

11. Geometriai transzformációk

I. Elméleti összefoglaló

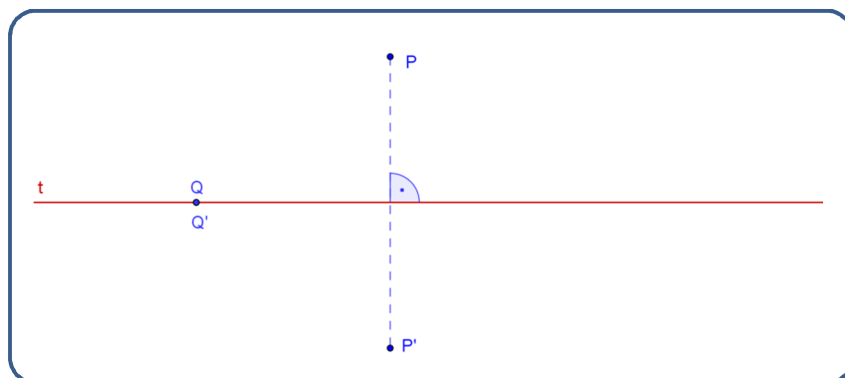
Geometriai transzformációknak nevezzük azokat a függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz. Ha a transzformáció a P ponthoz a P' pontot rendeli, akkor a P' pontot a P pont **képének** nevezzük.

Az alábbiakban a geometriai transzformációk értelmezési tartománya és az értékkészlete is **a sík vagy a tér pontjainak halmaza** és a hozzárendelési szabály **kölcsönösen egyértelmű**.

Identitás:

Olyan geometriai transzformáció, amely minden ponthoz önmagát rendeli.

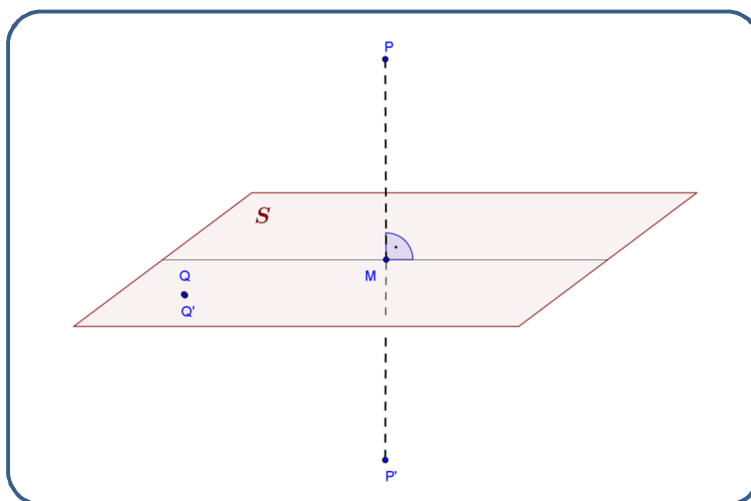
Tengelyes tükrözés



Adott a síkban a t egyenes, ezt a tükrözés tengelyének nevezzük. A t egyenes minden pontjának a képe önmaga.

Ha a t egyenesre nem illeszkedő P pont képe P' , akkor a PP' szakasz felező merőlegese a t egyenes.

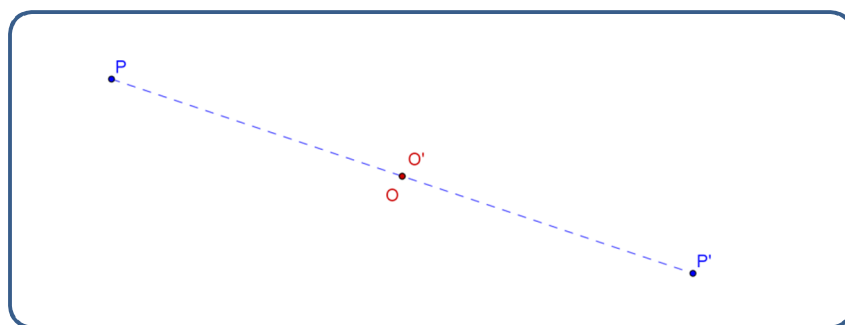
Síkra vonatkozó tükrözés



Adott a térben az S sík. Az S sík minden pontjának a képe önmaga.

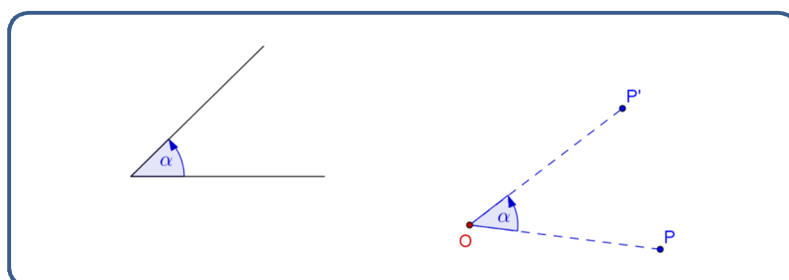
Ha az S síkra nem illeszkedő P pont képe P' , akkor a PP' szakasz felező merőleges síkja az S sík.

Középpontos tükrözés



Adott a síkban (térben) az O pont, ezt a tükrözés középpontjának nevezzük. Az O pont képe önmaga. Ha az O ponttól különböző P pont képe a P' , akkor a PP' szakasz felezőpontja az O pont.

Pont körüli forgatás

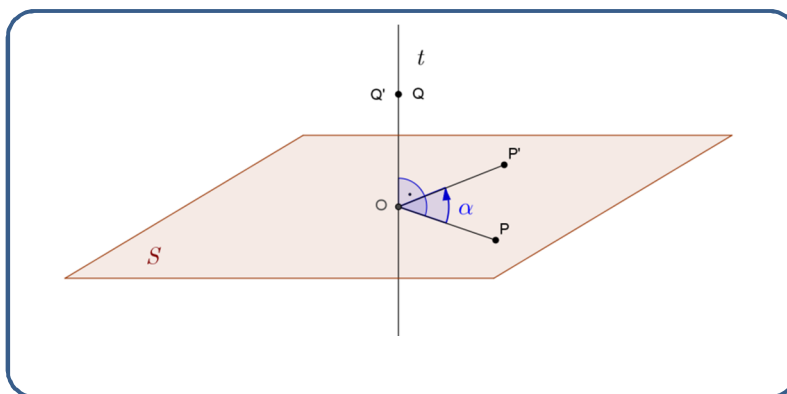


Adott a síkban az O pont és az α irányított szög. Az O pontot a forgatás középpontjának, az α szöget az elforgatás szögének nevezzük. Az O pont képe önmaga.

Ha az O ponttól különböző P pont képe a P' , akkor $OP = OP'$ és $\angle POP' = \alpha$.

Ha $\alpha = 180^\circ$ akkor ez a transzformáció az O középpontú középpontos tükrözéssel egyezik meg.

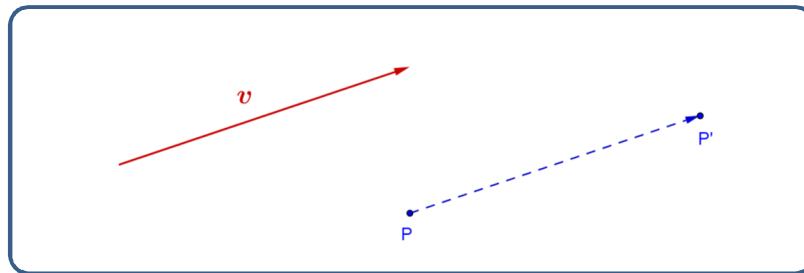
Egyenes körüli forgatás



Adott a térben a t egyenes és egy α irányított szög. A t egyenest a forgatás tengelyének, az α szöget az elforgatás szögének nevezzük. A t egyenes minden pontjának a képe önmaga.

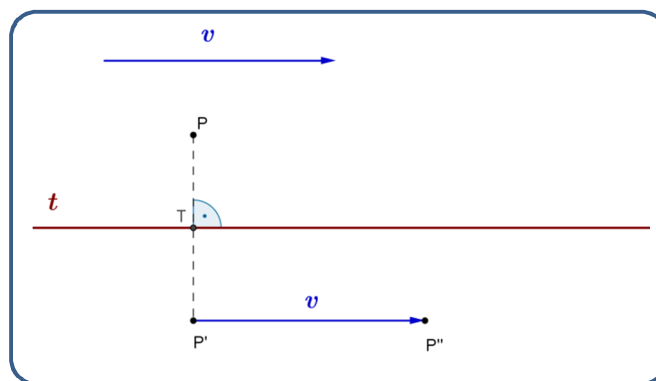
A t egyenesre nem illeszkedő pont esetében meghatározzuk azt az S síkot, amely merőleges a t egyenesre és tartalmazza a P pontot. Az S sík és a t egyenes metszéspontja az O pont. A P pont képe az a P' pont, amelyre $OP = OP'$ és $\angle POP' = \alpha$.

Eltolás



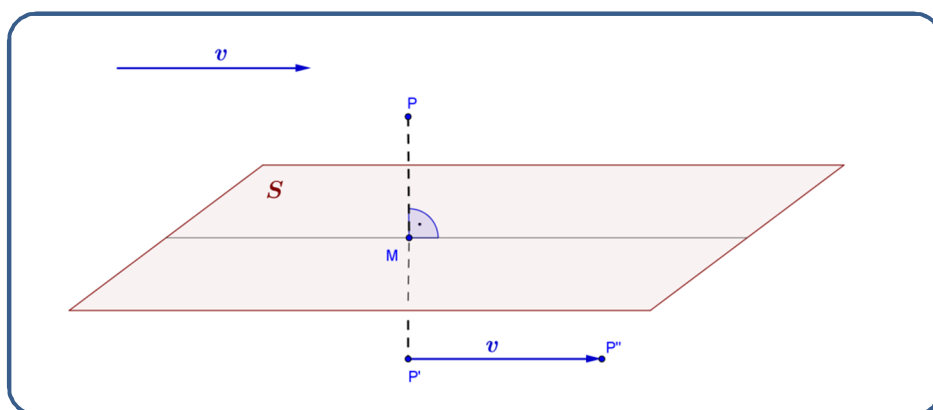
Adott a síkban (térben) a $\mathbf{v}$ vektor, amit az eltolás vektorának nevezünk. A sík (tér) bármely P pontjának a képe az a P' pont, amelyre $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{v}$.

Csúsztatva tükrözés (síkban)



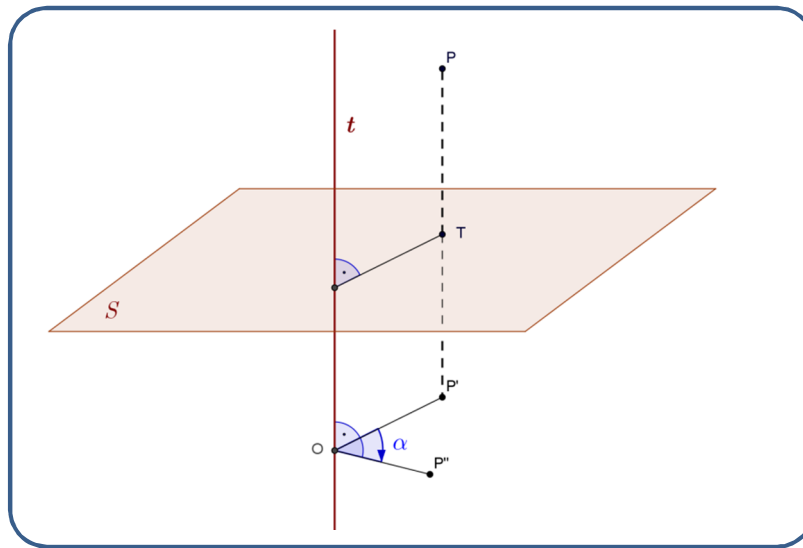
Adott a síkban a t egyenes és az egyenessel párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor. A t egyenesre vonatkozó tükrözés és a $\mathbf{v}$ vektorral való eltolás egymás utáni alkalmazását csúsztatva tükrözésnek nevezzük. A két transzformáció sorrendje felcserélhető. Az ábrán a P pont képe a P'' pont.

Csúsztatva tükrözés (térben)



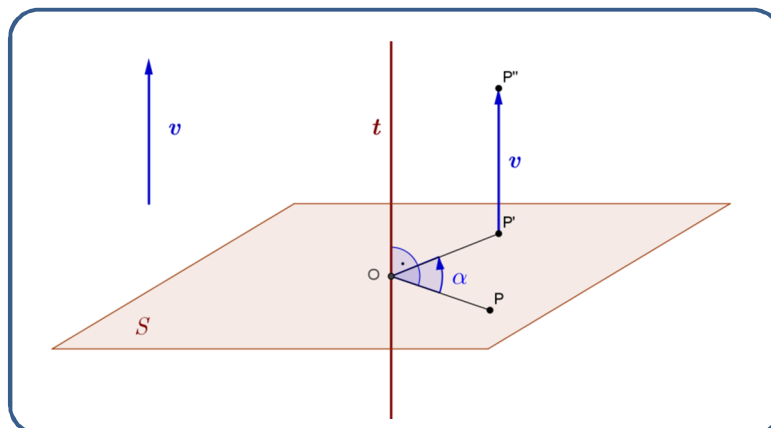
Adott a térben az S sík és az S síkkal párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor. Az S síkra vonatkozó tükrözés és a $\mathbf{v}$ vektorral való eltolás egymás utáni alkalmazását (térbeli) csúsztatva tükrözésnek nevezzük. A két transzformáció sorrendje felcserélhető. Az ábrán a P pont képe a P'' pont.

