8. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek II.

Elméleti összefoglaló

Az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ egyenletet **másodfokú egyenlet**nek nevezzük.

A $D = b^2 - 4ac$ kifejezést az egyenlet **diszkriminánsá**nak nevezzük.

- Ha $D > 0$, az egyenletnek két különböző gyöke van;
- ha $D = 0$, az egyenlet két gyöke egyenlő (illetve azt is mondjuk, hogy az egyenletnek egy gyöke van);
- ha $D < 0$, az egyenletnek nincs valós gyöke.

Az egyenlet gyökeit megkapjuk a másodfokú egyenlet **megoldóképletével**:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Néha magasabb fokú egyenletet is megoldhatunk a megoldóképlettel, ha az egyenletet alkalmas **helyettesítéssel** másodfokú egyenletre vezethetjük vissza. Például az $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ egyenlet az $y = x^2$ helyettesítés után az $y^2 - 5y + 4 = 0$ másodfokú alakot ölti.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Másodfokú egyenlőtlenségnek nevezzük az $ax^2 + bx + c > 0$ (vagy < 0) alakú egyenlőtlenségeket. Az egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy megkeressük az ismeretlen azon értékeit, melyekre az egyenlőtlenség teljesül. A másodfokú egyenlőtlenséget algebrai úton is megoldhatjuk, ám sokszor egyszerűbb, ha az egyenlőtlenség geometriai tartalmát figyeljük: gondoljunk az $y = ax^2 + bx + c$ parabolára. Keressük például az $x^2 - 4x + 3 < 0$ egyenlőtlenség megoldását. Az $y = x^2 - 4x + 3$ parabola felfelé nyitott, zérushelyei $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, a parabola pontjai az $1 < x < 3$ intervallumban vannak az x-tengely alatt, így ez az intervallum az egyenlőtlenség megoldása.

Négyzetgyökös egyenletekről beszélünk, ha az ismeretlen négyzetgyökjel alatt szerepel. A megoldásnál arra törekszünk, hogy az egyenletből a négyzetgyökös kifejezéseket kiküszöböljük. Ez általában úgy történik, hogy az egyenletet egyszer vagy többször négyzetre emeljük. Figyelnünk kell a kapott gyökök ellenőrzésére, mert a négyzetre emelésnél általában hamis gyökökkel bővül a megoldáshalmaz.

Egy példa erre: az $x - 1 = 2$ egyenlet gyöke $x = 3$; ha négyzetre emeljük az egyenletet, a kapott $(x-1)^2 = 4$ egyenlet gyökei $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ (hiszen $x_2 = -1$-re $(x_2 - 1)^2 = 4$ teljesül). Kaptunk egy hamis gyököt, $x_2 = -1$ az eredeti egyenletnek nem megoldása.

Az olyan egyenletrendszert, amelyben az ismeretlenek másodfokú kifejezései szerepelnek, és magasabb fokúak nem, **másodfokú egyenletrendszer**nek nevezzük. Általában az egyenletek és az ismeretlenek száma egyenlő. Megoldásuk többnyire úgy történik, hogy az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezzük, és ezt a másik egyenletben behelyettesítjük, így csökkentjük az ismeretlenek számát.

Kidolgozott feladatok

1. Két egymást követő természetes szám szorzata 272. Melyek ezek a számok?

Megoldás: A keresett számok n és $n+1$. Ekkor $n(n+1)=272$, azaz $n^2+n=272$, átrendezve: $n^2+n-272=0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai $n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+1088}}{2}$, $n_1=16$, $n_2=-17$. Az $n_2=-17$ hamis gyök, hiszen -17 nem természetes szám.
A keresett két szám: 16 és 17.

2. Egy kézilabda-bajnokság tavaszi fordulójában minden csapat pontosan egyszer játszik bármelyik másik csapattal. Eddig összesen 65 mérkőzést játszottak le, de még minden csapatnak hátra van két mérkőzése. Hány csapat szerepel a bajnokságon?

Megoldás: A csapatok száma *k*. Minden csapatnak még két mérkőzése hátra van, így $k-3$ mérkőzést játszottak le a csapatok.
A lejátszott mérkőzések száma: $\frac{k(k-3)}{2}=65$. Rendezés után: $k^2-3k-130=0$. Az egyenlet gyökei: $k_1=13$, $k_2=-10$. Mivel csapatok számáról van szó, csak a $k_1=13$ megoldás lehetséges. A bajnokság tavaszi fordulójában 13 csapat vett részt.

3. Oldja meg az $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: $(x+1)(x+4)=x^2+5x+4$ és $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$. Ezeket használva az $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$ egyenlethez jutunk. Az $y=x^2+5x+4$ helyettesítés után kapjuk az $y(y+2)=120$, $y^2+2y-120=0$ egyenletet. Ennek gyökei: $y_1=10$, $y_2=-12$.
Ha $x^2+5x+4=10$, akkor $x_1=1$, $x_2=-6$.
Ha $x^2+5x+4=-12$, akkor $D<0$, itt nem találunk gyököket.
Az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1=1$, $x_2=-6$.

4. Oldja meg az $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+5}{x-5}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+4}{x-4}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: Értelmezési tartomány $x\neq 1; 3; 4; 5$.
$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+3}{x-3}=\frac{x+4}{x-4}-\frac{x+5}{x-5}$, azaz $\frac{-4x}{(x-1)(x-3)}=\frac{-2x}{(x-4)(x-5)}$. $x_1=0$ megoldás. Ha $x\neq 0$, akkor oszthatunk $-2x$-el (nem veszítünk gyököt):
$\frac{2}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{(x-4)(x-5)}$, $x^2-14x+37=0$, így $x_2=7+2\sqrt{3}$, $x_3=7-2\sqrt{3}$.

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$, $x_2 = 7 + 2\sqrt{3}$, $x_3 = 7 - 2\sqrt{3}$.

5. Oldja meg a $\frac{2x+3}{x^2-4x+4} - \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{5}{x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: A kifejezések értelmezve vannak minden $x \neq 0$, $x \neq 2$ valós számra.

Az $\frac{2x+3}{(x-2)^2} - \frac{x-1}{x(x-2)} = \frac{5}{x}$ egyenletet szorozzuk $x(x-2)^2$-tel:

$(2x+3)\cdot x - (x-1)\cdot(x-2) = 5\cdot(x-2)^2$, azaz $2x^2 + 3x - x^2 + 3x - 2 = 5x^2 - 20x + 20$,

$0 = 4x^2 - 26x + 22$, $2x^2 - 13x + 11 = 0$. Az egyenlet a megoldásai: $x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{81}}{4}$, $x_1 = 5{,}5$ és $x_2 = 1$.

