

7. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek I.

I. Elméleti összefoglaló

Egyenlet

Az egyenlet két oldalát függvénynek tekintjük:

$$f(x) = g(x) .$$

Az f és g függvények értelmezési tartományának közös részéhez tartozó olyan x értékeket keresünk, amelyekre a két függvény helyettesítési értéke megegyezik. x -et az **egyenlet változójának** vagy **ismeretlennek** nevezzük. (Az egyenlet tartalmazhat több ismeretlent is, ilyen esetben f, g többváltozós függvények.)

- A megoldásokat az **alaphalmaz** elemei között keressük. Ha erre a feladat vagy a probléma jellege nem utal, akkor alaphalmaznak a valós számokat tekintjük.
- **Az egyenlet értelmezési tartománya** az alaphalmaz azon elemeinek a halmaza, amelyekre az egyenletben szereplő kifejezések értelmezhetők.
- **Az egyenlet megoldása vagy gyöke** az értelmezési tartománynak az az eleme, amelyre az egyenlőség teljesül. Ezeknek az értékeknek a halmazát **megoldáshalmaznak** nevezzük.

Azonosság

Ha az egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az egyenlet értelmezési tartományával, akkor azonosságnak nevezzük.

Egyenletek megoldási módszerei

- **Grafikus módszer:**
Az $f(x) = g(x)$ egyenlet két oldalán szereplő függvényt ábrázoljuk koordináta-rendszerben és meghatározzuk a két grafikon közös pontjait. A közös pontok első koordinátái adják az egyenlet megoldásait.
- **Az egyenlet értelmezési tartományának vizsgálata:**
Érdemes megadni azt a legbővebb halmazt, amelyen az egyenlet értelmezhető, mert ezzel egyszerűsödhet a megoldás.
- **Az egyenletben szereplő kifejezések, függvények értékkészletének vizsgálata:**
Az értékkészlet vizsgálatával kiderülhet, hogy az egyenletnek nem lehet megoldása vagy csak néhány érték jöhet számításba.
- **Az egyenlet rendezése, mérlegelv alkalmazása:**
 - Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatjuk, illetve kivonhatjuk ugyanazt a számot, ismeretlent tartalmazó kifejezést.
 - Az egyenlet mindkét oldalát szorozhatjuk, illetve oszthatjuk ugyanazzal a 0-tól különböző számmal, ismeretlent tartalmazó kifejezéssel. Ha olyan ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk, amely 0 is lehet, akkor hamis gyököt kaphatunk. Ha pedig olyan kifejezéssel osztunk, amely 0 is lehet, akkor elveszíthetjük az egyenlet valamely gyökét, esetleg több gyökét is.

- **Szorzáttá alakítás:**

Az $f(x) = 0$ alakú egyenlet bal oldalát tényezőkre bontjuk. Egy szorzat csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0. Ennek az elvnek a felhasználásával az eredeti egyenlet megoldását néhány alacsonyabb fokú, egyszerűbb egyenlet megoldására vezetjük vissza.

- **Új ismeretlen bevezetése:**

Összetett kifejezéseket tartalmazó egyenletek, egyenletrendszerek gyakran egyszerűbb alakra hozhatóak, ha egy részletet új ismeretlennel jelölünk. Így könnyebben megoldható egyenleteket kaphatunk. Az új ismeretlen értékének meghatározása után megadjuk az eredeti ismeretlen értékét.

Egyenletrendszer

Két vagy több egyenlet, két vagy több ismeretlennel egyenletrendszert alkot. Az ismeretleneknek azokat az értékeit keressük, amelyekre mindegyik egyenlet teljesül.

Elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer

általános alakja:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

ahol a, b, c, d, e, f valós számok nem mindegyike nulla.

Elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldási módszerei:

- **Behelyettesítő módszer:**

- Az egyik ismeretlent kifejezzük az egyik egyenletből.
- Az így kapott kifejezést behelyettesítjük másik egyenletbe.
- Megoldjuk az egyismeretlenes egyenletet, ezzel megkapjuk az egyik ismeretlen értékét.
- Ezt az értéket visszahelyettesítjük a másik egyenletbe, vagy az első lépésben kapott kifejezésbe és meghatározzuk a másik ismeretlent.

- **Egyenlő együtthatók módszere:**

- Az egyenletek mindkét oldalát olyan alkalmas nullától különböző számmal szorozzuk meg, hogy az egyik ismeretlen együtthatói a két egyenletben egyenlők vagy egymás ellentettjei legyenek.
- Ha az így kapott két egyenletet kivonjuk vagy összeadjuk, akkor olyan egyenletet kapunk, amely már csak egy ismeretlent tartalmaz. Ezt megoldva megkapjuk az egyik ismeretlen értékét.
- A kapott értéket az egyik egyenletbe behelyettesítve kiszámoljuk a másik ismeretlent.

- **Ha több egyenletünk van több ismeretlennel,** akkor ezeket a módszereket felváltva alkalmazva arra törekszünk, hogy fokozatosan olyan egyenlethez jussunk, amelyben már csak egy ismeretlen szerepel.

Ellenőrzés:

Az ellenőrzésnek nem csak az a szerepe, hogy számolási hibáinkat észrevegyük. Megoldásunk lehet hamis gyök is, amit csak az ellenőrzés elvégzésével tudunk kizárni. A kapott megoldásokat az eredeti egyenletbe, egyenletekbe behelyettesítjük. Az egyenlet bal és jobb oldalának az értékét kiszámoljuk. Ha ezek megegyeznek és mind az alaphalmaznak, mind az értelmezési tartománynak eleme a kapott érték, akkor megoldásunk helyes. (Ebben az anyagban csak ritkán írjuk le az ellenőrzést: ld. 5/a, 11., 15., 17. és 18. kidolgozott feladat.)

Egyenlőtlenség

Az egyenlőtlenség két oldalát függvénynek tekintjük:

$$f(x) > g(x) ; f(x) \geq g(x) ; f(x) < g(x) ; f(x) \leq g(x).$$

Az f és g függvények értelmezési tartományának közös részéhez tartozó azon x értékeket keressük, amelyekre a két függvény helyettesítési értéke között az adott reláció fennáll.

Egyenlőtlenség esetében is fontos figyelni arra, hogy a megoldásokat milyen feltételek mellett keressük, mi az **alaphalmaz** és mi az **egyenlőtlenség értelmezési tartománya**.

Egyenlőtlenségek megoldási módszerei

- **Grafikus módszer:**

Az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenség két oldalán szereplő függvényt ábrázoljuk és meghatározzuk a két grafikon közös pontjait. Ezután megvizsgáljuk a grafikon alapján, hogy az így kapott intervallumok közül melyekben halad az $f(x)$ függvény görbéje a $g(x)$ függvény görbéje felett. Ezek az intervallumok adják az egyenlőtlenség megoldásainak halmazát.

- **Az egyenlőtlenség rendezése, mérlegelv alkalmazása:**

- Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadjuk, illetve kivonjuk ugyanazt a számot, ismeretlent tartalmazó kifejezést, az egyenlőtlenség iránya nem változik meg.
- Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozzuk, illetve osztjuk ugyanazzal a pozitív számmal, ismeretlent tartalmazó kifejezéssel, akkor az egyenlőtlenség iránya változatlan marad.
- Ha az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk, illetve osztjuk ugyanazzal a negatív számmal, ismeretlent tartalmazó kifejezéssel, akkor az egyenlőtlenség iránya megfordul.
- Egyenlőtlenséget 0-val vagy nulla értékű kifejezéssel nem szorzunk, nem osztunk.

Szöveges feladatok megoldása:

- Megválasztjuk a feladat szövege alapján az ismeretlent vagy ismeretleneket.
- Felírjuk az egyenletet.
- Megoldjuk.
- A szöveg alapján ellenőrizzük.
- Válaszolunk a feladatban megfogalmazott kérdésre.

II. Kidolgozott feladatok

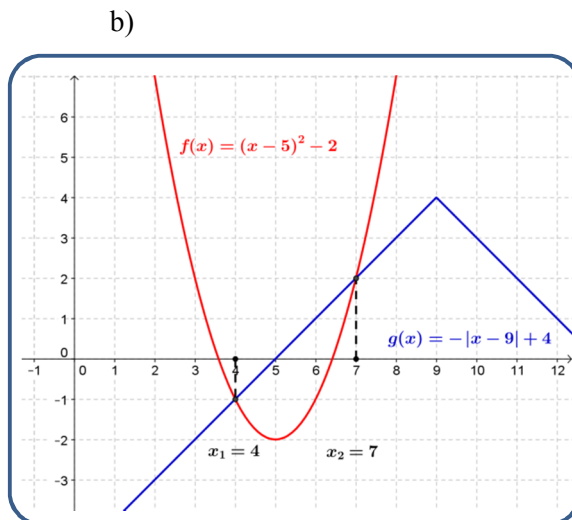
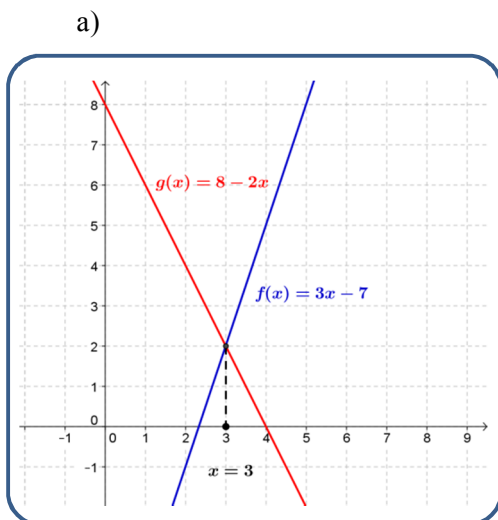
1. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

a) $3x - 7 = 8 - 2x$

b) $(x - 5)^2 - 2 = -|x - 9| + 4$

Megoldás:

- a) Az $f(x) = 3x - 7$ és $g(x) = 8 - 2x$ függvényt ábrázoljuk. A grafikonok közös pontja a $(3; 2)$ pont, így az egyenlet megoldása $x = 3$.
- b) A két megoldás: $x_1 = 4$; $x_2 = 7$.



