9. Exponenciális és logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

Elméleti összefoglaló

Ha $a > 0,\ b > 0,\ x$ és y valós számok, akkor

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$a^0 = 1$$

Ha $a > 1$, akkor az $f(x) = a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő, míg ha $0 < a < 1$, akkor az $f(x) = a^x$ függvény szigorúan monoton csökkenő.

Ha $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$ valós számok és n egész szám, akkor

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$n \cdot \log_a x = \log_a x^n$$

Ha $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$ valós számok, akkor

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ha $a > 1$, akkor az $f(x) = \log_a x$ függvény szigorúan monoton növekvő, míg ha $0 < a < 1$, akkor az $f(x) = \log_a x$ függvény szigorúan monoton csökkenő.
Az exponenciális (illetve a logaritmus) függvény szigorúan monoton növekedése (csökkenése) miatt az $a^x = b$ (illetve a $\log_a x = b$) egyenletnek legfeljebb egy megoldása van.

Kidolgozott feladatok

1. Oldja meg a $3^{x^2-5x+6}=1$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Ha $a^y=1$ és $a>0,\ a\neq 1$, akkor $y=0$. Így $3^{x^2-5x+6}=1$ akkor teljesülhet, ha $x^2-5x+6=0$. Ennek gyökei adják az egyenlet megoldásait: $x_1=2,\ x_2=3$.

2. Oldja meg a $8^x=4^{2x-1}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: $8^x=4^{2x-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x}=2^{4x-2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x=4x-2,\ x=2$.

3. Oldja meg a $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Mivel $\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$, így az egyenlet a $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$ alakban írható. Innen $3x-7=-7x+3$, azaz $x=1$.

4. Oldja meg a $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: $6^x+6\cdot 6^x=2^x+2\cdot 2^x+2^2\cdot 2^x$, $6^x\cdot(1+6)=2^x\cdot(1+2+4)$, $6^x\cdot 7=2^x\cdot 7$, $6^x=2^x$, azaz $\left(\frac{6}{2}\right)^x=1$, így $x=0$.

5. Oldja meg az $5^{2x-1}+5^x\cdot 5=250$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: $\frac{1}{5}\cdot 5^{2x}+5\cdot 5^x=\frac{1}{5}\cdot\left(5^x\right)^2+5\cdot 5^x=250$. Legyen $t=5^x$, ekkor az egyenletünk az $\frac{1}{5}t^2+5t-250=0$ alakot ölti. Ennek gyökei: $t_1=-50,\ t_2=25$. Mivel $t=5^x>0$, ezért $t_1=-50$ nem ad megoldást. Ha $t=25$, akkor $5^x=25,\ x=2$.

6. Oldja meg a $4^x+6^x-2\cdot 9^x=0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Osszunk 6^x- nel (oszthatunk, hiszen $6^x\neq 0$): $\left(\frac{2}{3}\right)^x+1-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x=0$. Legyen $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, most az egyenlet a $t+1-2\cdot\frac{1}{t}=0$, azaz a $t^2+t-2=0$ alakot ölti.

$t^2+t-2=(t-1)\cdot(t+2)=0$, így ennek megoldásai: $t_1=1$, $t_2=-2$. Mivel $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x>0$, ezért csak $t=1$ lehetséges. $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$, ha $x=0$.

7. Oldja meg az $5^{2x-1}=7^{3-x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát. $(2x-1)\cdot\lg 5=(3-x)\cdot\lg 7$, azaz $x=\frac{3\cdot\lg 7+\lg 5}{2\cdot\lg 5+\lg 7}=\frac{\lg\left(7^3\cdot 5\right)}{\lg\left(5^2\cdot 7\right)}=\frac{\lg 1715}{\lg 175}\approx 1{,}44$.

8. Oldja meg a $5^{2x}-6\cdot 5^x+8=0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Legyen $a=5^x$, ezzel a helyettesítéssel az egyenlet az $a^2-6a+8=0$ alakot ölti. Ezt megoldva kapjuk: $5^x=2$ vagy $5^x=4$, így a megoldások $x_1=\log_5 2$, $x_2=\log_5 4$.

9. Oldja meg az $\left(x^2-4\right)^{2x+3}=1$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: $a^y=1$ több esetben teljesül. Ha $a=1$, akkor y tetszőleges valós szám lehet. $a=-1$ esetén, ha y tetszőleges páros szám lehet. Ha $a\neq 0$, akkor $y=0$ esetén teljesül az összefüggés.

Ha $x^2-4=1$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, akkor az egyenlet teljesül.