6. Oldja meg az $\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-3} + \frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-1} = 1$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a nevezőkkel, akkor egy negyedfokú egyenlethez jutunk. Ezt jó lenne elkerülni. Alakítsuk szorzattá a másodfokú polinomokat!

Az $x^2 + 4x + 3 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, így az egyenlet gyöktényezős alakja $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$.

Hasonlóan kapjuk a többi szorzatot: $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ és $2x^2 + x - 1 = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+1)(2x-1)$.

Így az egyenlet: $\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-3)} + \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(2x-1)} = 1$. Értelmezési tartomány $x \neq -1; 3; 0{,}5$.

A törteket egyszerűsítjük $(x+1)$-gyel: $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x+2}{2x-1} = 1$.

Szorozzuk az egyenletet a nevezőkkel: $(2x^2 + 5x - 3) + (x^2 - x - 6) = 2x^2 - 7x + 3$, azaz $x^2 + 11x - 12 = 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = -12$.

Ezek az eredeti egyenlet megoldásai.

7. Az $(m+1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ egyenletnek az m valós értékű paraméter mely értékeire lesz két különböző valós gyöke?

Megoldás: Ha $m = -1$, akkor az egyenlet elsőfokú, és ekkor egyetlen megoldása van.

$m \neq -1$ esetén az egyenlet másodfokú, diszkriminánsa $D = (2m)^2 - 4(m+1)(m-1) = 4 > 0$.

Tehát $m \neq -1$ esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

8. Határozza meg az *m* paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 - mx + m - 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke a másik gyökének kétszerese legyen.

I. Megoldás: $D = (-m)^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$, és $m \neq 2$ esetén az egyenletnek két gyöke van, ezek $x_{1,2} = \dfrac{m \pm (m-2)}{2}$, azaz $x_1 = m - 1$, $x_2 = 1$. Ha $x_1 = 2x_2$, akkor $m = 3$. Ha $x_2 = 2x_1$, akkor $m = \dfrac{3}{2}$.

II. Megoldás: $D \geq 0$, és ha $m \neq 2$ az egyenletnek két gyöke van. A gyökök és együtthatók közti összefüggés miatt $x_1 + x_2 = m$ és $x_1 \cdot x_2 = m - 1$. Mivel $x_1 = 2x_2$, ezért $2x_2 + x_2 = m$, $x_2 = \dfrac{m}{3}$. Továbbá $x_1 \cdot x_2 = m - 1$, azaz $\dfrac{2m}{3} \cdot \dfrac{m}{3} = m - 1$, $2m^2 - 9m + 9 = 0$, így $m = 3$ vagy $m = \dfrac{3}{2}$.

9. a) Az $x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenlet gyökei *a* és *b*. Mennyi $a^3 + b^3$ értéke?
b) Mennyi az $x^2 + px + q = 0$ gyökei reciprokának összege?

Megoldás: a) A gyökök és együtthatók közti összefüggést ($a + b = 3,\ ab = 1$) használva az alábbi azonosság megadja a választ: $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 18$.
b) A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján: $x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q$.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-p}{q}.$$

10. Ha *b* és *c* konstansok és az $(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6$ egyenlőség minden *x* valós számra teljesül, akkor mennyi *c* értéke?

Megoldás: A zárójelek felbontása után $2b = 6$, azaz $b = 3$. Továbbá $2x + bx = cx$, azaz $c = 2 + b = 2 + 3 = 5$.

11. Határozza meg a *p* paraméter lehetséges értékeit, ha az $x^2 + px + 12 = 0$ egyenlet gyökeinek különbsége 1.

Megoldás: Az egyenletnek akkor vannak megoldásai, ha $D \geq 0$, ha $p^2 - 48 \geq 0$.
A gyökök és együtthatók közötti összefüggések és a gyökökre elvárt feltétel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = 12 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Innen $x_1 = \frac{1-p}{2}$, $x_2 = \frac{-1-p}{2}$ és $\frac{1-p}{2} \cdot \frac{-1-p}{2} = 12$. Rendezés után: $p^2 = 49$. Tehát $p = 7$ vagy $p = -7$, és ekkor teljesül a $D = p^2 - 48 \geq 0$ feltétel is.

12. Az a paraméter mely értékeire lesz az $x^2 + ax + 1 = 0$ és az $x^2 + x + a = 0$ egyenleteknek közös gyöke?

Megoldás: Mindkét egyenlet diszkriminánsa nem negatív: az $a^2 - 4 \geq 0$ és $1 - 4a \geq 0$ feltételeket az $a \leq -2$ számok teljesítik.

Ha x_0 mindkét egyenletnek megoldása, akkor $x_0^2 + ax_0 + 1 = 0$ és $x_0^2 + x_0 + a = 0$. Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat: $ax_0 - x_0 + 1 - a = 0$, $x_0(a-1) = a - 1$, és $a - 1 \neq 0$, ezért $x_0 = 1$. Ezt az értéket helyettesítve az egyenletbe kapjuk: $a = -2$.

13. Oldja meg az $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ egyenletet a valós számok körében.

Megoldás: Az $y = x^4$ helyettesítéssel másodfokú egyenlethez jutunk: $y^2 - 17y + 16 = 0$.

Ennek gyökei: $y_1 = 1,\ y_2 = 16$.

Az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$.

14. Határozza meg a b paraméter lehetséges értékeit, ha az $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ egyenlet gyökei pozitívak.

Megoldás: Az egyenletnek akkor vannak megoldásai, ha $D \geq 0$. A gyökök akkor pozitív számok, ha $x_1 + x_2 > 0$ és $x_1 \cdot x_2 > 0$ is teljesül.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = b + 6 > 0 \\ D \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b > -6 \\ 4b^2 - 4(b+6) \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$4b^2 - 4(b+6) \geq 0$, azaz $b^2 - b - 6 \geq 0$. Az $y = b^2 - b - 6 = (b+2)(b-3)$ parabola felfelé nyitott, zérushelyei -2 és 3. Így $4b^2 - 4(b+6) \geq 0$ akkor teljesül, ha $b \leq -2$ vagy $b \geq 3$.

Az (1) feltételei akkor teljesülnek, ha $b \geq 3$, ekkor lesznek az $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ egyenlet gyökei pozitívak.

