

10. Síkgeometria

I. Elméleti összefoglaló

Szögek, nevezetes szögpárok

- Egy adott pontból kiinduló két félegyenes a síkot két részre bontja. Egy-egy ilyen rész neve **szögtartomány**, vagy **szög**. A két félegyenest a szög **szárainak**, közös kezdőpontjukat a szög **csúcsának** nevezzük.
- Szögfajták:
 - **Nullszögnek** nevezzük azt a szöget, amelynek szárai egybeesnek, és szögtartományát a két egybeeső szára alkotja.
 - **Teljesszögnek** nevezzük azt a szöget, amelynek szárai egybeesnek, és szögtartományát a teljes sík alkotja.
 - **Egyenesszögnek** nevezzük azt a szöget, amelynek szárai egy egyenest alkotnak, és szögtartománya félsík.
 - **Derékszögnek** nevezzük az egyenesszög felét. A derékszög szárait egymásra **merőlegesnek** nevezzük, és szögtartománya síknegyed.
 - **Hegyesszögnek** nevezzük a nullszögnél nagyobb, de a derékszögnél kisebb szögeket.
 - **Tompaszögnek** nevezzük a derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szögeket.
 - **Homorú (konkáv) szögnek** nevezzük az egyenesszögnél nagyobb, de a teljesszögnél kisebb szögeket.
 - **Konvex szögnek** nevezzük a nem konkáv szögeket.
- Az egyenesszög 180-ad részét **1 fokos (1°) szögnek** nevezzük. Az 1 fok 60-ad részét **1 percnak ($1'$)**, az 1 perc 60-ad részét **1 másodpercnak ($1''$)** nevezzük.
- **Forgásszöget** kapunk, ha egy félegyenest a kezdőpontja körül valamilyen irányban elforgatunk a síkban. **Pozitív** a forgásszög, ha az elforgatás iránya az óramutató járásával ellentétes, **negatív**, ha megegyező.
- Nevezetes szögpárok:
 - Ha két konvex vagy két konkáv szög megfelelő szárai páronként egyirányúak, akkor a két szöget **egyállású szögeknek**, ha megfelelő száraik ellentétes irányúak, akkor **váltószögeknek** nevezzük.
 - Az egyállású szögek és a váltószögek egyenlő nagyságúak.
 - Ha két szög csúcsa közös, és megfelelő száraik páronként egy-egy egyenest alkotnak, akkor **csúcsszögeknek** nevezzük őket.
 - A csúcsszögek egyenlő nagyságúak.
 - Ha két szög egy-egy szára közös, a másik kettő pedig egy egyenest alkot, akkor **mellékszögeknek** nevezzük őket.
 - A mellékszögek összege 180° .
 - Ha két szög összege 180° , akkor **kiegészítő szögeknek** nevezzük őket.
 - Ha két szög összege 90° , akkor **pótszögeknek** nevezzük őket.
 - Ha két szög megfelelő szárai páronként merőlegesek, akkor **merőleges szárú szögeknek** nevezzük őket.

- Ha a merőleges szárú szögpár mindkét szöge hegyesszög vagy tompaszög, akkor egyenlők egymással, ha az egyik hegyesszög, a másik tompaszög, akkor összegük 180° .

Háromszögek

- A háromszög belső szögeinek összege 180° .
- A háromszög egyik külső szöge a nem mellette fekvő belső szögek összegével egyenlő.
- Egy háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál.
- Egy háromszögben
 - egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak;
 - a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van;
 - a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.
- Egy háromszög **hegyesszögű**, ha mindegyik szöge hegyesszög; **derékszögű**, ha egyik szöge derékszög; **tompaszögű**, ha egyik szöge tompaszög.
- Derékszögű háromszögben a derékszöget közrefogó oldalakat **befogóknak**, a derékszöggel szemközti oldalt **átfogónak** nevezzük.
- Egy háromszög **egyenlő szárú**, ha van két egyenlő oldala. E két egyenlő oldalt **száraknak**, a harmadik oldalt **alapnak** nevezzük. A szárak által bezárt szöget **szárszögnek**, az alapon nyugvókat **alapszögeknek** nevezzük.
- Egy háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha
 - van két egyenlő szöge;
 - tengelyesen szimmetrikus;
 - az egyik csúcsa illeszkedik a szemközti oldal felezőmerőlegesére.
 - egyik magassága felezi a hozzátartozó oldalt;
 - egyik magassága egyben szögfelező is.
- Egy **háromszög szabályos, (egyenlő oldalú)** ha minden oldala egyenlő.
- Az a oldalú szabályos háromszög magassága $m = a \frac{\sqrt{3}}{2}$, területe $t = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.
- **A háromszög oldalfelező merőlegesei, a háromszög köré írható köre**
 - Egy háromszög köré pontosan egy olyan kör írható, mely mindhárom csúcson áthalad.
 - A háromszög mindhárom csúcsán áthaladó kört a **háromszög köré írható körének** nevezzük.
 - A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, mégpedig a háromszög köré írható körének középpontjában.
 - Ha a háromszög oldalai a , b és c , köré írt körének sugara R , akkor területe $t = \frac{abc}{4R}$.
- **A háromszög magasságai**
 - A háromszög csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsájtott merőleges szakaszt **magasságnak**, a magasságra illeszkedő egyenest pedig **magasságvonálnak** nevezzük.
 - A háromszög három magasságvonala egy ponton halad át.
 - A háromszög magasságvonalaik metszéspontját a háromszög **magasságpontjának** nevezzük.

- **A háromszög súlyvonalai**
 - A háromszög egy csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög **súlyvonalának** nevezzük.
 - A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át és ez a pont a súlyvonalak csúcsától távolabbi, az oldalhoz közelebb eső harmadolópontja.
 - A háromszög súlyvonalainak metszéspontját a háromszög **súlypontjának** nevezzük.
- **A háromszög középvonalai**
 - A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszt a háromszög **középvonalának** nevezzük.
 - A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő középvonala párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és hossza a harmadik oldal hosszának a fele.
- **A háromszög belső és külső szögfelezői, az oldalegyeneseket érintő körök**
 - Egy háromszögbe pontosan egy olyan kör írható, mely mind a három oldalt érinti.
 - A háromszög mindhárom oldalát belülről érintő kört a **háromszög beírt körének** nevezzük.
 - A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, mégpedig a háromszög beírt körének középpontjában.
 - Ha a háromszög területének fele s , beírt körének sugara r , akkor területe $t = rs$.
 - A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.
 - A háromszög minden egyes oldalához pontosan egy olyan kör tartozik, mely az oldalt kívülről, a másik két oldalt pedig belülről érinti, s középpontja egy belső és két külső szög szögfelezőjének a metszéspontja.
 - A háromszög egyik oldalát kívülről, a másik két oldalát pedig belülről érintő kört a háromszög adott oldalához tartozó **hozzáírt körének** nevezzük.
 - Ha a háromszög területének fele s , az a oldalához írt körének sugara r_a , akkor területe
$$t = r_a(s - a).$$
 - Ha egy háromszög egyik oldalegyenesét a szemközti csúcsához tartozó külső szögfelezője metszi, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból induló oldalak.

Pitagorasz-tétel

- Pitagorasz-tétel: Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogói hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.
- A Pitagorasz-tétel megfordítása: Ha egy háromszög valamely két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.
- A Pitagorasz-tétel és megfordítása: Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha valamely két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.

Thalész-tétel

- Thalész-tétel: Ha egy háromszög köré írható körének középpontja az egyik oldalának felezőpontja, akkor a háromszög derékszögű.
- A Thalész-tétel megfordítása: Ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

- A Thalész-tétel és megfordítása: Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha köré írható körének középpontja az egyik oldalának felezőpontja.

Magasságtétel, befogótétel

- Magasságtétel: Egy derékszögű háromszög magasságának hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.
- Befogótétel: Egy derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

A háromszög néhány további területképlete

Jelölje a, b, c a háromszög oldalainak hosszát, α, β, γ a megfelelő belső szögeket, m_a, m_b, m_c a magasságok hosszait, s a terület felét és R a köré írható kör sugarát!

- $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}.$
- $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}.$
- $t = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \alpha}.$
- $t = 2 \cdot R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$
- $t = \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$
- $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$ Heron-képlet.

Négyszögek

- A négyszög belső szögeinek összege 360° .
- **Trapéz**
 - Ha egy négyszögnek van két párhuzamos oldala, akkor **trapéz**nak nevezzük.
 - A trapéz párhuzamos oldalait **alapk**nak, a másik két oldalát **szárak**nak nevezzük.
 - A **trapéz magassága** az alapokat merőlegesen összekötő szakasz. (az alapok távolsága)
 - A **trapéz középvonala** a szárak felezőpontjait összekötő szakasz.
 - A trapéz szárainak felezőpontjait összekötő középvonala párhuzamos az alapokkal, hossza pedig az alapok hosszainak számtani közepe.
 - A trapézban az egy száron fekvő szögek összege 180 fok. (társszögek)
 - A **trapéz derékszögű**, ha van derékszöge.
 - A **trapéz egyenlő szárú**, ha szárai egyenlő hosszúak.
 - Ha egy trapéz tengelyesen szimmetrikus, akkor **szimmetrikus trapéz**nak nevezzük.
 - A szimmetrikus trapéz alapon fekvő szögei egyenlők.
 - Minden szimmetrikus trapéz egyenlő szárú, de nem minden egyenlő szárú trapéz szimmetrikus.
 - A szimmetrikus trapézok köré kör írható (húrtapéz).
 - A szimmetrikus trapéz szimmetria-tengelye felezi az alapokat és merőleges azokra.
 - A trapéz területét megkapjuk, ha az alapok hosszainak számtani közepét megszorozzuk a trapéz magasságának hosszával.
- **Paralelogramma**
 - Ha egy négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, akkor **paralelogramma**nak nevezzük.

- Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha
 - szemközti szögei egyenlők;
 - az egy oldalon fekvő szögeinek összege 180° ;
 - szemközti oldalai egyenlők;
 - ha van két szemközti oldala, amelyek egyenlők és párhuzamosak;
 - középpontosan szimmetrikus;
 - átlói felezik egymást.
- A paralelogramma két szemközti oldalának felezési pontjait összekötő szakaszt a **paralelogramma középvonalának** nevezzük.
- A paralelogramma két szemközti oldalának felezési pontjait összekötő középvonala párhuzamos a másik két oldallal és velük egyenlő hosszú.
- A paralelogramma adott oldalához tartozó **magassága** a szemközti oldal egy pontjából az adott oldal egyenesére bocsátott merőleges szakasz.
- A paralelogramma területét megkapjuk, ha egyik oldalának hosszát megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszával.
- **Deltoid**
 - Ha egy négyszög valamelyik átlójára tengelyesen szimmetrikus, akkor **deltoidnak** nevezzük.
 - A deltoid átlói merőlegesek egymásra.
 - A deltoid szimmetriaátlója felezi a másik átlót.
 - A deltoidnak két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú.
 - A deltoid szimmetriaátlóval szemközti szögei egyenlők.
 - Van konkáv deltoid is.
 - A deltoid területe egyenlő az átlók hosszai szorzatának felével.
- **Rombusz**
 - Ha egy négyszög oldalai egyenlő hosszúak, akkor **rombusznak** nevezzük.
 - Minden rombusz paralelogramma is (tehát rendelkezik a paralelogramma összes tulajdonságával).
 - Minden rombusz deltoid is (tehát rendelkezik a deltoid összes tulajdonságával).
- **Téglalap**
 - Ha egy négyszög szögei egyenlők, akkor **téglalapnak** nevezzük.
 - A téglalap szögei 90° fokosak.
 - A téglalap
 - szemközti oldalai egyenlők és párhuzamosak egymással;
 - átlói felezik egymást;
 - középpontosan szimmetrikus az átlók felezéspontjára nézve;
 - tengelyesen szimmetrikus a szemközti oldalfelező pontokon átmenő egyenesekre.
 - A téglalap területe egyenlő az egy csúcsában összefutó oldalak hosszainak szorzatával.
 - Minden téglalap húrtrapéz, derékszögű trapéz, paralelogramma is.
- **Négyzet**
 - Ha egy négyszög minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge egyenlő, akkor **négyzetnek** nevezzük.
 - A négyzet területe egyenlő oldalhosszának négyzetével.
- Egy négyszög két középvonala felezve metszi egymást.

- **Érintőnéyszögek**
 - Azokat a négyszögeket, amelyeknek van beírt körük, **érintőnéyszögeknek** nevezzük.
 - Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnéyszög, ha a szemközti oldalak hosszainak összege egyenlő.
 - Az érintőnéyszög területét úgy is megkaphatjuk, ha beírt körének sugarát megszorozzuk a terület felével.
- **Húrnégyszögek**
 - Azokat a négyszögeket, amelyeknek van körülírt körük, **húrnégyszögeknek** nevezzük.
 - Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180° .
 - Ptolemaiosz-tétel: A húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével.

Sokszögek

- Egy **sokszög konvex**, ha minden szöge konvex, egy **sokszög konkáv**, ha van konkáv szöge.
- Az n -oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2}$.
- Az n -oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
- Egy **sokszög szabályos**, ha minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.

Kör és részei, körív hossza, körcikk területe

- A **kör** azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra vannak.
- A kör két különböző pontját összekötő szakaszt **húrnak**, a húr tartalmazó egyenest **szelőnek** nevezzük.
- A kör középpontján átmenő húr **átmérőnek** nevezzük.
- A kört két különböző pontja két **körívre** osztja fel.
- A körlap azon részét, amelyet a kör egy íve és az ív végpontjaiba húzott sugarak határolnak, **körcikknek** nevezzük.
- A körlap azon részét, amelyet a kör egy íve és az ív végpontjait összekötő húrja határolnak, **kör-szeletnek** nevezzük.
- A sík két koncentrikus köre által közrefogott részét **körgyűrűnek** nevezzük.
- A **kör érintője** a kör síkjának olyan egyenese, amelynek egyetlen közös pontja van a körrel.
- A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
- Egy külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő hosszú.
- (Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele) Adott körhöz adott külső pontból húzott érintőszakaszok hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyek az adott ponton átmenő szelőn a ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjednek.
- (Körhöz külső pontból húzott szelőszakaszok tétele) Adott körhöz adott külső ponton át húzott szelőn az adott ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjedő szelőszakaszok hosszának szorzata állandó, csak a körtől és az adott ponttól függ.
- Adott körhöz adott belső pontján át húzott szelőn az adott ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjedő szelőszakaszok hosszának szorzata állandó, csak a körtől és az adott ponttól függ.
- Ha egy szög csúcsa egy adott kör középpontja, akkor **középponti szögnek** nevezzük.

- Egy körben a középponti szögek nagysága és a hozzájuk tartozó körívek hosszai egyenesen arányosak. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{i_\alpha}{i_\beta}$.