2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{2x - 14} = \sqrt{21 - 3x}$

b) $\sqrt{5x - 12} = \sqrt{6 - 3x}$

c) $\frac{x}{x-6} = \frac{6}{x-6}$

d) $\frac{\sqrt{3x-12}}{4-x} = \sqrt{8-2x}$

Megoldás:

- a) Négyzetgyökös kifejezés csak nemnegatív számra értelmezhető, ezért az egyenlet értelmezési tartományának elemeire a $2x - 14 \geq 0$ és $21 - 3x \geq 0$ feltételnek teljesülnie kell, azaz $x \geq 7$ és $x \leq 7$. Így $x = 7$ esetén van értelmezve, ez az érték az egyenletnek valóban megoldása.
- b) A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq \frac{12}{5}$ és $x \leq 2$. Nincs olyan valós szám, amelyre mindkét feltétel teljesül, így az egyenletnek nincs megoldása.
- c) A nevezőben nem lehet 0, ezért $x \neq 6$. A két tört nevezője azonos, ezért egyenlőség esetén csak $x = 6$ állhatna fenn, de ez az értelmezési tartomány miatt nem lehetséges, így az egyenletnek nincs megoldása.
- d) A négyzetgyökök értelmezése miatt $x \geq 4$ és $x \leq 4$, a tört nevezője miatt $x \neq 4$. Tehát nincs megoldása az egyenletnek.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $(x + 5)^2 + \sqrt{x - 3} = 0$

b) $(2x - 5)^2 + |y - 8| = 0$

c) $2x^2 + 6x + 4y^2 + 4xy + 9 = 0$

Megoldás:

- a) Egy szám négyzete, egy szám négyzetgyöke nem lehet negatív, ezért az egyenlet bal oldalának mindkét tagja nemnegatív. Az összeg csak akkor lehet nulla, ha mindkét tag nulla. $x = -5$ és

$x = 3$ feltételnek egyszerre kellene teljesülnie, ami lehetetlen. Ez alapján az egyenletnek nincs megoldása.

b) A szám négyzetének és abszolútértékének egyszerre kell nullának lennie, tehát $x = 2,5$ és $y = 8$.

c) Az egyenletet átalakítva

$$(x + 3)^2 + (2y + x)^2 = 0$$

alakra hozva láthatjuk, hogy az összeg csak $x = -3$ és $y = -\frac{x}{2} = 1,5$ esetén teljesül.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $(3x + 6)(x - 7)(12 - 6x) = 0$

b) $2x(x + 4) - 5(x + 4) = 0$

c) $x^2 - 6x + 3x - 18 = 0$

d) $x^2 - 8x + 15 = 0$

e) $x^6 - 4x^5 - 21x^4 = 0$

f) $(x + 15)(x + 2) + (6 - 2x)(x + 2) = 6x(x + 2)$

Megoldás:

a) Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0:

$$3x + 6 = 0 \text{ vagy } x - 7 = 0 \text{ vagy } 12 - 6x = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = -2$; $x_2 = 7$; $x_3 = 2$.

b) Az egyenletet rendezve $(2x - 5)(x + 4) = 0$, ebből a szorzat alakból $x = 2,5$ vagy $x = -4$.

c) Két tagból a közös tényezőket kiemeljük és az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítjuk:

$$x(x - 6) + 3(x - 6) = 0$$

$$(x + 3)(x - 6) = 0,$$

tehát a megoldások $x_1 = -3$; $x_2 = 6$.

d) A másodfokú kifejezést két elsőfokú tényező szorzatára szeretnénk bontani. Ha ez lehetséges, akkor a konstans tagok szorzata 15. Az egész számok között találunk megfelelő értékeket: 3 és 5, ezért a $8x$ -et két részre bontjuk:

$$x^2 - 3x - 5x + 15 = x(x - 3) - 5(x - 3) = (x - 3)(x - 5) = 0$$

Az egyenletet szorzattá alakítottuk, a megoldások $x_1 = 3$; $x_2 = 5$. Természetesen ennek az egyenletnek a gyökeit a másodfokú egyenlet megoldó képletével is megadhatjuk.

e) Kiemelünk a tagokból x^4 -t:

$$x^4(x^2 - 4x - 21) = 0.$$

Innen $x_1 = 0$ vagy $x^2 - 4x - 21 = 0$. A másodfokú egyenletet megoldva $x_2 = -3$ vagy $x_3 = 7$. Az egyenlet megoldáshalmaza: $\{-3; 0; 7\}$.

f) **Megoldás I:**

Ha az egyenletet egy oldalra rendezzük és $(x + 2)$ -t kiemelünk:

$$(x + 2)(x + 15 + 6 - 2x - 6x) = 0$$

$$(x + 2)(-7x + 21) = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek a gyökei: $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$.

Megoldás II:

Ha $x + 2 = 0$, akkor az egyenlet mindkét oldala 0, tehát $x = -2$ megoldás. Ha $x + 2 \neq 0$, akkor az egyenlet mindkét oldalát oszthatom $(x + 2)$ -vel:

$$x + 15 + 6 - 2x = 6x$$

$$21 = 7x$$

$$x = 3.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $4(2x - 5) - 7(12 - 3x) = 21 + 4x$

b) $(x - 3)(2x + 4) - x(3x - 7) = x(4 - x)$

c) $\frac{11x-20}{10} = \frac{9-3x}{15}$

d) $\frac{x-7}{4} - \frac{2x-10}{3} = 2 - \frac{7-2x}{6}$

Megoldás:

a)
$$\begin{aligned} 8x - 20 - 84 + 21x &= 21 + 4x \\ 29x - 104 &= 21 + 4x \\ 25x &= 125 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: Bal oldal: $4 \cdot (2 \cdot 5 - 5) - 7 \cdot (12 - 3 \cdot 5) = 20 + 21 = 41$

Jobb oldal: $21 + 4 \cdot 5 = 21 + 20 = 41$

Tehát $x = 5$ valóban megoldás.

b)
$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 4x - 12 - 3x^2 + 7x &= 4x - x^2 \\ -x^2 + 5x - 12 &= 4x - x^2 \\ 5x - 12 &= 4x \\ x &= 12 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{11x-20}{10} &= \frac{9-3x}{15} & / \cdot 30 \\ 33x - 60 &= 18 - 6x \\ 39x &= 78 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

d)
$$\frac{x-7}{4} - \frac{2x-10}{3} = 2 - \frac{7-2x}{6} \quad / \cdot 12$$

A törtvonal olyan szerepet tölt be, mint a zárójel. Ha a közös nevezővel szorzunk és a törtvonal előtt negatív előjel van, a számlálóban lévő tagok előjele megváltozik.

$$\begin{aligned} 3x - 21 - 8x + 40 &= 24 - 14 + 4x \\ -5x + 19 &= 10 + 4x \\ 9 &= 9x \end{aligned}$$

A két oldal felcserélhető:

$$x = 1$$

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{8y-5}{2y+5} = 5 - \frac{3y+7}{3y+2}$

b) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{1}{x^2+2x-3} = 0$

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: Egy tört nevezője nem lehet nulla, ezért $y \neq -\frac{5}{2}$; $y \neq -\frac{2}{3}$; $y \in \mathbb{R}$.

Az egyenletet a közös nevezővel szorzom:

$$\begin{aligned}(8y-5)(3y+2) &= 5(2y+5)(3y+2) - (3y+7)(2y+5) \\ 24y^2 - 15y + 16y - 10 &= 30y^2 + 75y + 20y + 50 - 6y^2 - 14y - 15y - 35 \\ y - 10 &= 66y + 15 \\ 65y &= -25 \\ y &= -\frac{25}{65} = -\frac{5}{13}\end{aligned}$$

b) Értelmezési tartomány: A harmadik tört nevezője $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ alakban írható. Így az egyenletben szereplő törtek $x \neq 1$; $x \neq -3$; $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezhetők.

A közös nevezővel, $(x-1)(x+3)$ -mal beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned}(x+1)(x+3) - (x+2)(x-1) + 1 &= 0 \\ x^2 + 4x + 3 - x^2 - x + 2 + 1 &= 0 \\ 3x + 6 &= 0 \\ 3x &= -6 \\ x &= -2\end{aligned}$$

7. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $|4x-7| = 5$

b) $|2x+6| = 3-x$

c) $|x+5| + |x-3| = 11$

d) $|x+5| + |x-3| = 8$

e) $3 \cdot |x-2| - |x+7| = 2-x$

Megoldás:

a)

$$\begin{array}{lll}4x-7=5 & \text{vagy} & 4x-7=-5 \\ 4x=12 & & 4x=2 \\ x=3 & & x=0,5\end{array}$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$; $x_2 = 0,5$.

b) Az abszolútérték jelentése alapján:

$$|2x + 6| = \begin{cases} 2x + 6, & \text{ha } 2x + 6 \geq 0, \quad x \geq -3 \\ -2x - 6, & \text{ha } 2x + 6 < 0, \quad x < -3 \end{cases}$$

A megoldást két részre bontjuk:

Ha $x \geq -3$, akkor

$$\begin{aligned} 2x + 6 &= 3 - x \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x \geq -3$ feltételnek, tehát megoldás.

Ha $x < -3$, akkor

$$\begin{aligned} -2x - 6 &= 3 - x \\ x &= -9. \end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x < -3$ feltételnek, tehát megoldás.