15. Hány olyan x egész szám van, amelyre $x^2 - x - 6 \le 0$ teljesül?

Megoldás: Az $x^2 - x - 6 = (x+2)\cdot(x-3)$ parabola zérushelyei a –2 és a 3. Mivel a parabola főegyütthatója pozitív, a parabola felfelé nyitott, ezért $x^2 - x - 6 \le 0$ a két zérushely közötti értékekre teljesül. Az itteni egész számok: –2, –1, 0, 1, 2, 3. Tehát 6 olyan x egész szám van, amelyre $x^2 - x - 6 \le 0$ teljesül.

16. a) Mennyi az $f(x) = 3x^2 - 2x + 8$ függvény legkisebb értéke?

b) Mennyi az $f(x) = 3x - 2x^2$ függvény legnagyobb értéke?

Megoldás:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 8 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{23}{3} \ge \frac{23}{3}$. A függvény legkisebb értéke $\frac{23}{3}$.

b) Az $f(x) = 3x - 2x^2 = x(3-2x)$ parabola zérushelyei 0 és $\frac{3}{2}$. A parabola alulról nyitott, csúcspontja a két zérushely között félúton van, az $x = \frac{3}{4}$ helyen. Az itt felvett érték lesz a függvény maximuma: $f\left(\frac{3}{4}\right) = 3\cdot\frac{3}{4} - 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}$.

17. Oldja meg a $\sqrt{x^2+4x-1} + \sqrt{x^2+4x+20} = 7$ egyenletet a valós számok körében.

Megoldás: Legyen $t = x^2 + 4x - 1$, ezzel a helyettesítéssel az egyenlet: $\sqrt{t} + \sqrt{t+21} = 7$. Ennek értelmezési tartománya: $t > 0, t > -21 \Rightarrow t > 0$.

$\left(\sqrt{t+21}\right)^2 = \left(7 - \sqrt{t}\right)^2$, $t + 21 = 49 - 14\sqrt{t} + t$, $14\sqrt{t} - 28 = 0$, $\sqrt{t} = 2, t = 4$. Ez teljesíti a $t > 0$ feltételt. Innen $x^2 + 4x - 1 = 4,\ x^2 + 4x - 5 = 0,\ x_1 = 1, x_2 = -5$.

18. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok körében.

a) $\sqrt{x} = 1 - x$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 3$

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány $x \ge 0,\ 1 - x \ge 0$, tehát az egyenlet megoldásait $0 \le x \le 1$ feltétel mellett keressük. Ekkor

$$x = (1-x)^2$$
$$0 = x^2 - 3x + 1$$

Ennek az egyenletnek a megoldása: $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Az értelmezési tartománynak x_1 nem eleme, ezért az egyenlet megoldása $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

b) Értelmezési tartomány $x \geq 0,\ x+1 \geq 0$, azaz $x \geq 0$.

$$\sqrt{x} = 3 - \sqrt{x+1}$$
$$x = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1$$
$$3\sqrt{x+1} = 5$$
$$9x + 9 = 25$$
$$x = \frac{16}{9}$$

19. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

a) $\sqrt{x} < 1 - x$

b) $2\sqrt{x^2 - 4x} \geq x - 1$

Megoldás:

a) Az értelmezési tartomány a négyzetgyök miatt $x \geq 0$. A négyzetgyök értéke nemnegatív, ezért $1 - x \geq 0$ is teljesül. Ennek megfelelően a megoldást $0 \leq x \leq 1$ feltétel mellett keressük. Az értelmezési tartomány elemeire az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, akkor az egyenlőtlenség iránya változatlan marad:

$$x < (1-x)^2$$
$$0 < x^2 - 3x + 1$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ vagy $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Az értelmezési tartományt is figyelembe véve az eredeti egyenlőtlenség megoldása $0 \leq x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

b) Értelmezési tartomány $x^2 - 4x \geq 0$, ekkor $x \leq 0$ vagy $x \geq 4$.

A négyzetgyökös kifejezés értéke nemnegatív, ezért az egyenlőtlenség minden olyan esetben teljesül, amikor $x - 1 \leq 0$, azaz $x \leq 1$. Így $x \leq 0$ esetén teljesül az egyenlőtlenség.

Ha $x - 1 \geq 0,\ x \geq 1$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, így ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, akkor az egyenlőtlenség iránya változatlan marad:

$$4(x^2 - 4x) \geq (x-1)^2$$
$$4x^2 - 16x \geq x^2 - 2x + 1$$
$$3x^2 - 14x - 1 \geq 0$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása: $x \le \frac{7-\sqrt{52}}{3}$ vagy $x \ge \frac{7+\sqrt{52}}{3}$. Az $x \ge 1$ feltétel miatt $x \ge \frac{7+\sqrt{52}}{3}$.

Összefoglalva a két lehetőséget az egyenlőtlenség megoldása: $x \le 0$ vagy $x \ge \frac{7+\sqrt{52}}{3}$, az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $\left]-\infty;\, 0\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{52}}{3};\, +\infty\right[$.

20. Oldja meg az $\left.\begin{aligned} x+y&=4 \\ x^2+y^2&=10 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert a valós számok körében.

Megoldás: Az első egyenletből: $y = 4-x$, ezt helyettesítjük a második egyenletbe: $x^2+(4-x)^2=10$. Négyzetre emelés és rendezés után: $x^2-4x+3=0$. Ennek gyökei: $x_1=1$, $x_2=3$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=1,\ y_1=3$ és $x_2=3,\ y_2=1$.

21. Oldja meg az $\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=5 \\ x+y+3xy&=9 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert a valós számok körében.

Megoldás: Vezessünk be új ismeretleneket – ahogyan a változóiban szimmetrikus kifejezéseknél ez gyakori –, legyen $a=x+y,\ b=xy$. Ekkor $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b$, és

$$\left.\begin{aligned} a^2-2b&=5 \\ a+3b&=9 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenlet 3-szorosához adjuk hozzá a második egyenlet 2-szeresét: $3a^2+2a=33$. Ennek megoldásai: $a_1=3,\ a_2=-\frac{11}{3}$, és $a+3b=9$ miatt $b_1=2,\ b_2=\frac{38}{9}$.

x és y értékeit az $\left.\begin{aligned} x+y&=3 \\ xy&=2 \end{aligned}\right\}$ és az $\left.\begin{aligned} x+y&=-\frac{11}{3} \\ xy&=\frac{38}{9} \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerekből kapjuk. Az első esetben $x(3-x)=2$, azaz $x^2-3x+2=0,\ x_1=1,\ x_2=2$ és $y_1=2,\ y_2=1$. A második egyenletrendszerből az $x\cdot\left(-\frac{11}{3}-x\right)=\frac{38}{9}$ egyenletet kapjuk, ám az $x^2+\frac{11}{3}x+\frac{38}{9}=0$ egyenlet diszkriminánsa negatív ($D=-\frac{31}{9}$), itt nem találunk megoldást.

Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=1,\ y_1=2$ és $x_2=2,\ y_2=1$.

Ajánlott feladatok

1. Írjon fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei 3 és -4.

2. Oldja meg a $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$ egyenletet a valós számok halmazán.

3. Oldja meg az $\dfrac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\dfrac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}$ egyenletet a valós számok halmazán.

4. Oldja meg az $\dfrac{1}{x-7}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-4}=0$ egyenletet a valós számok halmazán.

5. Oldja meg az $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$ egyenletet a valós számok halmazán.

6. a) A $3x^2-7x+1=0$ másodfokú egyenlet gyökei x_1 és x_2. Mennyi ekkor $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ értéke?

b) Az $x^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei az $x^2+3x-5=0$ egyenlet gyökeinek reciprokai. Mennyi $b+c$ értéke?

7. Az $x^2+px-6=0$ egyenlet egyik gyöke az $x=1$. Mekkora p értéke?

8. Határozza meg az $x^2+px+q=0$ együtthatóit, ha az egyenlet gyökei p és q.

9. Az $x^2-x+m=0$ egyik gyökének kétszeres gyöke az $x^2-x+3m=0$ egyenletnek, ahol $m\neq 0$. Határozza meg az m paraméter lehetséges értékeit.

10. Az a paraméter mely értékeire lesz a $2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$ egyenlet gyökeinek különbsége ugyanannyi, mint a gyökök szorzata?

11. Az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei 1-nél nagyobbak. Mutassa meg, hogy a $cx^2+bx+a=0$ egyenlet gyökei 1-nél kisebb pozitív számok.

12. Határozza meg az a paraméter lehetséges értékeit úgy, hogy az $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$ egyenlőtlenség minden x valós számra teljesüljön.

13. Oldja meg a $\sqrt{5-2x}+\sqrt{x-1}=2$ egyenletet a valós számok halmazán.

14. Oldja meg a $\sqrt{8x^2-14x+5}-\sqrt{4x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}$ egyenletet a valós számok halmazán.

15. Oldja meg a $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1$ egyenletet a valós számok halmazán.

16. Oldja meg a $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$ egyenlőtlenséget a valós számok körében.

17. Milyen valós számokra teljesül a $\sqrt{x^2-5x+6}\geq 6-5x+x^2$ egyenlőtlenség?

18. Az $y=ax^2+bx+c$ parabolának a $(4;\,2)$ pontban van a csúcsa, és a $(2;\,0)$ pont illeszkedik a parabolára. Határozza meg az *a, b, c* paraméterek értékét!

19. Melyek azok az a valós számok, amelyekre $(a^2+1)x^2+(a+1)x-2=0$ egyenletnek pontosan egyik gyöke esik a $(0;\,1)$ intervallumba?

20. Oldja meg a valós számok körében a következő egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=200\\ x+\sqrt{xy}+y&=20 \end{aligned}\right\}$$

21. Oldja meg a valós számok körében a következő egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+x&=20\\ y^2+xy+y&=10 \end{aligned}\right\}$$

22. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=4\\ xy&=1 \end{aligned}\right\}$$

23. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$

b) $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$

24. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$

b) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$

c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

d) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Írjon fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei 3 és -4.

I. Megoldás: Az $(x-3)(x+4)=0$ egyenletnek a 3 és -4 számok a gyökei. Innen a zárójelek felbontásával kapjuk az $x^2+x-12=0$ egyenletet.

II. Megoldás: Használjuk a gyökök és együtthatók közti összefüggést! Ha az $x^2+px+q=0$ egyenlet gyökei 3 és -4, akkor $3+(-4)=-p,\ 3\cdot(-4)=q$, azaz $p=1,\ q=-12$. A keresett egyenlet: $x^2+x-12=0$.

III. Megoldás: Ha az $x^2+px+q=0$ egyenletnek gyökei a 3 és -4 számok, akkor $3^2+3\cdot p+q=0$ és $(-4)^2+(-4)\cdot p+q=0$. Vonjuk ki az első egyenletet a második egyenletből: $7-7p=0,\ p=1$. Ezt helyettesítsük az első egyenletbe: $9+3+q=0,\ q=-12$. A keresett egyenlet: $x^2+x-12=0$.

Megjegyzés. Ha az $x^2+px+q=0$ egyenletet megszorozzuk egy nullától különböző valós számmal, az új egyenletnek is ugyanazok a számok lesznek a gyökei, mint az eredetinek. Így például a $2x^2+2x-24=0$ egyenletnek is ugyanúgy a 3 és -4 számok a gyökei, mint az $x^2+x-12=0$ egyenletnek.

2. Oldja meg a $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: $x=-1$ nem megoldása az egyenletnek, oszthatunk $(1+x)$-el, nem veszítünk gyököt: $6\cdot\frac{x^2}{1+x}+7\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x}}-24=0$. Az $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ helyettesítés után a $6y^2+7y-24=0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei: $y_1=\frac{3}{2},\ y_2=-\frac{8}{3}$.

Ha $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{3}{2},\ 4x^2-9x-9=0,\ x_1=3,\ x_2=-\frac{3}{4}$. A $-\frac{3}{4}$ hamis gyök, hiszen az $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{3}{2}$ egyenlet csak pozitív számra teljesülhet.

Ha $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=-\frac{8}{3},\ \ 9x^2-64x-64=0,\ x_3=-\frac{8}{9},\ x_4=8$. A 8 hamis gyök, hiszen az $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=-\frac{8}{3}$ egyenlet csak negatív számra teljesülhet.

Ellenőrizve a kapott értékeket, az eredeti egyenletnek megoldásai az $x_1=3$ és $x_3=-\frac{8}{9}$.