- Ívmérték: **1 radián** az szög, amelyhez mint középponti szöghöz a kör sugarával egyenlő hosszú körív tartozik. π radián = 180° .

- Adott r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körív hossza:

$$i_{\alpha^\circ} = \frac{r\pi}{180^\circ} \alpha^\circ, \text{ illetve } i_{\hat{\alpha}} = r\hat{\alpha}.$$

- Egy körben a középponti szögek nagysága és a hozzájuk tartozó körcikk területi egyenesen arányosak. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{t_\alpha}{t_\beta}$.

- Adott r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körcikk területe:

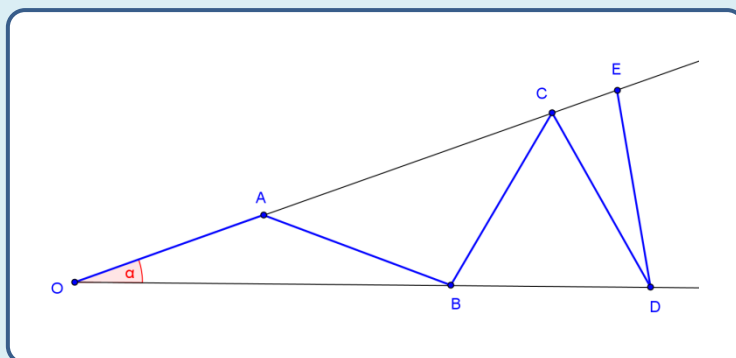
$$t_{\alpha^\circ} = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \alpha^\circ, \text{ illetve } t_{\hat{\alpha}} = \frac{i_{\hat{\alpha}}r}{2}.$$

Kerületi szögek, látókör

- Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal pontja, szárai pedig vagy a kör két húrjára, vagy egy húrra és egy érintőre illeszkednek, akkor a kör **kerületi szögének** nevezzük. Ha a kerületi szög egyik szára egy érintőre illeszkedik, akkor **érintőszárú kerületi szögnek** nevezzük.
- (Kerületi és középponti szögek tétele) Egy körben egy adott ívhez tartozó középponti szög kétszerese az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögnek.
- (Kerületi szögek tétele) Egy körben egy adott ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők.
- (Látószög-körív; látókör) A síkon azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy adott AB szakasz adott ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) szögben látszik, két szimmetrikus körív.
 - Az AB szakasz a két körív közös húrja, és az A és B pontok nem tartoznak a látószög-körívhez.
 - (Thalész-tétel) Adott kör egy tetszőleges AB átmérője a kör bármely A -tól és B -től különböző pontjából derékszögben látszik.
 - (A Thalész-tétel megfordítása) Ha egy háromszög AB oldala a szemközti C csúcsból derékszögben látszik, akkor a C csúcs az AB átmérőjű kör A -tól és B -től különböző pontja.

II. Kidolgozott feladatok

- Az ábrán látható szakaszok közül $OA = AB = BC = CD = DE$. Mekkora α szög esetén lesz $OD = OE$?

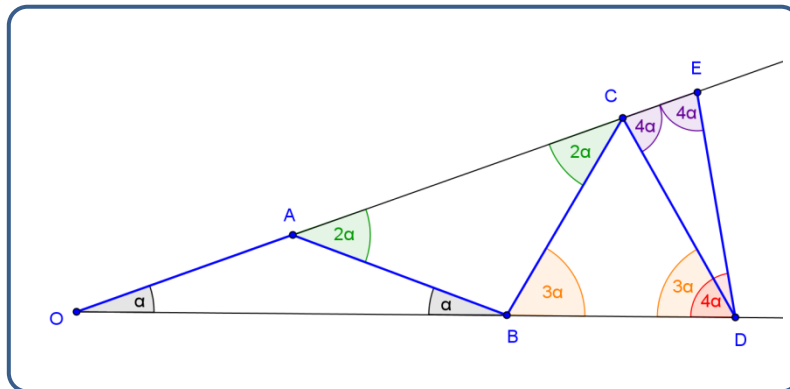


Megoldás:

Az $OD = OE$ feltétel azt jelenti, hogy az $ODE\Delta$ egyenlő szárú, vagyis a DE alapján fekvő szögei egyenlők. Fejezzük ki az $OED\angle$ alapszöget α segítségével!

A megadott szakaszok egyenlőségét felhasználjuk.

- Az $OBA\Delta$ egyenlő szárú, ezért az OB alapon fekvő szögei α -val egyenlők.
- $BAC\angle = 2\alpha$, mert az $OBA\Delta$ A csúcsánál lévő külső szöge.
- A $CAB\Delta$ egyenlő szárú, ezért a CA alapon fekvő szögei 2α -val egyenlők.
- $CBD\angle = 3\alpha$, mert az $OBC\Delta$ B csúcsánál lévő külső szöge.
- A $BDC\Delta$ egyenlő szárú, ezért a BD alapon fekvő szögei 3α -val egyenlők.
- $DCE\angle = 4\alpha$, mert az $ODC\Delta$ C csúcsánál lévő külső szöge.



- Az $ECD\Delta$ egyenlő szárú, ezért a CE alapon fekvő szögei 4α -val egyenlők, így a keresett $OED\angle$ is.

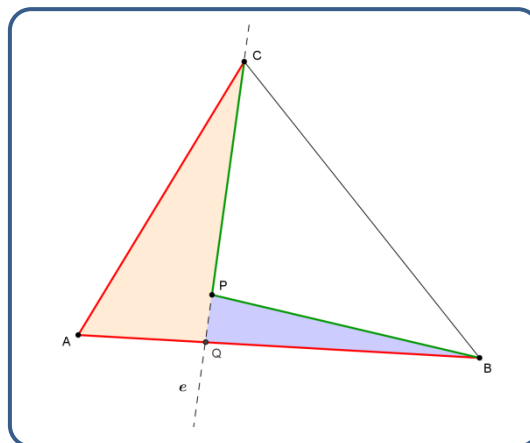
Ahhoz, hogy az $ODE\Delta$ egyenlő szárú legyen, szükséges az $OED\angle = ODE\angle = 4\alpha$ teljesülése.

Az $ODE\Delta$ belső szögeinek összege 180° , ezért $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ$, azaz $\alpha = 20^\circ$.

2. Bizonyítsa be, hogy ha P az ABC háromszög egy belső pontja, akkor $PB + PC < AB + AC$!

Megoldás:

Az állítás igazolásához a háromszög-egyenlőtlenséget használjuk. Legyen az e egyenes a háromszög C csúcsán és a P belső pontján átmenő egyenes. Az e egyenes a Q pontban metszi az AB oldalt.



A $QBP\Delta$ -ben: $PB < PQ + QB$.

Az $AQC\Delta$ -ben: $CQ < AQ + AC$.

E két egyenlőtlenséget összeadva: $PB + CQ < PQ + QB + AQ + AC$.

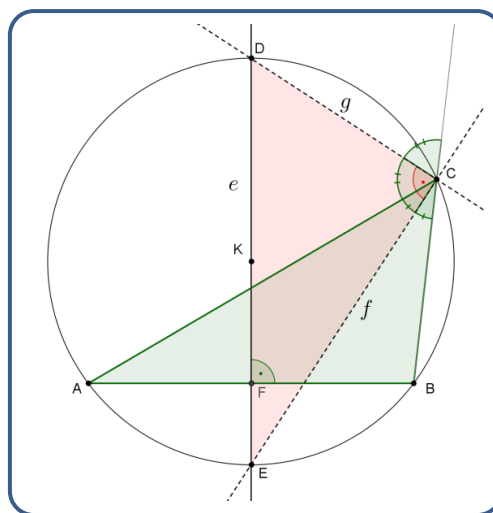
Mivel $CQ = PC + PQ$ és $AQ + QB = AB$, adódik a $PB + PC + PQ < PQ + AB + AC$.

Mindkét oldalból PQ -t kivonva kapjuk a bizonyítandó állítást:

$$PB + PC < AB + AC.$$

3. Az ABC háromszögben $AC \neq BC$, és a háromszög körülírható körének sugara 10 cm.
- Hány olyan pont van a háromszög síkjában, amely a háromszög AC és BC oldalegyeneseseitől, valamint az A és B csúcsoktól egyenlő távol van?
 - Mekkora távolságra vannak ezek a pontok egymástól?

Megoldás:



- a) Az AC és BC oldalegyenesektől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az ABC háromszög síkjában a C csúcsához tartozó f belső és g külső szögfelező egyenesek. Az A és B csúcsoktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza pedig az AB oldal e felezőmerőlegese.

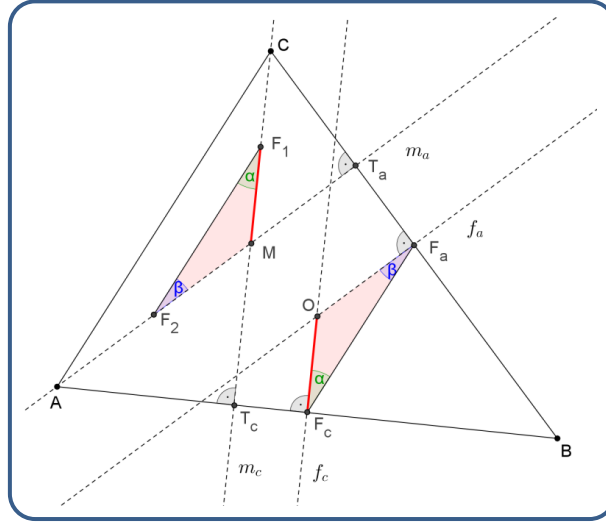
A keresett pontokat az e szakaszfelező merőlegesnek az f és g szögfelezőkkel közös pontjai adják. Mivel $AC \neq BC$, a C pont nincs rajta az e egyenesen, ezért e az f és g egyeneseket egy-egy pontban metszi, tehát két olyan pont van, amely megfelel a feltételeknek.

- b) Az f belső szögfelező egyenes és az e szakaszfelező merőleges mindegyike átmegy az AB ív E felezőpontján, tehát az ABC háromszög körülírható körén metszik egymást. Az e szakaszfelező merőleges egyenes tartalmazza az ABC háromszög körülírható körének az ED átmérőjét. A Thalész-tétel miatt az ECD háromszög derékszögű. Az EC befogó illeszkedik f -re és merőleges a CD befogóra. Tudjuk, hogy $f \perp g$, mert a háromszög C csúcsához tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra. Mivel az EC befogóra a C pontban csak egyetlen merőleges egyenes állítható, ezért g átmegy az ED átmérő D végpontján. Így a keresett két metszéspont az ED átmérő két végpontja, és távolságuk 20 cm.

4. Igazolja, hogy a háromszög köré írt körének középpontja a háromszög bármelyik oldalától fele olyan távol van, mint az ugyanazon oldallal szemközti csúcs a magasságponttól!

Megoldás:

Első esetben legyen az $ABC\Delta$ hegyesszögű. Jelölje M a magasságpontot, O a körülírt kör középpontját, az F_1, F_2, F_a, F_c pedig rendre az MC, MA, BC és AB szakaszok felezőpontjait. Az alábbi ábra jelöléseivel a bizonyítandó állítás a háromszög C csúcsára és a vele szemközti AB oldalra felírva: $MC = 2 \cdot OF_c$.



- Az F_1F_2 szakasz az $AMC\Delta$ -ben az AC oldallal párhuzamos középvonal, ezért

$$F_1F_2 \parallel AC \text{ és } F_1F_2 = \frac{1}{2} \cdot AC.$$

- Az F_aF_c szakasz az $ABC\Delta$ -ben az AC oldallal párhuzamos középvonal, ezért

$$F_aF_c \parallel AC \text{ és } F_aF_c = \frac{1}{2} \cdot AC.$$

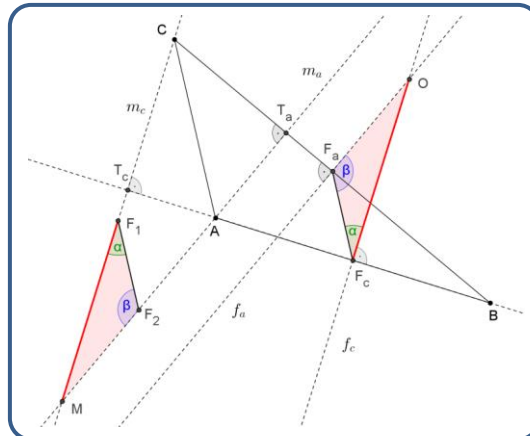
Ezekből következik, hogy $F_1F_2 = F_aF_c$ és $F_1F_2 \parallel F_aF_c$.

- Az $F_2F_1M\angle = OF_cF_a\angle = \alpha$, mert váltószögek ($F_1F_2 \parallel F_cF_a$ és $F_cO \parallel F_1M$).
- Az $F_1F_2M\angle = OF_aF_c\angle = \beta$, mert váltószögek ($F_2F_1 \parallel F_aF_c$ és $F_aO \parallel F_2M$).

Ezek alapján $MF_1F_2\Delta \cong OF_cF_a\Delta$, mert egy-egy oldaluk és az oldalon fekvő két szögük egyenlő. Ezért az $MF_1 = OF_c$ felhasználásával $MC = 2 \cdot MF_1 = 2 \cdot OF_c$ adódik, amit bizonyítani akartunk.

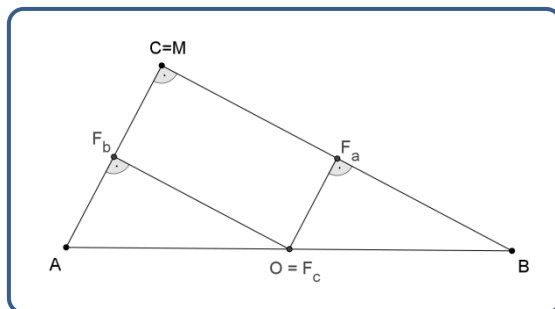
Mivel a C csúcsnak és a vele szemközti AB oldalnak nincs kitüntetett szerepe, ezért az állítás a háromszög bármelyik csúcsa esetén igaz.

Ha az $ABC\Delta$ tompaszögű, akkor a bizonyítás ugyanúgy történik, mint a hegyesszögű esetben. Az alábbi ábrán követhető a bizonyítás menete.



Ha az $ABC\Delta$ derékszögű, akkor a magasságpont egybeesik a derékszögű csúccsal, $M = C$.

A Thalész-tétel megfordítása értelmében a derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezési pontja, $O = F_c$.



A C csúcs esetén a MC szakasz hossza 0, az O pontnak az AB oldaltól való távolsága szintén 0, tehát igaz az állítás: $MC = 2 \cdot OF_c$.