Ezért az egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$; $x_2 = -9$.

c) A két abszolútérték $x = -5$ és $x = 3$ esetén lesz nulla. Ezek az értékek a számegyenesen három tartományt jelölnek ki, ezekben a tartományokban keressük a megoldásokat.



Az abszolútérték jelentése alapján:

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{ha } x \geq -5 \\ -x - 5, & \text{ha } x < -5 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{ha } x \geq 3 \\ 3 - x, & \text{ha } x < 3 \end{cases}$$

Ha $x < -5$, akkor az egyenlet átírható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} -x - 5 + 3 - x &= 11 \\ -2x &= 13 \\ x &= -6,5. \end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x < -5$ feltételnek, ezért megoldás.

Ha $-5 \leq x < 3$, akkor

$$\begin{aligned} x + 5 + 3 - x &= 11 \\ 8 &= 11. \end{aligned}$$

Ez sohasem teljesül, ekkor nincs megoldás.

Ha $x \geq 3$, akkor

$$\begin{aligned} x + 5 + x - 3 &= 11 \\ 2x &= 9 \\ x &= 4,5. \end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x \geq 3$ feltételnek, ezért megoldás.

Összefoglalva: az egyenlet megoldásai $x_1 = -6,5$; $x_2 = 4,5$.

d) Az előző feladat gondolatmenetét használva:

Ha $x < -5$, akkor az egyenlet átírható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} -x - 5 + 3 - x &= 8 \\ -2x &= 10 \\ x &= -5. \end{aligned}$$

Ez az érték nem felel meg az $x < -5$ feltételnek, ezért itt nem megoldás.

Ha $-5 \leq x < 3$, akkor

$$\begin{aligned}x + 5 + 3 - x &= 8 \\8 &= 8.\end{aligned}$$

Ez mindig teljesül, tehát az intervallum minden értéke megoldás.

Ha $x \geq 3$, akkor

$$\begin{aligned}x + 5 + x - 3 &= 8 \\2x &= 6 \\x &= 3.\end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x \geq 3$ feltételnek, ezért megoldás.

Összefoglalva, a $[-5; 3]$ intervallumban lévő számok adják az egyenlet megoldásait.

e) Az abszolútérték jelentése alapján:

$$|x + 7| = \begin{cases} x + 7, & \text{ha } x \geq -7 \\ -x - 7, & \text{ha } x < -7 \end{cases}$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{ha } x \geq 2 \\ 2 - x, & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

Ha $x < -7$, akkor

$$\begin{aligned}3 \cdot (2 - x) - (-x - 7) &= 2 - x \\6 - 3x + x + 7 &= 2 - x \\-2x + 13 &= 2 - x \\11 &= x.\end{aligned}$$

Ez az érték nem felel meg az $x < -7$ feltételnek, ezért nem megoldás.

Ha $-7 \leq x < 2$, akkor

$$\begin{aligned}3 \cdot (2 - x) - (x + 7) &= 2 - x \\6 - 3x - x - 7 &= 2 - x \\-4x - 1 &= 2 - x \\-3 &= 3x \\x &= -1.\end{aligned}$$

Ez az érték megfelel a $-7 \leq x < 2$ feltételnek, ezért megoldás.

Ha $x \geq 2$, akkor

$$\begin{aligned}3 \cdot (x - 2) - (x + 7) &= 2 - x \\3x - 6 - x - 7 &= 2 - x \\2x - 13 &= 2 - x \\3x &= 15 \\x &= 5.\end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x \geq 2$ feltételnek, ezért megoldás.

Összefoglalva, az egyenlet megoldásai $x_1 = -1$; $x_2 = 5$.

8. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszereket!

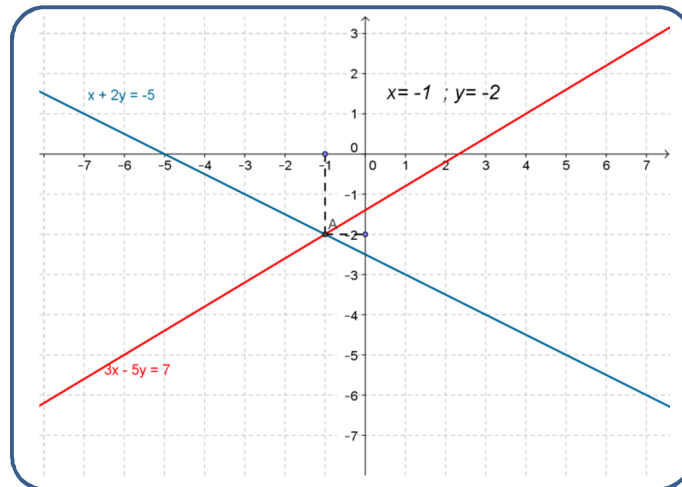
a)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x - 4y = 22 \end{cases}$$

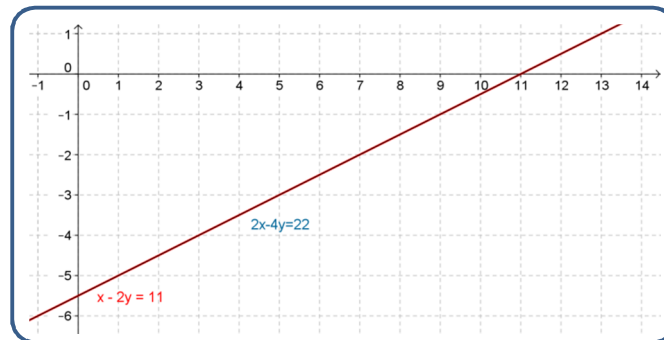
c)
$$\begin{cases} x + 4y = 5 \\ \frac{1}{2}x + 2y = 4 \end{cases}$$

Megoldás:

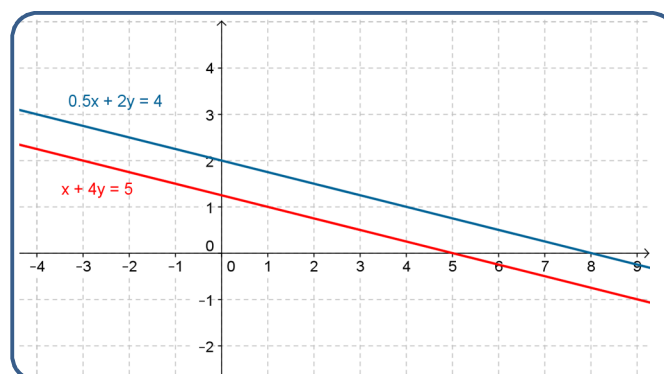
- a) A grafikonról leolvassuk a megoldást: $x = -1$; $y = -2$.



- b) A két egyenletnek megfelelő egyenes fedésben van, így az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Minden olyan $(x; y)$ számpár megoldás, amelyre az $x - 2y = 11$ összefüggés fennáll.



- c) A két egyenletnek megfelelő egyenes párhuzamos, ezért nincs közös pontjuk, az egyenletrendszernek nincs megoldása.



9. Oldjuk meg behelyettesítő módszerrel a

$$\begin{cases} 4x - 3y = -27 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük x -et y segítségével. Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$x = \frac{3y - 27}{4} \quad (*)$$

$$5 \cdot \frac{3y - 27}{4} + 7y = 20$$

$$\begin{aligned} 15y - 135 + 28y &= 80 \\ 43y &= 215 \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Ezt az értéket visszahelyettesítjük (*) egyenletbe:

$$x = \frac{15 - 27}{4} = -3.$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = -3$ és $y = 5$.

10. Oldjuk meg az egyenlő együtthatók módszerével a

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 5x + 9y = 6 \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletet 5-tel, a másodikat 3-mal szorozzuk:

$$\begin{cases} 15x - 20y = 65 \\ 15x + 27y = 18 \end{cases}$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikat:

$$\begin{aligned} -47y &= 47 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Az első egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 13 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 3$ és $y = -1$.

11. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \\ \frac{2}{x+y} - \frac{4}{x-y} = 8 \end{cases}$$

Megoldás:

Értelmezési tartomány: $x \neq y$; $x \neq -y$.

Vezessünk be új ismeretlent: $a = \frac{1}{x+y}$; $b = \frac{1}{x-y}$. Az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 4 \\ 2a - 4b = 8 \end{cases}$$

Az első egyenletet 2-vel megszorozzuk:

$$\begin{cases} 6a + 4b = 8 \\ 2a - 4b = 8 \end{cases}$$

A két egyenletet összeadjuk:

$$\begin{aligned} 8a &= 16 \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Az első egyenletbe behelyettesítjük a kapott értéket:

$$\begin{aligned} 6 + 2b &= 4 \\ 2b &= -2 \\ b &= -1. \end{aligned}$$

Tehát:

$$\begin{cases} x + y = 0,5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

A két egyenletet összeadva:

$$\begin{aligned} 2x &= -0,5 \\ x &= -\frac{1}{4} \\ y &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

1. egyenlet:

$$\frac{3}{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} + \frac{2}{-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = 6 - 2 = 4$$

