha a számjegyeinek összege osztható 5-tel. (Hasonlóan a 10-es számrendszerben a 9-cel való oszthatósági szabályhoz.)

Tehát $3x45y_6$ pontosan akkor osztható 5-tel, ha $3 + x + 4 + 5 + y = 12 + x + y$ osztható 5-tel. Ez alapján készíthetjük el az x és y lehetséges értékeit tartalmazó táblázatot:

y	0	2	4
x	3	1	4

b) x és y kilences számrendszerbeli számjegyek, ezért $0 \leq x \leq 8$ és $0 \leq y \leq 8$. Egy szám akkor osztható 12-vel, ha 3-mal és 4-gyel osztható. A 9-es számrendszerben felírt számot összegként tekintve, az utolsó, y tagot leszámítva, minden tag osztható kilenccel, tehát hárommal is. y lehetséges értékei: 0, 3, 6. Ismert, hogy $8|9^n - 1 \Rightarrow 4|9^n - 1,$ ahol n természetes szám. Ez alapján a szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha számjegyeinek összege osztható 4-gyel. (Hasonlóan, a 10-es számrendszerben a 3-mal való oszthatósági szabályhoz.) Ez alapján készíthetjük el az x és y lehetséges értékeit tartalmazó táblázatot:

y	0	0	3	3	6	6
x	0	4	1	5	2	6

A feladatnak a fenti hat számpár a megoldása.

Megjegyzés: A feladat megoldásában felhasznált $a - 1|a^n - 1$ oszthatósági szabály könnyen belátható számrendszerek segítségével. Az a alapú számrendszerben a^n így írható: $1\,\overbrace{00\ldots0}^{n}$. Ha ebből a számból kivonunk 1-et, akkor egy olyan n- jegyű számot kapunk, amelynek minden számjegye $(a - 1)$, ezért ez a szám osztható $(a - 1)$-gyel.

24. Válasszunk ki az 1,2, …,100 szám közül tetszőlegesen 51-et. Bizonyítsuk be, hogy a kiválasztott számok között van két olyan, amelyek közül az egyik a másik osztója!

Megoldás:

Állítsuk elő a számok prímhatvány felbontását, majd soroljuk csoportokba a számokat! Egy csoportba kerüljön két szám, ha hányadosuk ugyanaz a páratlan szám, vagyis ha prímhatvány felbontásukban csak a 2 kitevőjében különböznek egymástól. Ezek szerint 50 csoportot képezünk, annyit, ahány páratlan szám van 1 és 100 között.

1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
3	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^3$	$3 \cdot 2^4$	$3 \cdot 2^5 = 96$	–
5	$5 \cdot 2$	$5 \cdot 2^2$	$5 \cdot 2^3$	$5 \cdot 2^4 = 80$	–	–
7	$7 \cdot 2$	$7 \cdot 2^2$	$7 \cdot 2^3$	–	–	–
⋮	⋮	⋮	⋮	–	–	–
97	–	–	–	–	–	–
99	–	–	–	–	–	–

Az összes 1 és 100 közötti szám egyértelműen elhelyezhető a táblázatban. Ha a kiválasztott számok közül kettő a táblázat egy sorába került a csoportosításkor, akkor ezek egyike a másik osztója. Mivel 50 csoport van, és ennél több, 51 számot választunk ki véletlenszerűen, biztosan lesz két olyan szám, amelyek a fenti rendszer szerint egy csoportba tartoznak. Ezek közül pedig az egyik osztója a másiknak.

Megjegyzés: A fenti gondolatmenetben a skatulya-elvet alkalmaztuk.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Írja át a 76543 tízes számrendszerben megadott számot kettes, hármas, négyes, ötös és nyolcas számrendszerbe!
2. Mutassa meg, hogy a (tízes számrendszerbeli) $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű számoknak nincs 97-nél nagyobb prímosztójuk!
3. Egy pozitív egész számokból álló mértani sorozat második tagja 6, az első és a harmadik tagjának az összege 20. Határozza meg, hogy mely pozitív egész *n*-ekre lesz az első *n* tag összege osztható 10-zel! (Írásbeli érettségi-felvételi feladatok 2001.)
4. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges *n* egész szám esetén $n(n^2+5)$ osztható hattal!
5. Egy szám jegyeit cseréljük össze-vissza, majd a két szám közül a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbiket! Bizonyítsuk be, hogy a különbség osztható 9-cel!
6. Határozza meg $14^2 \cdot 20^4 \cdot 35^3$ és $50^2 \cdot 42^3$ közös pozitív osztóinak a számát!
7. Mely *n* pozitív egész számok esetén egyszerűsíthető az $\frac{n+17}{n-4}$ tört?
8. Oldja meg a pozitív egész számok halmazán az $x^2 - y^2 = 616$ egyenletet!
9. Három prímszám szorzata összegük 11-szeresével egyenlő. Melyik ez a három prímszám?
10. Melyik az a legnagyobb prímszám, amellyel az $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ összeg minden pozitív egész *n* esetén osztható? (Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok, 2001.)