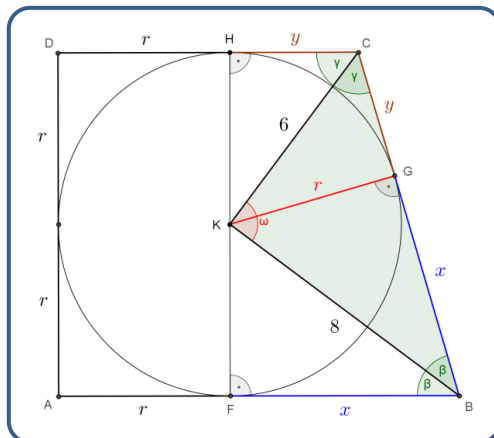
A B csúcs esetében OF_b középvonal illeszkedik az AC szakaszfelező merőlegesére, így egyben az O középpontnak a B -vel szemközti AC oldaltól való távolságát is megadja, így $MB = 2 \cdot OF_b$.

Hasonlóan az A csúcs esetében pedig OF_a középvonal, ezért $MA = 2 \cdot OF_a$.

Tehát derékszögű háromszög esetén is igaz az állítás.

5. Egy derékszögű trapézba az oldalakat érintő kör írható. A kör középpontjának az alapokra nem merőleges szár végpontjaitól mért távolsága 6 és 8 egység. Számítsa ki a trapéz oldalait!

Megoldás:



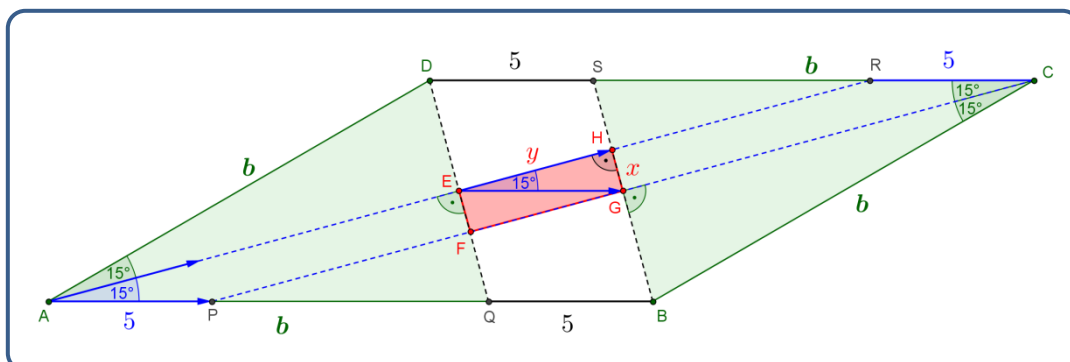
Az $ABCD$ trapéz érintőnégyyszög. Beírt körének K középpontja egyenlő távolságra van az oldalaktól, így a négyszög belső szögfelezőinek metszéspontja is egyben. $\Rightarrow FBK\hat{x} = KBG\hat{x} = \beta$, és $KCH\hat{x} = GCK\hat{x} = \gamma$.

A trapéz BC szárán lévő belső szögek kiegészítő szögpárt alkotnak $\Rightarrow \alpha + \gamma = 90^\circ$. Emiatt a $BCK\Delta$ derékszögű, mert $CKB\hat{x} = \omega = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 90^\circ$. A BCK derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva $BC = \sqrt{KC^2 + BK^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ adódik. Ugyanitt a BK befogóra felírt befogótétel $BK = \sqrt{BG \cdot BC} = \sqrt{x \cdot 10}$, amiből $x = BG = 6,4$. Ebből $y = 3,6$ következik.

KG szakasz a G érintési pontba húzott sugár $\Rightarrow KG \perp BC$, tehát KG a BCK derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság, így a magasságtételből $r = KG = \sqrt{xy} = \sqrt{6,4 \cdot 3,6} = 4,8$ adódik. Felhasználva, hogy a körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, az érintőtrapéz oldalai: $AB = r + x = 11,2$, $BC = 10$, $CD = r + y = 8,4$ és $AD = 2r = 9,6$.

6. Egy paralelogramma egyik szöge 30° , és egyik oldala 5 cm-rel hosszabb a másikonál. Mekkora a paralelogramma belső szögfelezői által meghatározott négyszög területe?

Megoldás:



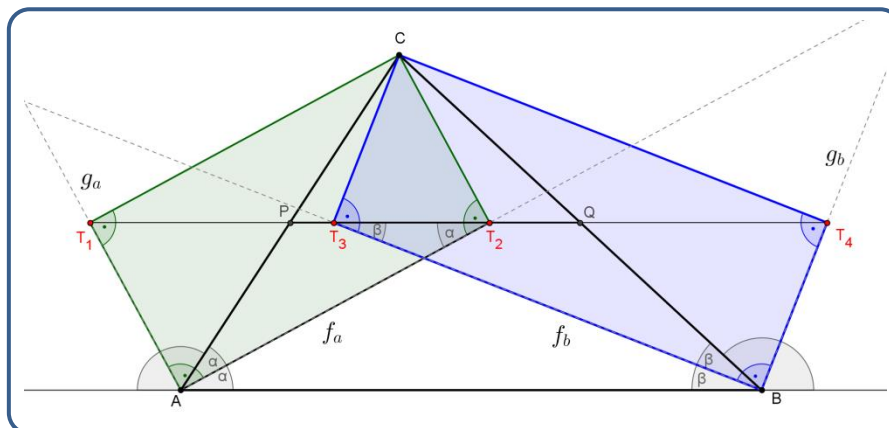
Az $APCR$ négyszög paralelogramma, mert $AP \parallel RC$ és $AP = RC = 5$. Az AR és CP szögfelezők az $APCR$ szemközti oldalai, tehát párhuzamosak egymással. Hasonlóan a $QBSD$ négyszög is paralelogramma $\Rightarrow QD \parallel BS$. Így az $ABCD$ paralelogramma szemközti szögeinek szögfelezői párhuzamosak egymással, ezért a szögfelezők metszéspontjai által alkotott $EFGH$ négyszög paralelogramma. A $DAB\alpha + DAB\alpha = 180^\circ$, ezért a szögfelezők által meghatározott szögekre teljesül, hogy $HAB\alpha + HBA\alpha = 90^\circ$, tehát az ABH háromszög harmadik szöge 90° . Az $EFGH$ négyszög minden szögéről ugyanígy belátható hogy 90° , ezért az $EFGH$ négyszög téglalap. $t_{EFGH} = xy$.

Az $AQDA \cong BCSA$, valamint egyenlő szárúak is, mert két-két oldaluk b hosszúságú és közbezárt szögük 30° . Az egyenlő szárú háromszögben a szárszög szögfelezője merőlegesen felezi az alapot, ezért a DQ és BS szakaszok felezőpontjai E illetve $G \Rightarrow EG$ a $QBSD$ paralelogramma középvonala. $EG \parallel QB \Rightarrow EG = 5$. A $GEH\alpha = QAE\alpha = 15^\circ$, mert egyállásúak. Az EGH derékszögű háromszögben $x = 5 \cdot \sin 15^\circ$ és $y = 5 \cdot \cos 15^\circ$, így a keresett terület:

$$t_{EFGH} = xy = 25 \cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{25}{2} \sin 30^\circ = \frac{25}{4} = 6,25.$$

7. Az ABC háromszög C csúcsából állítson merőlegeseket az A és B csúcsból induló belső és külső szögfelezőkre! Mutassa meg, hogy a négy merőleges talppontja egy egyenesre illeszkedik!

Megoldás:



Legyenek az A és B csúcsból induló belső szögfelezők f_a és f_b , a külső szögfelezők pedig g_a és g_b . A C csúcsból e szögfelezőkre állított merőlegesek talppontjai T_1, T_2, T_3, T_4 . A háromszög bármelyik csúcsához tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért a T_1AT_2C és a T_3BT_4C négyszögek mindegyik szöge 90° , így téglalapok.

- A T_1AT_2C téglalapban az AC és T_1T_2 átlók felezik egymást és metszéspontjuk P . A téglalap oldala egyenlő szögeket zár be a végpontjaiból induló átlókkal. $PAT_2\angle = PT_2A\angle = T_2AB\angle = \alpha \Rightarrow PT_2 \parallel AB$. Mivel a P pont felezi az AC oldalt, a T_1T_2 átló illeszkedik az $ABC\Delta$ P -n átmenő AB -vel párhuzamos középvonalának egyenesére.
- Hasonlóan a T_3BT_4C téglalap esetében ugyanígy megmutatható, hogy a T_3T_4 átló illeszkedik az $ABC\Delta$ BC oldalának Q felezőpontján átmenő AB -vel párhuzamos középvonalának egyenesére.

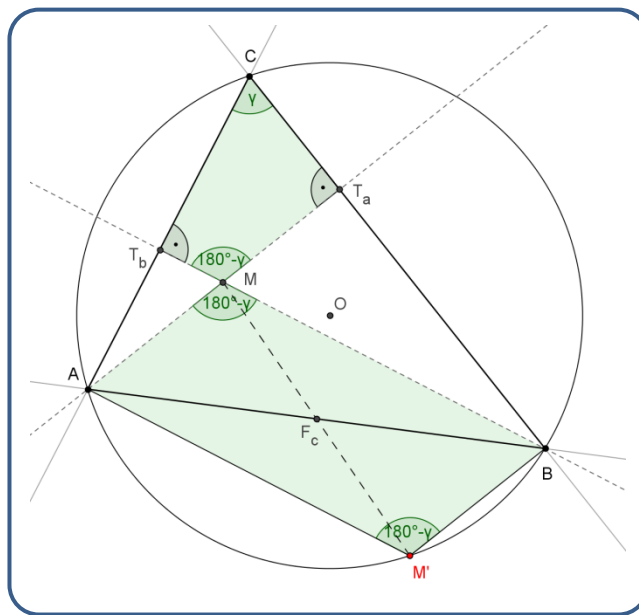
Mivel az AB -vel párhuzamos középvonal egyértelműen meghatározott, ezért a T_1, T_2, T_3, T_4 pontok egy egyenesre illeszkednek.

8. Tükrözze egy tetszőleges háromszög magasságpontját az egyik oldal felezőpontjára! Bizonyítsa be, hogy a tükörkép illeszkedik a háromszög köré írt körére!

Megoldás:

Ha az $ABC\Delta$ hegyesszögű, akkor az M magasságpontja a háromszög belső pontja. Legyen M' a magasságpont F_c oldalfelező pontra vonatkozó tükörképe!

Megmutatjuk, hogy az $AM'BC$ négyszög húrnégyszög.



T_a és T_b az A illetve B csúcsból induló magasságok talppontjai. A T_aMT_bC négyszögben a T_a és T_b szemközti csúcsoknál derékszögek vannak, ezért e négyszögben a szemközti szögek összege 180° . A húrnégyszög-tétel megfordítása alapján a T_aMT_bC négyszög húrnégyszög, így a C csúcsnál lévő γ szöggel szemben az M csúcsnál $180^\circ - \gamma$ szög van.

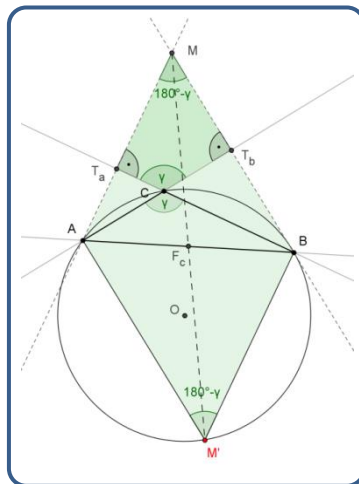
$\angle T_aMT_b = \angle AMB$, mert csúcsszögek, vagyis $\angle AMB = 180^\circ - \gamma$.

Az M magasságpont F_c -re való középpontos tükrözése miatt az $\angle AM'B = \angle AMB$, mert egymásnak tükörképei, ezért az M' csúcsnál is $180^\circ - \gamma$ szög található. Azt kaptuk, hogy az $AM'BC$ négyszög szemközti C és M' csúcsainál lévő szögeinek összege $\gamma + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ$, vagyis a

húrnégyszög-tétel megfordításának értelmében az $AM'BC$ húrnégyszög. Tehát az M' pont rajta van az $ABC\Delta$ köré írható körén.

Mivel az F_c nem kitüntetett, ezért az állítás mindegyik oldalfelező pontra igaz.

Ha az $ABC\Delta$ tompaszögű, akkor magasságpontja kívül van a háromszögön. Az alábbi ábra alapján a fentihez hasonló módon igazolható az állítás.



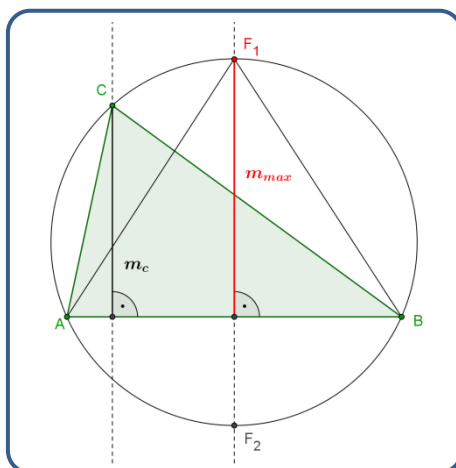
Ha az $ABC\Delta$ derékszögű, akkor magasságpontja a derékszögű csúcsa, $M = C$. Ezt tükrözve a befogók felezési pontjaira, a háromszög A illetve B csúcsait kapjuk, amelyek nyilvánvalóan rajta vannak a köré írt körön. Ha az átfogó felezési pontjára tükrözzük a derékszögű csúcsot, akkor az $AM'BC$ téglalapot kapjuk, ami húrnégyszög, tehát igaz az állítás.

9. Legyen AB egy adott kör rögzített húrja, és mozogjon a C pont a körön. A C pont milyen helyzetében lesz az $ABC\Delta$ területe, illetve kerülete maximális?

Megoldás:

A terület vizsgálata:

Az $ABC\Delta$ területe $t = \frac{AB \cdot m_c}{2}$. Mivel AB rögzített, a terület akkor maximális, ha az m_c magasság maximális. Az adott körben az AB szakasz a rá merőleges húrokat két szakaszra bontja. A C pont mozgása során az m_c magasság e szakaszok egyike. Figyelembe véve, hogy egy körben a leghosszabb húr az átmérő, az m_c magasság és így a terület is akkor maximális, ha a C pont az A és B pontok által határolt körívek közül a nem rövidebbik felezőpontja.



Diszkusszió:

- 1 ilyen pont van, ha AB nem az adott kör átmérője.
- 2 ilyen pont van, ha AB az adott kör átmérője.