Forgatva tükrözés



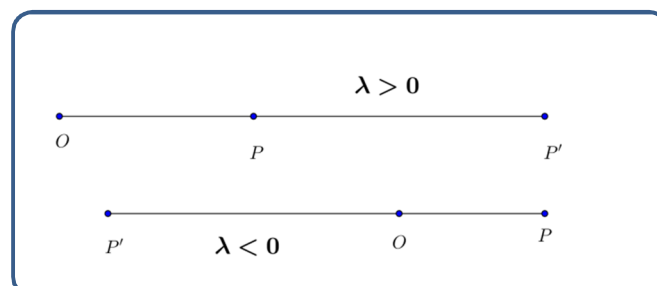
Adott a térben az S sík, az S síkra merőleges t egyenes és egy α irányított szög. Az S síkra vonatkozó tükrözés és a t egyenes körüli α szöggel való elforgatás egymás utáni alkalmazását forgatva tükrözésnek nevezzük. A két transzformáció sorrendje felcserélhető. Az ábrán a P pont képe a P'' pont.

Csavarmozgás:



Adott a térben a t egyenes, az egyenessel párhuzamos v vektor és egy α irányított szög. Az t egyenes körüli α szöggel való elforgatás és a v vektorral való eltolás egymás utáni alkalmazását csavarmozgásnak nevezzük. A két transzformáció sorrendje felcserélhető. Az ábrán a P pont képe a P'' pont.

Középpontos hasonlóság



Adott a síkban (térben) az O pont, és egy $\lambda \neq 0$ valós szám. Az O pontot a hasonlóság középpontjának, a λ valós számot a hasonlóság arányának nevezzük. Az O pont képe önmaga. Az O -tól különböző P ponthoz azt a P' pontot rendeljük, amely az OP egyenesen van, $OP' = |\lambda| \cdot OP$, és $\lambda > 0$ esetén a P' az OP félegyenesen van, $\lambda < 0$ esetén O elválasztja a P és P' pontokat.

Egy geometriai transzformációnak

- **fixpontja** az a pont, amelynek a képe önmaga.
- **fixegyenes** az az egyenes, amelynek a képe önmaga. Ha egy egyenes képe önmaga, de nem minden pontja fixpont, akkor szokták **invariáns** egyenesnek is nevezni.

Egy geometriai transzformáció:

- **szimmetrikus**, ha a P pont képe P' és P' képe P .
- **távolságtartó**, ha bármely szakasz képe vele azonos hosszúságú szakasz.
- **aránytartó**, ha két szakasz hosszának aránya egyenlő a képszakaszok hosszának arányával.
- **szögtartó**, ha bármely szög képe vele azonos nagyságú szög.
- **irányítástartó**, ha bármely síkidom és a képének a körüljárása azonos.
- **irányításváltó**, ha bármely síkidom és a képének a körüljárása ellentétes.

Ha egy geometriai transzformáció távolságtartó, akkor **egybevágósági transzformációnak** nevezzük. Minden síkbeli egybevágósági transzformáció előállítható legfeljebb három tengelyes tükrözés egymás utáni alkalmazásával. Minden térbeli egybevágósági transzformáció előállítható legfeljebb négy síkra való tükrözés egymás utáni alkalmazásával.

Ha egy geometriai transzformáció aránytartó, akkor **hasonlósági transzformációnak** nevezzük. Minden hasonlósági transzformáció előállítható egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás utáni alkalmazásával.

Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.

Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.

Háromszögek egybevágóságának alapesetei:

Két háromszög egybevágó, ha

- oldalaik páronként egyenlők.
- két-két oldaluk páronként egyenlő, és az általuk bezárt szög egyenlő.
- egy-egy oldaluk és az oldalon fekvő két szögük egyenlő.
- két-két oldaluk páronként egyenlő és a nagyobb oldallal szemben lévő szögek egyenlő.

Háromszögek hasonlóságának alapesetei:

Két háromszög hasonló, ha

- oldalaik aránya páronként egyenlő.
- két-két oldal aránya egyenlő, és az általuk bezárt szög egyenlő.
- két-két szögük páronként egyenlő.
- két-két oldaluk aránya egyenlő és a nagyobb oldallal szemben lévő szögek egyenlő.

Tengelyesen szimmetrikus alakzatok

Egy síkbeli alakzat tengelyesen szimmetrikus, ha van olyan síkbeli egyenes, amelyre tükrözve az alakzat képe önmaga:

- tengelyesen szimmetrikus háromszög: egyenlő szárú háromszög, egyenlő oldalú háromszög;
- tengelyesen szimmetrikus négyszög: szimmetrikus trapéz, deltoid, téglalap, rombusz, négyzet;
- szabályos sokszögek;
- kör.

Középpontosan szimmetrikus alakzatok

Egy síkbeli alakzat középpontosan szimmetrikus, ha van olyan pont, amelyre tükrözve az alakzatot kapjuk:

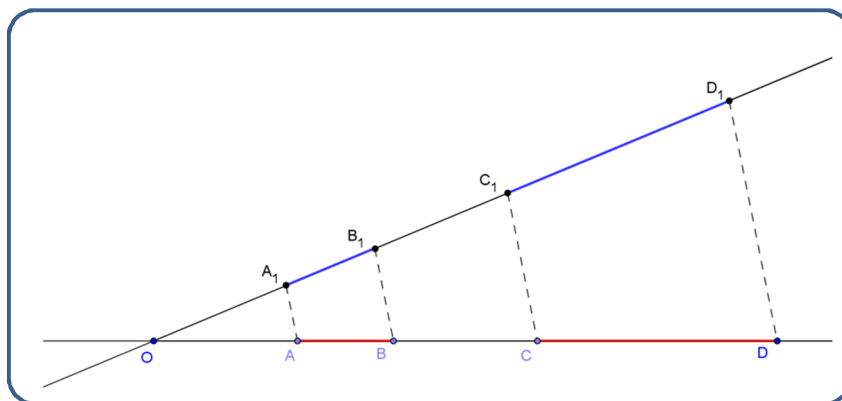
- középpontosan szimmetrikus négyszög: paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet;
- páros oldalszámú szabályos sokszögek;
- kör.

Forgásszimmetrikus alakzatok

Egy síkbeli alakzat forgásszimmetrikus, ha van olyan O pont a síkban és olyan α szög, hogy ha az alakzatot az O pont körül α szöggel elforgatjuk, az alakzatot kapjuk:

- forgásszimmetrikus háromszög: egyenlő oldalú háromszög;
- forgásszimmetrikus négyszög: négyzet;
- szabályos sokszögek;
- kör.

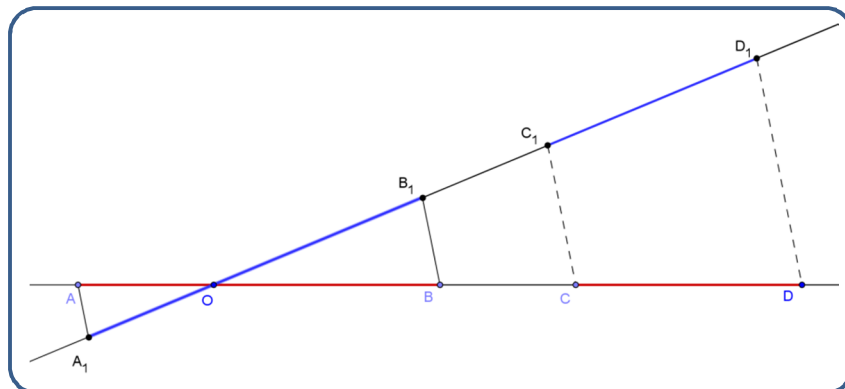
Párhuzamos szelők tétele



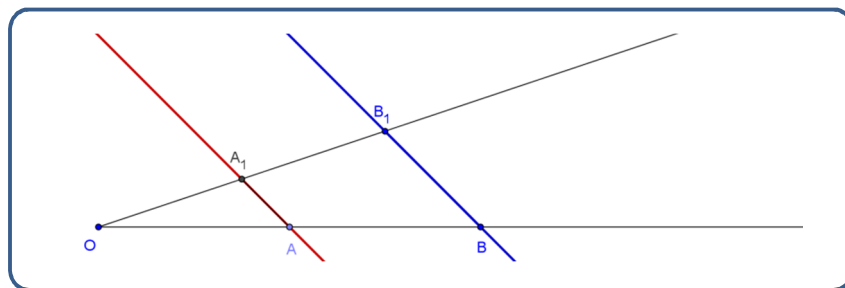
Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik szögszáron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik szögszáron keletkező szakaszok arányával:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}.$$

A tétel akkor is igaz, ha a szakaszok esetleg egymásba nyúlnak vagy a szögszáraknak a csúcson túli meghosszabbításán helyezkedik el valamelyik szakasz vagy annak egy része. A szakaszokat mérhetjük a szög csúcsától is.



Párhuzamos szelők tételének megfordítása



A tétel megfordítása csak speciális esetben igaz. Ha két egyenes egy szög száraiból a csúctól számítva olyan szakaszokat metsz ki, amelyeknek az aránya a két szögszáron egyenlő, akkor a két egyenes párhuzamos.

Betűkkel kifejezve:

$$\text{Ha } \frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1} \Rightarrow AA_1 \parallel BB_1.$$

Párhuzamos szelőszakaszok tétele

Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor a párhuzamosokból kimetszett szakaszok aránya egyenlő a szög száraiból kimetszett szakaszok arányával. (A szögszárakon a szakaszokat a szög csúcsától mérjük.)

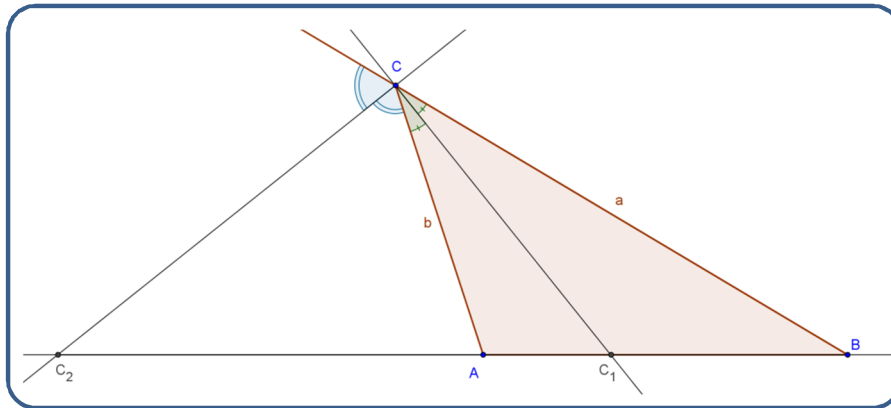
A fenti ábrát használva betűkkel kifejezve:

$$\text{Ha } AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1}.$$

A középpontos hasonlóság tulajdonságai a párhuzamos szelők tételének, a párhuzamos szelőszakaszok tételének segítségével igazolhatóak.

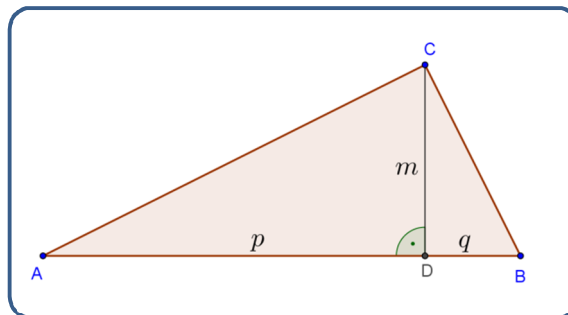
Szögfelezőtétel

A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szög melletti oldalak arányában osztja. Ha a külső szögfelező metszi a szemközti oldalegyenest (nem egyenlőszárú a háromszög), akkor a külső szögfelező a szemközti oldalegyenesből olyan szakaszokat metsz ki, amelyek aránya a szög melletti oldalak arányával egyezik meg.



$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B} = \frac{b}{a}$$

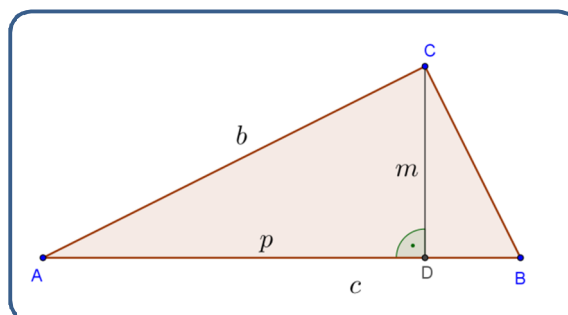
Magasságtétel



A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága mértani közepe annak a két szakasznak, amelyre a magasság az átfogót osztja:

$$m = \sqrt{p \cdot q}.$$

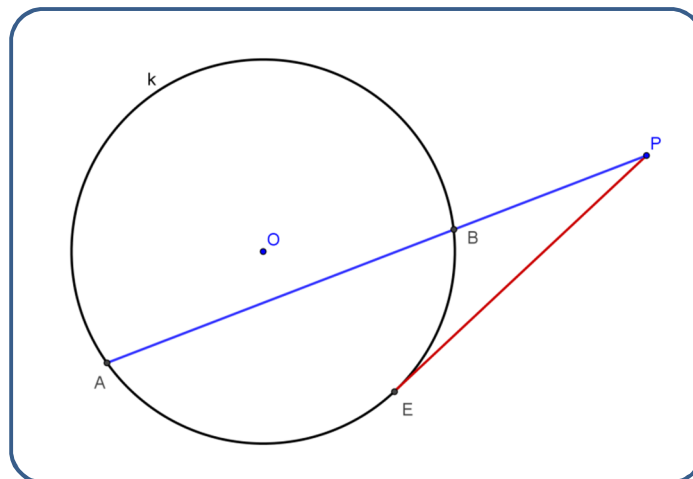
Befogótétel



A derékszögű háromszög befogója mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének:

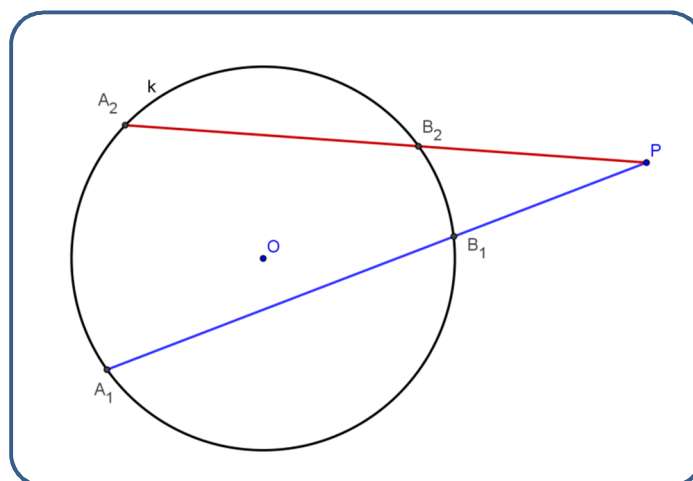
$$b = \sqrt{c \cdot p}$$

Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele



A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakasz mértani közepe a pontból a körhöz húzott szelők szeleteinek.

$$PE = \sqrt{PA \cdot PB}$$



A körhöz egy külső pontból a körhöz húzott szelők szeleteinek szorzata állandó:

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$$

Tétel:

Hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányával.

Hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának a négyzetével.

Hasonló testek felszínének aránya egyenlő a hasonlóság arányának a négyzetével.

Hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának a köbével.

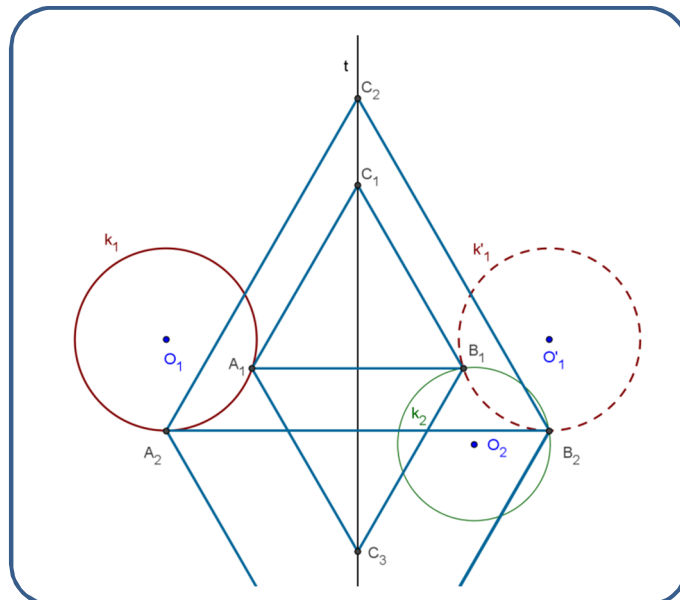
Megjegyzés:

A vektorok alkalmazásával a **14. témakörben**, a vektorok koordináta-geometriai megközelítésével a **15. témakörben** foglalkozunk részletesebben.

II. Kidolgozott feladatok

- Adott a síkban egy t egyenes és két kör: k_1 és k_2 . Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek a szimmetria tengelye a t egyenes és két csúcsa a k_1 és k_2 körökön van!

Megoldás:



Az ABC háromszög szimmetria tengelye a t egyenes, ezért az A pont t -re vonatkozó tükörképe a B pont. Az A pont a k_1 kör egyik pontja, ezért a B pont rajta van a k_1 kör t tengelyre vonatkozó tükörképén, a k'_1 körön. A B pont ennek megfelelően a k'_1 és k_2 körök metszéspontja. A B pontot tükrözzük a t egyenesre, így megkapjuk az A pontot. Az AB oldalra megszerkesztjük az ABC szabályos háromszöget.

Diszkusszió:

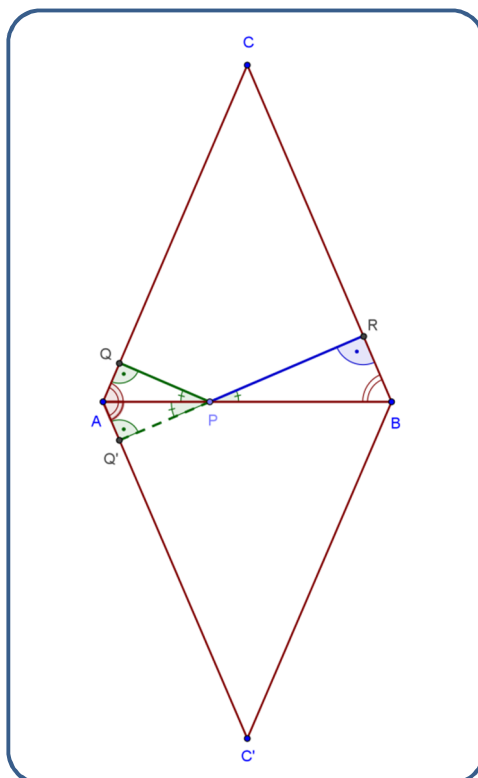
A k'_1 és k_2 köröknek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet, esetleg a két kör egybeeshet, továbbá az AB szakasz mindkét oldalára szerkeszthetünk szabályos háromszöget.

Ha a k'_1 és k_2 köröknek valamely közös pontja a t tengelyre esik, akkor ehhez nem létezik megfelelő háromszög. Ezt figyelembe véve elemezzük a megoldások számát:

- ha a k'_1 és k_2 köröknek nincs metszéspontja, vagy a közös pontok a tengelyre esnek, akkor a feladatnak nincs megoldása,
- ha a k'_1 és k_2 köröknek 1 olyan metszéspontja van, amely nem esik a tengelyre, akkor a feladatnak 2 megoldása van,
- ha a k'_1 és k_2 köröknek 2 olyan metszéspontja van, amelyek nem illeszkednek a tengelyre, akkor a feladatnak 4 megoldása van,
- ha $k'_1 \equiv k_2$, akkor a körök bármely, a tengelyre nem illeszkedő pontja lehet a B pont, ilyenkor végtelen sok megoldás van.

- Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlőszárú háromszögben összeadjuk az alap bármely pontjának a két szár egyenesétől mért távolságát, mindig ugyanazt az értéket kapjuk!

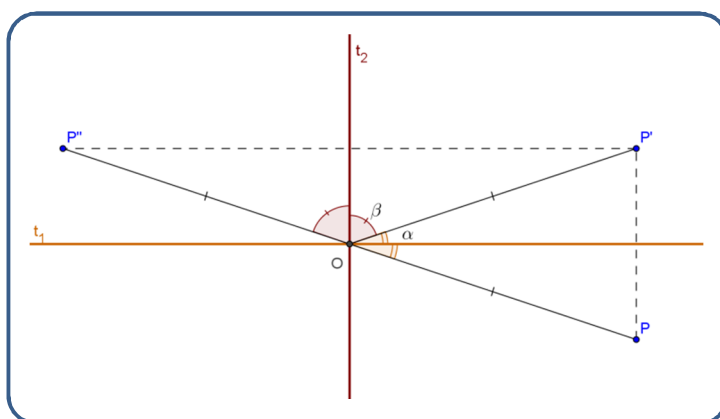
Megoldás:



A háromszöget és a PQ szakaszt tükrözzük az AB alapra. Az így keletkező $AC'BC$ négyszög rombusz. Az APQ és PBR háromszögek derékszögűek, másik szögük az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge, tehát ezek a szögek egyenlők, így a harmadik szögük is egyenlő. A tengelyes tükrözés szögtartó, az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlők. A szögek egyenlőségéből következik, hogy a Q', P, R pontok egy egyenesre esnek. A tengelyes tükrözés távolságtartó, ezért $QP + PR = Q'P + PR = Q'R$. A $Q'R$ szakasz a rombusz magassága, ami egyenlő az ABC háromszög szárához tartozó magasságával. Így beláttuk, hogy ha a P pontot az AB alapon tetszőlegesen választjuk, akkor a két szártól mért távolság összege mindig ezzel a magassággal egyenlő.

3. Igazoljuk, hogy két merőleges egyenesre való tükrözés egymásutánja helyettesíthető a metszéspontjukra való tükrözéssel!

Megoldás:



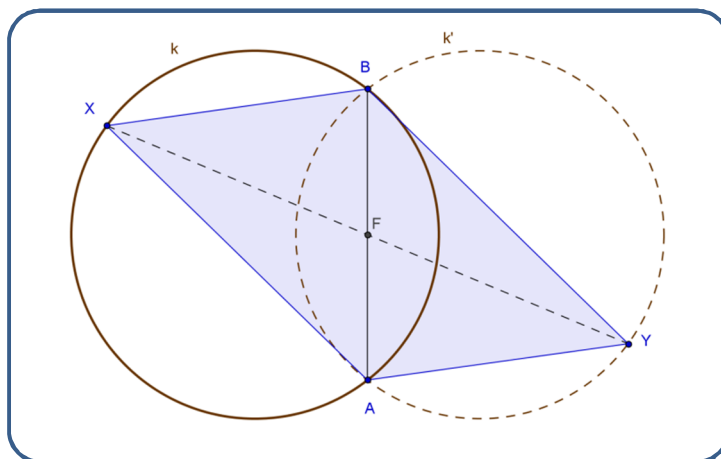
A tengelyes tükrözés miatt $OP = OP' = OP''$ és az azonosan jelölt szögek is egyenlőek. A két tengely szöge 90° , ezért $\alpha + \beta = 90^\circ$, tehát $\angle POP'' = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 180^\circ$. Ez azt jelenti, hogy a P pontból a P'' pontot az tengelyek metszéspontjára való középpontos tükrözéssel is megkaphatjuk. Könnyen megmutatható, hogy ez akkor is igaz, ha a P pont valamelyik tengelyen helyezkedik el. Tehát igaz a feladat állítása.

Megjegyzés:

A megoldásból látható, hogy ha a két tengely φ szöget zár be, akkor a két tengelyre való tükrözés egymás utáni alkalmazása a metszéspont körüli 2φ szögű elforgatással egyenértékű. Ha a tengelyek sorrendjét megcseréljük, akkor az elforgatás iránya ellentétes lesz.

4. Tűzzünk ki egy körön két pontot, A -t és B -t. Fussa be az X pont a kört, és szerkesszük meg minden helyzetben azt az Y pontot, amellyel az Y az $AXBY$ paralelogrammában az X -szel szemközi csúcs lesz. Milyen halmazt alkotnak az Y pontok?

Megoldás:



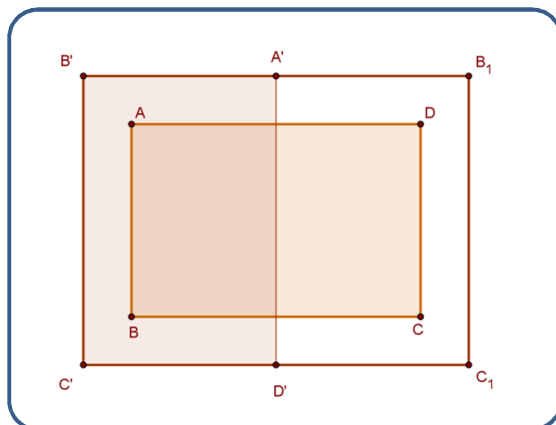
A paralelogramma az átlók metszéspontjára középpontosan szimmetrikus alakzat, ezért ha az X pontot az AB szakasz F felezőpontjára tükrözzük, akkor az Y pontot kapjuk. Az X pont a k körvonalon mozog, ezért az Y pont rajta van a k körvonal F pontra vonatkozó tükörképén, a k' körvonalon. Ha az X pont egybeesik az A vagy B pontokkal, akkor nincs megfelelő paralelogramma. Ha a k' kör tetszőleges A -tól és B -től különböző Y pontját kiválasztjuk, akkor az F pontra tükrözve találunk olyan X pontot, amellyel a feladat feltételei szerint paralelogrammát alkot. Így a keresett ponthalmaz a k' körvonal, kivéve az A és B pontokat.

5. Anna és Béla a következő játékot játssza: egy kör alakú asztalra felváltva egy pénzérmét tesznek. Anna kezd. Az nyer, aki utoljára tud tenni. Kinek van nyerő stratégiája? (Az érmék azonos méretűek, a letett érmék nem fedhetik egymást, elegendő számú érme van.)

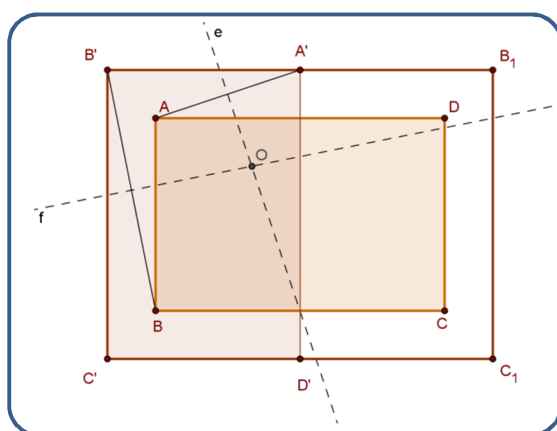
Megoldás:

Anna nyer, ha a következő stratégiát követi: Az első érmét az asztal közepére teszi, majd minden további lépésében a Béla által letett pénzérmének az asztal középpontjára vonatkozó tükörképét választja.

6. Összehajtható, téglalap alakú asztalt akarunk készíteni úgy, hogy az asztallap összehajtván az $ABCD$, derékszöggel elforgatva az $A'B'C'D'$ és szétnyitva a $B_1B'C'C_1$ helyzetet foglalja el. Hová kell elhelyezni a forgástengelyül szolgáló csapszeget?