Ha $x^2-4=-1$, akkor $x=\pm\sqrt{3}$, ekkor a kitevő nem páros egész szám, tehát ez nem megoldás.

Ha $2x+3=0$, $x_3=-1{,}5$, akkor a hatványalap nem nulla, tehát ez az egyenletnek megoldása.

Az egyenlet gyökei: $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-\sqrt{5}$, $x_3=-1{,}5$.

10. Oldja meg a $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Vegyük észre, hogy $\left(2-\sqrt{3}\right)^x\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\left(\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^x=(4-3)^x=1$. Ezért $\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^x}$. Az $a=\left(2-\sqrt{3}\right)^x$ ismeretlen bevezetésével az $a+\frac{1}{a}=4$, azaz az $a^2-4a+1=0$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai $a_1=2-\sqrt{3}$, $a_2=2+\sqrt{3}$. Felhasználjuk, hogy $2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, így az egyenlet megoldásai $x_1=1$, $x_2=-1$.

11. Oldja meg az $\log_{x-1}9=2$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Vizsgáljuk meg, milyen számokra értelmezhető az egyenletben szereplő kifejezés! Az értelmezési tartomány $x-1>0,\ x-1\neq 1$, azaz $x>1,\ x\neq 2$.

$\log_{x-1} 9=2 \ \Rightarrow\ (x-1)^2=9 \ \Rightarrow\ x-1=\pm 3$, azaz $x_1=4,\ x_2=-2$. Mivel az $x>1$ feltételt az $x_2=-2$ nem teljesíti, csak $x=4$ megoldás.

12. Oldja meg a $\lg(3x+5)^2=2\cdot\lg(3x+5)$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Az egyenletben szereplő kifejezések akkor értelmezhetők, ha $3x+5>0$, azaz $x>-\frac{5}{3}$, és ekkor egyenlőség azonosság. Az egyenlet megoldása minden olyan x valós szám, amelyre $x>-\frac{5}{3}$.

13. Oldja meg a $\lg(x+1)+\lg(x-5)=\lg 7$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Az $\lg(x+1)+\lg(x-5)$ kifejezés értelmezési tartományába tartozó számok: $x+1>0,\ x-5>0$, azaz $x>5$. Az $\lg x+\lg y=\lg xy$ azonosságot alkalmazva a $\lg[(x+1)(x-5)]=\lg 7$ egyenletet nyerjük, azaz $(x+1)(x-5)=7$. Ennek gyökei $x_1=6$ és $x_2=-2$. Az $x_2=-2$ hamis gyök, mert nem tartozik az értelmezési tartományba, csak $x_1=6$ megoldás.
Megjegyzés: Az egyenletek megoldásához hozzátartozik a kapott gyökök helyességének ellenőrzése, ugyanis az egyenletek átalakítása közben (például a $\lg x+\lg y=\lg xy$ azonosság alkalmazásakor) bővülhet a megoldáshalmaz. Ez történt most is.

14. Oldja meg az $\log_2 x+\log_8 x=4$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Az értelmezési tartományba az $x>0$ számok tartoznak. Térjünk át azonos alapra! $\log_8 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 8}=\frac{\log_2 x}{3}$, ezt felhasználva a $\log_2 x+\frac{\log_2 x}{3}=4$, azaz a $\log_2 x=3$ egyenlethez jutunk. $x=8$ a megoldás.

15. Oldja meg a $\log_{3x} 3+4\cdot\log_{9x} 3=6$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Alkalmazzuk a $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ azonosságot!

$$\log_{3x} 3+4\cdot\log_{9x} 3=\frac{1}{\log_3 3x}+\frac{4}{\log_3 9x}=\frac{1}{\log_3 3x}+\frac{4}{\log_3 3+\log_3 3x}=\frac{1}{\log_3 3x}+\frac{4}{1+\log_3 3x},$$

azaz $\frac{1}{\log_3 3x}+\frac{4}{1+\log_3 3x}=6$. Legyen $a=\log_3 x$. Az $\frac{1}{a}+\frac{4}{1+a}=6$ egyenlet megoldásai

$a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, innen $x_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$. Ezek megoldások, mert teljesítik az értelmezési tartományra fenn álló $3x \neq 1,\ 9x \neq 1,\ 3x > 0,\ 9x > 0$ feltételeket.

16. Oldja meg a $\lg^2 x + \lg x^2 = 3$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: Az értelmezési tartományba az $x > 0$ számok tartoznak. Az $\lg^2 x + 2 \cdot \lg x = 3$ egyenlet $y = \lg x$-re nézve másodfokú egyenlet, az $y^2 + 2y - 3 = 0$ egyenlet megoldásai $y_1 = 1$ és $y_2 = -3$, azaz $x_1 = 10$ és $x_2 = 0{,}001$.

17. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_5 \log_2 (x-7) = 1$

b) $\log_3 \log_8 \log_2 (x+9) = -1 + \log_3 2$

Megoldás:

a) Vizsgáljuk az értelmezési tartományt! $\log_2(x-7)$ miatt $x > 7$, és $\log_5 \log_2(x-7)$ miatt $\log_2(x-7) > 0$, azaz $x > 8$. Az értelmezési tartományba az $x > 8$ számok tartoznak.

$\log_5 \log_2 (x-7) = 1$

$\log_2 (x-7) = 5$

$x - 7 = 2^5 = 32$

$x = 39$

b) $-1 + \log_3 2 = \log_3 \frac{1}{3} + \log_3 2 = \log_3 \frac{2}{3}$ miatt egyenletünk bal oldala $\log_3 \frac{2}{3}$, azaz $\log_3 \log_8 \log_2 (x+9) = \log_3 \frac{2}{3}$. Innen $\log_8 \log_2 (x+9) = \frac{2}{3}$, ebből $\log_2 (x+9) = 8^{2/3}$, azaz $\log_2 (x+9) = 4$, így $x + 9 = 2^4 = 16$, $x = 7$. Ez valóban megoldás. (Most gyorsabb a kapott megoldás ellenőrzése, mint a $\log_3 \log_8 \log_2 (x+9)$ kifejezés értelmezési tartományának megállapítása.)

18. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\log_2 x \geq 2$

b) $\log_{1/3} \log_{1/2} x \geq -1$

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x > 0$. A logaritmus alapja 1-nél nagyobb, így a logaritmusfüggvény szigorúan növekszik. Ezért, ha $\log_2 x \geq 2 = \log_2 4$, akkor $x \geq 4$.

b) Értelmezési tartomány: $x > 0$ és $\log_{1/2} x > 0$, azaz $x < 1$, tehát az egyenlőtlenség megoldásait a $0 < x < 1$ feltételt kielégítő valós számok körében keressük. Tekintettel arra, ha $0 < a < 1$, akkor az $f(x) = \log_a x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, így ha

$\log_{1/3}\log_{1/2} x \geq -1$, akkor $\log_{1/2} x \leq 3$, azaz $x \geq \frac{1}{8}$. Az értelmezési tartományt figyelembe véve a megoldás $\frac{1}{8} \leq x < 1$.

19. Oldja meg a $\log_{0,5}\left(x^2 + 2x - 3\right) > 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás: A logaritmus értelmezése miatt $0 < x^2 + 2x - 3$. $\log_{0,5}\left(x^2 + 2x - 3\right) > 0 = \log_{0,5} 1$, mivel a logaritmus alapja 1-nél kisebb, így $x^2 + 2x - 3 < 1$. A két egyenlőtlenség közös megoldása: $-1-\sqrt{5} < x < -3$ és $1 < x < -1+\sqrt{5}$.

20. Oldja meg az $\left.\begin{array}{r} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{array}\right\}$ egyenletrendszert a valós számok halmazán!

Megoldás: A kifejezések értelmezési tartománya: $x > 0,\ y > 0$. Az egyenletek mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát vesszük: $\lg x + \lg y = 1 + \lg 4,\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4$. Ennek gyökei: $\lg x = 1,\ \lg y = \lg 4;\ x_1 = 10,\ y_1 = 4$ vagy $\lg x = \lg 4, \lg y = 1;\ x_2 = 4,\ y_2 = 10.$

21. Oldja meg a $\left.\begin{array}{r} \lg x - \lg y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{array}\right\}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás: A kifejezések értelmezési tartománya: $x > 0,\ y > 0$.
Legyen $a = \lg x,\ \ b = \lg y$, ekkor az egyenletrendszer az

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{array}\right\}$$

alakot ölti. Innen kapjuk a $b^2 + b - 2 = 0$ egyenletet, ennek gyökei: $b_1 = -2$, $b_2 = 1$.
Ha $b = -2,\ a = -1$, akkor az $x_1 = 0{,}1,\ y_1 = 0{,}01$.
Ha $b = 1,\ a = 2$, akkor $x_2 = 100,\ y_2 = 10$.