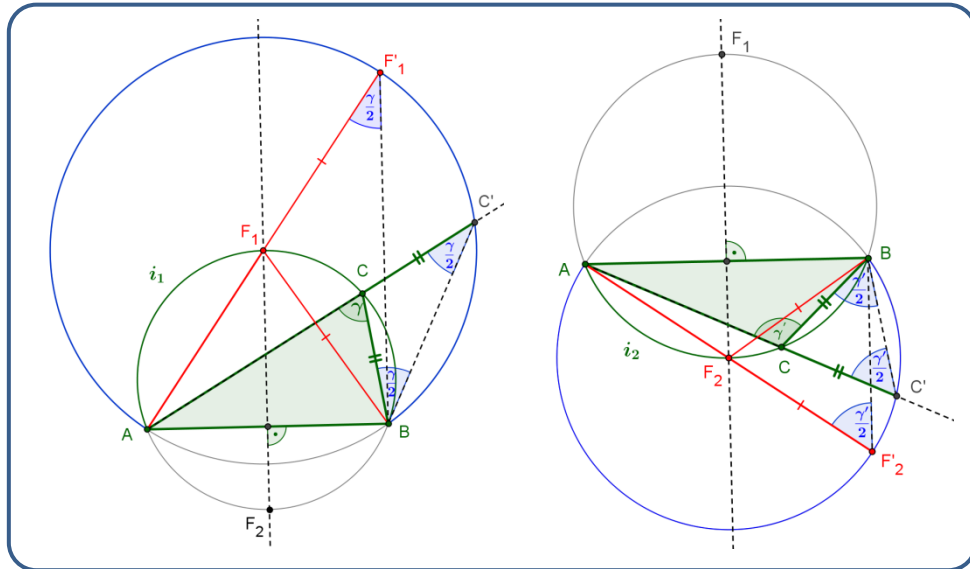
A kerület vizsgálata:

Az $ABCD$ kerülete $k = AB + BC + CA$. Mivel AB rögzített, ez akkor maximális, ha a $BC + CA$ összeg maximális. Mérjük fel az AC szakasz C -n túli meghosszabbítására C -től kezdődően a BC szakaszt! $CC' = BC$. Ekkor $AC' = BC + CA$, tehát az AC' hosszának maximumát keressük.

Legyenek F_1 és F_2 az adott kör A és B által határolt köríveinek felezőpontjai. Mozogjon C először az F_1 -et tartalmazó i_1 köríven és legyen az $ABCD$ -ben $\gamma \leq 90^\circ$.

A γ szög a $BC'C$ egyenlő szárú háromszög C csúcsnál levő szárszögéhez tartozó külső szög, ezért a BC' alapon fekvő szögeinek nagysága $\frac{\gamma}{2}$. Emiatt a C pont mozgása során C' az AB fölötti $\frac{\gamma}{2}$ szögű látószög-köríven mozog. Ha $C = F_1$, akkor az $AC = CB = CC'$ miatt C pont az AB szakasz fölötti $\frac{\gamma}{2}$ szögű látószög-körív középpontja és az AC' pedig az átmérője.

Ha C az F_2 -t tartalmazó i_2 köríven mozog, akkor az $ABCD$ -ben a C -nél levő belső szög $\gamma' = 180^\circ - \gamma$, tehát $\gamma' \geq 90^\circ$. $C = F_2$ esetén az előző esethez hasonlóan AC' az AB fölötti $\frac{\gamma'}{2}$ szögű látószög-körív átmérője.

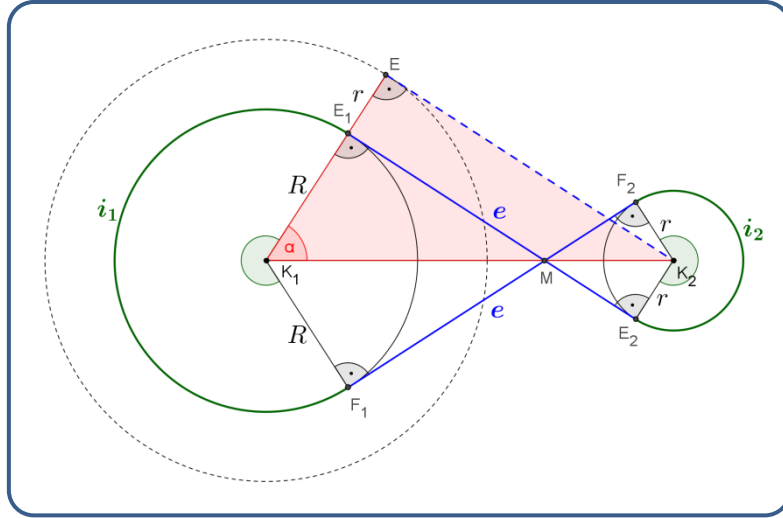


Egy körben a leghosszabb húr az átmérő, ezért

- ha $\gamma = 90^\circ$, akkor az AB feletti $\frac{\gamma}{2}$, illetve $\frac{\gamma'}{2}$ szöghöz tartozó látószög-körívek egyenlő átmérőjűek. Ebben az esetben a kerület a $C = F_1$ és $C = F_2$ helyzetben maximális;
- ha $\gamma < 90^\circ$, akkor az AB feletti $\frac{\gamma}{2}$ szöghöz tartozó látószög-körív átmérője nagyobb a $\frac{\gamma'}{2}$ szöghöz tartozónál. Ebben az esetben a kerület a $C = F_1$ helyzetben maximális.

10. Egy 13 és egy 6 cm sugarú korong középpontjainak távolsága 35 cm. Milyen hosszú feszes szíjra van szükség keresztezett szíjhajtás esetén?

Megoldás:



A meghajtósíj három részből áll. Az $R = 13$ cm sugarú K_1 középpontú kör i_1 ívéből, a körök két közös belső e érintőszakaszából, valamint az $r = 6$ cm sugarú K_2 középpontú kör i_2 ívéből.

A K_1K_2E derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva

$$K_1E^2 + EK_2^2 = K_1K_2^2,$$

ahol $K_1E = R + r = 13 + 6 = 19$ cm, $K_1K_2 = 35$ cm és $K_2E = e$.

Ezeket felhasználva a $19^2 + e^2 = 35^2$ egyenletből $e = \sqrt{35^2 - 19^2} \approx 29,39$ cm adódik.

Az i_1 és i_2 körívekhez tartozó középponti szögek egyenlők, mert a két adott kör középpontosan hasonló a közös belső érintők és a K_1K_2 szakasz M metszéspontjára nézve. Az i_1 képe i_2 .

A K_1K_2E derékszögű háromszögben

$$\cos \alpha = \frac{K_1E}{K_1K_2} = \frac{19}{35} \Rightarrow \alpha \approx 57,12^\circ.$$

Az i_1 és i_2 ívekhez tartozó α középponti szög közelítő értékét felhasználva:

$$360^\circ - 2\alpha = 245,76^\circ.$$

$$i_1 = 245,76^\circ \cdot \frac{R \cdot \pi}{180^\circ} \approx 55,76 \text{ cm és } i_2 = 245,76^\circ \cdot \frac{r \cdot \pi}{180^\circ} \approx 25,74 \text{ cm.}$$

A kereszthajtáshoz $i_1 + 2e + i_2 = 55,76 + 2 \cdot 29,39 + 25,74 = 140,28$ cm hosszúságú síj szükséges.

11. Egy 12 egységnyi hosszú AB szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontja a C pont. Az AB , AC és CB szakaszok, mint átmérők fölé félköröket rajzolunk az AB egyenes ugyanazon oldalán. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti mindhárom félkört?

Megoldás:

Az ábrán látható k kör r sugarát keressük. $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 6$. Legyen $x = KT$ és $KT \perp AB$, valamint $y = TK_2$! A megoldás során többször felhasználjuk azt, hogy két érintkező kör középpontjai és az érintési pont egy egyenesre illeszkednek.

A K_1TK derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$K_1T^2 + x^2 = K_1K^2,$$

ahol $K_1T = K_1K_2 - y = 6 - y$, $K_1K = r_1 + r = 2 + r$.

Ezeket beírva $(6 - y)^2 + x^2 = (2 + r)^2$ adódik.

A TK_2K derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + y^2 = K_2K^2,$$

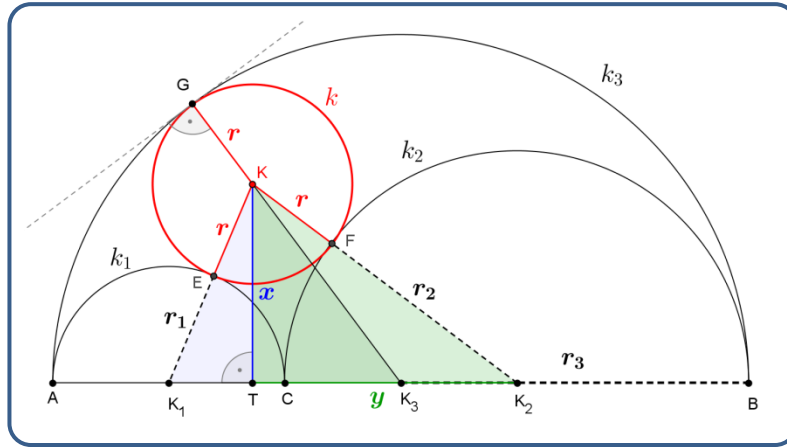
ahol $K_2K = r_2 + r = 4 + r$, amit behelyettesítve az $x^2 + y^2 = (4 + r)^2$ egyenletet kapjuk.

A TK_3K derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + TK_3^2 = K_3K^2,$$

ahol $TK_3 = y - K_3K_2 = y - 2$, $K_3K = K_3G - r = r_3 - r = 6 - r$.

Így az $x^2 + (y - 2)^2 = (6 - r)^2$ egyenlethez jutunk.



E három egyenlet x -re, y -ra és r -re nézve egy háromismeretlenes egyenletrendszer alkot.

$$\begin{cases} (6 - y)^2 + x^2 = (2 + r)^2 \\ x^2 + y^2 = (4 + r)^2 \\ x^2 + (y - 2)^2 = (6 - r)^2 \end{cases}$$

Az egyenletek bal oldalain a zárójelfelbontásokat elvégezzük:

$$\begin{cases} 36 - 12y + y^2 + x^2 = (2 + r)^2 \\ x^2 + y^2 = (4 + r)^2 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 = (6 - r)^2. \end{cases}$$

Az első és harmadik egyenletben az $x^2 + y^2$ helyére a második egyenlet alapján behelyettesítjük a $(4 + r)^2$ -et, így a

$$\begin{cases} 36 - 12y + (4 + r)^2 = (2 + r)^2 \\ (4 + r)^2 - 4y + 4 = (6 - r)^2 \end{cases}$$

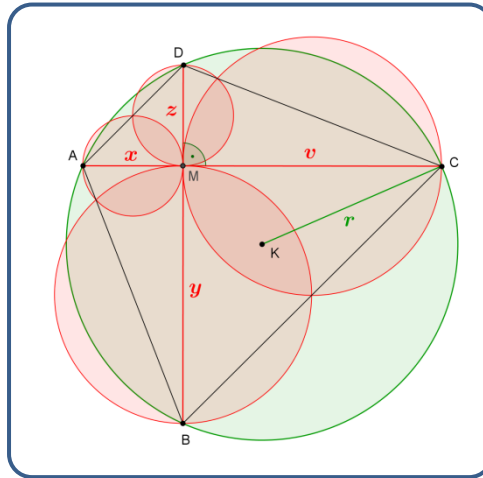
kétismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk. Ebből a zárójelfelbontások és rendezések után a kétismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk. Ebből a zárójelfelbontások és rendezések után a

$$\begin{cases} 20r - 4y = 16 \\ 4r - 12y = -48 \end{cases}$$

adódik, amit megoldva az $r = \frac{12}{7}$ eredményt kapjuk.

12. Igazolja, hogy ha egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az átlók szeleteire mint átmérőkre rajzolt körök területeinek összege egyenlő a négyszög köré írt kör területével.

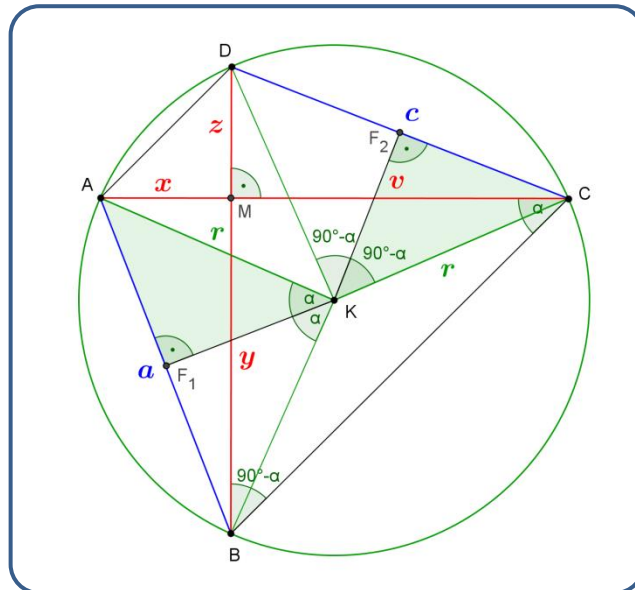
Megoldás:



Az $ABCD$ húrnégyszögben $AC \perp BD$. Az ábra jelöléseit használva a bizonyítandó állítás az, hogy az x, y, v, z átmérőjű körök területeinek összege egyenlő az r sugarú kör területével, azaz

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \pi + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \cdot \pi + \left(\frac{v}{2}\right)^2 \cdot \pi + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \cdot \pi = r^2 \pi,$$

ami az $x^2 + y^2 + v^2 + z^2 = 4r^2$ összefüggéssel egyenértékű.



Az MAB és MCD derékszögű háromszögekben a Pitagorasz-tételt felírva:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$v^2 + z^2 = c^2.$$

E két egyenletet összeadva az $x^2 + y^2 + v^2 + z^2 = a^2 + c^2$ összefüggést kapjuk.

Az MBC derékszögű háromszögben a C csúcsnál α szög, a B csúcsnál pedig α pótszöge: $90^\circ - \alpha$ szög van.

A BCA kerületi szög és a BKA középponti szög ugyanazon ívhez tartoznak, ezért a kerületi és középponti szögek tétele miatt az AF_1K derékszögű háromszögben a K csúcsnál α szög van. Az

AF_1K derékszögű háromszögben $\sin \alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = 2r \sin \alpha$. Hasonlóan a KCF_2 derékszögű háromszögben $c = 2r \sin(90^\circ - \alpha) = 2r \cos \alpha$.

Ezek alapján $a^2 + c^2 = 4r^2 \sin^2 \alpha + 4r^2 \cos^2 \alpha = 4r^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4r^2$.

Másrészt tudjuk, hogy $a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + v^2 + z^2$, tehát $x^2 + y^2 + v^2 + z^2 = 4r^2$, ami a bizonyítandó állítás igaz voltát jelenti.