3. Oldja meg az $\frac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\frac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: Értelmezési tartomány $x\neq\frac{-5\pm\sqrt{193}}{6};\frac{-5\pm\sqrt{145}}{6}$. Legyen $a=x^2+x+2$, $b=3x^2+5x-14$. Az $\frac{a}{b}=\frac{a+4}{b+4}$ egyenletből $a=b$, azaz $x^2+x+2=3x^2+5x-14$, $2x^2+4x-16=0$, $x^2+2x-8=0$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=2,\ x_2=-4$.

4. Oldja meg az $\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-4}=0$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: Értelmezési tartomány $x \neq 4; 5; 6; 7$. $\left(\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-4}\right)+\left(\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}\right)=0$, azaz $\frac{2x-11}{(x-7)(x-4)}+\frac{2x-11}{(x-5)(x-6)}=0$.

Ha a számlálók értéke nulla, vagyis $2x-11=0$, akkor $x_1=\frac{11}{2}$ megoldása az egyenletnek.

Ha $x \neq \frac{11}{2}$, $2x-11 \neq 0$, akkor oszthatunk $(2x-11)$-gyel: $\frac{1}{(x-7)(x-4)}+\frac{1}{(x-5)(x-6)}=0$,

ahonnan $x^2-11x+29=0$, $x_2=\frac{11+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{11-\sqrt{5}}{2}$.

Egyenletünk megoldásai: $x_1=\frac{11}{2}$, $x_2=\frac{11+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{11-\sqrt{5}}{2}$.

5. Oldja meg az $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: Értelmezési tartomány $x \neq -1; -2; -3; -4$.

$\frac{x^2+2x+2}{x+1}=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}$, és ehhez hasonlóan átírjuk a többi törtet is, így az egyenletünk: $\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)+\left(x+4+\frac{4}{x+4}\right)=\left(x+2+\frac{2}{x+2}\right)+\left(x+3+\frac{3}{x+3}\right)$, azaz $\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}$, másképpen: $\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}$, innen $\frac{x}{(x+4)\cdot(x+3)}=\frac{x}{(x+2)\cdot(x+1)}$.

Az $x_1=0$ megoldás, és ha $x \neq 0$, oszthatunk vele: $\frac{1}{(x+4)\cdot(x+3)}=\frac{1}{(x+2)\cdot(x+1)}$, ez a rendezés után $x^2+3x+2=x^2+7x+12$, $4x=-10$, $x_2=-\frac{5}{2}$.

Az egyenlet gyökei: $x_1=0$, $x_2=-\frac{5}{2}$.

6. a) A $3x^2-7x+1=0$ másodfokú egyenlet gyökei x_1 és x_2. Mennyi ekkor $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ értéke?

b) Az $x^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei az $x^2+3x-5=0$ egyenlet gyökeinek reciprokai. Mennyi $b+c$ értéke?

Megoldás:

a) $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = x_1x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = x_1x_2\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{43}{27}$.

b) A gyökök és együtthatók közti összefüggéseket használjuk. Az $x^2 + 3x - 5 = 0$ egyenlet gyökei x_1, x_2. (Van két valós gyök, mert a diszkrimináns pozitív.) $x_1 + x_2 = -3$, és $x_1 \cdot x_2 = -5$. Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$.

Ekkor $b + c = -\left(y_1 + y_2\right) + y_1 \cdot y_2 = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2} = \frac{-\left(x_1 + x_2\right) + 1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-3+1}{-5} = \frac{2}{5}$.

7. Az $x^2 + px - 6 = 0$ egyenlet egyik gyöke az $x = 1$. Mekkora *p* értéke?

Megoldás: Ha $x = 1$ gyöke az $x^2 + px - 6 = 0$ egyenletnek, akkor behelyettesítve teljesül az egyenlőség, tehát $1 + p - 6 = 0,\ p = 5$.

8. Határozza meg az $x^2 + px + q = 0$ együtthatóit, ha az egyenlet gyökei *p* és *q*.

Megoldás: Ha az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek gyöke *p* és *q*, akkor a gyökök és együtthatók közti összefüggések szerint $p + q = -p$ és $pq = q$.

Ha $pq = q$, akkor vagy $p = 1$ vagy $q = 0$. Innen könnyű megoldani a $p + q = -p$ egyenletet.

Az együtthatók lehetséges értékei: $p_1 = 1,\ q_1 = -2$ és $p_2 = 0,\ q_2 = 0$.

9. Az $x^2 - x + m = 0$ egyik gyökének kétszeres gyöke az $x^2 - x + 3m = 0$ egyenletnek, ahol $m \neq 0$. Határozza meg az *m* paraméter lehetséges értékeit.

Megoldás: Az első egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}$, a második egyenlet gyökei: $x_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 12m}}{2}$, $x_4 = \frac{1 + \sqrt{1 - 12m}}{2}$.

Az *m* paraméterre $m \leq \frac{1}{12}$ teljesül. Két esetet vizsgálunk, ha $0 < m \leq \frac{1}{12}$, illetve ha $m < 0$.

Ha $0 < m \leq \frac{1}{12}$, akkor $\sqrt{1 - 12m} < \sqrt{1 - 4m} < 1$, és $0 < x_1 < x_3 < x_4 < x_2$. Mivel $x_3 \neq 2x_2$ és $x_4 \neq 2x_2$, ezért az $x_3 = 2x_1$ és $x_4 = 2x_1$ lehetőségeket kell megvizsgálnunk.

$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 12m}}{2} = 1 - \sqrt{1 - 4m}$, ahonnan rendezés után az $1 - 2m = \mp\sqrt{1 - 12m}$ egyenletet, majd négyzetre emelés után az $m^2 + 2m = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $m = 0,\ m = -2$ nem megoldások, mert nem teljesítik a $0 < m \leq \frac{1}{12}$ feltételt.

Ha $m < 0$, akkor $1 < \sqrt{1 - 4m} < \sqrt{1 - 12m}$, következésképpen $x_1 < 0,\ x_3 < 0,\ 0 < x_2,\ 0 < x_4$, sőt $x_3 < x_1 < 0 < x_2 < x_4$. Látható, hogy $x_3 \neq 2x_2$ és $x_4 \neq 2x_1$, ezért az $x_4 = 2x_2$ és az

$x_3 = 2x_1$ lehetőségeket kell megvizsgálnunk. Az első eset ellentmondásra vezet, a második esetben találunk megoldást, ha $m = -2$.

10. Az a paraméter mely értékeire lesz a $2x^2 - (a+1)x + (a-1) = 0$ egyenlet gyökeinek különbsége ugyanannyi, mint a gyökök szorzata?