Megoldás:

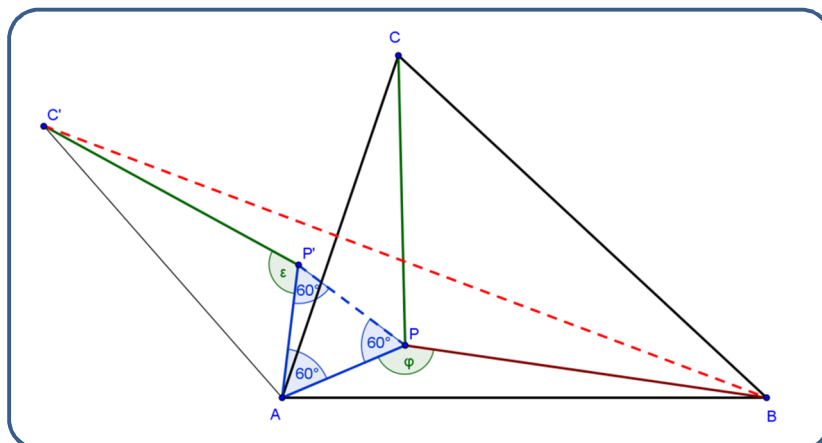


Az elforgatás során az A pont az A' pontba kerül, ezért a forgatás O középpontja egyenlő távol van az A és A' pontoktól, tehát az O pont rajta van az AA' szakasz e felezőmerőlegesén. Hasonlóan a BB' szakasz f felezőmerőlegese is tartalmazza az O pontot, amelyet így az e és f egyenesek metszéspontjaként kapunk meg.

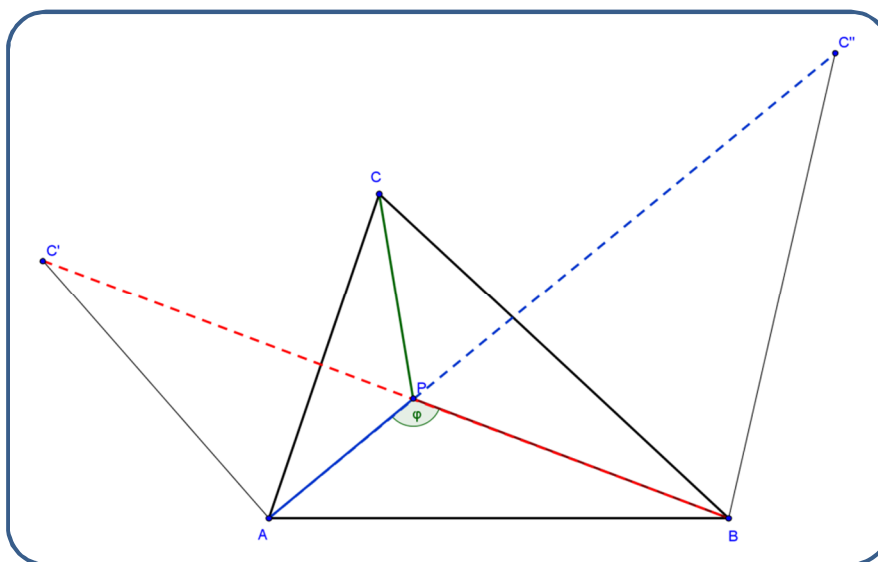
AA' és BB' szakaszok nem párhuzamosak, így az e és f egyeneseknek egy közös pontja van. Az is meggondolható, hogy az O pont az $ABCD$ téglalap belsejébe esik, tehát ott a „gyakorlatban” is elhelyezhetjük a forgástengelyt.

7. Szerkesszük meg az ABC hegyesszögű háromszög belsejében azt a P pontot, amelynek a háromszög csúcsaitól mért távolságösszege a legkisebb!

Megoldás:



Megpróbáljuk egymás után felmérni a PA, PB, PC szakaszokat. Forgassuk el 60° -kal az A pont körül az APC háromszöget, így az $AP'C'$ háromszöget kapjuk. $AP = AP'$ és a bezárt szögük 60° , ezért az APP' háromszög szabályos, tehát $AP = PP'$ is teljesül. Szintén az elforgatás miatt $PC = P'C'$. Az $AP + BP + CP$ hosszúságot előállítottuk a B és C' pontok közötti törött vonalként: $BP + PP' + P'C'$. A P pont választásától függetlenül a kezdő és a végpont, B és C' , azonos, ezért akkor kapjuk a legrövidebb utat, ha a BC' szakaszra illeszkedik a P és P' pont. Ekkor az ábra szerinti ε és φ szögek 120° -kal egyenlők. Tehát olyan pontot kell szerkesztenünk, amelyből a háromszög oldalai 120° -os szögben látszanak.



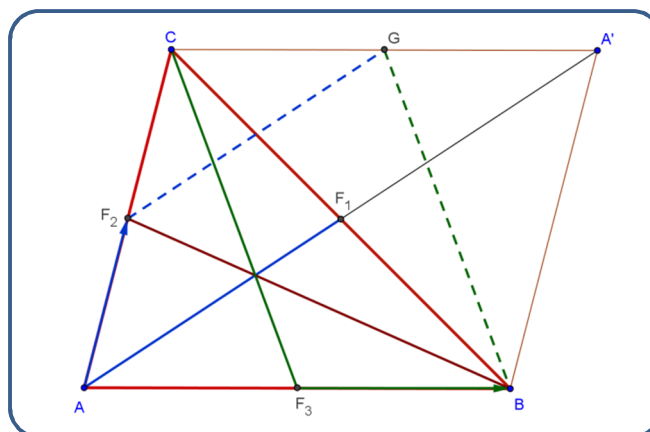
Forgassuk el a C pontot az ábra szerint a B pont körüli 60° -al. Az előzőek szerint a keresett P pont az AC'' szakaszon is rajta van. Tehát a P pontot az AC'' és BC' szakaszok metszéspontja adja.

Megjegyzés:

A P pontot megszerkeszthetjük látókörök segítségével is: az AB és AC szakaszok 120° -os látóköreinek metszéspontját kell megszerkesztenünk.

8. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalait alkalmasan eltolva, azokból háromszög alkotható!

Megoldás:

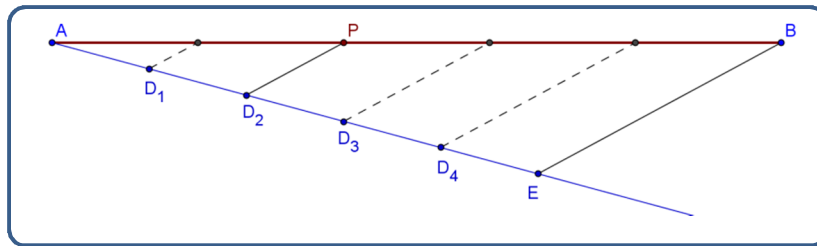


9. Adott két kör és egy e egyenes. Húzzunk az e -vel párhuzamos egyenest olyan módon, hogy a körök által kivágott húrok összege egyenlő legyen egy adott d hosszúsággal!

A megoldások száma attól függ, hogy a k_1 és k'_2 körnek hány közös pontja van. Lehet 0, 1, 2, sőt ha k_1 és k'_2 egybeesik, akkor végtelen sok is. A fenti ábrán két megfelelő szelőt kaptunk.

10. Adott szakaszt osszunk fel olyan részekre, amelyeknek az aránya $1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$.

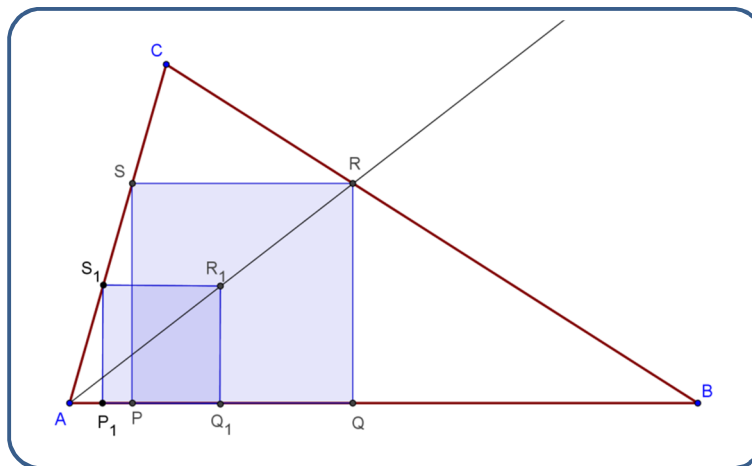
15



A szakaszhoz egy segédegyenest illesztünk, az A pontból a segédegyenesre 5 egyenlő szakaszt mérünk fel. Az ötödik pontot, E -t összekötjük a B ponttal. Az osztópontokon keresztül párhuzamosokat húzunk EB -vel. A párhuzamos szelők tételének alapján az AB szakaszt öt egyenlő részre osztottuk. Az ábra szerinti P pont $2:3 = 1\frac{1}{2}:2\frac{1}{4}$ arányban osztja a szakaszt.

11. Szerkesszünk adott háromszögbe négyzetet úgy, hogy a négyzet csúcsai a háromszög oldalegyenesein legyenek!

Megoldás:



A $PQRS$ négyzetet akarjuk megszerkeszteni. Először egy ehhez hasonló $P_1Q_1R_1S_1$ négyzetet szerkesztünk úgy, hogy az S_1, P_1 és Q_1 pontok a háromszög megfelelő oldalaira kerüljenek. Az A pontból addig nagyítjuk ezt a négyzetet, amíg a negyedik csúcs is a háromszög oldalára kerül. Az R pontot az AR_1 egyenes metszi ki a BC oldalból.

12. Az ABC háromszög oldalainak a hossza $a = 13$ cm, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. Mekkora részekre osztja a c oldalt a C csúcsból induló belső szögfelező? Hol metszi a c oldal egyenesét a C csúcsból induló külső szögfelező!

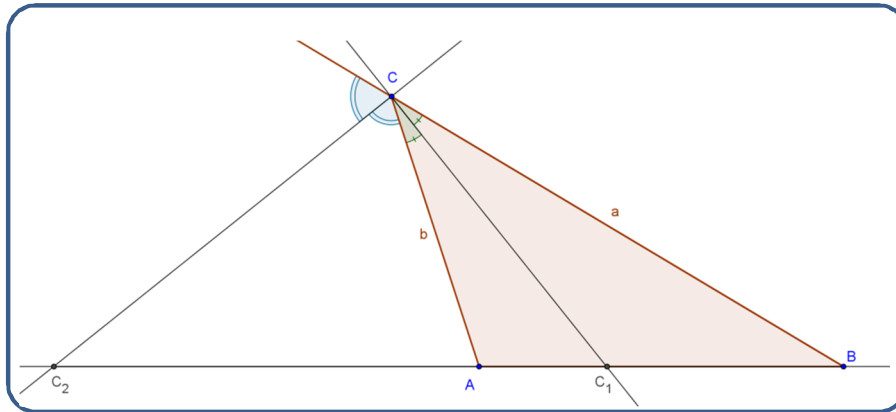
Megoldás:

A belső szögfelező a c oldalt a C_1 pontban, a külső szögfelező a c oldal egyenesét a C_2 pontban metszi. A szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a} = \frac{7}{13} \Rightarrow AC_1 = \frac{7}{20} \cdot 9 = 3,15 \text{ (cm)}; C_1B = \frac{13}{20} \cdot 9 = 5,85 \text{ (cm)}.$$

A külső szögfelezőre hasonló állítás igaz. A C_2 pont az AB szakasz A -n túli meghosszabbításán van:

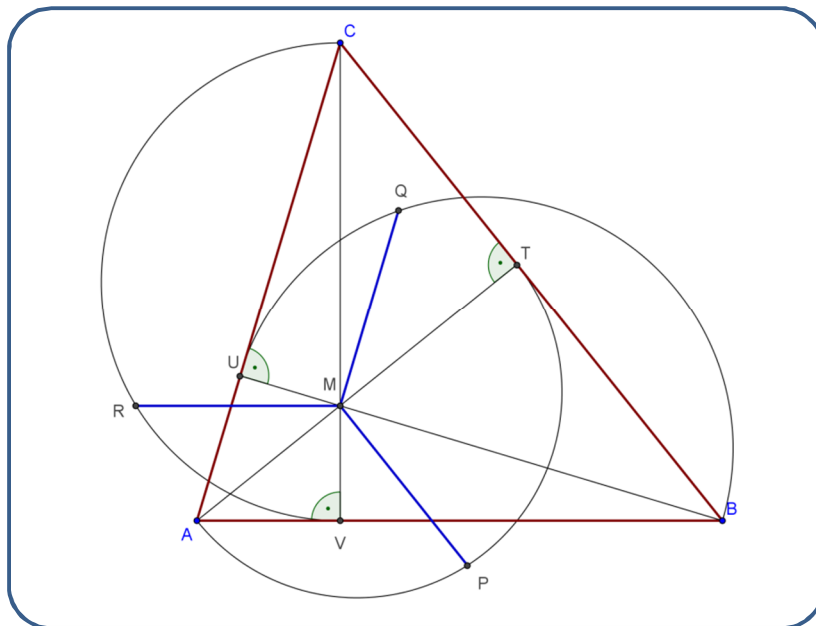
$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{b}{a} = \frac{7}{13} \Rightarrow AC_2 = \frac{7}{13-7} \cdot 9 = 10,5 \text{ (cm)}; C_2B = \frac{13}{13-7} \cdot 9 = 19,5 \text{ (cm)}.$$



13. A hegyesszögű ABC háromszög mindegyik magasságvonala mint átmérő fölé rajzoljunk félkört, s mindegyik félkört metsszük el a háromszög M magasságpontján átmenő és a félkör átmérőjére merőleges egyenessel, a metszéspontok legyenek P ; Q ; R . Bizonyítsuk be, hogy az MP ; MQ ; MR szakaszok egyenlők!

(Érettségi-felvételi feladat; 1976.)

Megoldás:



Megoldás:

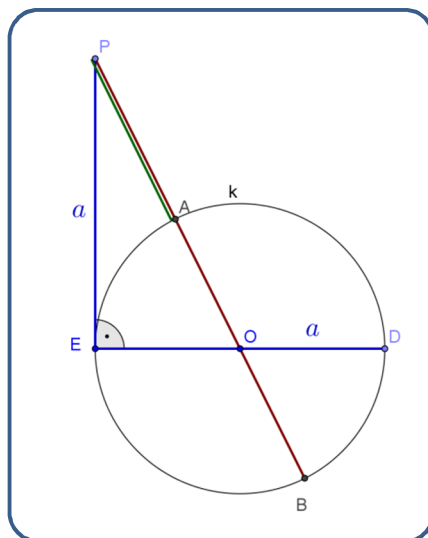
Az APT háromszögben Thalész tétele alapján a P csúcsnál derékszög van, ezért a magasságtétel értelmében $MP^2 = AM \cdot MT$. Hasonlóan $MQ^2 = BM \cdot MU$ és $MR^2 = CM \cdot MV$. Így elég azt bizonyítanunk, hogy $AM \cdot MT = BM \cdot MU = CM \cdot MV$.