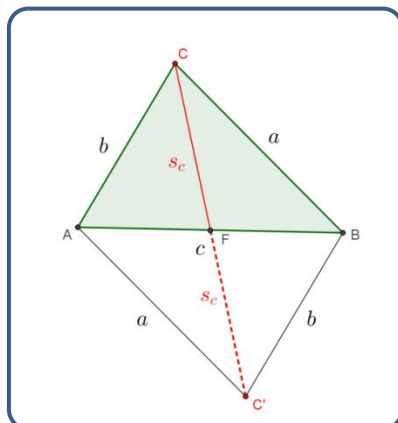
III. Ajánlott feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy egy háromszög súlyvonalainak összege kisebb a háromszög területénél, de nagyobb a terület háromnegyedénél!
2. Hosszabbítsa meg egy négyzet két átlóját az egyik irányban a négyzet oldalának hosszával! Igazolja, hogy a meghosszabbítással nyert két pont a négyzet valamelyik csúcsával egyenlő szárú háromszöget alkot!
3. Osszon fel egy egységnyi hosszúságú szakaszt két olyan részre, hogy a részekre mint oldalakra rajzolt szabályos háromszögek területének összege minimális legyen!
4. Egy háromszög két oldala 10 és 15 egység, az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságok összege megegyezik a harmadik magassággal. Számítsa ki a harmadik oldalt!
5. Egy trapézt két átlója négy háromszögre bont. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe 9 és 4. Mekkora a trapéz területe?
6. Egy rombusz egyik átlója a beírható kör sugarának négyszerese. Mekkora a rombusz területe, ha a beírható kör sugara r ?
7. Egy egység sugarú kör átmérője fölé olyan egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk, melynek szárszöge 36° . Határozza meg a háromszög körön kívüli részének területét!
8. Mekkora annak a háromszögnek a szögei, amelyben a magasságok összege a beírt kör sugarának kilencszerese?
9. Bizonyítsa be, hogy egy négyszög (feltéve, hogy nincsenek párhuzamos oldalai) akkor és csak akkor húrnégyszög, ha a két-két szemközti oldalegyenesei által alkotott két szög szögfelezője merőleges egymásra.
10. Két egymást kívülről érintő kör sugara 4, illetve 9 egység. Egyik közös külső érintőjük a két kört E , illetve F pontokban érinti. Számítsa ki annak a körnek a sugarát, amely érinti a két adott kört, és E és F között a közös külső érintőt!
11. Tükrözze egy hegyesszögű háromszög magasságpontját az egyik oldal egyenesére! Bizonyítsa be, hogy a tükrökép illeszkedik a háromszög köré írt körére!
12. A k_1 kört a k_2 kör az A pontban érinti belülről. A k_2 kört az E pontban érinti az e egyenes, és ez a k_1 kört a B és a C pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy az AE egyenes felezi BAC szöget!
13. Bizonyítsa be, hogy a háromszög köré írható körének tetszőleges pontjából a háromszög oldalegyenesesire bocsájtott merőlegesek talppontjai egy egyenesre illeszkednek!
14. Bizonyítsa be, hogy bármely hegyesszögű háromszögben a magasságvonalak a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög belső szögfelezői!

Az ajánlott feladatok megoldása

1. Bizonyítsa be, hogy egy háromszög súlyvonalainak összege kisebb a háromszög kerületénél, de nagyobb a kerület háromnegyedénél!

Megoldás:

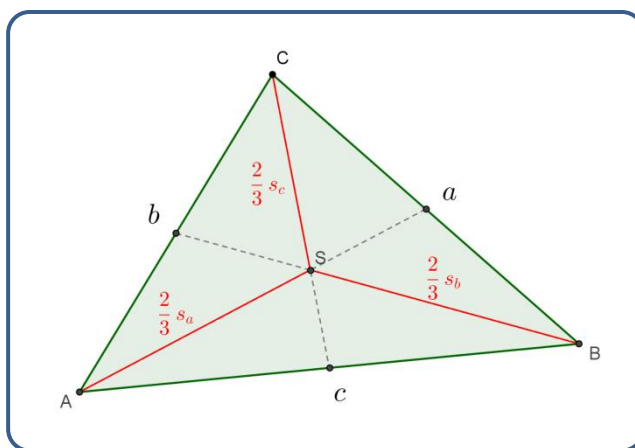


Tükrözzük a háromszög C csúcsát a szemközti AB oldal F felezőpontjára! C tükörképe C' . A tükrözés miatt az $AC'BC$ négyszög paralelogramma. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az $AC'CA$ -re: $a + b > 2s_c$. Ugyanígy eljárva az A és B csúcsokkal, a $b + c > 2s_a$ és az $a + c > 2s_b$ egyenlőtlenségeket kapjuk, melyeket összeadva a $2a + 2b + 2c > 2s_a + 2s_b + 2s_c$ egyenlőtlenséghez jutunk, amelyből az első bizonyítandó állítást kapjuk: $a + b + c > s_a + s_b + s_c$.

Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABS\Delta$, a $BCS\Delta$ és a $CAS\Delta$ háromszögekre:

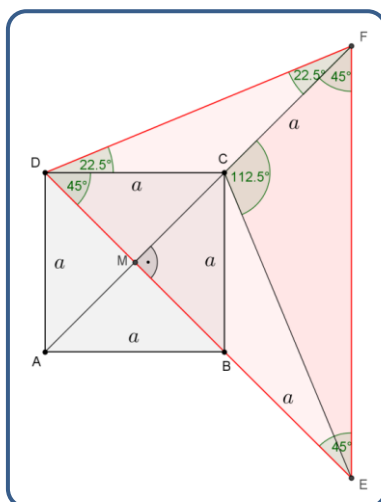
$$ABS\Delta: \frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c; \quad BCS\Delta: \frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a; \quad CAS\Delta: \frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a > b.$$

Adjuk össze a három egyenlőtlenséget! $\frac{4}{3}s_a + \frac{4}{3}s_b + \frac{4}{3}s_c > a + b + c$, amiből adódik a bizonyítandó $s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$ állítás.



2. Hosszabbítsa meg egy négyzet két átlóját az egyik irányban a négyzet oldalának hosszával! Igazolja, hogy a meghosszabbítással nyert két pont a négyzet valamelyik csúcsával egyenlő szárú háromszöget alkot!

Megoldás:



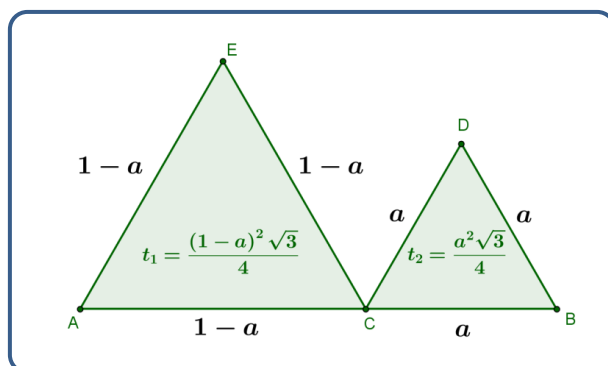
A négyzet AC átlójának meghosszabbításával az F pontot kaptuk, a DB átló meghosszabbításával pedig az E pontot. A tengelyes szimmetria miatt elegendő megvizsgálni az EFD és az EFC háromszögeket.

- Az EFM háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, mert két oldala az egymásra merőleges átlókon van, és ez a két befogó a félátlók egyenlő mértékű meghosszabbításai. Hegyes-szögeinek nagysága 45° .
- A DCF háromszög két oldala a hosszúságú, ezért egyenlő szárú. DF alapján lévő szögei egyenlők ($22,5^\circ$).
- Az FDE háromszög egyenlő szárú, mert a DF oldalán fekvő szögei egyenlők ($67,5^\circ$).
- Az EFC háromszögben $CFE\alpha = 45^\circ$, $CEF\alpha < 45^\circ$, mert C az M és F pontok között van, így az $ECF\alpha > 90^\circ$, tehát nincs két egyenlő szöge, ezért nem lehet egyenlő szárú.

Tehát ha a négyzetnek az EF egyenesétől távolabbi két csúcsával kötjük össze az EF szakasz végpontjait, akkor egyenlő szárú háromszögeket kapunk.

- Osszon fel egy egységnyi hosszúságú szakaszt két olyan részre, hogy a részekre mint oldalakra rajzolt szabályos háromszögek területének összege minimális legyen!

Megoldás:



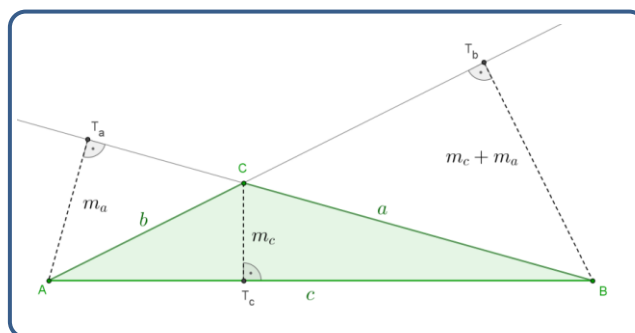
Osszuk fel az AB egységszakaszt a B ponttal egy a és egy $(1-a)$ hosszúságú szakaszra. A föléjük rajzolt szabályos háromszögek $t = t_1 + t_2$ területösszegének minimumát keressük.

$$t = t_1 + t_2 = \frac{(1-a)^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

A teljes négyzetté alakított formából látható hogy a másodfokú tag együtthatója pozitív, tehát a $t(a)$ függvény képe felfelé nyíló parabola, ezért van minimuma. A minimális területösszeg $a = \frac{1}{2}$ esetén lép fel, és értéke $\frac{\sqrt{3}}{8}$. Tehát két egyenlő részre kell osztanunk az egységszakaszt.

4. Egy háromszög két oldala 10 és 15 egység, az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságok összege megegyezik a harmadik magassággal. Számítsa ki a harmadik oldalt!

Megoldás:



Legyen $a = 10$ és $c = 15$. Keressük a b oldal hosszát. Írjuk fel az $ABC\Delta$ területét mindhárom oldalának és a hozzájuk tartozó magasságok segítségével!

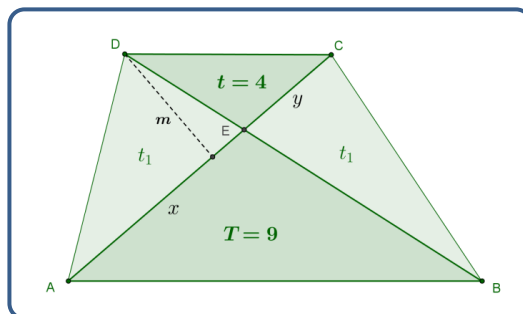
$$\begin{cases} I. t = \frac{cm_c}{2} = \frac{15m_c}{2} \\ II. t = \frac{am_a}{2} = \frac{10m_a}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{15m_c}{2} = \frac{10m_a}{2} \Rightarrow m_c = \frac{2m_a}{3} \Rightarrow m_c + m_a = \frac{5m_a}{3}.$$

$$III. t = \frac{b(m_c + m_a)}{2} = \frac{b \cdot \frac{5m_a}{3}}{2} = \frac{5bm_a}{6}.$$

$$II. \text{ és } III. \text{ összevetéséből } \frac{10m_a}{2} = \frac{5bm_a}{6}, \text{ így } b = 6.$$

5. Egy trapéz két átlója négy háromszögre bont. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe 9 és 4. Mekkora a trapéz területe?

Megoldás:



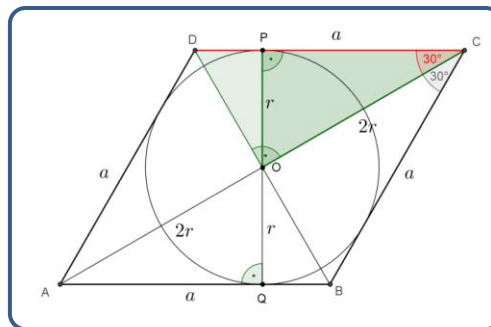
- Az $ABC\Delta$ és az $ABD\Delta$ területe egyenlő, mivel az AB oldaluk közös és a hozzá tartozó magasság egyenlő a két háromszögben. E két egyenlő területű háromszögekből az $ABE\Delta$ elhagyásával keletkező $AEDA\Delta$ és $EBDA\Delta$ területei is egyenlők, mert egyenlő területekből ugyanazt a területet elvéve egyenlő területeket kapunk. (Az ábrán t_1 -gyel jelölt területek egyenlők.)

- Az $AED\Delta$ és az $ECD\Delta$ D csúcsból induló magasságaik közösek, ezért területük aránya $AE:EC = x:y$.
- Az $ABE\Delta \sim ECD\Delta$, mert megfelelő szögek páronként egyenlők. Hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével $\Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{T}{t}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.
- $\frac{t_1}{t} = \frac{x}{y} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}t = 6$.

A trapéz területe így $T + t + 2t_1 = 25$.

6. Egy rombusz egyik átlója a beírható kör sugarának négyszerese. Mekkora a rombusz területe, ha a beírható kör sugara r ?

Megoldás:



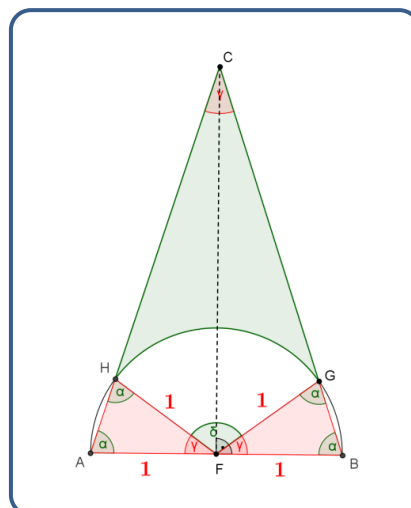
$OP \perp CD$, mert az $ABCD$ rombusz beírt körének és CD oldalának P érintési pontjába húzott sugár. Az OPC derékszögű háromszög $OC = 2r$ átfogója kétszerese az $OP = r$ befogónak $\Rightarrow \angle OCP = 30^\circ$. Az $ABCD$ rombusz szimmetrikus az AC átlójára $\Rightarrow \angle BCD = 60^\circ$, és a $BCD\Delta$ szabályos háromszög.

Az $ABCD$ rombusz szimmetrikus a BD átlójára is, ezért területe $t = 2t_{BCD\Delta}$. A BCD szabályos háromszög magassága $2r = a \frac{\sqrt{3}}{2}$, amelyből $a = r \frac{4\sqrt{3}}{3}$ következik.

A rombusz területe: $t = 2t_{BCD\Delta} = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(r \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r^2 \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

7. Egy egységsugarú kör átmérője fölé olyan egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk, melynek szárszöge 36° . Határozza meg a háromszög körön kívüli részének területét!

Megoldás:



A keresett terület: $t = t_{ABC\Delta} - 2 \cdot t_{FBG\Delta} - t_{FGHKörcikk}$.