Ajánlott feladatok

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2^{x+4} + 2^{x+3} + 2^x = 5^{x+1} - 5^x$

b) $3^{x+1} - 5^x + 3^{x-1} - 5^{x-1} = 5^{x-2} - 3^{x-2}$

c) $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56$

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$

b) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

c) $2^{x+2} + 8^x = 5\cdot 4^x$

d) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$

e) $2^{\sqrt{x}-1} + 2\cdot 2^{1-\sqrt{x}} - 3 = 0$

f) $2^{x+1} = 7 + 2^{2-x}$

g) $2^{1+\sqrt{x}} + 4 = 9\sqrt{2^{\sqrt{x}}}$

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $4\cdot 2^{2x} - 6^x = 18\cdot 3^{2x}$

b) $64\cdot 9^x + 12^{x+1} - 27\cdot 16^x = 0$

4. Oldja meg a $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+2\sqrt{x}-1} = 2{,}25^{x+\sqrt{x}-1}$ egyenletet a valós számok halmazán!

5. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(x+3)^{x-2} = 1$

b) $x^{x+2} = x^5$

6. Oldja meg a $\left(6-\sqrt{35}\right)^x + \left(6+\sqrt{35}\right)^x = 142$ egyenletet a valós számok halmazán!

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned} 3^{2x} - 2^y &= 725 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} &= 25 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3^y\cdot 2^x &= 972 \\ y - x &= 3 \end{aligned}\right\}$

8. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^{\lg x} = 10$

b) $x^{\log_x^2 3} = 9$

c) $(x+1)^{\lg(x+1)} = 100\cdot(x+1)$

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$

b) $x\cdot(1-\lg 5) = \lg\left(2^x + x + 1\right)$

c) $x + \lg\left(5^x + 1\right) = x\cdot\lg 2 + \lg 30$

d) $2\cdot\lg\lg x = \lg(3 - 2\cdot\lg x)$

e) $\log_x 3 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$

10. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$

b) $\log_x 10+\log_{x^4} 100=6$

c) $\log_2 x+\log_3 x=(\log_2 x)\cdot(\log_3 x)$

d) $3\cdot\log_x 4+2\cdot\log_{4x} 4+3\cdot\log_{16x} 4=0$

e) $\log_x 8-\log_{4x} 8=\log_{2x} 16$

f) $\log_{\sqrt{x+1}} x+\log_x (x+1)^2=5$

g) $(\log_3 x)\cdot\log_4 \dfrac{x}{3}=\log_2 3$

h) $\log_3 x\cdot\log_4 x\cdot\log_5 x=\log_3 x\cdot\log_4 x+\log_4 x\cdot\log_5 x+\log_5 x\cdot\log_3 x$

11. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned}\log_2 x+\log_2 y&=4\\ y-x&=6\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}\log_2 x+\log_2 y&=4\\ 2\lg x-\lg y+\lg 2&=0\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned}\lg x+\lg y&=\lg 99\\ \lg(x+y)-\lg(x-y)&=1\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned}\log_{xy}(x-y)&=1\\ \log_{xy}(x+y)&=0\end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned}\log_y x+\log_x y&=\frac{5}{2}\\ x^2+y^2&=6\end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned}\log_7 x+y&=5\\ x^y&=7^6\end{aligned}\right\}$

12. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\log_{1/\sqrt{6}}\left(5^{x+1}-25^x\right)\ge -2$

b) $\log_{1/\sqrt{5}}\left(6^{x+1}-36^x\right)\ge -2$

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2^{x+4}+2^{x+3}+2^x=5^{x+1}-5^x$

b) $3^{x+1}-5^x+3^{x-1}-5^{x-1}=5^{x-2}-3^{x-2}$

c) $2^{x^2+x-6}-2^{x^2+x-9}=56$

Megoldás:

a) $2^{x+4}+2^{x+3}+2^x=2^4\cdot2^x+2^3\cdot2^x+2^x=16\cdot2^x+8\cdot2^x+2^x=25\cdot2^x$, és az egyenlet jobb oldala: $5^{x+1}-5^x=5\cdot5^x-5^x=4\cdot5^x$, ezért az egyenlet a $25\cdot2^x=4\cdot5^x$ alakot ölti. Innen $\dfrac{25}{4}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x$, tehát $x=2$.

b) $x-2$-t érdemes közös kitevőnek választani:
$3^3\cdot 3^{x-2}-5^2\cdot 5^{x-2}+3\cdot 3^{x-2}-5\cdot 5^{x-2}=5^{x-2}-3^{x-2}$, innen $3^{x-2}\cdot(27+3+1)=5^{x-2}\cdot(1+25+5)$, azaz $3^{x-2}=5^{x-2}$. $5^{x-2}\neq 0$ (hiszen $5^{x-2}>0$), így oszthatunk vele: $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}=1$, $x-2=0$, a megoldás $x=2$.
c) x^2+x-9-et válasszuk közös kitevőnek: $2^3\cdot 2^{x^2+x-9}-2^{x^2+x-9}=56$, $7\cdot 2^{x^2+x-9}=56$, tehát $2^{x^2+x-9}=8$, $x^2+x-9=3$, $x^2+x-12=0$, a megoldás: $x_1=-4,\ x_2=3$.