2. egyenlet:

$$\frac{2}{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} - \frac{4}{-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = 4 + 4 = 8$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása valóban:

$$x = -\frac{1}{4} \text{ és } y = \frac{3}{4}.$$

12. Oldjuk meg grafikusan a valós számok halmazán következő a egyenlőtlenségeket!

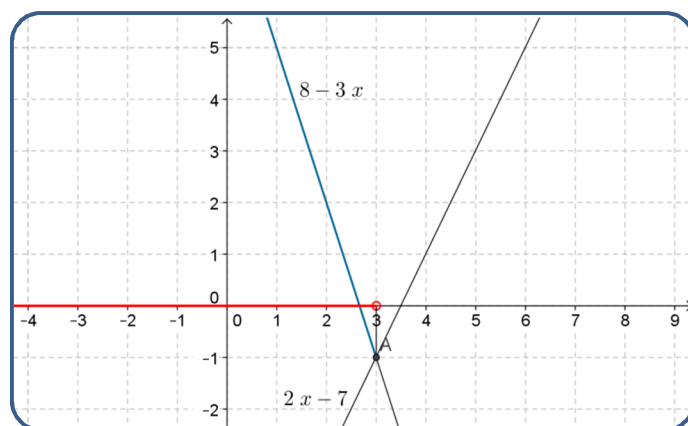
a) $2x - 7 < 8 - 3x$

b) $2 \cdot |x - 4| \geq -x + 7$

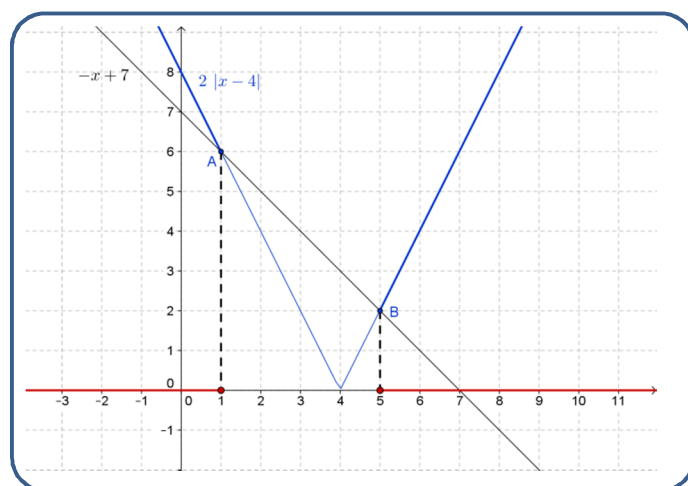
c) $\sqrt{x + 5} > 7 - x$

Megoldás:

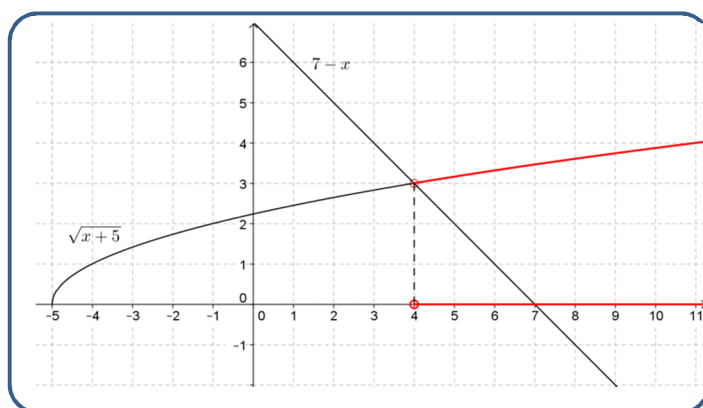
a) A grafikon alapján a megoldás: $x < 3; x \in \mathbb{R}$.



- b) Azt vizsgáljuk, hogy mikor halad az $f(x) = 2 \cdot |x - 4|$ függvény görbéje a $g(x) = -x + 7$ grafikonja felett. Ez alapján az egyenlőtlenség megoldása $x \leq 1$ vagy $x \geq 5$; $x \in \mathbb{R}$.



- c) Az alábbi grafikonról leolvashatjuk a megoldást: $x > 4$; $x \in \mathbb{R}$.



13. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $2(x - 5) - 4(3x - 2) > 22 - 6x$

b) $\frac{4x+5}{2} - \frac{x-3}{5} \leq \frac{6+4x}{4}$

c) $(2x + 4)(6 - 3x)(4x + 12) \geq 0$

d) $\frac{8x+12}{x+2} < 0$

e) $\frac{3x+2}{x-5} \leq 4$

Megoldás:

- a) Felbontjuk a zárójeleket, elvégezzük a lehetséges összevonásokat. Ezután a mérlegelvet alkalmazzuk az egyenlőtlenségre:

$$2x - 10 - 12x + 8 > 22 - 6x$$

$$-10x - 2 > 22 - 6x$$

$$-4x > 24$$

$$x < -6$$

- b) A közös nevezővel megszorozzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát:

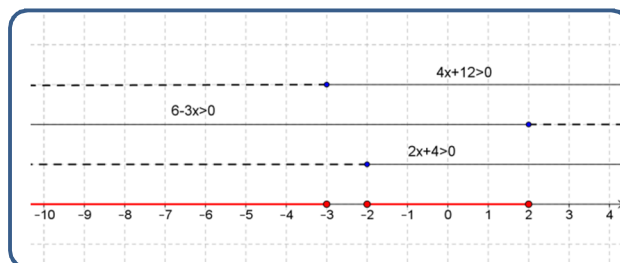
$$40x + 50 - 4x + 12 \leq 30 + 20x$$

$$36x + 62 \leq 30 + 20x$$

$$16x \leq -32$$

$$x \leq -2$$

- c) Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, akkor pozitív, ha páros számú tényezője negatív. Az egyes tényezők előjelét egy számegyenes mentén ábrázoljuk, majd a számegyenesen az előbbi elvet alkalmazva bejelöljük a megoldást:



Az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty; -3] \cup [-2; 2]$.

- d) A tört nevezője nem lehet nulla, ezért az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Egy tört értéke akkor negatív, ha a számláló és a nevező ellentétes előjelű:

$$\begin{array}{l} 8x + 12 > 0 \\ \text{és} \\ x + 2 < 0 \\ \hline x > -1,5 \\ \text{és} \\ x < -2 \end{array}$$

Ilyen x nincs.

vagy

$$\begin{array}{l} 8x + 12 < 0 \\ \text{és} \\ x + 2 > 0 \\ \hline x < -1,5 \\ \text{és} \\ x > -2 \end{array}$$

Ekkor:
 $-2 < x < -1,5$.

Összefoglalva:

Az egyenlőtlenség megoldása: $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < -1,5\}$.

- e) A nevező nem lehet nulla, ezért az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Megoldás I:

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalából kivonunk 4-et, akkor a feladatot egy tört előjelének vizsgálatára vezetjük vissza(ld. d) feladat):

$$\begin{array}{ccc} \frac{3x+2}{x-5} - 4 \leq 0 & & \\ \frac{3x+2-4x+20}{x-5} \leq 0 & & \\ \frac{-x+22}{x-5} \leq 0 & & \\ \begin{array}{l} -x+22 \geq 0 \\ \text{és} \\ x-5 < 0 \\ \hline x \leq 22 \\ \text{és} \\ x < 5 \\ \text{Ekkor:} \\ x < 5 \end{array} & \text{vagy} & \begin{array}{l} -x+22 \leq 0 \\ \text{és} \\ x-5 > 0 \\ \hline x \geq 22 \\ \text{és} \\ x > 5 \\ \text{Ekkor:} \\ 22 \leq x. \end{array} \end{array}$$

Figyeljünk arra, hogy a számláló mindkét esetben lehet nulla, hiszen nullát akár pozitív, akár negatív számmal osztunk, az eredmény nulla lesz.

Összefoglalva:

Az egyenlőtlenség megoldása: $\{x \in \mathbb{R} | x < 5 \text{ vagy } x \geq 22\}$, számegyenesen ábrázolva:



Megoldás II:

$x - 5$ -tel szorozzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát:

Ha $x - 5 > 0$, $x > 5$, akkor az egyenlőtlenség iránya változatlan:

$$\begin{array}{l} 3x + 2 \leq 4x - 20 \\ 22 \leq x. \end{array}$$

Az $x > 5$ feltételt is figyelembe véve: $22 \leq x$.

Ha $x - 5 < 0$, $x < 5$, akkor az egyenlőtlenség iránya megváltozik:

$$\begin{array}{l} 3x + 2 \geq 4x - 20 \\ 22 \geq x. \end{array}$$

Az $x < 5$ feltételt is figyelembe véve: $x < 5$.

Összefoglalva: $x < 5$ vagy $x \geq 22$ valós szám.

14. A B helyről C -be vezető út 3 km-es emelkedővel kezdődik, majd 5 km hosszban vízszintesen halad és 6 km-es lejtővel ér célba, amelynek lejtése egyenlő az első szakaszával. András B -ből indult és félúton megfordulva 3 óra 36 perc alatt visszatért B -be. Pihenő után 3 óra 27 perc alatt ért C -be, végül a visszafelé vezető utat 3 óra 51 perc alatt tette meg. Mekkora sebességgel haladt sík úton, lejtőn fel- és lefelé? (Feltételezzük, hogy mindig azonos sebességgel halad az egyes útszakaszokon.)

Megoldás:

A lejtőn felfelé x km/perc sebességgel, sík talajon y km/perc sebességgel, lejtőn lefelé z km/perc sebességgel haladt. Ha félútról tért vissza, akkor vízszintesen $4+4=8$ km-t tett meg. Összeszámoljuk az egyes esetekben eltelt percek felhasználva, hogy az eltelt időt az út és a sebesség hányadosaként kapjuk:

$$\frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{3}{z} = 216 \quad (1)$$

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = 207 \quad (2)$$

$$\frac{6}{x} + \frac{5}{y} + \frac{3}{z} = 231 \quad (3)$$

Az (1) egyenletből kivonjuk a (2) egyenletet, a (2) egyenlet kétszereséből kivonjuk a (3) egyenletet:

$$\frac{3}{y} - \frac{3}{z} = 9 \quad (4)$$

$$\frac{5}{y} + \frac{9}{z} = 183 \quad (5)$$

A (4) egyenlet háromszorosához hozzáadjuk az (5) egyenletet:

$$\frac{14}{y} = 210 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{15}$$

Az (5) egyenletbe visszahelyettesítve:

$$75 + \frac{9}{z} = 183 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{12}$$

Az (1) egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{3}{x} + 120 + 36 = 216 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{20}$$

A feladat szövegéhez az illet, hogy km/percben számoljuk. Sebességet a mindennapi életben km/órában adunk meg. A fenti értékeket 60-nal kell szoroznunk (mert 1 órában 60 perc van) ahhoz, hogy a szokásos mértékegységben adjuk meg a kért sebességeket.