I. Megoldás: A diszkrimináns $D = (a+1)^2 - 8(a-1) = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$ nem negatív. Az egyenlet két gyöke x_1, x_2. A gyökök és együtthatók közti összefüggések és az $x_1 - x_2 = x_1 \cdot x_2$ feltétel alapján:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \frac{a-1}{2} \\ x_1 + x_2 &= \frac{a+1}{2} \end{aligned}\right\}$$

Ennek megoldása: $x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$. Ezekkel írjuk fel az $x_1 - x_2 = x_1 \cdot x_2$ feltételt: $\frac{a}{2} - \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}$, azaz $a = 2$. Ez a keresett paraméter érték, ekkor az egyenlet két gyöke 1 és $\frac{1}{2}$, ezekre teljesül az $x_1 - x_2 = x_1 \cdot x_2$ feltétel.

II. Megoldás: $x_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - 8(a-1)}}{4} = \frac{a+1 \pm (a-3)}{4}$, $x_1 = \frac{a-1}{2}$ és $x_2 = 1$.

A feladat szerint: $x_1 - x_2 = x_1 \cdot x_2$ vagy $x_2 - x_1 = x_1 \cdot x_2$. Tehát $\frac{a-1}{2} - 1 = \frac{a-1}{2}$, ami nem lehetséges; vagy $1 - \frac{a-1}{2} = \frac{a-1}{2}$, ahonnan $a = 2$.

A feladat feltétele $a = 2$ esetén teljesül, ekkor a két gyök 1 és $\frac{1}{2}$.

11. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei 1-nél nagyobbak. Mutassa meg, hogy a $cx^2 + bx + a = 0$ egyenlet gyökei 1-nél kisebb pozitív számok.

Megoldás: Mindkét egyenletnek ugyanaz a diszkriminánsa: $D = b^2 - 4ac$, tehát ugyanakkor van az egyik egyenletnek két gyöke, amikor a másik egyenletnek is.

Megmutatjuk, hogy ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor a $cx^2 + bx + a = 0$ egyenlet két gyöke $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Ekkor $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-b/a}{c/a} = -\frac{b}{c}$ és $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{c/a} = \frac{a}{c}$, azaz az $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ számok teljesítik a $cx^2 + bx + a = 0$ egyenlet gyökei és együtthatói között fennálló összefüggéseket, így $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ gyökei ennek az egyenletnek.

Ha $x_1 > 1$ és $x_2 > 1$, akkor $0 < \frac{1}{x_1} < 1$ és $0 < \frac{1}{x_2} < 1$, tehát igaz a feladat állítása.

12. Határozza meg az *a* paraméter lehetséges értékeit úgy, hogy az $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$ egyenlőtlenség minden *x* valós számra teljesüljön.

Megoldás: Ha $a = -4$, akkor a $8x - 14 < 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani, ami nem teljesül minden valós számra.
Ha $a \neq -4$, akkor egy másodfokú egyenlőtlenséget oldunk meg, aminek akkor lesz minden valós szám a megoldása, ha a másodfokú kifejezésnek megfelelő parabola lefelé nyitott és a grafikonja az *x*-tengely alatt helyezkedik el, tehát az $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6 = 0$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok között: $a + 4 < 0$ és $D = (2a)^2 - 4 \cdot (a+4) \cdot (2a-6) < 0$, azaz $a < -4$ és $a^2 - 2a + 24 > 0,\ (a-4)(a+6) > 0$, ami akkor teljesül, ha $a > 4$ vagy $a < -6$. Minden feltétel akkor teljesül, ha $a < -6$.

13. Oldja meg a $\sqrt{5-2x} + \sqrt{x-1} = 2$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: Értelmezési tartomány: az $5 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2{,}5$ és $x \geq 1$ feltételek miatt a megoldást az $1 \leq x \leq 2{,}5$ feltétel mellett keressük.
Négyzetre emelés és rendezés után a $2\sqrt{(5-2x)(x-1)} = x$ egyenletet kapjuk. Az értelmezési tartomány elemeire mindkét oldal pozitív, ezért négyzetre emeléssel ekvivalens egyenletet kapunk: $9x^2 - 28x + 20 = 0$. Ennek az egyenletnek a megoldásai $x_1 = \frac{10}{9}$ és $x_2 = 2$. Mindkettő valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

14. Oldja meg a $\sqrt{8x^2 - 14x + 5} - \sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 1}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: Az egyenlet értelmezési tartománya: $8x^2 - 14x + 5 \geq 0$, $4x^2 - 1 \geq 0$, $2x^2 + x - 1 \geq 0$. Az egyenlet megoldása után behelyettesítéssel fogjuk ellenőrizni ezeknek a feltételeknek a teljesülését. A megoldás során többször négyzetre emelünk, ez is szükségessé teszi majd az ellenőrzést.
A gyökök alatti kifejezéseket szorzattá alakítjuk:
$\sqrt{(2x-1)(4x-5)} = \sqrt{(2x-1)(x+1)} + \sqrt{(2x-1)(2x+1)}$
Négyzetre emelés után: $(2x-1)(x-7) = 2\sqrt{(2x-1)^2(x+1)(2x+1)}$
Ismét négyzetre emelünk: $(2x-1)^2(7x^2 + 26x - 45) = 0$
Ennek az egyenletnek a gyökei: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -5,\ x_3 = \frac{9}{7}$. Az x_3 hamis gyök, hiszen ez nem megoldása az előző egyenletnek, mivel erre a számra a bal oldal negatív értéket vesz fel.

Az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -5$. Ezek valóban megoldások, mert teljesítik az értelmezési tartományra fennálló feltételeket.

15. Oldja meg az $\sqrt{x^2+5x+3} - \sqrt{x^2+3x+2} = 2x+1$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás: Használjuk az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ azonosságot, és szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát a $\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2}$ kifejezéssel:

$2x+1 = (2x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2}\right)$. Két eset lehetséges:

(1) $2x+1=0,\ x_1 = -\frac{1}{2}$;

(2) $\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2} = 1$.

A (2) egyenlet megoldását négyzetre emelésekkel is kereshetjük, ennél egyszerűbb, ha ezt az egyenletet és az eredetit összeadjuk: $\sqrt{x^2+5x+3} = x+1$, ahonnan $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Ellenőrzés mutatja, hogy $x_1 = -\frac{1}{2}$ és $x_2 = -\frac{2}{3}$ is megoldása az egyenletnek.