Az ABC egyenlő szárú háromszög szárszöge $\gamma = 36^\circ$, így az alapon fekvő szögeinek nagysága $\alpha = 72^\circ$. Az FBC derékszögű háromszögben $FC = \operatorname{tg}\alpha$, így $t_{ABC\Delta} = \frac{AB \cdot FC}{2} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2} = \operatorname{tg}\alpha$.

$ABC\Delta \sim FBG\Delta$, mert egyenlő szárúak és az alapon fekvő szögeik megegyeznek.

Az $FBG\Delta$ szárszöge szintén γ , $\Rightarrow t_{FBG\Delta} = \frac{FB \cdot FG \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{\sin \gamma}{2}$.

$FBG\Delta \cong AFH\Delta$, mert egy-egy oldaluk, és a rajta fekvő két szögük egyenlő $\Rightarrow t_{FBG\Delta} = t_{AFH\Delta}$.

Az egységsugarú körben az FGH körcikkhez tartozó középponti szög: $\delta = 180^\circ - 2\gamma = 108^\circ$.

$$t_{FGHKörcikk} = \frac{108^\circ}{360^\circ} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{3\pi}{10}.$$

Ezeket felhasználva: $t = \operatorname{tg}\alpha - 2 \cdot \frac{\sin \gamma}{2} - \frac{3\pi}{10} = \operatorname{tg}72^\circ - \sin 36^\circ - \frac{3\pi}{10} \approx 1,547$.

8. Mekkora annak a háromszögnek a szögei, amelyben a magasságok összege a beírt kör sugarának kilencszerese?

Megoldás:

Legyen m_a, m_b, m_c az $ABC\Delta$ három magassága, r pedig a beírható körének sugara. Megmutatjuk, hogy $m_a + m_b + m_c = 9r$.

- A háromszög területe $t = \frac{am_a}{2}$, amelyből $m_a = \frac{2t}{a}$. Ezt a b és c oldalakkal is felírva:

$$m_a + m_b + m_c = 2t \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

- A $t = rs$ területképletből $\left(s = \frac{a+b+c}{2} \right)$ adódik, hogy $2t = r(a+b+c)$. Ezt behelyettesítve

$$m_a + m_b + m_c = r(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

- A feladatban szereplő állítás akkor teljesül, ha $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 9$. Zárójelfelbontás és rendezés után az $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) = 6$ egyenlőséghez jutunk. Mivel a, b, c pozitív számok, a bal oldalon egyik tört nevezője sem nulla. A három zárójel mindegyikében egy pozitív számnak és a reciprokának összege szerepel, amelyről tudjuk hogy legalább 2, tehát

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 6.$$

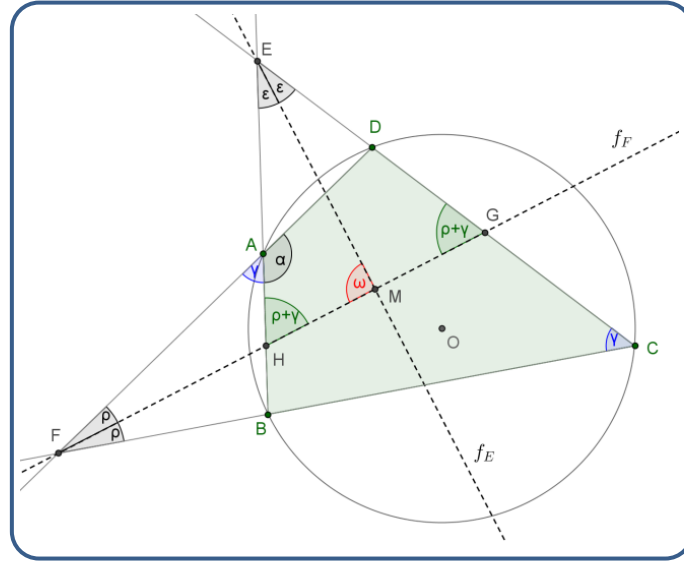
Egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha mindhárom zárójeles tag értéke 2, ami az

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = 1$ esetén teljesül, azaz ha $a = b = c$. Ezért az $ABC\Delta$ egyenlő oldalú, tehát mindhárom szöge 60° .

9. Bizonyítsa be, hogy egy négyszög (feltéve, hogy nincsenek párhuzamos oldalai) akkor és csak akkor húrnégyszög, ha a két-két szemközti oldalegyenesei által alkotott két szög szögfelezője merőleges egymásra.

Megoldás:

- a) Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor két-két szemközti oldalegyenese által alkotott két szög szögfelezője merőleges egymásra.

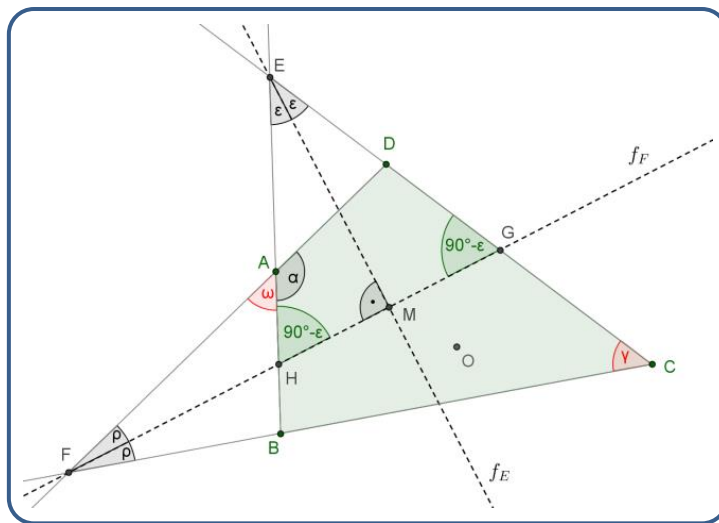


Legyen a húrnégyszög AB és DC szemközti oldalegyeneseinek metszéspontja E , az AD és BC oldalegyeneseiké pedig F . Ezek léteznek, mert nem párhuzamosak a szemközti oldalak.

- Az $ABCD$ húrnégyszögben $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Az FAH szöge $= \gamma$, mert α mellékszöge.
- Az EHM szöge $= \rho + \gamma$, mert az FHA H -nál lévő külső szöge.
- Az EGM szöge $= \rho + \gamma$, mert az FCG G -nél lévő külső szöge.

Ebből következik, hogy a HGE egyenlő szárú háromszög. Ennek HG alapja illeszkedik az f_F szögfelezőre, és tudjuk hogy az egyenlő szárú háromszög szárszögének szögfelezője merőleges az alapra, tehát $f_F \perp f_E$ ($\omega = 90^\circ$).

- b) Ha egy négyszög két-két szemközti oldalegyenese által alkotott két szög szögfelezője merőleges egymásra, akkor a négyszög húrnégyszög.



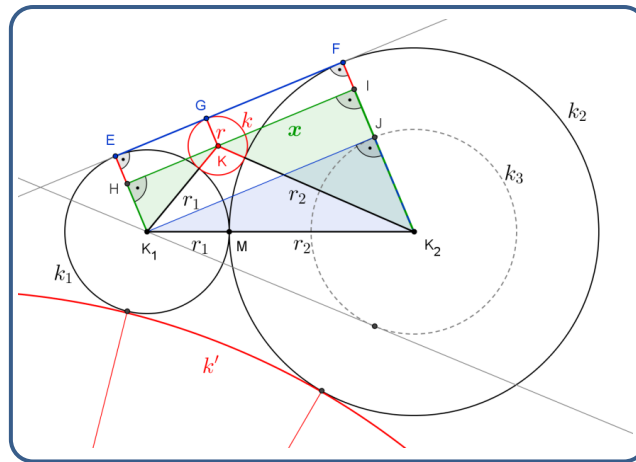
Megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyszög A és C szemközti csúcsainál lévő szögeinek összege 180° , azaz $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

- A $HGE\Delta$ egyenlő szárú, mert az f_E szögfelezője merőleges a szemközti f_F oldalegyenesre.
- Az EHM és EMG derékszögű háromszögekben a H és G csúcsoknál egyaránt $90^\circ - \varepsilon$ nagyságú szög van.
- Az EHM az $FHA\Delta$ H -nál lévő külső szöge, ezért $\omega = 90^\circ - \varepsilon - \rho$.
- Az EGM az $FCG\Delta$ G -nél lévő külső szöge, ezért $\gamma = 90^\circ - \varepsilon - \rho$.

Ebből következik, hogy $\omega = \gamma$. Viszont tudjuk, hogy $\alpha + \omega = 180^\circ$, mert mellékszögek, így $\alpha + \gamma = 180^\circ$, tehát az $ABCD$ négyszög szemközti szögeinek összege 180° , azaz hűrnégyszög.

10. Két egymást kívülről érintő kör sugara 4, illetve 9 egység. Egyik közös külső érintőjük a két kört E , illetve F pontokban érinti. Számítsa ki annak a körnek a sugarát, amely érinti a két adott kört, és E és F között a közös külső érintőt!

Megoldás:



A feladatnak megfelelő elrendezés a fenti ábrán látható. $r_1 = 4, r_2 = 9$. A k_3 kör a két kör közös külső érintőinek szerkesztésekor használt $r_2 - r_1$ sugarú kör. A k kör r sugarát határozzuk meg.

- A K_1K_2J derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel: $K_1J^2 + K_2J^2 = K_1K_2^2$, ahol $K_1K_2 = r_1 + r_2 = 13$, $K_2J = r_2 - r_1 = 5$. Ezért $K_1J = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, ami a k_1 és k_2 körök EF közös külső érintőszakaszának hossza is egyben.
- A K_1KH derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel: $K_1H^2 + HK^2 = K_1K^2$, ahol $K_1H = r_1 - r = 4 - r$, $HK = 12 - x$, $K_1K = r_1 + r = 4 + r$.
Így a $(4 - r)^2 + (12 - x)^2 = (4 + r)^2$ egyenletet kapjuk.
- A K_2IK derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel: $K_2I^2 + IK^2 = K_2K^2$, ahol $K_2I = r_2 - r = 9 - r$, $IK = x$, $K_2K = r_2 + r = 9 + r$.
Így a $(9 - r)^2 + x^2 = (9 + r)^2$ egyenlethez jutunk.

Mindez a $\begin{cases} (4 - r)^2 + (12 - x)^2 = (4 + r)^2 \\ (9 - r)^2 + x^2 = (9 + r)^2 \end{cases}$ két ismeretlenes egyenletrendszerhez vezet.

A zárójelfelbontás és rendezés után kapott $\begin{cases} (12 - x)^2 = 16r \\ x^2 = 36r \end{cases}$ egyenletrendszerből az

$$5x^2 - 216x + 1296 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, melynek $x_1 = 36$, és $x_2 = \frac{36}{5}$ a két gyöke. Ezekből r -re két megoldás adódik, $r_1 = 36$ és $r_2 = \frac{36}{25}$. Mivel a feladat azt a kört keresi, amely az E és F között érinti a közös külső érintőt, a feladat megoldása az $r = \frac{36}{25}$. (Az $r_1 = 36$ sugarú kör az ábrán a k' kör.)

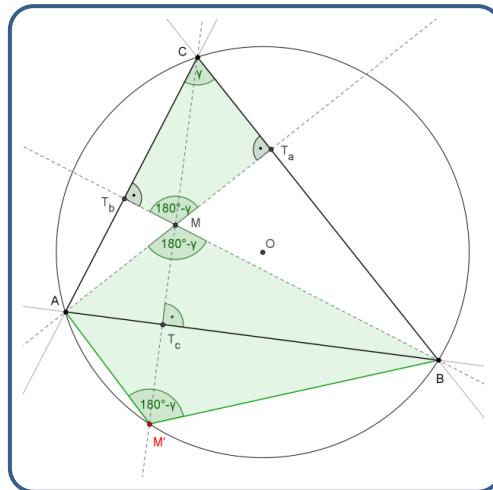
11. Tükrözze egy hegyesszögű háromszög magasságpontját az egyik oldal egyenesére! Bizonyítsa be, hogy a tükörkép illeszkedik a háromszög köré írt körére!

Megoldás:

Az $ABC\Delta$ hegyesszögű, ezért M magasságpontja a háromszög belsejében van. Legyen az M magasságpont AB oldalegyenesre vonatkozó tükörképe M' ! Megmutatjuk, hogy az $AM'BC$ négyszög húrnégyszög.

A T_a és T_b pontok az A illetve B csúsból induló magasságok talppontjai. A T_aMT_bC négyszögben a T_a és T_b szemközti csúcsoknál derékszögek vannak, ezért e négyszögben a szemközti szögek összege 180° . A húrnégyszög-tétel megfordítása alapján a T_aMT_bC négyszög húrnégyszög, így a C csúcsnál lévő γ szöggel szemben az M csúcsnál $180^\circ - \gamma$ szög van.

A $T_aMT_b\angle = AMB\angle$, mert csúcsszögek, vagyis $AMB\angle = 180^\circ - \gamma$.



Az M magasságpont AB oldalegyenesre való tengelyes tükrözése miatt az M' csúcsnál is $180^\circ - \gamma$ szög található. Azt kaptuk, hogy az $AM'BC$ négyszög szemközti C és M' csúcsainál lévő szögeinek összege $\gamma + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ$, vagyis a húrnégyszög-tétel megfordításának értelmében az $AM'BC$ húrnégyszög. Tehát az M' pont rajta van az $ABC\Delta$ köré írható körén. Mivel az AB oldal nem kitüntetett, ezért az állítás a háromszög mindegyik oldalára igaz.

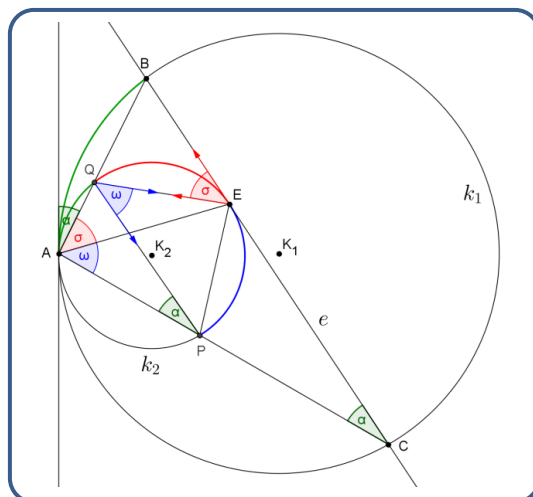
12. A k_1 kört a k_2 kör az A pontban érinti belülről. A k_2 kört az E pontban érinti az e egyenes, és ez a k_1 kört a B és a C pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy az AE egyenes felezi $BAC\angle$ szöget!

Megoldás:

Az alábbi ábra jelöléseit használva a bizonyítandó állítás: $BAE\angle = CAE\angle$, azaz $\sigma = \omega$.

- A két kör közös A érintési pontjában felvesszük a közös érintőt. Az A csúcsú α szög a k_2 körben a zölddel jelölt AQ íven nyugvó érintőszárú kerületi szög. Ugyanezen íven nyugvó kerületi szög a k_2 körben az $APQ\angle$ szög is, így $APQ\angle = \alpha$.