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2$
b) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$
c) $2^{x+2}+8^x=5\cdot 4^x$
d) $3^{2x+5}=3^{x+2}+2$
e) $2^{\sqrt{x}-1}+2\cdot 2^{1-\sqrt{x}}-3=0$
f) $2^{x+1}=7+2^{2-x}$
g) $2^{1+\sqrt{x}}+4=9\sqrt{2^{\sqrt{x}}}$

Megoldás:
a) Szorozzuk az egyenletet 5-tel: $3\cdot 5^{2x}-2\cdot 5^x=1$. Legyen $a=5^x$, ekkor az egyenletünk a $3a^2-2a-1=0$ alakot ölti, ennek megoldásai: $a_1=1,\ a_2=-\frac{1}{3}$. Mivel $5^x>0$, így csak az $5^x=1$ eset lehetséges, $x=0$.
b) Legyen $a=2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}$, ekkor az egyenlet $4a^2-5a=6$ alakban írható, melynek gyökei $a_1=2,\ a_2=-\frac{3}{4}$. Ha $2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=2$, akkor $x=\frac{3}{2}$. Mivel $2^t>0$ minden valós *t* számra, így a $2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=-\frac{3}{4}$ egyenlet nem ad megoldást.
c) $4\cdot 2^x+8^x=5\cdot 4^x$, $2^x\neq 0$-val oszthatunk: $4+4^x=5\cdot 2^x$, ennek megoldásai: $x_1=0,\ x_2=2$.
d) -2.
e) $x_1=1,\ x_2=4$.
f) 2.
g) Értelmezési tartomány: $x\geq 0$. $2^{1+\sqrt{x}}+4=9\cdot 2^{0{,}5\sqrt{x}}$, $2\cdot 2^{\sqrt{x}}+4=9\cdot 2^{0{,}5\sqrt{x}}$. Új ismeretlent vezetünk be: $a=2^{0{,}5\sqrt{x}}$, ekkor az egyenletünk: $2a^2+4=9a,\ 2a^2-9a+4=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai: $a=4,\ a=\frac{1}{2}$. Ha $a=4$, akkor $2^{0{,}5\sqrt{x}}=4\Rightarrow x=16$. Ha $a=\frac{1}{2}$, akkor a $2^{0{,}5\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$ egyenletből nem kapunk megoldást.

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $4\cdot 2^{2x}-6^{x}=18\cdot 3^{2x}$

b) $64\cdot 9^{x}+12^{x+1}-27\cdot 16^{x}=0$

Megoldás:

a) Osszuk az egyenletet $3^{2x}\neq 0$-val: $4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=18$. Legyen $a=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$, ekkor az egyenlet így írható: $4a^2-a-18=0$, ennek gyökei: $a_1=\frac{9}{4},\ a_2=-2$. A $\frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ megoldása $x=-2$; a $-2=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ egyenletnek nincs megoldása. A vizsgált egyenlet megoldása: $x=-2$.

b) 2.

4. Oldja meg a $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+2\sqrt{x}-1}=2{,}25^{x+\sqrt{x}-1}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Útmutatás. $2{,}25=\frac{9}{4}$, a megoldás: $x=0{,}25$.

5. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(x+3)^{x-2}=1$

b) $x^{x+2}=x^{5}$

Megoldás:

a) $(x+3)^{x-2}=1$, ha a hatvány alapja 1; ha a hatvány alapja -1 és a kitevő páros szám; ha a kitevő 0 és az alap nem nulla.
Ennek megfelelően a gyökök $x_1=-2,\ x_2=-4,\ x_3=2$.

b) Három esetet kell vizsgálni aszerint, hogy a hatvány alapja pozitív, nulla, vagy negatív.
Ha $x>0$, akkor vagy $x=1$, vagy a kitevők egyenlők: $x=3$.
Ha $x=0$, akkor ez megoldás is.
Ha $x<0$, akkor az $x+2$ kitevő egész szám, azaz $x=-k$ egész, ahol k pozitív egész szám. $(-k)^{2-k}=(-k)^{5}$, vagyis $(-k)^{3+k}=1$, mely a pozitív egészek közül $k=1$ esetén teljesül, azaz $x=-1$.
Az egyenlet gyökei: $-1, 0, 1, 3$.