Az AMU háromszög hasonló a BMT háromszöghöz, mert derékszögűek és az M csúcsnál lévő szögük egyenlő, hiszen ezek csúcsszögek. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya

megegyezik: $\frac{AM}{MB} = \frac{MU}{MT} \Rightarrow AM \cdot MT = BM \cdot MU$, amit bizonyítani akartunk. Hasonlóan kapjuk a $BM \cdot MU = CM \cdot MV$ egyenlőséget. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

14. Az x szakaszt az a szakasz aranymetszetének nevezzük, ha $a : x = x : (a - x)$. Szerkesszük meg egy adott szakasz aranymetszetét!

I. Megoldás:



Átrendezzük az összefüggést:

$$a^2 - ax = x^2 \Rightarrow a^2 = x \cdot (x + a).$$

Rajzoljunk egy a átmérőjű k kört. A körvonal egy E pontjában szerkesszünk érintőt a körhöz és mérjük rá az a szakaszt. Az érintőszakasz P végpontjából a kör O középpontján át rajzolunk szelőt és jelöljük meg a körrel való metszéspontokat. A szelőtétel értelmében: $a^2 = PA \cdot (PA + a)$, így a PA a keresett x szakasz.

II. Megoldás:

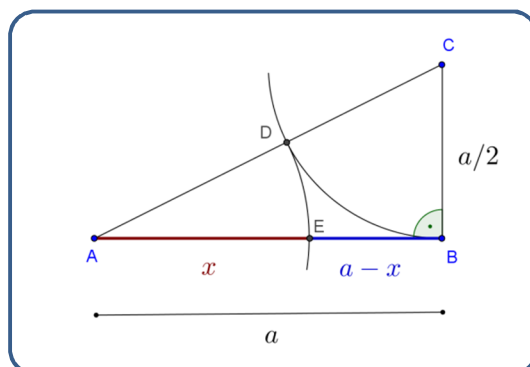
Az összefüggést átrendezve x -re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a pozitív gyöke:

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}a - a}{2} = \frac{\sqrt{5}a}{2} - \frac{a}{2},$$

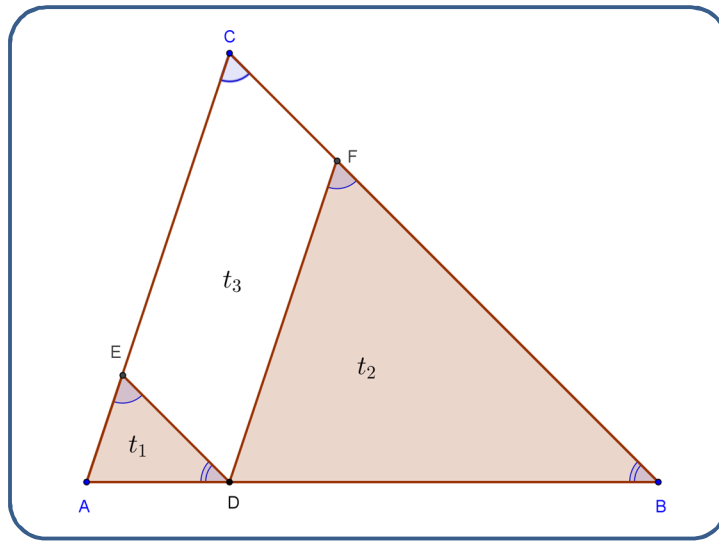
és ez a szakasz megszerkeszthető. $\frac{\sqrt{5}a}{2}$ az átfogója annak a derékszögű háromszögnek, amelynek a két befogója a és $\frac{a}{2}$. Ebből az átfogóból kivonjuk $\frac{a}{2}$ -t és az eredmény leforgatjuk az a szakaszra. Ezzel a szakaszt az aranymetszésnek megfelelően felosztottuk:



Megjegyzés: Az aranymetszéssel a természetben és a művészetekben is gyakran találkozunk. A fenti számításból az $x:(a-x)$ arány $\frac{\sqrt{5}-1}{2} / \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$. Ezt az úgy nevezett aranyarányt szokás ϕ -vel jelölni.

15. Az ABC háromszög AB oldalának egy belső pontján át párhuzamosokat húzunk az AC és BC oldalakkal. A két párhuzamos a háromszöget két háromszögre és egy paralelogrammára bontja. A két háromszög területe t_1 és t_2 . Határozzuk meg az ABC háromszögnek és a keletkezett paralelogrammának a területét!

Megoldás:



Jelöljük az ABC háromszög területét T -vel. Legyen $AD = k \cdot AB$, ahol $0 < k < 1$ valós szám, ekkor $DB = (1 - k) \cdot AB$. A párhuzamosság miatt az egyformán jelzett szögek egyállásúak, ezért egyenlők. A szögek egyenlősége miatt az ABC ; ADE ; DBF háromszögek hasonlóak, a hasonlóság arány k illetve $1 - k$. Hasonló alakzatok területének aránya amegegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, ezt felhasználva:

$$t_1 = k^2 \cdot T \text{ és } t_2 = (1 - k)^2 \cdot T.$$

Ebből kifejezve:

$$k \cdot \sqrt{T} + (1 - k) \cdot \sqrt{T} = \sqrt{T} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2}.$$

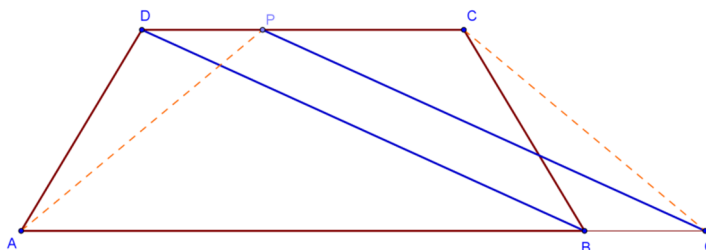
Az ABC háromszög területe:

$$T = (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^2 = t_1 + t_2 + 2 \cdot \sqrt{t_1 \cdot t_2}.$$

Innen látható, hogy az $EDFC$ paralelogramma területe $2 \cdot \sqrt{t_1 \cdot t_2}$. Érdemes észrevenni, hogy az EFC háromszög területe a paralelogramma területének a fele, $\sqrt{t_1 \cdot t_2}$, azaz az ADE és DBF háromszögek területének mértani közepe.

III. Ajánlott feladatok

1. Szerkesszünk két koncentrikus kört metsző egyenest, amelyből a két kör három egyenlő szakaszt metsz ki!
2. Egy hegyesszög szárai között adott egy pont. Szerkesszük meg a ponttól kiinduló és oda visszatérő legrövidebb utat, amely érinti a szögszárakat!
3. Bizonyítsuk be, hogy egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb! (A talpponti háromszög csúcsai a magasságok talppontjai.)
4. Egy egyenlőszárú háromszög alapjának egyik végpontjától kezdve mérjük fel az egyik szárra egy távolságot. A másik szarat hosszabbítsuk meg az alapon túl egy ugyanakkora darabbal. Igazoljuk, hogy az alap felezi az így kapott két pontot összekötő szakaszt!
5. Bizonyítsuk be, hogy egy négyzet két szemközti oldalegyenese közé eső tetszőleges szakasz ugyanakkora, mint a rá bárhol emelt merőlegesnek a másik két oldalegyenes közé eső szakasza!
6. Igazoljuk, hogy két párhuzamos egyenesre való tükrözés egymásutánja helyettesíthető egy eltolással!
7. Tükrözzünk végig egy tetszőleges P pontot egy ötszög oldalfelező pontjaira. Jelöljük a végeredményt P_5 -tel. Bizonyítsuk be, hogy az ötszög egyik csúcsa felezi a PP_5 szakaszt!
8. Az ABC háromszög oldalfelező pontjai a szokásos jelölések szerint A_1, B_1, C_1 . Mutassuk meg, hogy az AB_1C_1, BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszögek beírt- illetve körülírt köreinek a középpontjai által alkotott két háromszög egybevágó!
(Középiskolai Matematikai Lapok 1992, Gy.2762 gyakorlat)
9. Állítsunk merőlegeseket a háromszög egyik csúcsából a másik két csúcsához tartozó szögfelezőkre. Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges talppontja egy egyenesen van!
10. Adott háromszöghöz szerkesszünk hasonlót úgy, hogy a kerülete adott szakasszal legyen egyenlő!
11. Az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = 12$ cm; $CD = 7$ cm, a szárak hossza $BC = 6$ cm, $AD = 5$ cm. A szárakat meghosszabbítjuk, így keletkezik a DCE háromszög. Számítsuk ki a trapéz kiegészítő háromszögének ismeretlen oldalait!
12. Az ABC háromszög CC_1 súlyvonalának C_1 végpontjából szögfelezőket húzunk, melyek a másik két oldalt D illetve E pontban metszik. Bizonyítsuk be, hogy DE párhuzamos az AB -vel!
13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 36° , akkor az alap a szárnak aranymetszete!
14. Toljuk el egy húrtrapéz egyik átlóját a párhuzamos oldalak mentén az ábra szerint. Bizonyítsuk be, hogy $AP = CQ$!

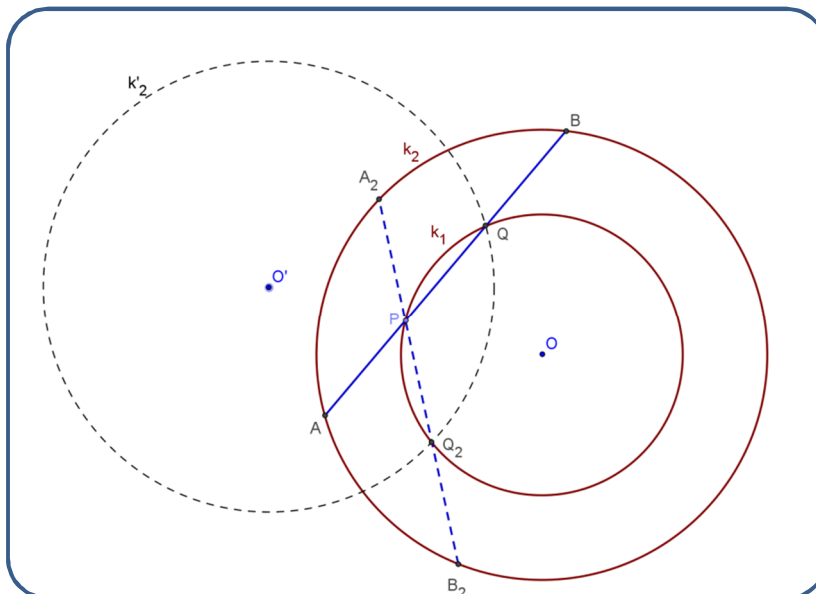


15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonaláiból – mint oldalakból – derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor ez a háromszög hasonló az eredetihez!
(Arany Dániel Matematika Verseny 2003-2004, haladók verseny, I. kategória)

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Szerkesszünk két koncentrikus kört metsző egyenest, amelyből a két kör három egyenlő szakaszt metsz ki!

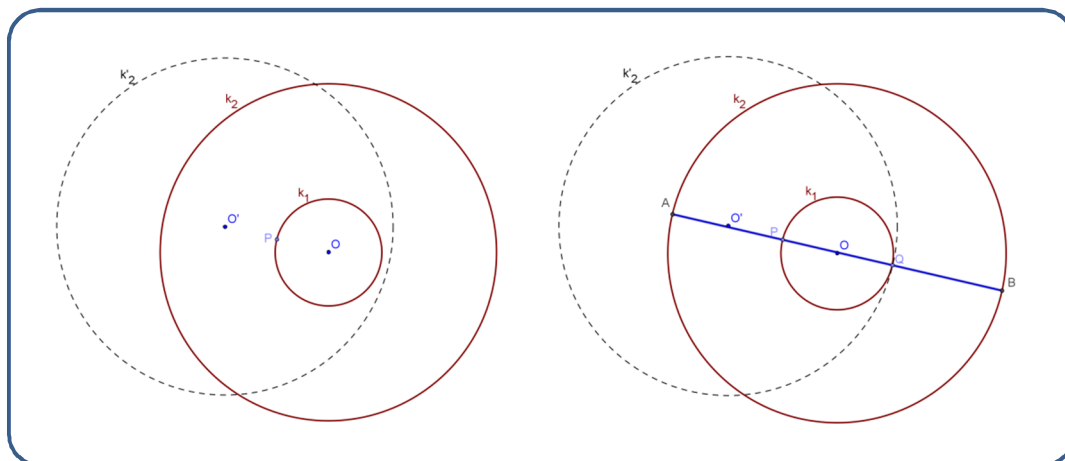
Megoldás:



A húr egy pontja tetszőlegesen megválasztható, legyen ez a pont a k_1 körön lévő P pont. A P -n átmenő AB húr a P és Q pontok harmadolják. Ha P -re tükrözzük az A pontot, akkor a Q pontot kapjuk. Az A pont a k_2 körön van, ezért ha tükrözzük a k_2 kört a P pontra, akkor a k'_2 kör átmegy a Q ponton, tehát k'_2 és k_1 metszéspontjaként megkapjuk a Q pontot. A PQ egyenes kimetszi a k_2 körből az A és B pontokat. Az ábra szimmetrikus az O ponton átmenő, a szelőre merőleges egyenesre, ezért $AP = QB$ is teljesül, tehát az AB szakaszt a P és Q pontok valóban harmadolják. Ha az ábrát tetszőlegesen elforgatjuk az O pont körül, akkor a feladatnak megfelelő szelőket kapunk.