Az ellenőrző feladatok megoldása

1. Írja át a 76543 tízes számrendszerben megadott számot kettes, hármas, négyes, ötös és nyolcas számrendszerbe!

Megoldás

2	
76543	1
38271	1
19135	1
9567	1
4783	1
2391	1
1195	1
597	1
298	0
149	1
74	0
37	1
18	0
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

3	
76543	1
25514	2
8504	2
2834	2
944	2
314	2
104	2
34	1
11	2
3	0
1	1
0	

5	
76543	3
15308	3
3061	1
612	2
122	2
24	4
4	4
0	

$$76543 = 10010101011111111_2 = 10212222221_3 = 4422133_5$$
$$76543 = 1|00|10|10|10|11|11|11|11_2 = 102223333_4$$
$$76543 = 10|010|101|011|111|111_2 = 225377_8$$

2. Mutassa meg, hogy a (tízes számrendszerbeli) $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű számoknak nincs 97-nél nagyobb prímosztójuk!

Megoldás:

$\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab}$=$10101 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{ab}$. 10101 legnagyobb prímosztója 37. Ha $\overline{ab}$ 37-nél nagyobb prímszám, akkor $\overline{ab}$ lesz $\overline{ababab}$ legnagyobb prímosztója. A legnagyobb kétjegyű prímszám a 97, ezért $\overline{ababab}$ legnagyobb prímosztója nem lehet 97-nél nagyobb.

3. Egy pozitív egész számokból álló mértani sorozat második tagja 6, az első és a harmadik tagjának az összege 20. Határozza meg, hogy mely pozitív egész *n*-ekre lesz az első *n* tag összege osztható 10-zel! (Írásbeli érettségi-felvételi feladatok 2001.)

Megoldás:

Legyen a mértani sorozat kvociense q! A feltétel szerint:

$$\frac{6}{q} + 6q = 20.$$

A másodfokú egyenlet gyökei 3 és $\frac{1}{3}$.

$q = \frac{1}{3}$ esetén a sorozatnak csak az első három tagja egész (18, 6, 2), ezekre nem teljesül a feltétel. $q = 3$ esetén $a_1 = 2$ az első n tag összege: $2 \cdot \frac{3^n - 1}{2} = 3^n - 1$. $3^n - 1$ akkor osztható 10-zel, ha 3^n utolsó számjegye 1. 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak az utolsó számjegye: 3, 9, 7, 1. Ez a négy szám ismétlődik periodikusan. Ezért 3^n utolsó számjegye pontosan akkor 1, ha n 4-gyel osztható. Tehát a megadott sorozat első n tagjának az összege akkor és csak akkor osztható 10-zel, ha n osztható 4-gyel.

4. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges n egész szám esetén $n(n^2 + 5)$ osztható hattal!

I. Megoldás:

$n(n^2 + 5) = n(n^2 + 6 - 1) = 6n + n(n^2 - 1) = 6n + (n - 1)n(n + 1)$. A második tag három egymást követő egész szám szorzata. A három szám közül pontosan az egyik osztható 3-mal, és legalább az egyik osztható 2-vel, ezért a szorzat osztható 2 és 3 legkisebb közös többszörösével, hattal. Mivel mindkét tag hat többszöröse, ezért az összegük is osztható hattal.

II. Megoldás

n és $n^2 + 5$ különböző paritásúak, ezért a szorzatuk osztható kettővel. Ha n hárommal nem osztható, akkor $n = 3k + 1$ vagy $n = 3k - 1$ alakú, ahol k egész számot jelöl. Ekkor $n^2 + 5 = (3k \pm 1)^2 + 5 = 9k^2 \pm 6k + 6$ összeg minden tagja, így az összeg is osztható hárommal. Tehát a szorzat osztható hárommal. Így a vizsgált kifejezés osztható kettő és három legkisebb közös többszörösével, hattal.

5. Egy szám jegyeit cseréljük össze-vissza, majd a két szám közül a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbiket! Bizonyítsuk be, hogy a különbség osztható 9-cel!

Megoldás:

A két szám számjegyeinek összege ugyanaz, ezért a két szám 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adja, s így a különbségük kilenccel osztható. ($n = 9k + r,\ \ n' = 9l + r \Longrightarrow n - n' = 9(k - l)$.)

Megjegyzés: Az állítás természetesen akkor is igaz, ha a kisebbik számból vonjuk ki a nagyobbikat.