6. Oldja meg a $\left(6-\sqrt{35}\right)^{x}+\left(6+\sqrt{35}\right)^{x}=142$ egyenletet a valós számok halmazán!

Útmutatás: Vegyük észre, hogy $\left(6-\sqrt{35}\right)\cdot\left(6+\sqrt{35}\right)=1$. Megoldások: $x_1=-2,\ x_2=2$.

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned} 3^{2x} - 2^{y} &= 725 \\ 3^{x} - 2^{\frac{y}{2}} &= 25 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 3^{y} \cdot 2^{x} &= 972 \\ y - x &= 3 \end{aligned}\right\}$

Megoldás: a) $x = 3,\ \ y = 2$. **b)** $x = 2,\ \ y = 5$.

8. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^{\lg x} = 10$

b) $x^{\log_x^2 3} = 9$

c) $(x+1)^{\lg(x+1)} = 100 \cdot (x+1)$

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát.
$\lg x^{\lg x} = \lg 10$, azaz $\lg x \cdot \lg x = 1$, tehát $\lg x = 1$ és $x_1 = 10$, vagy $\lg x = -1$ és $x_2 = 0{,}1$.

b) Vegyük mindkét oldal *x* alapú logaritmusát. $x = \sqrt{3}$.

c) $x_1 = -\dfrac{9}{10},\ x_2 = 99$.

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$

b) $x \cdot (1 - \lg 5) = \lg\left(2^x + x + 1\right)$

c) $x + \lg\left(5^x + 1\right) = x \cdot \lg 2 + \lg 30$

d) $2 \cdot \lg\lg x = \lg(3 - 2 \cdot \lg x)$

e) $\log_x 3 - \log_x 2 = \dfrac{1}{2}$

Megoldás:

a) $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1 \Rightarrow \log_2 x(x+1) = 1 \Rightarrow x(x+1) = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$, ennek gyökei: $x_1 = -2,\ \ x_2 = 1$. Az $x_1 = -2$ nem megoldása az eredeti egyenletnek, mert a logaritmusfüggvényt csak a pozitív számokra értelmezzük, teljesülni kell az $x > 0$ feltételnek. Az egyenletnek egy megoldása van, $x = 1$.

b) $x = -1$.

c) $x = 1$.

d) Értelmezési tartomány: a bal oldalon álló kifejezés miatt $x > 0$ és $\lg x > 0$, azaz $x > 1$; a jobb oldalon álló kifejezés miatt $3 - 2\lg x > 0,\ x > 0$ azaz $0 < x < 10^{1,5}$; tehát az egyenlet megoldásait az $1 < x < 10^{1,5}$ feltételt kielégítő valós számok körében keressük.

Ekkor $\lg\lg^2 x = \lg(3 - 2\cdot\lg x)$, $\lg^2 x = 3 - 2\cdot\lg x$, innen $\lg x = 1$, $x_1 = 10$, vagy $\lg x = -3$, $x_2 = 0{,}001$. Ez utóbbi nem tartozik az értelmezési tartományba, így az egyenletnek egy megoldása van: $x = 10$.

e) $x = \dfrac{9}{4}$.

10. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_{1-x}(3-x) = \log_{3-x}(1-x)$

b) $\log_x 10 + \log_{x^4} 100 = 6$

c) $\log_2 x + \log_3 x = (\log_2 x)\cdot(\log_3 x)$

d) $3\cdot\log_x 4 + 2\cdot\log_{4x} 4 + 3\cdot\log_{16x} 4 = 0$

e) $\log_x 8 - \log_{4x} 8 = \log_{2x} 16$

f) $\log_{\sqrt{x+1}} x + \log_x (x+1)^2 = 5$

g) $(\log_3 x)\cdot\log_4 \dfrac{x}{3} = \log_2 3$

h) $\log_3 x\cdot\log_4 x\cdot\log_5 x = \log_3 x\cdot\log_4 x + \log_4 x\cdot\log_5 x + \log_5 x\cdot\log_3 x$