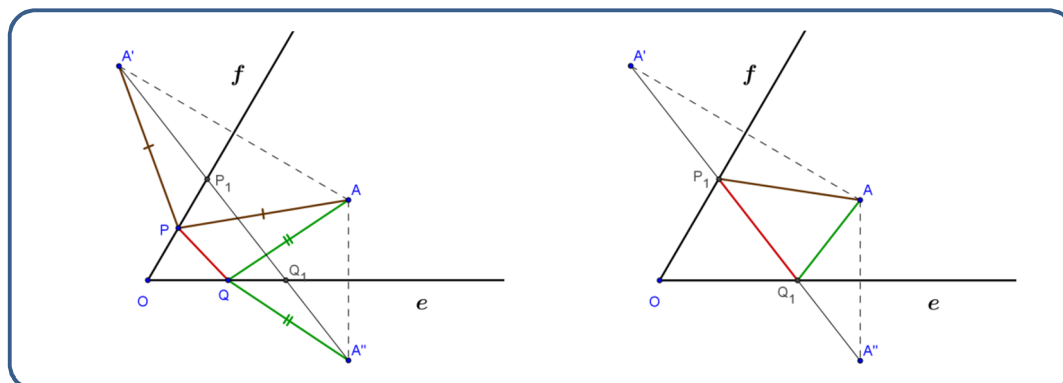
Diszkusszió:

Ha a P pontot rögzítettük, akkor a megoldások száma attól függ, hogy k_1 -nek és k'_2 -nek hány közös pontja van. Ennek megfelelően lehet 0, 1 vagy 2 megoldás. A fenti ábra esetében két megoldást kaptunk. Az alábbi két esetben pedig 0 illetve 1 megoldás van.



2. Egy hegyesszög szárai között adott egy pont. Szerkesszük meg a ponttól kiinduló és oda visszatérő legrövidebb utat, amely érinti a szögszárakat!

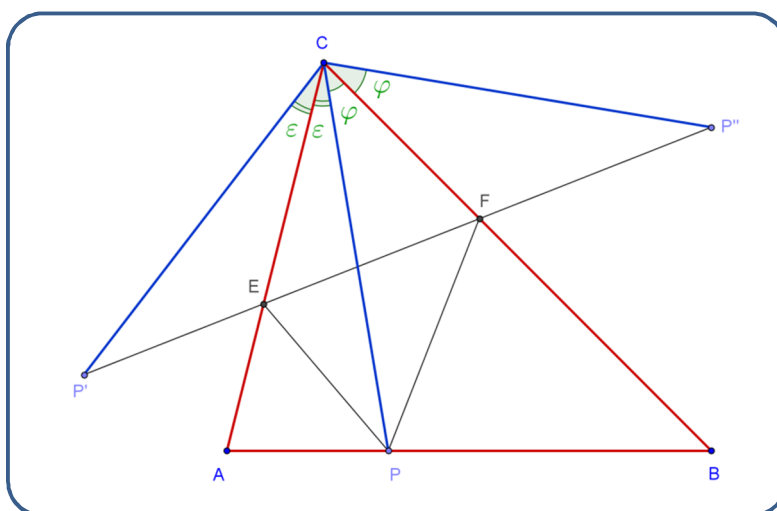
Megoldás:



Az $APQA$ útvonalat szeretnénk minél rövidebbé tenni. Ha az A pontot tükrözzük az f és e szögszárakra, akkor az $A'PQA''$ útvonal hossza a tükrözés miatt megegyezik az előző útvonal hosszával. Az A' és A'' pontok között a legrövidebb út az egyenes szakasz, ezért meghatározzuk az $A'A''$ szakasz és a szögszárak közös pontjait, az ábra szerinti AP_1Q_1A útvonal a legrövidebb.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb! (A talpponti háromszög csúcsai a magasságok talppontjai.)

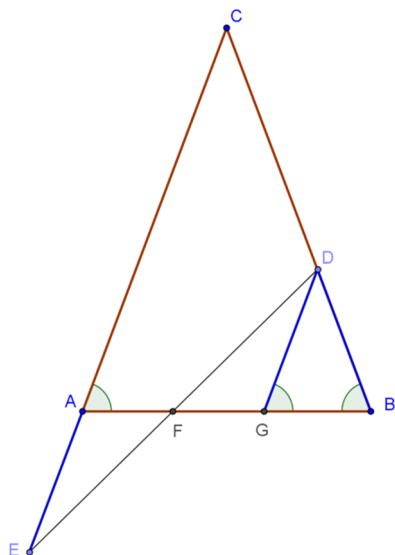
Megoldás:



Ha az AB oldalon kiválasztunk egy P pontot, akkor a 2. ajánlott feladat szerint meg tudjuk szerkeszteni a P ponthoz tartozó legrövidebb kerületű háromszöget, a $P'P''$ szakasz egyenlő ezzel a kerülettel. A tengelyes tükrözés miatt az ábrán jelölt szögek egyenlőek és $CP = CP' = CP''$. Így $P'P''$ egy olyan egyenlő szárú háromszög alapja, amelynek a szárszöge $P'CP'' \angle = 2 \cdot (\varepsilon + \varphi)$, tehát a C csúcsánál lévő szög kétszerese, tehát állandó. A $P'P''$ akkor lesz a legkisebb, amikor az egyenlőszárú háromszög szára, CP a legkisebb. Ez akkor valósul meg, ha a P pont a C -ből induló magasságvonal talppontja. A másik két oldalra ugyanígy tudjuk belátni, hogy a pontot a magasság talppontjának kell választanunk. Ezzel beláttuk, hogy a talpponti háromszög lesz a legkisebb kerületű beírt háromszög.

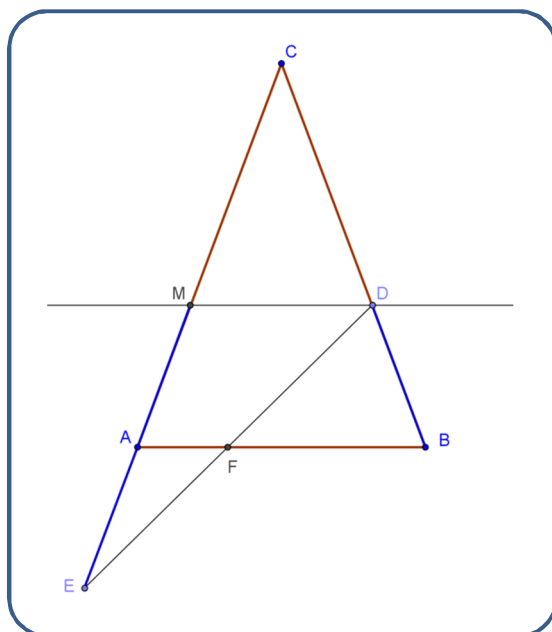
4. Egy egyenlőszárú háromszög alapjának egyik végpontjától kezdve mérjük fel az egyik szárra egy távolságot. A másik szarat hosszabbítjuk meg az alapon túl egy ugyanakkora darabbal. Igazoljuk, hogy az alap felezi az így kapott két pontot összekötő szakaszt!

I. Megoldás:



Az ABC egyenlőszárú háromszög száraitra az AE és BD egyenlő szakaszokat mértük fel. Párhuzamost húzunk az AC oldallal a D ponton keresztül, így kapjuk az alapon a G pontot. Az egyenlőszárú háromszög alapján fekvő szögek egyenlőek, az A és G pontoknál lévő szögek pedig egyállású szögek, így szintén egyenlőek. Az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlősége miatt a GBD háromszög egyenlőszárú, tehát $GD = BD = AE$, továbbá $GD \parallel AE$. Ezek alapján $AEGD$ négyszög paralelogramma, tehát az átlók metszéspontjára középpontosan szimmetrikus, azaz $EF = FD$.

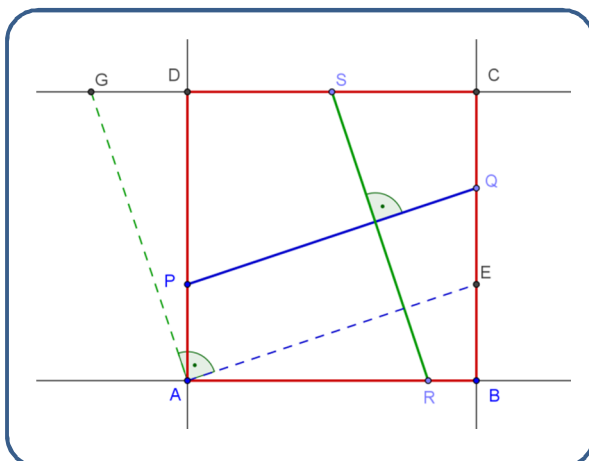
II. Megoldás:



A D ponton keresztül párhuzamost húzunk az AB alappal, ami a háromszög másik szárát az M pontban metszi. Az egyenlő szárú háromszög szimmetriája miatt $AM = BD = AE$. Az A pont az EM szakasz felezőpontja, $AF \parallel MD$, így a párhuzamos szelők tétele értelmében az F pont felezi az ED szakaszt.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy négyzet két szemközti oldalegyenese közé eső tetszőleges szakasz ugyanakkora, mint a rá bárhol emelt merőlegesnek a másik két oldalegyenes közé eső szakasza!

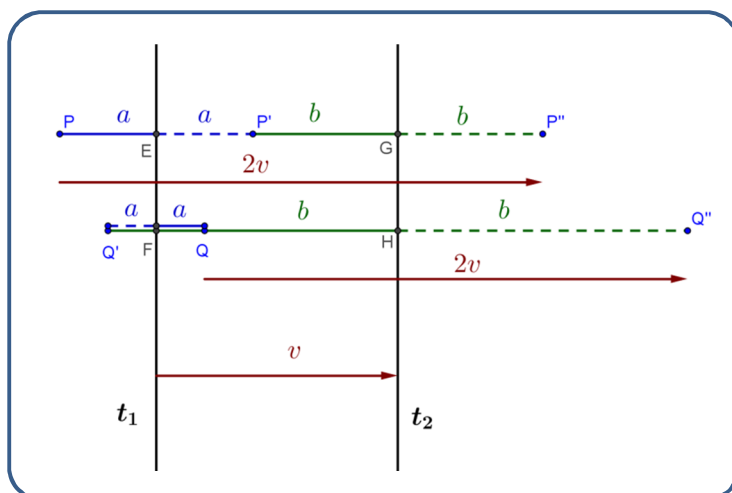
Megoldás:



A PQ és RS egymásra merőleges szakaszok. Ezeket a szakaszokat az ábra szerint eltoljuk a négyzet A csúcsába, így az AE illetve AG szakaszokat kapjuk, amelyek szintén merőlegesek egymásra. Az E pont az AE és CB egyenesek metszéspontja. Ha az AE egyenest az A pont körül $+90^\circ$ -kal elforgatjuk, akkor az AG egyenest, ha a CB egyenest forgatjuk el ugyanígy, akkor a CD egyenest kapjuk. Így a forgatás során az E pont képe a G pont lesz. Ez azt jelenti, hogy az AE szakasz képe AG , tehát egyenlő hosszúak.

6. Igazoljuk, hogy két párhuzamos egyenesre való tükrözés egymásutánja helyettesíthető egy eltolással!

Megoldás:

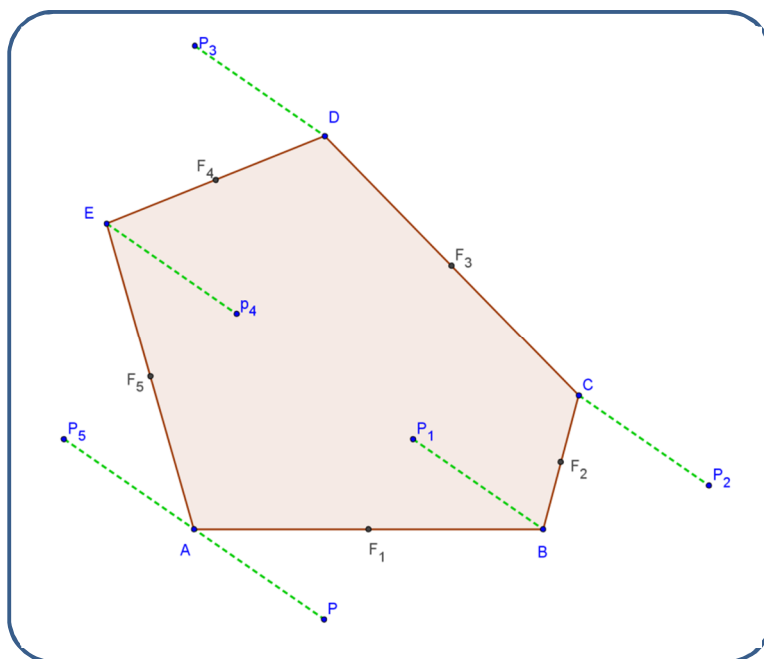


Ha a P pontot tükrözzük a t_1 majd a t_2 egyenesekre, akkor a tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt az azonos betűvel jelölt szakaszok egyenlőek, így $PP'' = 2 \cdot (a + b)$. Az $a + b$ távolság egyenlő a két tengely távolságával. PP'' iránya merőleges a tengelyekre. Az ábrán jelölt v vektor merőleges a tengelyekre, hossza a tengelyek távolságával egyezik meg, iránya t_1 -től t_2 felé mutat.

Ekkor $\overrightarrow{PP''} = 2\mathbf{v}$. Ha a Q pont a két tengely között van, akkor $\overrightarrow{QQ''} = 2 \cdot (b - a) = 2\mathbf{v}$ szintén teljesül. Meggondolható, ha a pont a t_2 túloldalán található, akkor is igaz, hogy a képpont $2\mathbf{v}$ vektornak megfelelő távolsága van az eredeti ponttól. Így kimondhatjuk, hogy a két párhuzamos tengelyre való tükrözés egymás utáni alkalmazása egy a tengelyek irányára merőleges, a tengelyek távolságának kétszeresével történő eltolással egyenértékű.