16. Oldja meg a $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$ egyenlőtlenséget a valós számok körében.

Megoldás: Az értelmezési tartomány $x \ge 0$ és $x+3 \ge 0$ feltételek miatt $x \ge 0$. Az egyenlőtlenséget átrendezzük azért, hogy mindkét oldalon nemnegatív kifejezés álljon, és így a négyzetre emeléssel az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez jussunk:

$$3\sqrt{x} > \sqrt{x+3} + 1$$
$$9x > x+3+1+2\sqrt{x+3}$$
$$4x-2 > \sqrt{x+3}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala nemnegatív, ezért a bal oldal pozitív, tehát $x > \frac{1}{2}$ feltétel mellett emelhetünk újra négyzetre:

$$(4x-2)^2 > x+3$$
$$16x^2 - 17x + 1 > 0$$

Ennek a másodfokú egyenlőtlenségnek a megoldása $x < \frac{1}{16}$ vagy $x > 1$. Az $x > \frac{1}{2}$ feltétel figyelembe vételével az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]1; +\infty[$.

17. Milyen valós számokra teljesül a $\sqrt{x^2-5x+6} \ge 6-5x+x^2$ egyenlőtlenség?

Megoldás: Legyen $a = x^2-5x+6$, ekkor egyenlőtlenségünk $\sqrt{a} \ge a$ alakban írható. Ennek értelmezési tartománya $a \ge 0$. Ekkor négyzetre emelhetjük az egyenlőtlenség mindkét oldalát: $a \ge a^2 \Leftrightarrow a - a^2 = a(1-a) \ge 0$. Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása $0 \le a \le 1$.

Tehát a $0 \le x^2 - 5x + 6 \le 1$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

A $0 \le x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ egyenlőtlenség megoldása $x \le 2$ vagy $3 \le x$.

Oldjuk meg az $x^2 - 5x + 6 \le 1$ egyenlőtlenséget!

$x^2 - 5x + 5 \le 0$ teljesül, ha $x \ge \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ és $x \le \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Az $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \ge 6 - 5x + x^2$ egyenlőtlenség megoldásai: $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \le x \le 2$ és $3 \le x \le \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

18. Az $y = ax^2 + bx + c$ parabolának a $(4;\, 2)$ pontban van a csúcsa, és a $(2;\, 0)$ pont illeszkedik a parabolára. Határozza meg az *a, b, c* paraméterek értékét!

Megoldás: Ha az $y = ax^2 + bx + c$ parabolának a $(4;\, 2)$ pontban van a csúcsa, akkor $y = a(x-4)^2 + 2$; továbbá a $(2;\, 0)$ pont illeszkedik a parabolára, így $0 = a(2-4)^2 + 2$, azaz $a = -\dfrac{1}{2}$. Ezt beírva az $y = a(x-4)^2 + 2$ egyenletbe, $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.

Így $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 4$, $c = -6$.

19. Melyek azok az *a* valós számok, amelyekre $(a^2+1)x^2 + (a+1)x - 2 = 0$ egyenletnek pontosan egyik gyöke esik a $(0;\, 1)$ intervallumba?

Megoldás: Mivel $D = (a+1)^2 + 8(a^2+1) > 0$, ezért minden valós *a* esetén van két megoldás.

Mivel $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{2}{a^2+1} < 0$, így az egyik gyök negatív, a másik pozitív.

A $p(x) = (a^2+1)x^2 + (a+1)x - 2$ parabola felfelé nyitott, és $p(0) = -2 < 0$, így a parabolának akkor lesz zérushelye a $(0;\, 1)$ intervallumban, ha $p(1) > 0$.

$p(1) = a^2 + a > 0$ akkor teljesül, ha $a < -1$ vagy $a > 0$.

20. Oldja meg a valós számok körében a következő egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 200 \\ x + \sqrt{xy} + y &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás: Legyen $a = x + y$, $b = \sqrt{xy}$. Ezen jelölésekkel, az új ismeretlenekkel az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 200 \\ a + b &= 20 \end{aligned}\right\}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) = (a-b)\cdot 20 = 200$, tehát $a - b = 10$. Innen adódik a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} a - b &= 10 \\ a + b &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a két egyenletet: $2a = 30$, $a = 15$. Mivel $a - b = 10$, így $b = 5$.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=15 \\ \sqrt{xy}&=5 \end{aligned}\right\}$$

$y=15-x$ kifejezést helyettesítsük az $\sqrt{xy}=5$ egyenletbe, és emeljünk négyzetre: $x(15-x)=25$. Az $x^2-15x+25=0$ egyenlet gyökei: $x_{1,2}=\dfrac{15\pm5\sqrt5}{2}$.

Az egyenletrendszer gyökei: $x_1=\dfrac{15+5\sqrt5}{2}, y_1=\dfrac{15-5\sqrt5}{2}$ és $x_2=\dfrac{15+5\sqrt5}{2}, y_2=\dfrac{15-5\sqrt5}{2}$.

Ellenőrzés mutatja, hogy ezek valóban megoldások.

21. Oldja meg a valós számok körében a következő egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+x&=20 \\ y^2+xy+y&=10 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás: Vegyük a két egyenlet összegét és különbségét.

$$\left.\begin{aligned} (x+y)^2+(x+y)&=30 \\ (x^2-y^2)+(x-y)&=10 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből $x+y=5$ vagy $x+y=-6$.

A második egyenletet átalakítva: $(x-y)(x+y+1)=10$.

Két eset lehetséges:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=\dfrac{5}{3} \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} x+y=-6 \\ x-y=-2 \end{cases}$$

A megoldások: $x_1=\dfrac{10}{3}, y_1=\dfrac{5}{3}$ és $x_1=-4, y_1=-2$.

22. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=4 \\ xy&=1 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás: Az $a=x+y,\ b=xy$ új ismeretlenek bevezetésével az $a^3-3a-4=0$ egyenlethez jutunk, és ennek a harmadfokú egyenletnek a megoldása nem egyszerű.

Legyen $a=x^3,\ b=y^3$. $(xy)^3=1$ miatt $ab=1$, így az egyenletrendszer $\left.\begin{aligned} a+b&=4 \\ ab&=1 \end{aligned}\right\}$. Innen az $a^2-4a+1=0$ egyenlet adódik. $a_1=2+\sqrt3, a_2=2-\sqrt3$, és $b_1=2-\sqrt3, b_2=2+\sqrt3$.