Megoldás:

a) $\log_{1-x}(3-x) = \log_{3-x}(1-x) \Leftrightarrow \log_{1-x}(3-x) = \dfrac{1}{\log_{3-x}(1-x)}$, azaz $[\log_{3-x}(1-x)]^2 = 1$. Vagy $\log_{3-x}(1-x) = 1$, vagy $\log_{3-x}(1-x) = -1$. Első esetben $3 - x = 1 - x$, ennek nincs megoldása. Második esetben $3 - x = \dfrac{1}{1-x}$, ennek gyökei $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$. Mivel a logaritmus alapja pozitív: $1 - x > 0$, így $x = 2 + \sqrt{2}$ nem megoldása az eredeti egyenletnek, csak az $x = 2 - \sqrt{2}$ megoldás.

b) $\log_x 10 + \log_{x^4} 100 = 6 \Leftrightarrow \log_x 10 + \dfrac{2}{4}\log_x 10 = 6 \Leftrightarrow \log_x 10 = 4 \Rightarrow x^4 = 10$, azaz $x = \pm\sqrt[4]{10}$. Mivel a logaritmus alapja pozitív szám (és $\neq 1$), ezért csak $x = \sqrt[4]{10}$ megoldás.

c) Értelmezési tartomány: $x > 0$.
Ha $\log_2 x \neq 0$, $\log_3 x \neq 0$, azaz $x \neq 1$, akkor oszthatunk a jobb oldalon álló kifejezéssel: $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_2 x} = 1$, azaz $\log_x 3 + \log_x 2 = 1$, $\log_x 6 = 1$, $x = 6$.
Ha $x = 1$, akkor mindkét oldalon 0 áll, tehát $x = 1$ is megoldás.

d) Értelmezési tartomány: $x > 0, x \neq 1, x \neq \dfrac{1}{4}, x \neq \dfrac{1}{16}$. Térjünk át 2-es alapú logaritmusra: $\dfrac{3\cdot\log_2 4}{\log_2 x} + \dfrac{2\cdot\log_2 4}{\log_2 4x} + \dfrac{3\cdot\log_2 4}{\log_2 16x} = 0$, azaz $\dfrac{3\cdot 2}{\log_2 x} + \dfrac{2\cdot 2}{2 + \log_2 x} + \dfrac{3\cdot 2}{4 + \log_2 x} = 0$. Legyen

$a = \log_2 x$, egyenletünk a $\frac{6}{a} + \frac{4}{2+a} + \frac{6}{4+a} = 0$ alakot ölti. Ennek megoldásai $a_1 = -3,\ a_2 = -1$. Az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{1}{8},\ x_2 = \frac{1}{2}$.

e) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{8}},\ x_2 = 2$.

f) $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

g) Értelmezési tartomány: $x > 0$.

$$(\log_3 x) \cdot \log_4 \frac{x}{3} = \log_2 3$$

$$\log_3 x \cdot \frac{\log_3 x - 1}{\log_3 4} = \frac{1}{\log_3 2}$$

$$\log_3 x \cdot \frac{\log_3 x - 1}{2 \cdot \log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2}$$

$$\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1) = 2$$

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 9.$$

h) Ha $\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x \neq 0$, azaz ha $x \neq 1$, akkor oszthatunk vele, és így kapjuk az $1 = \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x}$ egyenletet, azaz $1 = \log_x 5 + \log_x 3 + \log_x 4 = \log_x 60$, $x_1 = 60$.

Ha $\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = 0$, akkor $x = 1$, és ez megoldása az egyenletnek. Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 60,\ x_2 = 1$.

11. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 y &= 4 \\ y - x &= 6 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 y &= 4 \\ 2\lg x - \lg y + \lg 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} \lg x + \lg y &= \lg 99 \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) &= 1 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} \log_{xy}(x-y) &= 1 \\ \log_{xy}(x+y) &= 0 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} \log_y x + \log_x y &= \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 &= 6 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} \log_7 x + y &= 5 \\ x^y &= 7^6 \end{aligned}\right\}$

Megoldás:

a) $x = 2,\ y = 8$. **b)** $x = 2,\ y = 8$. **c)** $x = 11,\ y = 9$.

d) Az egyenletrendszerből következik az

$$\left.\begin{aligned} x-y&=xy \\ x+y&=1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer. A két egyenlet összege $2x = xy + 1$, innen $x = \dfrac{1}{2-y}$.

Ezt beírva az $x - y = xy$ egyenletbe: $\dfrac{1}{2-y} - y = \dfrac{y}{2-y}$. Átrendezés után: $y^2 - 3y + 1 = 0$.

Ennek gyökei: $y_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ és $y_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Továbbá: $x_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

A logaritmus értelmezése miatt $xy > 0$ kell legyen, ám $x_1 y_1 < 0$, tehát az $(x_1,\, y_1)$ számpár hamis gyök.