7. Tükrözzünk végig egy tetszőleges P pontot egy ötszög oldalfelező pontjaira. Jelöljük a végeredményt P_5 -tel. Bizonyítsuk be, hogy az ötszög egyik csúcsa felezi a PP_5 szakaszt!

Megoldás:

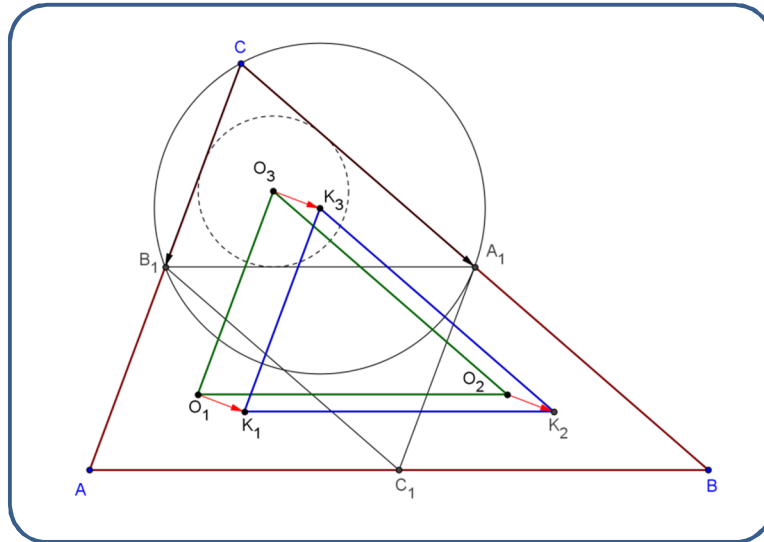


Az ötszög oldalfelező pontjai $F_1; F_2; F_3; F_4; F_5$. Az AP szakaszt az oldalfelező pontokra tükrözve a $BP_1; CP_2; DP_3; EP_4; AP_5$ szakaszokat kapjuk. A középpontos tükrözés tulajdonságai miatt ezek a szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Az egymás után következő szakaszok ellentétes irányúak ($\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{BP_1} \dots$), így az AP és az AP_5 szakaszok egy egyenesre esnek, de ellentétes irányúak. Ez éppen azt jelenti, hogy az A pont felezi a PP_5 szakaszt.

8. Az ABC háromszög oldalfelező pontjai a szokásos jelölések szerint A_1, B_1, C_1 . Mutassuk meg, hogy az AB_1C_1, BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszögek beírt- illetve körülírt köreinek a középpontjai által alkotott két háromszög egybevágó!
(Középiskolai Matematikai Lapok 1992, Gy.2762 gyakorlat)

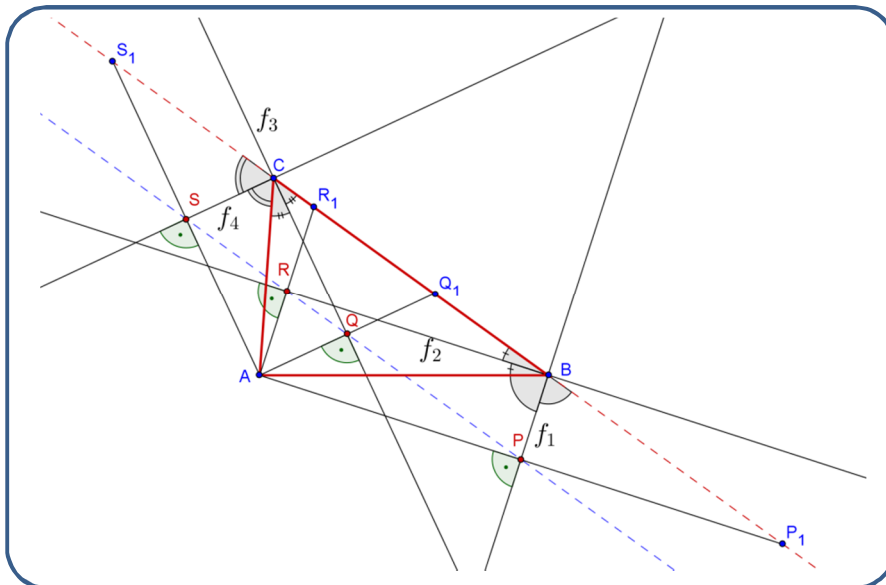
Megoldás:

Az AB_1C_1, BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszögek egyállású, egybevágó háromszögek, ezért a beírt körök középpontjaiból a körülírt körök középpontjaiba mutató vektorok megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy a beírt körök középpontjai által alkotott $O_1O_2O_3$ háromszögből a körülírt körök középpontjai által alkotott $K_1K_2K_3$ háromszöget az $\overrightarrow{O_1K_1} = \overrightarrow{O_2K_2} = \overrightarrow{O_3K_3}$ vektorral eltolva kapjuk meg, tehát a két háromszög egybevágó.



9. Állítsunk merőlegeseket a háromszög egyik csúcsából a másik két csúshoz tartozó szögfelezőkre. Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges talppontja egy egyenesen van!

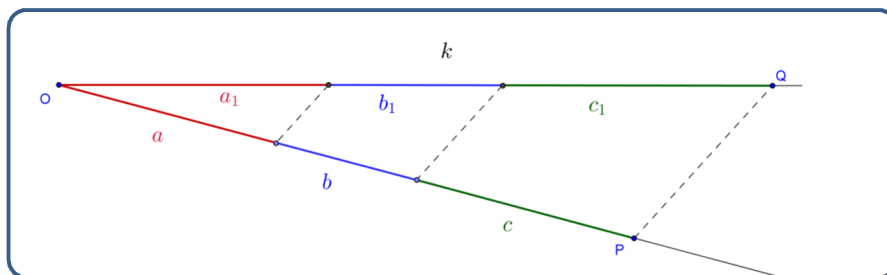
Megoldás:



Az A pontot tükrözzük az f_1, f_2, f_3, f_4 szögfelezőkre. Ekkor a P_1, R_1, Q_1, S_1 pontokat kapjuk. A szögfelező tulajdonsága miatt, ha az AB egyenest az f_1, f_2 szögfelezőkre tükrözzük, akkor a BC egyenest kapjuk, így a P_1 és R_1 pontok a BC egyenes pontjai. Ha az AC egyenest az f_3, f_4 szögfelezőkre tükrözzük, akkor is a BC egyenest kapjuk, tehát a Q_1, S_1 pontok is BC egyenesre illeszkednek. A szögfelezőkre bocsátott merőlegesek talppontjai a P, Q, R, S pontok. Ezeket a P_1, R_1, Q_1, S_1 pontokból A középpontú, $1/2$ arányú kicsinyítéssel kapjuk meg. A középpontos hasonlóság alkalmazásakor egyenes képe egyenes, így a P, Q, R, S pontok is egy egyenesen vannak. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

10. Adott háromszöghöz szerkesszünk hasonlót úgy, hogy a kerülete adott szakasszal legyen egyenlő!

Megoldás:



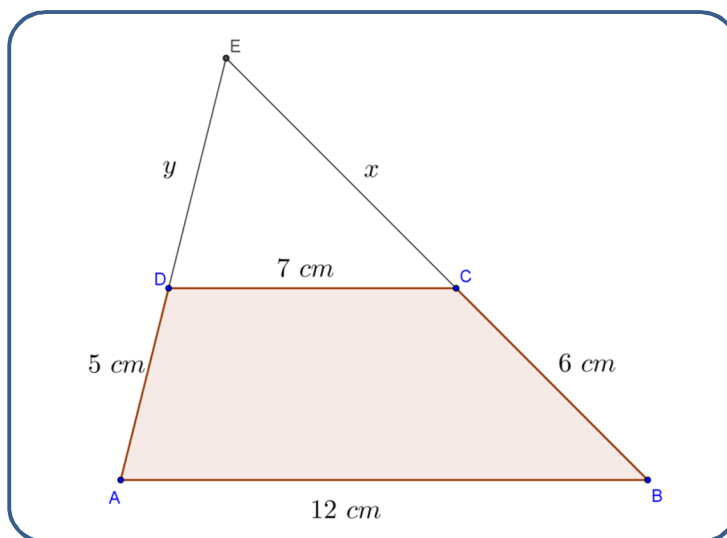
Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért az adott kerületet az adott oldalak arányában kell felosztanunk. Egy szög egyik szárára felmérjük az adott kerületet, a másik szárára az adott háromszög a, b, c oldalát. A P és Q pontokat összekötjük, az osztópontokon keresztül párhuzamosokat húzunk a PQ egyenessel. A párhuzamos szelők tétele szerint:

$$a_1 : b_1 : c_1 = a : b : c.$$

Ennek megfelelően a keresett háromszög oldalai a_1, b_1, c_1 , ezekkel az oldalakkal megszerkesztjük a háromszöget.

11. Az ABCD trapéz alapjai $AB=12$ cm; $CD=7$ cm, a szárak hossza $BC=6$ cm, $AD=5$ cm. A szárakat meghosszabbítjuk, így keletkezik a DCE háromszög. Számítsuk ki a trapéz kiegészítő háromszögének ismeretlen oldalait!

Megoldás:



A párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint:

$$\frac{x}{x+6} = \frac{7}{12}$$

$$12x = 7x + 42$$

$$x = 8,4 \text{ cm}$$

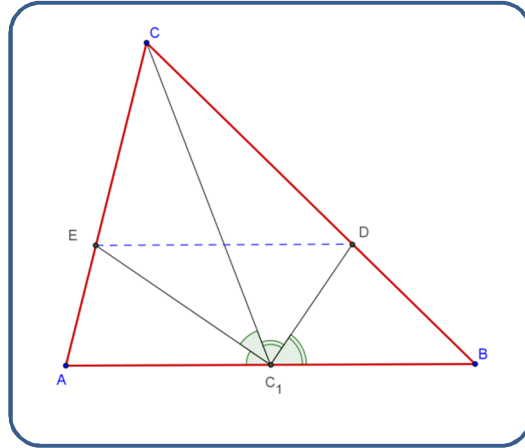
$$\frac{y}{y+5} = \frac{7}{12}$$

$$12y = 7y + 35$$

$$y = 7 \text{ cm}$$

12. Az ABC háromszög CC_1 súlyvonalának C_1 végpontjából szögfelezőket húzunk, melyek a másik két oldalt D illetve E pontban metszik. Bizonyítsuk be, hogy DE párhuzamos az AB-vel!

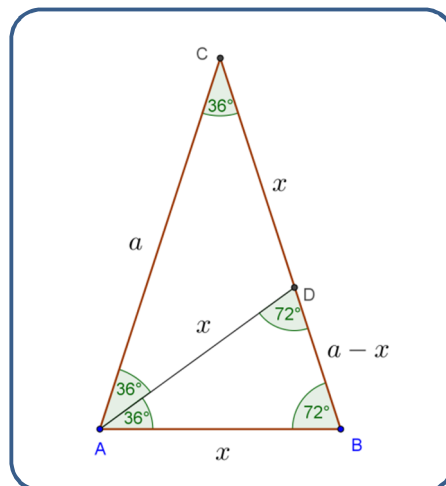
Megoldás:



C_1 az AB oldal felezőpontja, így a szögfelezőtétel alapján $AE:EC = AC_1:CC_1 = C_1B:CC_1 = BD:DC$. Ekkor $CE:CA = CD:CB$ is teljesül, így a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $AB \parallel ED$.

13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 36° , akkor az alap a szárnak aranymetszete!

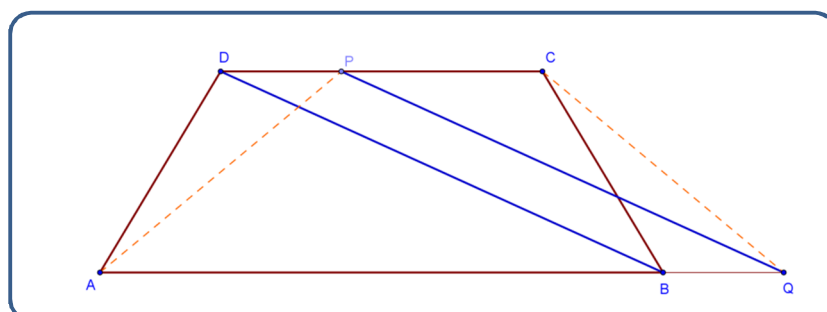
Megoldás:



Az adott háromszög alapon fekvő szögei 72° -osak. Megrajzoljuk az A csúcsnál lévő szög szögfelezőjét, amely a szemben lévő oldalt a D pontban metszi.

$ABC\Delta \sim ABD\Delta$, mert szögeik egyenlőek, ezért a megfelelő oldalak aránya $AC:AB = AB:BD$, azaz $a:x = x:(a-x)$, ami a feladat állítását jelenti.

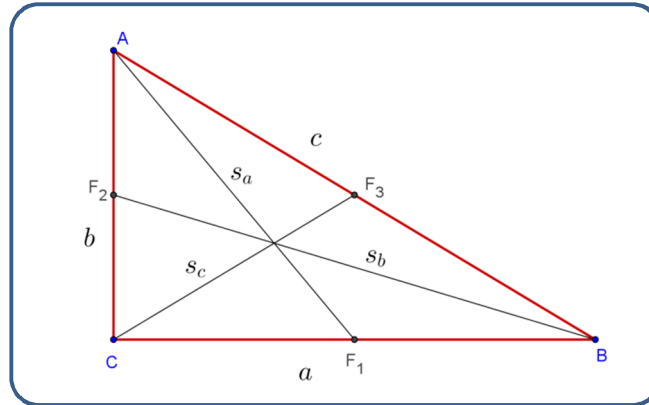
14. Töljük el egy húrtrapéz egyik átlóját a párhuzamos oldalak mentén az ábra szerint. Bizonyítsuk be, hogy $AP = CQ$!