András sík úton 4 km/h, lejtőn felfelé 3 km/h, lefelé 5 km/h sebességgel halad.

15. 3 dl 40%-os narancslevet szeretnénk készíteni. Mennyi 20%-os és mennyi 80%-os narancslevet öntsünk össze?

Megoldás:

x dl 20%-os gyümölcslehez $3 - x$ dl 80% gyümölcslevet öntünk. Az összeöntés során a tiszta gyümölcstartalom megmarad.

x dl	20%-os	gyümölcslehen	$0,2 \cdot x$ dl gyümölcs van.
$3 - x$ dl	80%-os	gyümölcslehen	$0,8(3 - x)$ dl gyümölcs van.
3 dl	40%-os	gyümölcslehen	$3 \cdot 0,4 = 1,2$ dl gyümölcs van.

Ez alapján

$$\begin{aligned} 0,2x + 0,8(3 - x) &= 1,2 \\ 0,2x + 2,4 - 0,8x &= 1,2 \\ 1,2 &= 0,6x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

2 dl 20%-os gyümölcslemben $0,2 \cdot 2 = 0,4$ dl gyümölcs van. 1 dl 80%-os gyümölcslemben 0,8 dl gyümölcs van. Ez összesen 1,2 dl, ami megegyezik a 3 dl 40%-os gyümölcslé gyümölcstartalmával. Tehát megoldásunk helyes.

2 dl 20%-os és 1 dl 80%-os narancslevet kell összeöntenünk, hogy 3 dl 40% - os gyümölcslevet kapjunk.

16. Két gépirónő gépel egy szöveget. Az egyik egyedül 2 óra alatt, a másik egyedül 3 óra alatt lenne készen a munkával. Mennyi idő alatt lesznek készen, ha úgy osztják el az anyagot, hogy a lehető legrövidebb idő alatt legyen készen a munka? Milyen arányban kell kettéosztaniuk a munkát ebben az esetben?

Megoldás:

A munkát t óra alatt végzik el.

Az első gépirónő 1 óra alatt a munka $\frac{1}{2}$ részét, t óra alatt $\frac{t}{2}$ -ed részét végzi el.

A második gépirónő 1 óra alatt a munka $\frac{1}{3}$ részét, t óra alatt $\frac{t}{3}$ -ad részét végzi el.

Együtt elvégzik a teljes anyag gépelését:

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 1$$

Az egyenletet megoldva $t = \frac{6}{5}$ óra, 1 óra 12 perc.

Az első gépirónő a munka $\frac{3}{5}$ részét, a másik $\frac{2}{5}$ részét végzi el. Tehát a munkát 3:2 arányban kell elosztaniuk maguk között. Ekkor 1 óra 12 perc alatt elkészülnek a gépeléssel.

17. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 13. Ha a számot 12-vel osztjuk, akkor a hányados megegyezik a szám utolsó jegyével, a maradék pedig ennél 2-vel kisebb. Melyik ez a szám?

Megoldás:

A számjegyeket jelöljük, x -szel és $13 - x$ -szel:

tízes	egyes
x	$13 - x$

Ennek a számnak az értéke: $10x + 13 - x = 9x + 13$. A maradékos osztás szerint:

$$9x + 13 = (13 - x) \cdot 12 + 11 - x.$$

$$9x + 13 = 156 - 12x + 11 - x$$

$$9x + 13 = 167 - 13x$$

$$22x = 154$$

$$x = 7$$

$$13 - x = 6$$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{l} 76 : 12 = 6 \\ 4 \end{array}$$

A hányados valóban a szám utolsó számjegye, a maradék pedig ennél 2-vel kisebb.

Így a kétjegyű szám a 76.

18. András kétszer annyi idős, mint Béla volt akkor, amikor András olyan idős volt, mint Béla most. Amikor Béla olyan idős lesz, mint András most, akkor életkoruk összege 81 év lesz. Milyen idős András és Béla most?

Megoldás:

András most x éves, Béla y éves. A feladat három időpontról beszél: most, régebben, jövőben.

Az adatokat egy táblázatban foglaljuk össze:

	régebben	most	jövőben
András	y	x	$81 - x$
Béla	$\frac{x}{2}$	y	x

Életkoruk közötti különbség nem változik, tehát:

$$\left. \begin{aligned} y - \frac{x}{2} &= x - y \\ x - y &= 81 - x - x \end{aligned} \right\}$$

Az egyenleteket rendezve:

$$\left. \begin{aligned} 2y &= \frac{3}{2}x \\ 3x - y &= 81 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2y &= \frac{3}{2}x \\ y &= 3x - 81 \end{aligned} \right\}$$

$$2(3x - 81) = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 6x - 162 = 1,5x \Leftrightarrow x = 36 ; y = 27.$$

Az alábbi táblázatban ellenőrizhetjük a megoldást:

	régebben	most	jövőben
András	27	36	45
Béla	18	27	36

A feladat szövegében szereplő összefüggések teljesülnek.

András most 36 éves, Béla pedig 27 éves.

19. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ha p valós paraméter!

$$p^2x - 9x = p^2 + 6p + 9$$

Megoldás:

$$x(p^2 - 9) = (p + 3)^2$$

Ha $p \neq \pm 3$, akkor $p^2 - 9 \neq 0$, tehát

$$x = \frac{(p + 3)^2}{p^2 - 9} = \frac{p + 3}{p - 3}.$$

Ha $p = 3$, akkor az egyenlet $x \cdot 0 = 36$ alakban írható, ilyen x nincs.

Ha $p = -3$, akkor az egyenlet $x \cdot 0 = 0$ alakban írható. Ennek az egyenletnek tetszőleges valós szám megoldása.

Összefoglalva:

$$x = \begin{cases} \frac{p+3}{p-3}, & \text{ha } p \neq \pm 3 \\ \text{tetszőleges valós szám,} & \text{ha } p = -3 \\ \text{nincs megoldás,} & \text{ha } p = 3 \end{cases}$$

20. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{x}{p-3} - \frac{1}{p} = \frac{6+4x}{p^2-3p}$$

egyenletet, ha p valós paraméter!

Megoldás:

A nevező nem lehet 0, ezért $p = 0$; $p = 3$ esetében nincs megoldás.

Ha $p \neq 0$; $p \neq 3$, akkor $p(p-3) = p^2 - 3p$ - vel beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} xp - p + 3 &= 6 + 4x \\ x(p-4) &= p + 3 \end{aligned}$$

Ha $p \neq 4$, akkor

$$x = \frac{p+3}{p-4}.$$

Ha $p = 4$, akkor az egyenlet $x \cdot 0 = 7$, alakban írható, és ennek az egyenletnek nincs megoldása.

Összefoglalva:

$$x = \begin{cases} \frac{p+3}{p-4}, & \text{ha } p \neq 0; 3; 4 \\ \text{nincs megoldás,} & \text{ha } p = 0; 3; 4. \end{cases}$$

III. Ajánlott feladatok

1. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{2}{5}x + 3 = x + 6$

b) $(x-2)^2 = -x-1$

c) $-(x+4)^2 + 2 = (x+1)^2 - 3$

d) $||x-2|-3| = -x+5$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $x + \frac{1}{x-2013} = 2013 + \frac{1}{x-2013}$

b) $(x+2)\sqrt{x-1} = 0$

c) $\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x}$

d) $\sqrt{x-3} + \frac{1}{x-3} = \sqrt{3-x}$

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $|2x-7| + 5 = 0$

b) $\sqrt{5-x} + |x-5| = 0$

$$c) x^2 - 6x + 9 + \sqrt{3x - 2y} = 0$$

$$d) |x + 2y| + 16 = -y^2 + 8y$$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$a) (3x - 6)(7 - x) = 0$$

$$b) x^2 = 7x$$

$$c) x^2 - 4x - 2x + 8 = 0$$

$$d) x^6 - 8x^5 + 16x^4 = 0$$

$$e) (2x - 3)^2 = 5x(x - 2) - (x + 1)(x - 1)$$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$a) 3(x - 2) - 4(7 - x) = 5(2x - 3) - 10$$

$$b) \frac{2x-5}{10} - \frac{3x-1}{5} = \frac{3}{10} - \frac{3x}{5}$$

$$c) \frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x+1)}{3x-3} = \frac{5}{3}$$

$$d) (x + 2)^3 - (x - 2)^3 = 12(x^2 - x) - 8$$

$$e) \frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x^2-x}{x^2-2x+1} = \frac{x^2+1}{1-x^2}$$

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

$$a) |3x + 5| = x + 7$$

$$b) |3x + 5| = 3x + 5$$

$$c) |3x + 5| = |2x - 1|$$

$$d) |x + 1| + 2|x - 5| = |x + 5|$$

7. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$a) \begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x \end{cases}$$

8. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

$$a) 2(x - 3) - 5(2 - 3x) > 3 - 2x$$

$$b) (x + 7) \cdot (4x + 5) \leq 0$$

$$c) \frac{(x+5) \cdot (2-x)}{2x-7} > 0$$

$$d) \frac{x+2}{x-2} \leq \frac{x-1}{x+3}$$

9. Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságárusnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt. Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt?