Az $(x_2,\, y_2)$ számpár az eredeti egyenletrendszernek megoldása.

Az eredeti egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

e) Legyen $a = \log_x y$, ekkor $a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{5}{2},\ a_1 = 2,\ a_2 = \dfrac{1}{2}$. Ha $\log_x y = 2$, úgy $y = x^2$, és ezt használva oldjuk meg az $x^2 + y^2 = 6$ egyenletet. $x_1 = \sqrt{2},\ y_1 = 2,\ \ x_2 = 2,\ y_2 = \sqrt{2}$.

f) $x^y = 7^6,\ y \cdot \log_7 x = 6,\ x_1 = 343,\ y_1 = 2,\ x_2 = 49,\ y_2 = 3$.

12. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\log_{1/\sqrt{6}}\left(5^{x+1} - 25^x\right) \ge -2$ **b)** $\log_{1/\sqrt{5}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \ge -2$

Megoldás:

a) $\log_{1/\sqrt{6}}\left(5^{x+1} - 25^x\right) \ge -2 = \log_{1/\sqrt{6}} 6$.

Mivel a logaritmus alapja 1-nél kisebb, az egyenlőtlenség iránya megfordul. Továbbá csak pozitív számnak van logaritmusa, így: $0 < 5^{x+1} - 25^x \le 6$. Legyen $a = 5^x$, így az előző egyenlőtlenség $0 < 5a - a^2 \le 6$ alakot ölti.

$0 < 5a - a^2 = a(5-a)$, ennek $0 < a < 5$ a megoldása.

$5a - a^2 \le 6$, azaz $(a-2)(a-3) \ge 0$. Ebből $a \le 2$ vagy $a \ge 3$.

Az $0 < 5a - a^2 \le 6$ egyenlőtlenség megoldása: $0 < a \le 2$ vagy $3 \le a < 5$.

$0 < 5^x \le 2$, ha $x \le \log_5 2$; vagy $3 \le 5^x < 5$, ha $\log_5 3 \le x < 1$.

b) $x \le 0$ vagy $\log_6 5 \le x < 1$.

Ellenőrző feladatok

1. Oldja meg az alábbi exponenciális egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$

b) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$

c) $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$

d) $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

2. Oldja meg az alábbi logaritmusos egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_{x+1} 2 = 2$

b) $\log_3 \left[1 + \log_2 \left(1 + 3 \cdot \log_2 x\right)\right] = 1$

c) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

d) $2 \cdot \log_4 x + 2 \cdot \log_x 4 = 5$

e) $\lg x^2 + \lg(-x) = 3$

f) $\lg^2 x^2 = \lg 10\,000$

3. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $3^{\sqrt{x^2-4x}} < 9^{x/2}$

b) $\log_2 |x| < 3$

c) $|\log_3 x| < 2$

d) $\log_2 |x^2 - x| < 1$

e) $\log_{1/3}\left(\log_4\left(x^2 - 5\right)\right) > 0$

4. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned} 3^{2x} - 2^y &= 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} &= 7 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2^x \cdot 3^y &= 12 \\ 2^y \cdot 3^x &= 18 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} \log_4 x + \log_4 y &= 2 \\ \log_2 x - \log_2 y &= 4 \end{aligned}\right\}$

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. a) 2; **b)** 3; **c)** $x_1 = 1,\ x_2 = -1$; **d)** $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

2. a) $x = \sqrt{2} - 1$; **b)** $x = 2$; **c)** $x = 16$; **d)** $x_1 = 2,\ x_2 = 16$;

e) $\lg x^2 = \lg(-x)^2$, így egyenletünk $\lg(-x)^2 + \lg(-x) = 3$ alakban is írható, azaz $2 \cdot \lg(-x) + \lg(-x) = 3$, és a $3 \cdot \lg(-x) = 3$ egyenlet megoldása $x = -10$.

f) $\lg^2 x^2 = 4,\ \lg x^2 = \pm 2,$ így $x^2 = 100$, vagy $x^2 = 0{,}01$. A megoldások: 10, -10, $\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{10}$.

3. a) $x \ge 4$; **b)** $-8 < x < 8,\ x \ne 0$; **c)** $\frac{1}{9} < x < 9$;

d) $-1 < x < 2,\ \ x \ne 0,\ x \ne 1$; **e)** $-3 < x < -\sqrt{6}$ vagy $\sqrt{6} < x < 3$.

4. a) $x = 2,\ y = 2$; **b)** $x = 2,\ y = 1$; **c)** $x = 16,\ y = 1$.