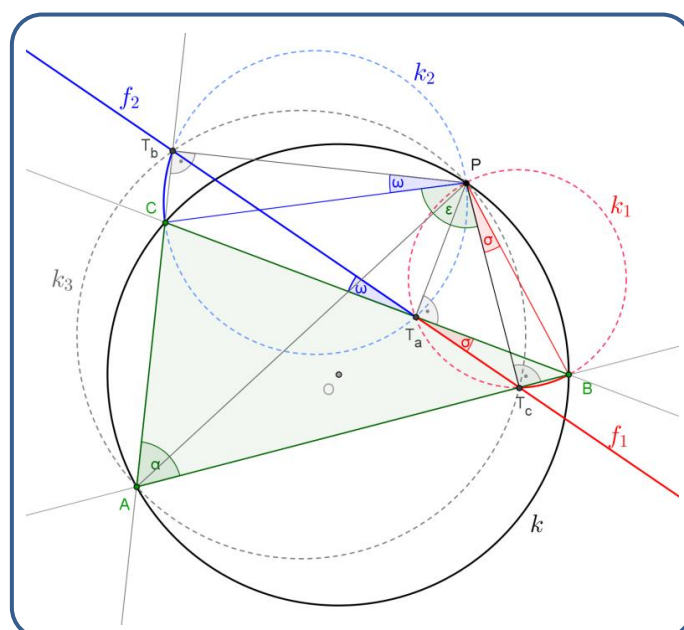
- Az A csúcsú α szög a k_1 körben a zölddel jelölt AB íven nyugvó érintőszárú kerületi szög. Ugyanezen íven nyugvó kerületi szög a k_1 körben az ACB szög is, így $ACB = \alpha$. Az AC szakasznak ugyanazon oldalán van a Q és a B pont is, ezért az $APQ = ACB$ egyenlőségből következik, hogy $PQ \parallel CB$.
- A k_2 körben a σ -val jelölt szögek egyenlők, mert egy íven nyugvó kerületi szögek.
- A $PQE = QEB$, mert váltószögek, így $\sigma = \omega$, vagyis AE felezi a CAB -et, amit bizonyítani akartunk.



13. Bizonyítsa be, hogy a háromszög köré írható körének tetszőleges pontjából a háromszög oldalegyeneseire bocsájtott merőlegesek talppontjai egy egyenesre illeszkednek!

Megoldás:

Legyen az $ABCD$ köréírt k körének egy tetszőleges pontja P . P -ből az oldalegyenesekre bocsájtott merőlegesek talppontjai T_a, T_b, T_c . f_1 a T_a középpontú T_c -n átmenő félegyenes, f_2 pedig a T_a középpontú T_b -n átmenő félegyenes. Megmutatjuk, hogy az f_1 és f_2 félegyenesek egy egyenest alkotnak.

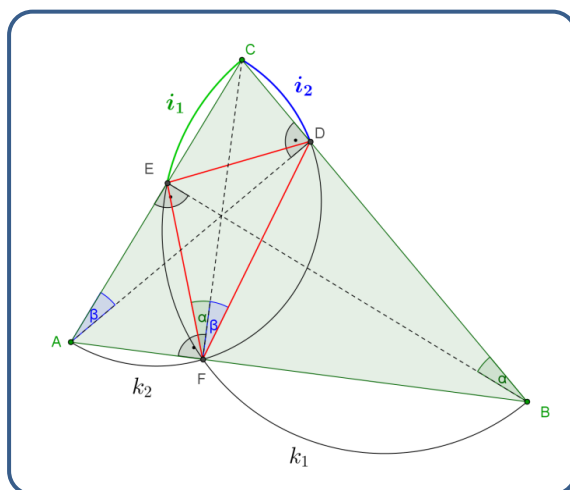


- A $CPT_b\Delta$ és a $PCT_a\Delta$ közös átfogójú derékszögű háromszögek, így a Thalész-tétel megfordításának értelmében csúcsaik a CP átmérőjű k_2 körön helyezkednek el. A k_2 körben a $CPT_b\angle = CT_aT_b\angle = \omega$, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek.
- Hasonlóan a $BPT_a\Delta$ és a $BPT_c\Delta$ közös átfogójú derékszögű háromszögek, így a Thalész-tétel megfordításának értelmében csúcsaik a BP átmérőjű k_1 körön helyezkednek el. A k_1 körben a $BPT_c\angle = BT_aT_c\angle = \sigma$, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek.
- A feltételek miatt az $ABPC$ négyszög húrnégyszög, ezért a $BPC\angle = 180^\circ - \alpha = \varepsilon + \sigma$.
- Az $AT_cP\Delta$ és az $APT_b\Delta$ közös átfogójú derékszögű háromszögek, így a Thalész-tétel megfordításának értelmében csúcsaik az AP átmérőjű k_3 körön helyezkednek el. Így az AT_cPT_b húrnégyszögben $T_cPT_b\angle = \varepsilon + \omega$.

Azt kaptuk, hogy $180^\circ - \alpha = \varepsilon + \omega = \varepsilon + \sigma$, amiből $\omega = \sigma$, illetve $CT_aT_b\angle = BT_aT_b\angle$ következik. E két szög közös csúcsú, T_aB és T_aC szárai egy egyenest alkotnak, másik szárai – az f_1 és f_2 félegyenesek – az AB egyenes ellentétes oldalán helyezkednek el, ezért azok is egy egyenest alkotnak, tehát a T_a, T_b, T_c talppontok is egy egyenesre illeszkednek.

14. Bizonyítsa be, hogy bármely hegyesszögű háromszögben a magasságvonalak a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög belső szögfelezői!

Megoldás:



Az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai D, E, F . Megmutatjuk, hogy az FC magasság a talpponti háromszögben az $EFD\angle$ szögfelezője.

- Az AFC és az ADC derékszögű háromszögek AC átfogója közös, ezért a Thalész-tétel megfordítása miatt az $AFDC$ húrnégyszög az AC átmérőjű k_2 körben. Hasonlóan a $CEFB$ négyszög húrnégyszög a BC átmérőjű k_1 körben.
- A β -val jelölt szögek egyenlők, mert a k_2 körben lévő i_2 íven nyugvó kerületi szögek. Az α -val jelölt szögek egyenlők, mert a k_1 körben lévő i_1 íven nyugvó kerületi szögek.
- Az $\alpha = EBC\angle = DAC\angle = \beta$, mert merőleges szárú szögek.

Ez pedig azt jelenti, hogy a talpponti háromszög F csúcsánál lévő $\alpha = \beta$, tehát az FC magasság szögfelező a talpponti háromszögben. Mivel FC nem kitüntetett, ezért mindhárom magasságra igaz az állítás.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Igazolja, hogy egy konvex négyszög szemközti oldalainak összege kisebb, mint átlók összege!
2. Egy r sugarú kör köré olyan szimmetrikus trapézt írunk, amelynek párhuzamos oldalai közül a hosszabb $2a$ hosszúságú ($a > r$). Fejezze ki a trapéz területét a -val és r -rel!
3. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm, a derékszög szögfelezője $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ cm hosszú. Mekkora a befogók?
4. Egy háromszög oldalai 3, 4 és 5 egység hosszúak. Hány olyan egyenes létezik, amely a háromszög területét is és területét is két egyenlő részre vágja?
5. Két kör sugara 5 és 2, közös külső érintőszakaszuk másfélszer akkora, mint a közös belső érintőszakaszuk. Milyen távol van egymástól a két kör középpontja?
6. Az r sugarú AOB negyedkörben az OA és OB sugarak mint átmérők fölé egy-egy félkört rajzolunk. Számítsa ki annak a körnek a sugarát, amely ezt a két félkört és az OAB negyedkört is érinti!
7. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóinak a hossza 12 cm. A háromszög mindegyik csúcsa körül 12 cm sugarú kört rajzolunk. Mekkora e három kör közös részének területe és kerülete?
8. Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak M metszéspontját merőlegesen vetítjük a négyszög oldalaira. A vetületi pontok legyenek P, Q, R, S . Bizonyítsa be, hogy a $PQRS$ négyszög érintőnégyszög! Bizonyítsa be, hogy ha az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor a $PQRS$ négyszög is húrnégyszög!
9. Legyen az $ABCD$ érintőnégyszögben $ABC\angle = ADC\angle$. A beírt kör az AB, BC, CD, DA oldalakat rendre E, F, G, H pontokban érinti. Igazolja, hogy $EG = HF$!

Az ellenőrző feladatok megoldása

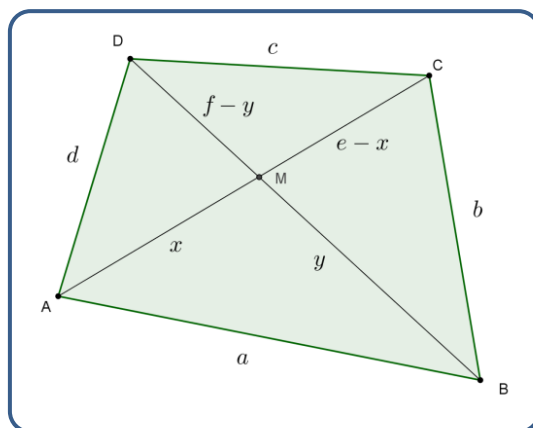
1. Igazolja, hogy egy konvex négyszög szemközti oldalainak összege kisebb, mint átlók összege!

Megoldás:

Az ábra jelöléseit használva írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABM\Delta$ és $CDM\Delta$ -re.

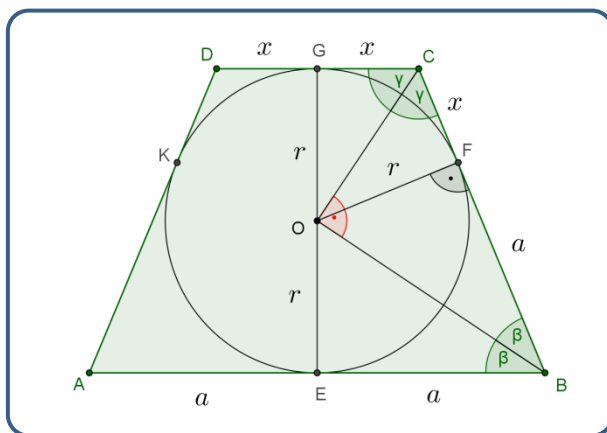
- $ABM\Delta: x + y > a$
- $CDM\Delta: (f - y) + (e - x) > c$

Adjuk össze a két egyenlőtlenséget! $x + y + (f - y) + (e - x) > a + c \Rightarrow e + f > a + c$.



2. Egy r sugarú kör köré olyan szimmetrikus trapézút írunk, amelynek párhuzamos oldalai közül a hosszabb $2a$ hosszúságú ($a > r$). Fejezze ki a trapéz területét a -val és r -rel!

Megoldás:



Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz érintőnégyyszög, ezért belső szögfelezői a beírható körének középpontján mennek át. A B csúcsnál lévő szöget 2β -val, a C csúcsnál lévő 2γ -val jelöljük. A trapéz szárain lévő belső szögek összege 180° , ezért $\beta + \gamma = 90^\circ$. Emiatt az $OBC\Delta O$ csúcsánál derékszög van. Egy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért $BE = BF = a$, és $CF = CG = x$. Az OBC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága r . Erre a magasságtételt felírva $r = \sqrt{xa}$, ahonnan $x = \frac{r^2}{a}$. A trapéz párhuzamos oldalai $2a$ és $2x = \frac{2r^2}{a}$, valamint magassága $2r$. Így a trapéz területe: $t = \frac{2a + \frac{2r^2}{a}}{2} \cdot 2r = \frac{2r}{a}(a^2 + r^2)$.

3. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm, a derékszög szögfelezője $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ cm hosszú. Mekkora a befogók?

Megoldás:

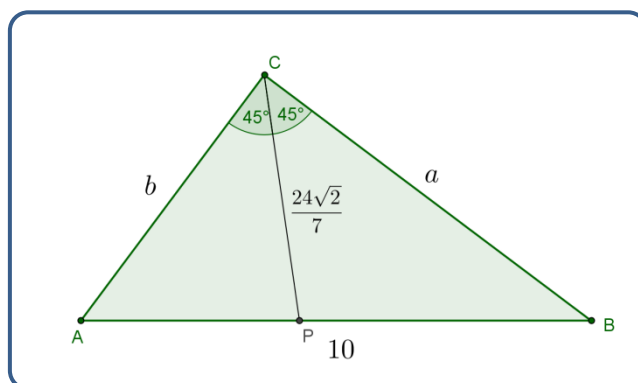
Az a és b befogójú ABC derékszögű háromszög területét kétféleképpen írjuk fel.

- $t = \frac{ab}{2}$

- $t = t_{APC} + t_{PBC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{24\sqrt{2}}{7} \cdot \sin 45^\circ + \frac{b}{2} \cdot \frac{24\sqrt{2}}{7} \cdot \sin 45^\circ = (a + b) \frac{24}{14}$

Ezekből $ab = (a + b) \frac{24}{7}$ következik.

Az ABC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel: $a^2 + b^2 = 100$.



Az $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ azonosságba beírva a fenti eredményeket:

$$(a + b)^2 = 100 + (a + b) \frac{48}{7}$$

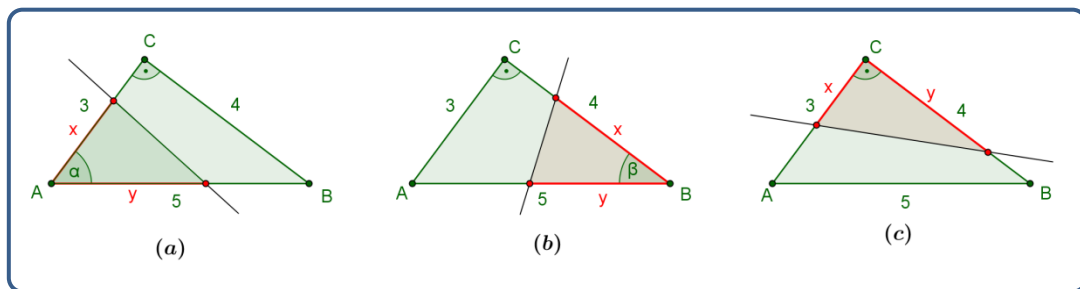
$$7 \cdot (a + b)^2 - 48 \cdot (a + b) - 700 = 0$$

egyenlethez jutunk, amit $(a + b)$ -re megoldva $a + b = 14$, és $a + b = -\frac{50}{7}$ adódik. Mivel $a + b > 0$, csak a pozitív megoldásnak van geometriai jelentése. Innen $ab = (a + b) \frac{24}{7} = 48$.

Az $\begin{cases} a + b = 14 \\ ab = 48 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldásából a két befogó hossza 6 (cm) és 8 (cm).