(Középszintű érettségi 2005. május)

10. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán, ha a egész paraméter!

$$a(x+2) - 2a = 7(x+1)$$

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{2}{5}x + 3 = x + 6$

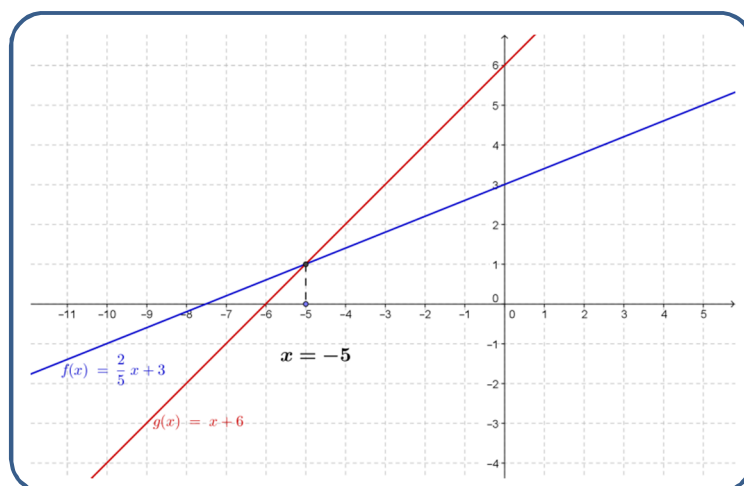
b) $(x-2)^2 = -x-1$

c) $-(x+4)^2 + 2 = (x+1)^2 - 3$

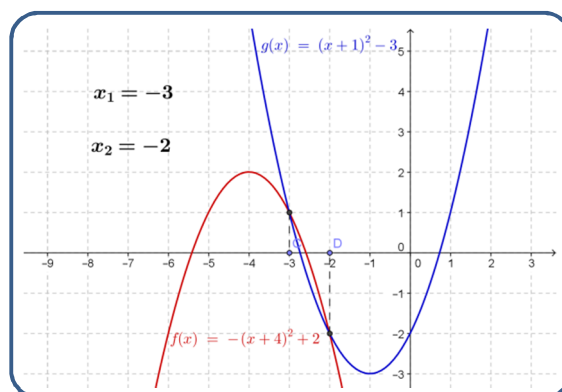
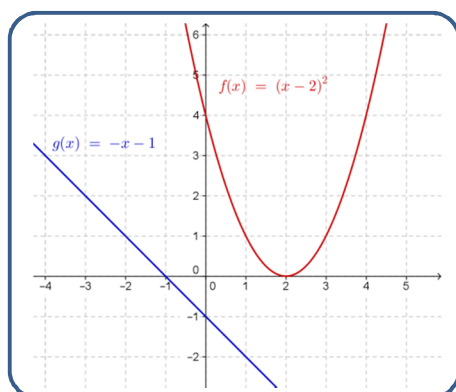
d) $||x-2|-3| = -x+5$

Megoldás:

a) $x = -5$.

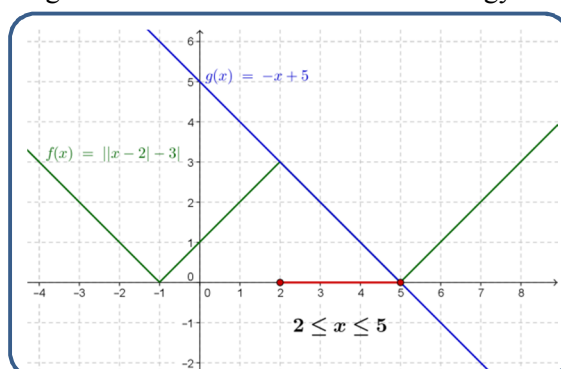


b) A két grafikonnak nincs közös pontja, így az egyenletnek nincs megoldása.



c) $x_1 = -3; x_2 = -2$.

d) $2 \leq x \leq 5$, mert a két grafikon ezen az intervallumon fedi egymást.



2. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $x + \frac{1}{x-2013} = 2013 + \frac{1}{x-2013}$

b) $(x+2)\sqrt{x-1} = 0$

c) $\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x}$

d) $\sqrt{x-3} + \frac{1}{x-3} = \sqrt{3-x}$

Megoldás:

a) Az értelmezési tartomány $x \neq 2013; x \in \mathbb{R}$. Az egyenlet rendezésével $x = 2013$ adódik, de ez az értelmezési tartomány miatt nem megoldás, így az egyenletnek nincs megoldása.

b) Az értelmezési tartomány $x \geq 1; x \in \mathbb{R}$.

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0: $x = -2$ vagy $x = 1$. Az értelmezési tartomány miatt csak az $x = 1$ lesz valóban megoldás.

c) A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq 3$ és $x \leq 3$ feltételeknek teljesülnie kell, tehát az értelmezési tartományba egyedül az $x = 3$ érték tartozik. Erre az értékre mindkét oldal 0, tehát ez az érték az egyenlet megoldása.

d) A c) esethez hasonlóan a két négyzetgyök egyszerre csak $x = 3$ esetén értelmezhető. Ekkor a tört nevezője 0, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $|2x - 7| + 5 = 0$

b) $\sqrt{5-x} + |x-5| = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 + \sqrt{3x-2y} = 0$

d) $|x+2y| + 16 = -y^2 + 8y$

Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldala az abszolútérték miatt mindig pozitív, így az egyenletnek nincs megoldása.

b) A négyzetgyök és az abszolútérték nemnegatív. Az összegük csak akkor lehet 0, ha mindkét tag 0. Ez $x = 5$ esetén teljesül, tehát ez az egyenletnek megoldása.

c) Az egyenletet átalakítva az

$$(x-3)^2 + \sqrt{3x-2y} = 0$$

egyenletet kapjuk. Mindkét tag nemnegatív, az összeg csak $x = 3; y = 4,5$ esetén lesz 0.

d) Az egyenletet átalakítva az

$$|x+2y| + (y-4)^2 = 0$$

alakra hozható. Az abszolútérték és a négyzet értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, így az egyenlet egyetlen megoldása: $x = -8; y = 4$.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $(3x-6)(7-x) = 0$

b) $x^2 = 7x$

c) $x^2 - 4x - 2x + 8 = 0$

d) $x^6 - 8x^5 + 16x^4 = 0$

e) $(2x-3)^2 = 5x(x-2) - (x+1)(x-1)$

Megoldás:

a) $x = 2$ vagy $x = 7$.

b) $x^2 - 7x = x \cdot (x - 7) = 0$ szorzatból $x_1 = 0; x_2 = 7$.

c) Szorzattá alakítjuk az egyenlet bal oldalát:

$$x(x - 4) - 2(x - 4) = (x - 2)(x - 4) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 2; x_2 = 4$.

d) Szorzattá alakítjuk az egyenlet bal oldalát:

$$x^6 - 8x^5 + 16x^4 = x^4 \cdot (x^2 - 8x + 16) = x^4 \cdot (x - 4)^2 = 0$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 0; x_2 = 4$.

e)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= 5x^2 - 10x - x^2 + 1 \\ 8 &= 2x \\ x &= 4 \end{aligned}$$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $3(x - 2) - 4(7 - x) = 5(2x - 3) - 10$

b) $\frac{2x-5}{10} - \frac{3x-1}{5} = \frac{3}{10} - \frac{3x}{5}$

c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x+1)}{3x-3} = \frac{5}{3}$

d) $(x + 2)^3 - (x - 2)^3 = 12(x^2 - x) - 8$

e) $\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x^2-x}{x^2-2x+1} = \frac{x^2+1}{1-x^2}$

Megoldás:

a) $x = -3$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{10} - \frac{3x-1}{5} &= \frac{3}{10} - \frac{3x}{5} \\ 2x-5-6x+2 &= 3-6x \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

c) Értelmezési tartomány $x \neq 1; x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x+1)}{3x-3} &= \frac{5}{3} \\ 3x+3-2x-2 &= 5x-5 \\ 6 &= 4x \\ x &= 1,5 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} (x+2)^3 - (x-2)^3 &= 12(x^2 - x) - 8 \\ x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 &= 12x^2 - 12x - 8 \\ 16 &= -12x - 8 \\ 12x &= -24 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

e) Értelmezési tartomány: $x \neq \pm 1; x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} &= -\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \\
\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x-1} &= -\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \quad / \cdot (x+1)(x-1) \\
x-1-x(x+1) &= -x^2-1 \\
x-1-x^2-x &= -x^2-1 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Ez az egyenlet az értelmezési tartomány minden elemére teljesül, tehát azonosság; a megoldások :

$$\mathbb{R} \setminus \{1; -1\}.$$

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

- a) $|3x + 5| = x + 7$
- b) $|3x + 5| = 3x + 5$
- c) $|3x + 5| = |2x - 1|$
- d) $|x + 1| + 2|x - 5| = |x + 5|$

Megoldás:

a) Az abszolútérték jelentése alapján:

$$|3x + 5| = \begin{cases} 3x + 5, & \text{ha } 3x + 5 \geq 0, \quad x \geq -5/3; \\ -3x - 5, & \text{ha } 3x + 5 < 0, \quad x < -5/3 \end{cases}$$

A megoldást két részre bontjuk:

Ha $x \geq -\frac{5}{3}$, akkor

$$\begin{aligned}
3x + 5 &= x + 7 \\
2x &= 2 \\
x &= 1.
\end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x \geq -\frac{5}{3}$ feltételnek, tehát megoldás.

Ha $x < -\frac{5}{3}$, akkor

$$\begin{aligned}
-3x - 5 &= x + 7 \\
4x &= -12 \\
x &= -3.
\end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x < -\frac{5}{3}$ feltételnek, tehát megoldás.