Az egyenletrendszer gyökei: $x_1=\sqrt[3]{2+\sqrt3},\ y_1=\sqrt[3]{2-\sqrt3}$ és $x_2=\sqrt[3]{2-\sqrt3},\ y_2=\sqrt[3]{2+\sqrt3}$.

23. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$

b) $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$

Megoldás:

a) Legyen $a = x + \frac{1}{x}$, ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = a^2 - 2$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet a $7a - 2(a^2 - 2) = 9$ alakot ölti. A $2a^2 - 7a + 5 = 0$ egyenlet gyökei: $a_1 = \frac{5}{2}$; $a_2 = 1$.

Az $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Az $x + \frac{1}{x} = 1$, $x^2 - x + 1 = 0$ egyenletnek nincs megoldása, mert a diszkriminánsa negatív.

Egyenletünknek két megoldása van: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

b) A $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ egyenletet osszuk x^2-tel, ezt megtehetjük, mert $x = 0$ az egyenletnek nem megoldása, így nem veszítünk gyököt: $2x^2 - 7x + 9 - 7 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$, ezt átrendezve kapjuk az előbbi $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$ egyenletet. Tehát az egyenletünk azonos az előző egyenlettel, így a megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ha egy egyenlet együtthatóiban az itt tapasztalthoz hasonló szimmetriát fedezünk fel, akkor a „középen" álló hatvánnyal osztva alacsonyabb fokú (másodfokú) egyenletre tudjuk visszavezetni az egyenletet.

24. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2$

b) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$

c) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$

d) $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$

Megoldás:

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2$, $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = 2$, azaz $|x-1| + |x+1| = 2$. Ennek az egyenletnek a megoldásánál három esetet kell vizsgálnunk.

Ha $x \le -1$, akkor az abszolútértékek elhagyása után az egyenlet: $-(x-1) - (x+1) = 2$, $x = -1$, ez a szám megoldás, mert eleme annak a halmaznak, amelyen az egyenletet megoldottuk.

Ha $-1 < x \le 1$, akkor az egyenlet: $-(x-1) + (x+1) = 2$, azaz $2 = 2$, azonosságot kaptunk, ezen a tartományon minden szám megoldás.

Ha $1 < x$, akkor az egyenlet: $(x-1) + (x+1) = 2$, azaz $x = 1$, mely szám most nem megoldás, mert nem eleme annak a halmaznak, amelyen az egyenletet megoldottuk.

A talált megoldások, minden olyan x valós szám, amelyre $-1 \le x \le 1$ teljesül.

b) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=|x+1|-|x-2|=3$, ennek az egyenletnek megoldása minden olyan x valós szám, amelyre $2 \le x$ teljesül.

c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|$, hasonlóan átalakítjuk a másik négyzetgyököt is, így az egyenlet: $\left|\sqrt{x-1}+1\right|-\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2$, ennek megoldása minden olyan x valós szám, amelyre $2 \le x$ teljesül.

d) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}$, így az egyenletünk $\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$, és ennek az egyenletnek megoldása minden olyan x valós szám, amelyre $5 \le x \le 10$ teljesül.

Ellenőrző feladatok

1. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 25-tel több átlója van, mint amennyi oldala?

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}+2=0$

b) $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

3. Az $x^2-2x-15=0$ egyenlet gyökeinek ismerete nélkül számítsa ki

a) a gyökök különbségét;

b) a gyökök négyzetének különbségét.

4. A b paraméter mely értékeire lesz a $(b-1)x^2+(b+4)x+b+7=0$ egyenletnek pontosan egy gyöke?

5. Az a paraméter milyen értékeire lesz az $(a-2)x^2-(a-4)x-2=0$ egyenlet két gyökének különbsége 3?

6. Oldja meg a $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}=11$ egyenletet a valós számok halmazán.

7. Oldja meg az $x+3 \le 3\sqrt{x+2}$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

8. Határozzuk meg az a paraméter lehetséges értékeit úgy, hogy az $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$ egyenlőtlenség minden x valós számra teljesüljön.

9. Oldja meg az $\left.\begin{aligned} x\cdot y&=6 \\ x^2+y^2&=13\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert a valós számok körében.

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Az oldalak száma legyen n. Ekkor $n+25=\frac{n(n-3)}{2}$, $n^2-5n-50=0$, ennek gyökei $n_1=10,\ n_2=-5$. A -5 hamis gyök. A sokszög oldalainak száma 10.

2. a) Az $y=\sqrt{x^2-3x+6}$ helyettesítéssel az egyenlet az $2y^2-12+y+2=0$ alakot ölti. $2y^2+y-10=0,\ y_1=2,\ y_2=-\frac{5}{2}$, de y_2 nem megoldás, hiszen $y=\sqrt{x^2-3x+6}\geq 0$. $\sqrt{x^2-3x+6}=2$, innen $x_1=1,\ x_2=2$.

b) Legyen $a=x^2-4x+6$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet: $a=\sqrt{2a}$. Ennek az értelmezési tartománya $a\geq 0$. $a^2=2a,\ a^2-2a=0,\ a(a-2)=0$, ennek gyökei $a_1=0$ és $a_2=2$. Az $x^2-4x+6=0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, az egyenletnek nincs megoldása. Az $x^2-4x+6=2$ esetben az $x^2-4x+4=0$ egyenlet gyöke $x=2$.

3. a) $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4+60=64$, így $|x_1-x_2|=8$, $x_1-x_2=\pm 8$.

b) $|x_1^2-x_2^2|=|(x_1-x_2)(x_1+x_2)|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2|=8\cdot 2=16$, azaz $x_1^2-x_2^2=\pm 16$.

4. Ha $b-1=0$ ($b=1$), akkor elsőfokú az egyenlet, és egy gyöke van: $x=-1{,}6$.
Ha $b\neq 1$, akkor az egyenlet másodfokú egyenlet, melynek akkor van egy gyöke, ha $D=0$.
$D=(b+4)^2-4(b-1)(b+7)=-3b^2-16b+44=0$, ennek két megoldása van, 2 és $-\frac{22}{3}$.

Az egyenletnek a b paraméter 1, 2 és $-\frac{22}{3}$ értéke esetén lesz pontosan egy gyöke.

5. $a_1=\frac{3}{2},\ a_2=3$.

6. $x=16$.

7. $\left[\frac{3-3\sqrt{5}}{2};\frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right]$.

8. $a>6$.

9. $(x;\ y)$ lehetséges értékei: $(2;\ 3)$, $(-2;-3)$, $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$.