4. Egy háromszög oldalai 3, 4 és 5 egység hosszúak. Hány olyan egyenes létezik, amely a háromszög területét és kerületét is két egyenlő részre vágja?

Megoldás:



Az adott $ABC\Delta$ háromszög derékszögű, mert oldalhosszai pitagoraszai számhármast alkotnak. $t_{ABC\Delta} = 6$ és $k_{ABC\Delta} = 12$. Ezért a levágott terület nagysága 3, a levágott kerületrésze pedig 6. Az ábrán látható három esetet különböztetjük meg.

- a) A terület megfelelése miatt $x + y = 6$, a levágott terület pedig $\frac{xy \sin \alpha}{2} = 3$. Felhasználva hogy $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, a következő egyenletrendszerhez jutunk: $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \frac{15}{2} \end{cases}$.

Ennek gyökei az $x = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,78$ és az $y = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 4,22$.

- b) A $\sin \beta = \frac{3}{5}$ értéket felhasználva a $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 10 \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk, amelynek nincs megoldása.

- c) Ekkor a lemetezett háromszög derékszögű, így a $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 6 \end{cases}$ egyenletrendszerhez jutunk, aminek megoldása $x = 3 - \sqrt{3} \approx 1,27$ és $y = 3 + \sqrt{3} \approx 4,73$. Ez az eredmény pedig geometriailag nem megvalósítható, mert a 4,73 mindkét befogónál hosszabb.

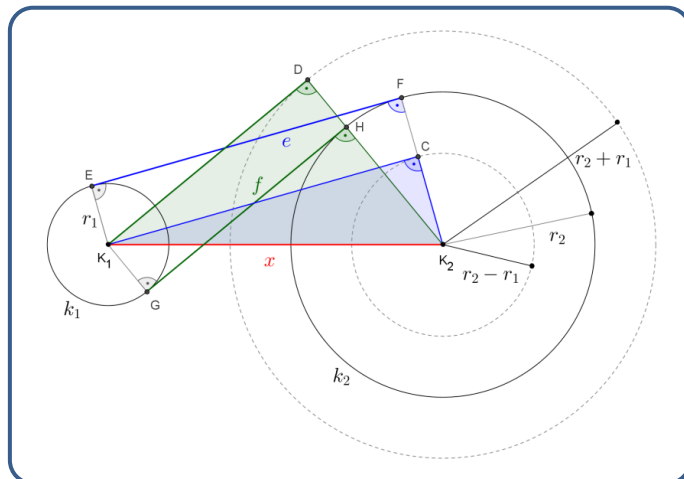
Tehát egyetlen olyan egyenes létezik, amely megfelel a feltételeknek, és azt az (a) esetben kaptuk meg.

5. Két kör sugara 5 és 2, közös külső érintőszakaszuk másfélszer akkora, mint a közös belső érintőszakaszuk. Milyen távol van egymástól a két kör középpontja?

Megoldás:

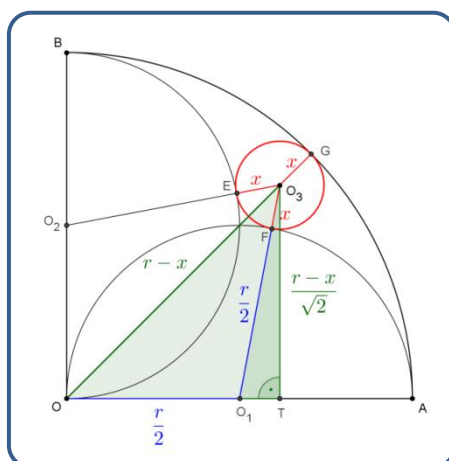
A két kör közös külső és belső érintőinek szerkesztési módszerét alkalmazva az ábrán kialakult derékszögű háromszögekben a Pitagorasz-tétel segítségével adjuk meg a két kör középpontjának $x = K_1K_2$ távolságát. A feltételek szerint $e = 1,5f$.

- A K_1K_2C derékszögű háromszögben $K_1C^2 + K_2C^2 = x^2$.
Felhasználva hogy $K_2C = r_2 - r_1 = 3$, és $K_1C = \frac{3}{2}f$, a $\frac{9}{4}f^2 + 9 = x^2$ egyenlethez jutunk.
- A K_1K_2D derékszögű háromszögben $K_1D^2 + K_2D^2 = x^2$.
Felhasználva hogy $K_1D = f$, és $K_2D = r_2 + r_1 = 7$, az $f^2 + 49 = x^2$ egyenlet adódik.
- A $\begin{cases} \frac{9}{4}f^2 + 9 = x^2 \\ f^2 + 49 = x^2 \end{cases}$ egyenletrendszert megoldva $x = 9$ a két kör középpontjának távolsága.



6. Az r sugarú AOB negyedkörben az OA és OB sugarak mint átmérők fölé egy-egy félkört rajzolunk. Számítsa ki annak a körnek a sugarát, amely ezt a két félkört és az AOB negyedkört is érinti!

Megoldás:



Az ábrán látható, pirossal rajzolt kör x sugarát keressük. Az AOB negyedkör szimmetrikus az OG egyenesre, ezért az OTO_3 derékszögű háromszög egyenlő szárú. Átfogója $OO_3 = r - x$, befogói pedig $OT = TO_3 = \frac{r-x}{\sqrt{2}}$ hosszúságúak. Az O_1TO_3 derékszögű háromszög átfogója $O_1O_3 = \frac{r}{2} + x$, O_1T befogója pedig $O_1T = \frac{r-x}{\sqrt{2}} - \frac{r}{2}$. Ebben a derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

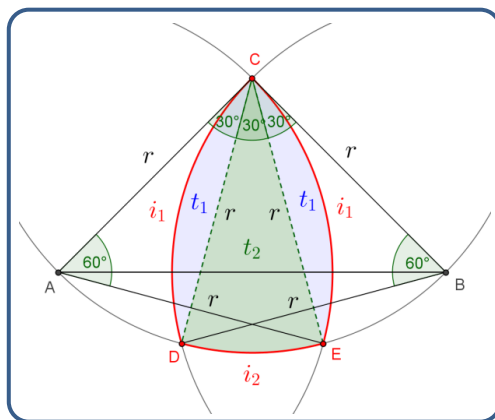
$$O_1T^2 + TO_3^2 = O_1O_3^2$$

$$\left(\frac{r-x}{\sqrt{2}} - \frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{r}{2} + x\right)^2,$$

amelyet x -re megoldva $x = r \frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}-1}$ adódik eredményként.

7. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóinak a hossza 12 cm. A háromszög mindegyik csúcsa körül 12 cm sugarú kört rajzolunk. Mekkora e három kör közös részének területe és kerülete?

Megoldás:



Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög befogói $r = 12$ cm hosszúak. A három kör közös részét az ábrán két i_1 és egy i_2 körív határol. Az $AEC\Delta$ és a $DBC\Delta$ egyenlő oldalúak, ezért az i_1 ívekhez 60° -os középponti szögek tartoznak. Az i_1 ívekhez az A és B középpontú r sugarú körökben az egybevágóságuk miatt egyenlő területű körszeletek tartoznak. Közös területük t_1 . A C középpontú r sugarú körben az i_2 ívhez tartozó középponti szög 30° , és jelöljük a hozzá tartozó kör-cikk területét t_2 -vel. A három kör közös része a két t_1 területű körszeletből és a t_2 területű kör-cikkből tevődik össze, ezért területe $t = 2t_1 + t_2$. Kerülete pedig $k = 2i_1 + i_2$.

- $t_1 = \frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, $t_2 = \frac{r^2\pi}{12}$, így

$$t = 2t_1 + t_2 = \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{2} + \frac{r^2\pi}{12} = 12(5\pi - 6\sqrt{3}) \approx 63,79(\text{cm}^2).$$
- $i_1 = \frac{2r\pi}{6}$, $i_2 = \frac{2r\pi}{12}$, ezért

$$k = 2i_1 + i_2 = \frac{5r\pi}{6} = 10\pi \approx 31,42(\text{cm}).$$

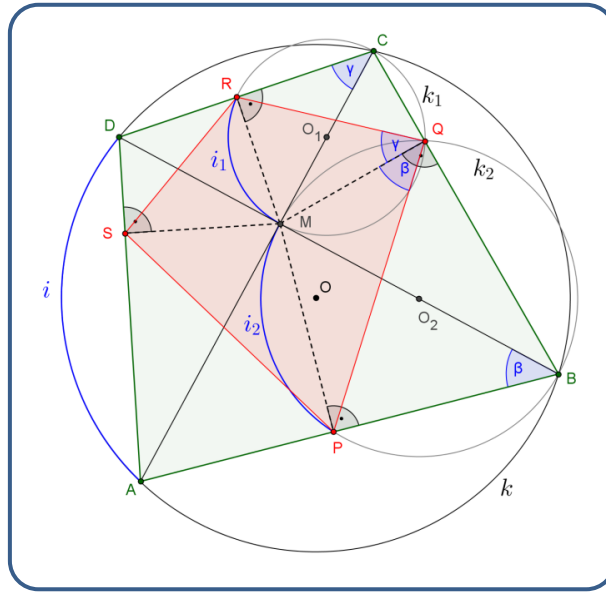
8. Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak M metszéspontját merőlegesen vetítjük a négyszög oldalaira. A vetületi pontok legyenek P , Q , R , S . Bizonyítsa be, hogy a $PQRS$ négyszög érintőnégyszög! Bizonyítsa be, hogy ha az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor a $PQRS$ négyszög is húrnégyszög!

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy a $PQRS$ érintőnégyszög. Ehhez bebizonyítjuk, hogy az M pontot az oldalakra eső merőleges vetületeivel összekötő szakaszok belső szögfelezői a $PQRS$ négyszögnek.

- Az $MQCR$ négyszögben az R és Q csúcsoknál derékszög van, ezért a Thalész-tétel megfordítása miatt a CM átmérőjű k_1 körre illeszkednek az $MQCR$ csúcsai.
- Hasonlóan húrnégyszög a k_2 körben a $PBQM$ négyszög is.
- A k körben az i ívhez tartozó B csúcsú β kerületi szög egyenlő az ugyanezen ívhez tartozó C csúcsú γ kerületi szöggel.
- A k_1 körben a C csúcsú γ kerületi szög az i_1 íven nyugszik, ezért egyenlő az ugyanezen íven nyugvó Q csúcsú RQM szöggel.

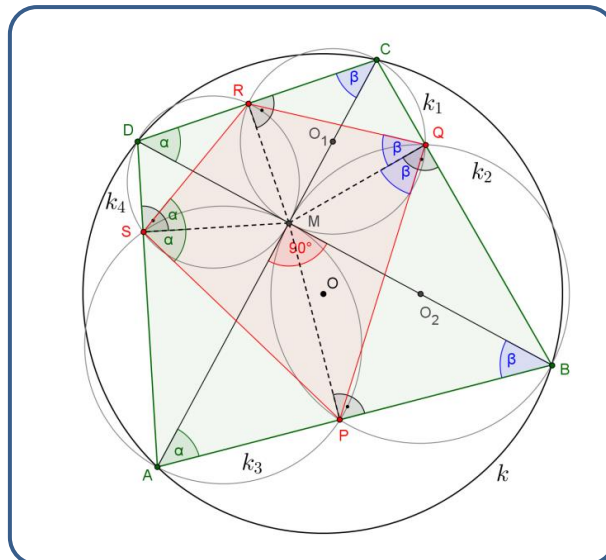
- A k_2 körben a B csúcsú β kerületi szög az i_2 íven nyugszik, ezért egyenlő az ugyanezen íven nyugvó Q csúcsú PQM -szöggel.



Tehát azt kaptuk, hogy a $PQRS$ négyszög Q csúcsánál a $PQM\measuredangle = RQM\measuredangle$, így a QM szakasz felel a Q -nál lévő belső szöget.

A Q csúcsnak nincs kitüntetett szerepe, ezért ugyanígy belátható, hogy az RM, SM, PM szakaszok is felezik a megfelelő belső szögeket. Ebből az következik, hogy az M pont a belső szögfelezők közös pontja, tehát van beírható köre a $PQRS$ négyszögnek, ezért érintőnégyszög.

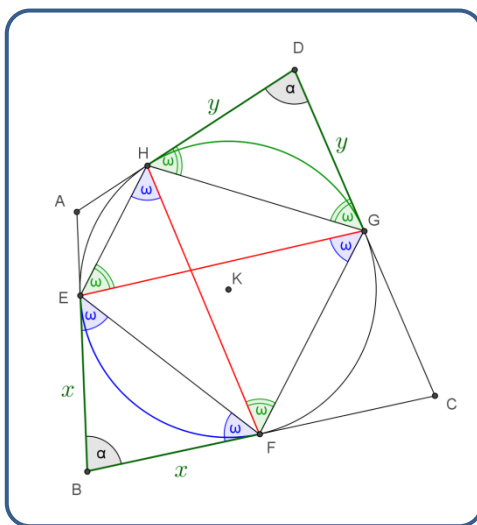
Ha az $ABCD$ húrnégyszög átlóira $AC \perp BD$ teljesül, akkor belátjuk, hogy a $PQRS$ húrnégyszög is. Ehhez megmutatjuk, hogy a szemközti S és Q csúcsoknál lévő szögek összege 180° .



Az első rész bizonyítása alapján az ábrán látható β -val jelölt szögek egyenlők egymással, és ugyancsak az α -val jelöltek is. Ezért az S csúcsnál 2α , a Q csúcsnál 2β szög van. De az átlók merőlegessége miatt az $ABM\Delta$ derékszögű, ezért $\alpha = 90^\circ - \beta$. Így a szemközti két szög összege $2(90^\circ - \beta) + 2\beta = 180^\circ$, tehát ebben az esetben a $PQRS$ négyszög húrnégyszög is.

9. Legyen az $ABCD$ érintőnégyyszögben $\angle ABC = \angle ADC$. A beírt kör az AB , BC , CD , DA oldalakat rendre E , F , G , H pontokban érinti. Igazolja, hogy $EG = HF$!

Megoldás:



A BFE háromszög egyenlő szárú, mert a B pontból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Az FE alapon fekvő szögei $\omega = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. E két szög az ábrán kék színű EF ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög. Ugyanezen ívhez tartoznak az $FGE = FHE = \omega$ kerületi szögek is. Hasonlóan a HGD háromszög is egyenlő szárú, és alapon fekvő szögei $90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \omega$ nagyságúak, valamint $GFH = GEH = \omega$. Az $FHE = GFH$ és a HF illetve FH szárak ellentétes irányú, másik szárak pedig FH egyenesének ellentétes oldalán van, ezért ezek váltószögek. Így $EH \parallel FG$ ezért az $FGHE$ húrnégyszög trapéz. A húrtrapéz átlói egyenlő hosszúak, ezért $EG = HF$.