Ezért az egyenlet megoldásai: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$.

b) $x \geq -\frac{5}{3}$.

c) Két szám abszolútértéke akkor egyenlő, ha a két szám egyenlő vagy egymás ellentettje:

$$\begin{aligned}
3x + 5 &= 2x - 1 & \text{vagy} & & 3x + 5 &= 1 - 2x \\
x &= -6 & & & 5x &= -4 \\
& & & & x &= -0,8
\end{aligned}$$

d) Az abszolútérték jelentése alapján:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x + 1 \geq 0, \quad x \geq -1; \\ -x - 1, & \text{ha } x + 1 < 0, \quad x < -1 \end{cases}$$

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{ha } x - 5 \geq 0, \quad x \geq 5; \\ 5 - x, & \text{ha } x - 5 < 0, \quad x < 5 \end{cases}$$

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{ha } x + 5 \geq 0, \quad x \geq -5; \\ -x - 5, & \text{ha } x + 5 < 0, \quad x < -5 \end{cases}$$

Ha $x < -5$, akkor az egyenlet átírható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} -x - 1 + 10 - 2x &= -x - 5 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ez az érték nem felel meg az $x < -5$ feltételnek, ezért nem megoldás.

Ha $-5 \leq x < -1$, akkor

$$\begin{aligned} -x - 1 + 10 - 2x &= x + 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Ez az érték nincs a $[-5; -1[$ intervallumban, ezért nem megoldás.

Ha $-1 \leq x < 5$, akkor

$$\begin{aligned} x + 1 + 10 - 2x &= x + 5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Ez a $[-1; 5[$ intervallum eleme, ezért megoldás.

Ha $x \geq 5$, akkor

$$\begin{aligned} x + 1 + 2x - 10 &= x + 5 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ez megfelel az $x \geq 5$ feltételnek, ezért megoldás.

Összefoglalva: az egyenlet megoldásai $x_1 = 3$; $x_2 = 7$.

7. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ -x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x \end{cases}$$

Megoldás:

a) Behelyettesítő módszerrel megoldva:

$$\begin{aligned} x &= 2y - 10 \\ 5(2y - 10) + 3y &= 2 \\ y &= 4 \\ x &= 2 \cdot 4 - 10 = -2 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása a $(-2; 4)$ számpár.

b) A két egyenletet egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} 20x + 20 - 15y - 30 &= 24x - 24y \\ 3x - 9 - 4y + 12 &= 24y - 12x \\ -4x + 9y &= 10 \\ 15x - 28y &= -3 \end{aligned}$$

Egyenlő együtthatók módszerével megoldjuk az egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcl} -60x + 135y = 150 & \} & + \\ 60x - 112y = -12 & & \\ \hline 23y = 138 & & \\ y = 6 & & \\ -4x + 54 = 10 & & \\ x = 11 & & \end{array}$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = 11; y = 6$.

8. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $2(x - 3) - 5(2 - 3x) > 3 - 2x$

b) $(x + 7) \cdot (4x + 5) \leq 0$

c) $\frac{(x+5) \cdot (2-x)}{2x-7} > 0$

d) $\frac{x+2}{x-2} \leq \frac{x-1}{x+3}$

Megoldás:

a) $x > 1$.

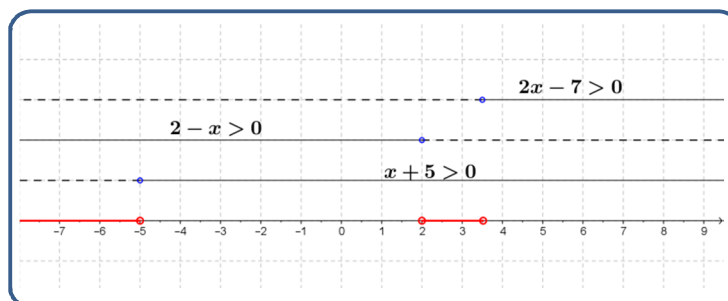
b)	$x + 7 \geq 0$	vagy	$x + 7 \leq 0$
	és		és
	$4x + 5 \leq 0$		$4x + 5 \geq 0$
	$x \leq -7$		$x \leq -7$
	és		és
	$x < -1,25$		$x \geq -1,25$
	Ekkor		Ilyen x nincs.
	$-7 \leq x \leq -1,25$		.

Összefoglalva:

Az egyenlőtlenség megoldása: $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq -1,25\}$.

c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$.

A számlálóban lévő tényezők és a nevező előjelét számegyenes mentén ábrázoljuk. A tört akkor lesz pozitív, ha ezek közül a kifejezések között páros számú negatív van.



Az egyenlőtlenség megoldása: $] - \infty; -5[\cup]2; 3,5[$.

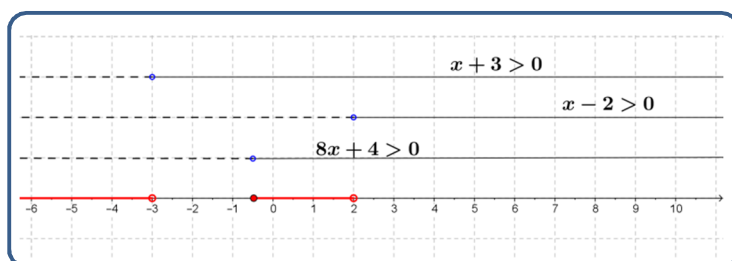
d) Az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$. Az egyenlőtlenséget úgy rendezem át, hogy egy tört előjelének vizsgálatát a feladat.

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-1}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{(x+2)(x+3) - (x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{8x+4}{(x-2)(x+3)} \leq 0$$

Ezt a feladatot a c) feladatban látott módszerrel oldjuk meg. Egy tört akkor nulla, ha a számlálója nulla, akkor negatív, ha a számláló és a nevező előjele ellentétes.



Ennek alapján az egyenlőtlenség megoldása: $] - \infty; -3] \cup [-0,5; 2[$.

9. Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságárusnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt. Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzüket volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt?

(Középszintű érettségi 2005. május)

Megoldás:

A magazin ára x Ft. Annának $x \cdot 0,88$ Ft-ja, Zsuzsinak $x \cdot 0,8$ Ft-ja van.

$$x \cdot 0,88 + x \cdot 0,8 = x + 714$$

$$x = 1050$$

A magazin 1050 Ft, Annának 924 Ft-ja, Zsuzsinak 840 Ft-ja volt.

10. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán, ha a egész paraméter!

$$a(x+2) - 5a = 7(x+1)$$

Megoldás:

$$ax + 2a - 5a = 7x + 7$$

$$x(a-7) = 3a+7$$

Ha $a = 7$, akkor az egyenlet $x \cdot 0 = 28$ alakú, aminek nincs megoldása.

Ha $a \neq 7$, akkor

$$x = \frac{3a+7}{a-7} = \frac{3a-21+28}{a-7} = 3 + \frac{28}{a-7}.$$

x akkor lesz egész szám, ha 28 osztható $(a-7)$ -tel.

A megoldásokat az alábbi táblázat tartalmazza; figyeljünk arra, hogy egy egész számnak negatív osztói is vannak:

$a - 7$	a	x
1	8	31
2	9	17
4	11	10
7	14	7
14	21	5
28	35	4
-1	6	-25
-2	5	-11
-4	3	-4
-7	0	-1
-14	-7	1
-28	-21	2

Ha az a paraméter a fentiektől különböző, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

IV. Ellenőrző feladatok

- Oldja meg grafikusán a következő egyenletet!

$$-|x - 1| + 2 = (x - 4)^2 - 3$$

- Oldja meg az alábbi egyenleteket!

$$\text{a) } \sqrt{4x - 7} = \sqrt{10 - 6x}$$

$$\text{b) } \sqrt{x - 6z} + (2y - z)^2 + |y - 1| = 0$$

- Oldja meg a következő egyenletet!

$$(3x - 1)(2x + 4) - (x + 1)(3x - 1) = (3x - 1)(2x - 3)$$

- Oldja meg a következő egyenletet!

$$2(x + 1) \cdot \frac{1}{x} - 1 = 1 - \frac{2 \cdot (1 + 2x)}{x}$$

- Oldja meg a valós számok halmazán!

$$3 \cdot |2x - 4| - |5 - x| = -3x + 5$$

- Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left. \begin{aligned} \frac{2x + 1}{5} + \frac{2 - y}{4} &= -0,1 \\ \frac{x + 2}{3} - \frac{7 - 5y}{2} &= 3 \end{aligned} \right\}$$

- Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{2x + y + 1} + \frac{1}{2 - 2x + y} &= 7 \\ \frac{4}{2x + y + 1} + \frac{1}{2x - y - 2} &= -3 \end{aligned} \right\}$$

8. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $7(x - 6) - 4(2x + 3) < 12$

b) $(12 - x)(2x + 6)(4x - 12) \geq 0$

9. Panni és Kati elvállalta, hogy szövegszerkesztővel legépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezne a gépeléssel. Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak a 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát.

a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót, és megszakítás nélküli munkát feltételezve)?

Szerdán reggel egyszerre kezdtek hozzá 9 órakor a gépeléshez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egy órányi időtartamra megszakította.

b) Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán?

(Emelt szintű érettségi 2006. május)

10. Oldja meg a következő egyenletet, ahol p valós paraméter!

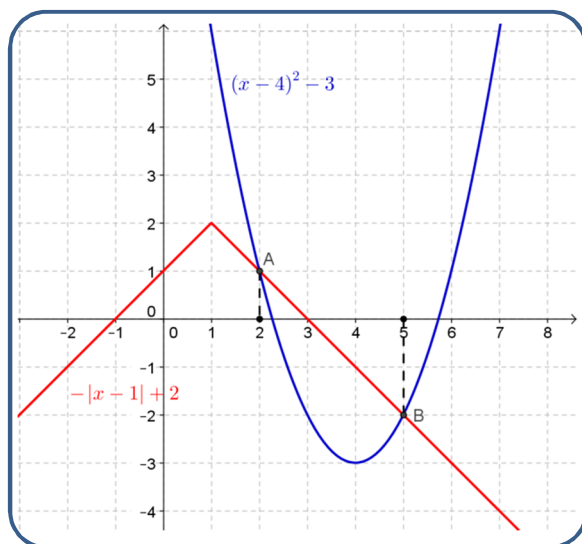
$$(p^2 + p) \cdot x = p^2 + 2p + 1$$

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Oldja meg grafikusan a következő egyenletet!

$$-|x - 1| + 2 = (x - 4)^2 - 3$$

Megoldás:



A grafikonról leolvasható, hogy az egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$; $x_2 = 5$.

2. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{4x-7} = \sqrt{10-6x}$

b) $\sqrt{x-6z} + (2y-z)^2 + |y-1| = 0$

Megoldás:

a) A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq \frac{7}{4}$; $x \leq \frac{10}{6}$. Ez a két feltétel egyszerre nem teljesül, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

b) Az egyenlet bal oldalán szereplő minden tag nulla vagy pozitív, ezért az összeg csak akkor lehet nulla, ha a kifejezések mindegyike 0. Így $y = 1$; $z = \frac{1}{2}$; $x = 3$.

3. Oldja meg a következő egyenletet!

$$(3x-1)(2x+4) - (x+1)(3x-1) = (3x-1)(2x-3)$$

Megoldás:

Ha $3x-1=0$, $x=\frac{1}{3}$, akkor az egyenlet mindkét oldala 0, tehát $x=\frac{1}{3}$ megoldás. Ha $x \neq \frac{1}{3}$, akkor az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk $(3x-1)$ -gyel:

$$\begin{aligned} 2x+4-x-1 &= 2x-3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = 6$.

4. Oldja meg a következő egyenletet!

$$2(x+1) \cdot \frac{1}{x} - 1 = 1 - \frac{2 \cdot (1+2x)}{x}$$

Megoldás:

Értelmezési tartomány: $x \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2(x+1) \cdot \frac{1}{x} - 1 &= 1 - \frac{2 \cdot (1+2x)}{x} & / \cdot x \\ 2x+2-x &= x-2-4x \\ 4x &= -4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán!

$$3 \cdot |2x-4| - |5-x| = -3x+5$$

Megoldás:

Az abszolútérték jelentése alapján:

$$\begin{aligned} |2x-4| &= \begin{cases} 2x-4, & \text{ha } x \geq 2 \\ 4-2x, & \text{ha } x < 2 \end{cases} ; \\ |5-x| &= \begin{cases} x-5, & \text{ha } x \geq 5 \\ 5-x, & \text{ha } x < 5 \end{cases} . \end{aligned}$$

Ha $x < 2$, akkor az egyenlet:

$$\begin{aligned}
3 \cdot (4 - 2x) - (5 - x) &= -3x + 5 \\
12 - 6x - 5 + x &= -3x + 5 \\
-5x + 7 &= -3x + 5 \\
2 &= 2x \\
x &= 1.
\end{aligned}$$

Ez az érték megfelel az $x < 2$ feltételnek, ezért megoldás.

Ha $2 \leq x < 5$, akkor

$$\begin{aligned}
3 \cdot (2x - 4) - (5 - x) &= -3x + 5 \\
6x - 12 - 5 + x &= -3x + 5 \\
7x - 17 &= -3x + 5 \\
10x &= 22 \\
x &= 2,2.
\end{aligned}$$

Ez az érték megfelel a $2 \leq x < 5$ feltételnek, ezért megoldás.

Ha $x \geq 5$, akkor

$$\begin{aligned}
3 \cdot (2x - 4) - (x - 5) &= -3x + 5 \\
6x - 12 - x + 5 &= -3x + 5 \\
5x - 7 &= -3x + 5 \\
8x &= 12 \\
x &= 1,5.
\end{aligned}$$

Ez az érték nem felel meg az $x \geq 5$ feltételnek, ezért nem megoldás.

Összefoglalva, az egyenlet megoldásai $x_1 = 1$; $x_2 = 2,2$.

6. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left. \begin{aligned} \frac{2x+1}{5} + \frac{2-y}{4} &= -0,1 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{7-5y}{2} &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

$$\left. \begin{aligned} 8x + 4 + 10 - 5y &= -2 \\ 2x + 4 - 21 + 15y &= 18 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 8x - 5y &= -16 \\ 2x + 15y &= 35 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 8x - 5y &= -16 \\ 8x + 60y &= 140 \end{aligned} \right\} -$$

$$\begin{aligned}
65y &= 156 \\
y &= 2,4 \\
2x + 15 \cdot 2,4 &= 35 \\
x &= -0,5
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = -0,5$; $y = 2,4$.

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{2x+y+1} + \frac{1}{2-2x+y} &= 7 \\ \frac{4}{2x+y+1} + \frac{1}{2x-y-2} &= -3 \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

Értelmezési tartomány: $2x + y + 1 \neq 0$; $2x - y - 2 \neq 0$.

Új ismeretlent vezetünk be: $a = \frac{4}{2x+y+1}$; $b = \frac{1}{2x-y-2}$. Ekkor:

$$\left. \begin{aligned} a - b &= 7 \\ a + b &= -3 \end{aligned} \right\} +$$

$$\begin{aligned} 2a &= 4 \\ a &= 2 \\ 2 + b &= -3 \\ b &= -5 \end{aligned}$$

Tehát:

$$\frac{4}{2x+y+1} = 2 \quad \text{és} \quad \frac{1}{2x-y-2} = -5.$$

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 1 &= 2 \\ 2x - y - 2 &= -0,2 \end{aligned} \right\} +$$

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 1,8 \\ x &= 0,7 \\ 2 \cdot 0,7 + y + 1 &= 2 \\ y &= -0,4 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 0,7$ és $y = -0,4$.

8. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

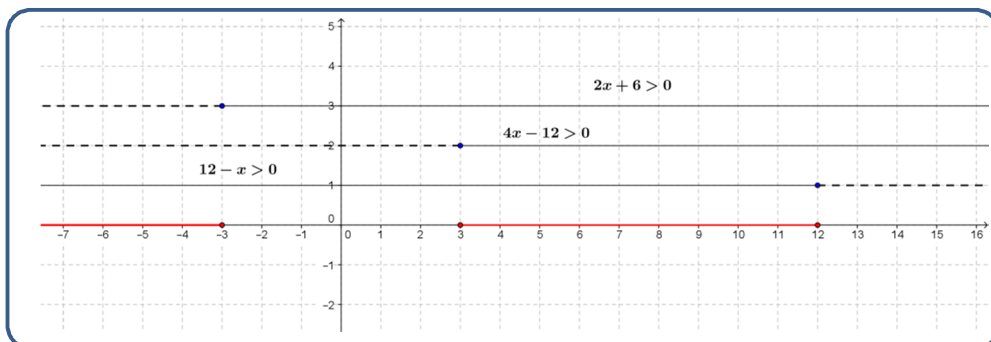
a) $7(x - 6) - 4(2x + 3) < 12$

b) $(12 - x)(2x + 6)(4x - 12) \geq 0$

Megoldás:

a) $x > -66$

b) Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, akkor pozitív, ha páros számú tényezője negatív.



Az egyes tényezők előjelét egy számegyenes mentén ábrázoljuk, majd a számegyenesen az előbbi elvet alkalmazva bejelöljük a megoldást:

Az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty; -3] \cup [3; 12]$.

9. Panni és Kati elvállalta, hogy szövegszerkesztővel legépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezne a gépeléssel. Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak a 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát.

- a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót, és megszakítás nélküli munkát feltételezve)?

Szerdán reggel egyszerre kezdtek hozzá 9 órakor a gépeléshez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egy órányi időtartamra megszakította.

- b) Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán?

Megoldás:

- a) Panni x óra alatt, Kati y óra alatt gépelné le egyedül a szakdolgozatot.

Panni 1 óra alatt a munka $\frac{1}{x}$ részét, 12 óra alatt $\frac{12}{x}$ -ed részét végzi el.

Kati 1 óra alatt a munka $\frac{1}{y}$ részét, 12 óra alatt $\frac{12}{y}$ -ad részét végzi el.

12 óra alatt elvégeznék a teljes anyag legépelését, ezért:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \quad (1)$$

A keddi napon Panni 6 órát, Kati 4 órát gépelt, így a munka 0,4 részét végezték el:

$$\frac{6}{x} + \frac{4}{y} = 0,4 \quad (2)$$

Az (1) egyenletből a (2) egyenlet kétszeresét kivonva:

$$\frac{4}{y} = 0,2$$

$$y = 20$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$x = 30$$

Panni 30 óra, Kati 20 óra alatt gépelte volna le egyedül a szakdolgozatot.

- b) Szerdán Panni t órát, Kati $t - 0,5$ órát gépelt. A munka 0,6 részét végezték el ezen a napon.

$$\frac{t}{30} + \frac{t - 0,5}{20} = 0,6$$

$$t = 7,5$$

Panni fél órát ebédelt, ezért 9 óra után 8 órával, azaz 17 órakor fejezték be a gépelést.

10. Oldja meg a következő egyenletet, ahol p valós paraméter!

$$(p^2 + p) \cdot x = p^2 + 2p + 1$$

Megoldás:

$$p(p+1) \cdot x = (p+1)^2$$

Ha $p \neq 0; p \neq -1$, akkor

$$x = \frac{(p+1)^2}{p(p+1)} = \frac{p+1}{p}.$$

Ha $p = -1$, akkor az egyenlet $0 \cdot x = 0$ alakra hozható. Ennek az egyenletnek minden valós szám megoldása.

Ha $p = 0$, akkor az egyenlet $0 \cdot x = 1$ alakú, ez semmilyen x -re nem teljesül, tehát nincs megoldás.

Összefoglalva:

$$x = \begin{cases} \frac{p+1}{p}, & \text{ha } p \neq 0; -1 \\ \text{tetszőleges valós szám,} & \text{ha } p = -1 \\ \text{nincs megoldás,} & \text{ha } p = 0 \end{cases}$$