6. Határozza meg $14^2 \cdot 20^4 \cdot 35^3$ és $50^2 \cdot 42^3$ közös pozitív osztóinak a számát!

Megoldás:

A két számnak éppen annyi közös pozitív osztója van, ahány pozitív osztója van a legnagyobb közös osztónak. A két szám legnagyobb közös osztója:
$(14^2 \cdot 20^4 \cdot 35^3; 50^2 \cdot 42^3) = (2^{10} \cdot 5^7 \cdot 7^5; 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^3) = 2^5 \cdot 5^4 \cdot 7^3$.
A két szám közös pozitív osztóinak a száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

7. Mely *n* pozitív egész számok esetén egyszerűsíthető az $\frac{n+17}{n-4}$ tört?

Megoldás:

Meghatározzuk $n + 17$ és $n - 4$ legnagyobb közös osztóját.

$$(n + 17; n - 4) = (21; n - 4) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (21; n - 4) = 1 \\ 3, & \text{ha } n = 3k + 4 \text{ és } 7 \nmid k \\ 7, & \text{ha } n = 7k + 4 \text{ és } 3 \nmid k \\ 21, & \text{ha } n = 21k + 4\,. \end{cases}$$

$\frac{n+17}{n-4}$ pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $(n-4)$ 3-mal, vagy 7-tel osztható szám, azaz ha $n = 3k + 4$ vagy $n = 7k + 4$ alakú szám, ahol k tetszőleges természetes számot jelöl.

8. Oldja meg a pozitív egész számok halmazán az $x^2 - y^2 = 616$ egyenletet!

Megoldás:

Egyrészt $x^2 - y^2 = (\mathrm{x}-\mathrm{y})(\mathrm{x}+\mathrm{y})$, másrészt $616 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11$. Vegyük észre, hogy $x + y$ és $x - y$ azonos paritású számok, mert különbségük $2y$. Ezek alapján 616-ot két páros tényező szorzatára kell bontani. A nyolc osztópár közül négy felel meg ennek a feltételnek:

$$616 = 2 \cdot 308 = 4 \cdot 154 = 14 \cdot 44 = 22 \cdot 28.$$

Az egyenletrendszerek felírásakor figyelembe vesszük, hogy $x - y < x + y$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 308 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 155; y = 153;$$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 4 \\ x + y &= 154 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 79; y = 75;$$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 14 \\ x + y &= 44 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 29; y = 15;$$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 22 \\ x + y &= 28 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 25; y = 3.$$

9. Három prímszám szorzata összegük 11-szeresével egyenlő. Melyik ez a három prímszám?

Megoldás:

A feltétel szerint: $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 11(p_1 + p_2 + p_3)$. 11 csak úgy lehet $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ szorzat osztója, ha valamelyik prímszámmal egyenlő. Legyen, mondjuk $p_3 = 11$. Megoldandó a

$$p_1 \cdot p_2 = p_1 + p_2 + 11 \quad (*)$$

egyenlet a prímszámok halmazán.

I. megoldás: Átrendezés után alakítsuk szorzattá a bal oldalt!

$$p_1 \cdot p_2 - p_1 - p_2 + 1 = 12$$

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 12.$$

12-t kell két pozitív egész szám szorzatára bontani: $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Az első esetben a két prímszám 2 és 13, a második esetben 3 és 7. A harmadik szorzat nem ad megoldást, mert 4 nem prímszám. Tehát a három prímszám: 2, 11 és 13 vagy 3, 7 és 11.

II. megoldás: Fejezzük ki a $(*)$ egyenletből p_2 –t! $p_2 = \frac{p_1+11}{p_1-1}$. Keressük azt a p_1 prímszámot, amelyre p_2 is prímszám. Ehhez egy egész szám és egy tört összegére bontjuk a törtet.

$$\frac{p_1 + 11}{p_1 - 1} = \frac{p_1 - 1 + 12}{p_1 - 1} = 1 + \frac{12}{p_1 - 1}$$

$p_2 \geq 2$, ezért a $\frac{12}{p_1-1}$ törtnek pozitív egésznek kell lennie. Ez akkor teljesül, ha $(p_1 - 1)$ pozitív osztója a 12-nek. Eszerint

$\boldsymbol{p_1 - 1}$	1	2	3	4	6	12
$\boldsymbol{p_1}$	2	3	~~4~~	5	7	13
$\boldsymbol{p_2}$	13	7		~~4~~	3	2

(A 4 nem prímszám, ezért nem megoldás.) A keresett prímszámok: 2, 11 és 13 illetve 3, 7 és 11.

10. Melyik az a legnagyobb prímszám, amellyel az $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ összeg minden pozitív egész *n* esetén osztható? (Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok, 2001.)

Megoldás:

$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}=5\cdot 25^n+18\cdot 2^n$ kifejezés értéke $n=1$-re $161=7\cdot 23$. Tehát ha van megoldása a feladatnak, akkor az csak a 7 és a 23 valamelyike lehet. Bebizonyítjuk, hogy az összeg minden *n*-re osztható 23-mal.

$$5\cdot 25^n+18\cdot 2^n=5\cdot 25^n-5\cdot 2^n+5\cdot 2^n+18\cdot 2^n=5\cdot(25^n-2^n)+23\cdot 2^n$$

Mivel a^n-b^n osztható $(a-b)$-vel, ahol *n* tetszőleges természetes szám, ezért az összeg mindkét tagja osztható 23-mal. Tehát a keresett prímszám a 23.

Megjegyzés: Azt, hogy az összeg minden pozitív *n*-re osztható 23-mal, teljes indukcióval is igazolhatjuk.