Megoldás:

A trapéz szimmetrikus, ezért $AD = BC$ és $ADP \cong CBQ$. Az eltolás miatt $DP = BQ$. Az ADP és CBQ háromszögnek két oldalpárja és a közbezárt szöge megegyezik, ezért a két háromszög egybevágó, így a harmadik oldaluk is egyenlő, $AP = CQ$.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonaláiból – mint oldalakból – derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor ez a háromszög hasonló az eredetihez!
(Arany Dániel Matematika Verseny 2003-2004, haladók verseny, I. kategória)

Megoldás:

Pitagorasz tétele alapján:

$$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2 + 4b^2}{4}, \quad s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{4a^2 + b^2}{4}.$$

Thalész és Pitagorasz tétele miatt:

$$s_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Ha $a \geq b$, akkor $s_b \geq s_a > s_c$. Ha a súlyvonalakból derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor a háromszögnek van legnagyobb oldala, így $a = b$ nem lehetséges, tehát $s_b > s_a > s_c$. Felírjuk a súlyvonalakra a Pitagorasz tételt:

$$s_b^2 = s_a^2 + s_c^2 \Rightarrow 4a^2 + b^2 = a^2 + 4b^2 + a^2 + b^2.$$

Rendezés után: $a = b\sqrt{2}$, $c = b\sqrt{3}$.

A b oldallal kifejezzük a súlyvonalakat:

$$s_a = \frac{b\sqrt{6}}{2}, \quad s_b = \frac{3b}{2}, \quad s_c = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

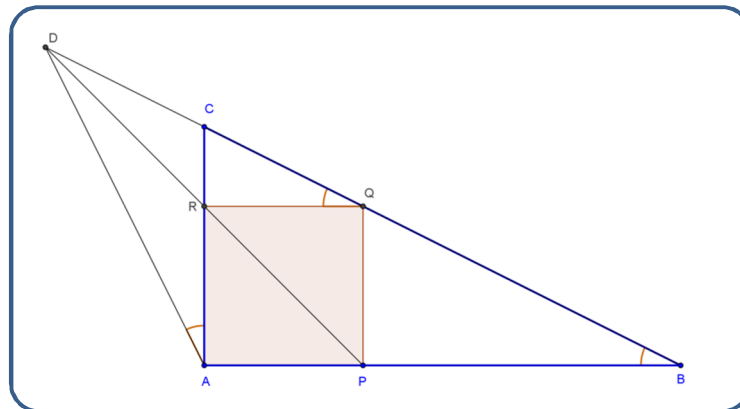
A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{s_a}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{s_c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{s_b}{c} = \frac{3}{2} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

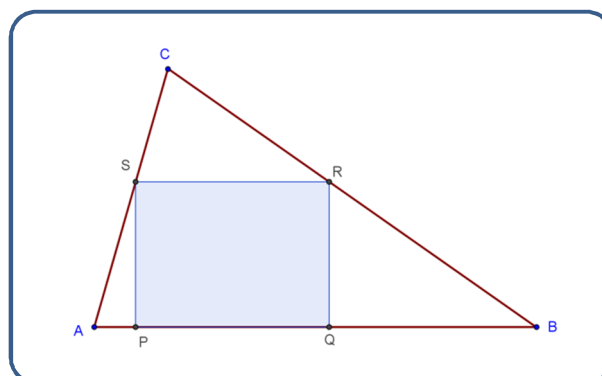
Az oldalak aránya egyenlő, ezért a súlyvonalakból alkotott háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott három (egy ponton átmenő) oldalfelező merőlegese és az egyik oldalegyenes egy pontja!
2. Egy téglalap átlóinak metszéspontján át fektessünk egy tetszőleges egyenest. Ez az AB , illetve CD oldalt a P , illetve Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a legrövidebb út, amely P -től az egyik szomszédos oldalig és onnan Q -ba vezet, egyenlő a téglalap átlójával!
3. Az ábra szerint négyzetet rajzoltunk egy derékszögű háromszögbe, majd meghosszabbítottuk a négyzet átlóját és a háromszög átfogóját, metszéspontjukat pedig összeköttöttük a derékszögű csúccsal. Igazoljuk, hogy a jelölt szögek egyenlőek!



4. Legyen A és B két tetszőleges pont. Tükrözzük a sík egy P pontját az A -ra, majd az eredményt a B -re. Az így nyert pontot P'' -vel jelöljük. Milyen kapcsolat van a P és P'' pontok között?
5. Adott egy pont, egy a ponton átmenő kör és egy egyenes. Forgassuk a pont körül a kört és minden helyzetben szerkesszük meg az egyenessel párhuzamos érintőit. Milyen ponthalmazt alkotnak az érintési pontok?
6. Szerkesszünk adott hegyesszögű háromszögbe téglalapot az ábra szerint, melyben az oldalak aránya 3:4! Mekkora a beírt téglalap oldalai, ha $AB = 12$ cm és a hozzá tartozó magasság 6 cm?



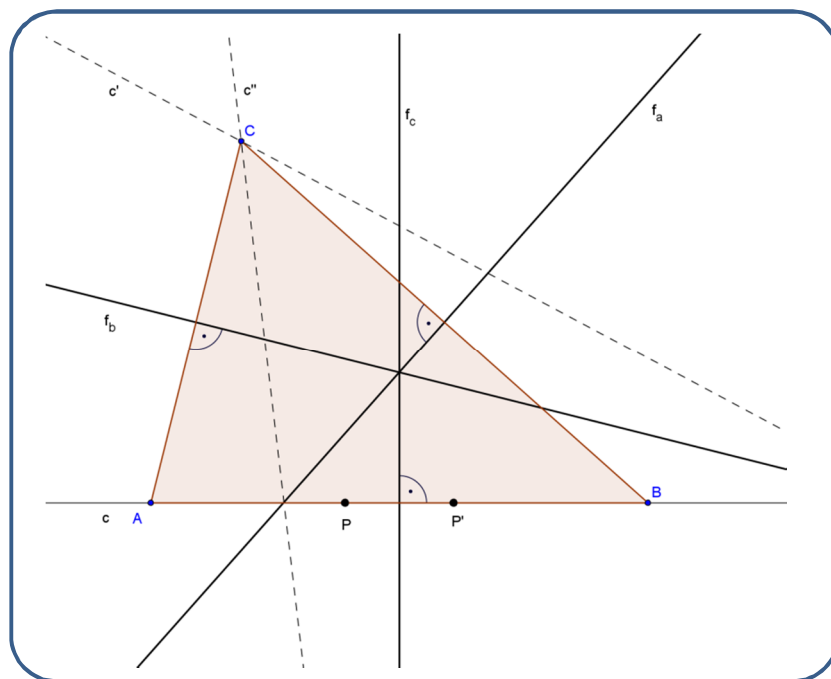
7. Egy derékszögű háromszögben az egyik befogó 10 cm, ennek a vetülete az átfogón 3 cm. Mekkora az átfogó és a másik befogó?

8. Húzzunk két párhuzamos egyenest egy négyzet két átlós csúcsán, és emeljünk ezekre merőlegeseket a másik két csúcsból. Igazoljuk, hogy az így szerkesztett négy egyenes négyzetet határoz meg!
 9. Az AB átmérőjű félkörbe az OA sugár, mint átmérő fölé újabb félkört írunk. Az OA sugár tetszőleges P pontjában merőlegest állítunk az átmérőre. Ez az egyenes a kisebb félkört K -ban, a nagyobb L -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AL^2 = 2AK^2$!
 10. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja 27 egység, beírt körének sugara 9 egység. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti a beírt kört és a háromszög oldalait?
- (Pótlásbeli érettségi-felvételi feladat; 1999.)

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott három (egy ponton átmenő) oldalfelező merőlegese és az egyik oldalegyenes egy pontja!

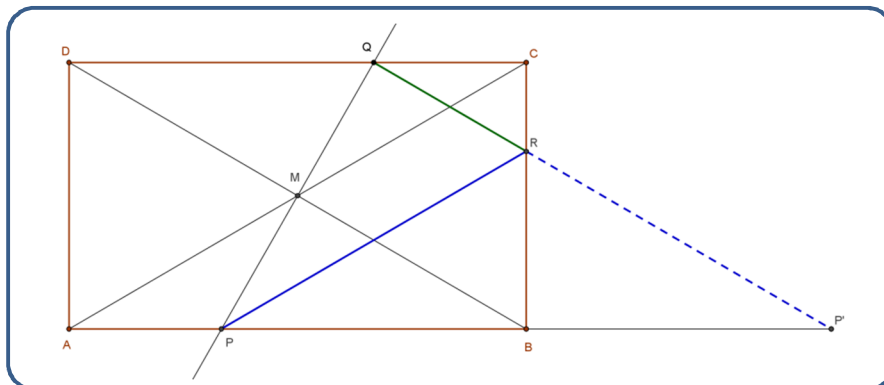
Megoldás:



Az oldalfelező merőlegesek f_a, f_b, f_c , az AB oldal adott pontja P . Ha a P pontot tükrözzük az f_c egyenesre, akkor a P' pont is az AB egyenesen lesz. Összekötjük a PP' pontokat, ezzel megkapjuk a háromszög c oldalegyenesét. Az A pontnak az f_b egyenesre vonatkozó tükörképe a C pont. Az A pont rajta van a c egyenesen, ezért ha a c egyenest tükrözzük f_b -re, a c' tükörkép-egyenes tartalmazza a C pontot. Hasonlóan a B pontnak az f_a egyenesre vonatkozó tükörképe a C pont, így a c egyenest tükrözzük f_a -ra. A tükörkép c'' egyenesen is rajta van a C pont, tehát a c' és c'' egyenesek metszéspontja C . Ha a C pontot tükrözzük f_b -re, akkor az A pontot, ha az f_a -ra, akkor a B pontot kapjuk. Az A, B, C pontokat összekötve megrajzoljuk a háromszöget. Még két további megoldást kaphatunk, ha az AB oldal szakaszfelező merőlegeseinek a másik két adott egyenest választjuk.

2. Egy téglalap átlóinak metszéspontján át fektessünk egy tetszőleges egyenest. Ez az AB , illetve CD oldalt a P , illetve Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a legrövidebb út, amely P -től az egyik szomszédos oldalig és onnan Q -ba vezet, egyenlő a téglalap átlójával!

Megoldás:

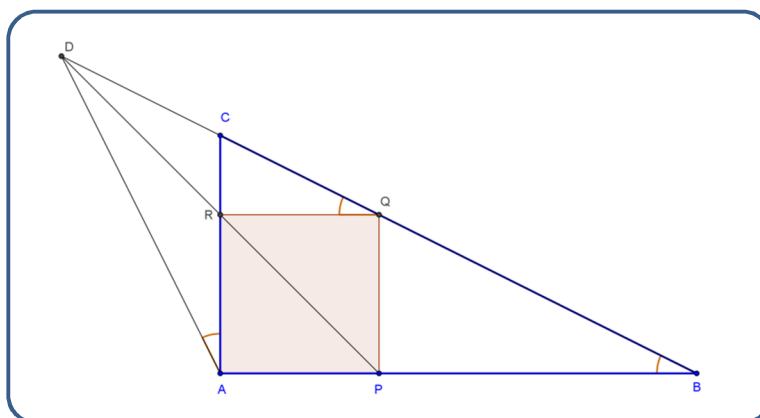


A 2. ajánlott feladatban leírt módszer alapján a BC oldalt érintő P -ből Q -ba vezető legrövidebb utat így szerkesztjük meg:

P -t tükrözzük a BC oldalra. P' -t összekötjük Q -val. A BC oldal és $P'Q$ metszéspontja R . A PRQ útvonal a keresett legrövidebb távolság. A tengelyes tükrözés miatt ez az útvonal egyenlő hosszú a $P'Q$ szakasszal.

Tengelyesen tükröztünk, ezért $PB = BP'$. Az M pont a téglalap középpontja, ezért a DQ szakasz M -re vonatkozó középpontos tükröképe PB , tehát $DQ = PB = BP'$. A téglalap szemben lévő oldalai párhuzamosak. Ezekből következik, hogy DQ és BP' párhuzamos és egyenlő, így $BP'QD$ négyszög paralelogramma. A paralelogramma szemben lévő oldalai, DB és QP' egyenlőek, ebből következik a bizonyítandó állítás.

3. Az ábra szerint négyzetet rajzoltunk egy derékszögű háromszögbe, majd meghosszabbítottuk a négyzet átlóját és a háromszög átfogóját, metszéspontjukat pedig összekötöttük a derékszögű csúccsal. Igazoljuk, hogy a jelölt szögek egyenlőek!



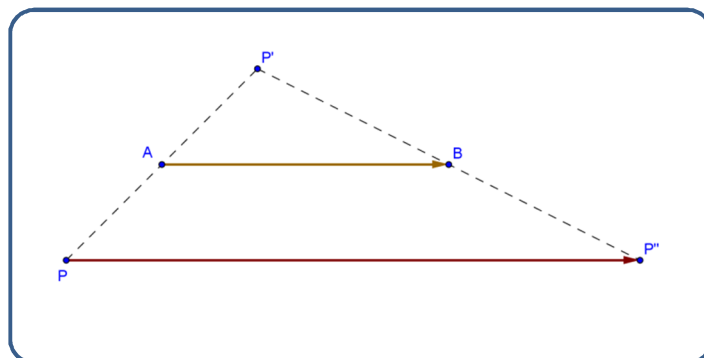
Megoldás:

A DP egyenes a négyzet átlójára illeszkedik, ezért a négyzet szimmetriatengelye. Az A pont és a Q pont egymás tükröképe. A D és R pontok a szimmetriatengelyen vannak, azaz a tengelyes tükrözés fixpontjai. Ezek alapján ha az RQD -et a DP egyenesre tükrözzük, az RAD -et kapjuk. Ez

bizonyítja, hogy a két szög egyenlő. $RQD\angle$ és $PBQ\angle$ pedig egyállású szögek, tehát szintén egyenlők.

4. Legyen A és B két tetszőleges pont. Tükrözzük a sík egy P pontját az A -ra, majd az eredményt a B -re. Az így nyert pontot P'' -vel jelöljük. Milyen kapcsolat van a P és P'' pontok között?

Megoldás:



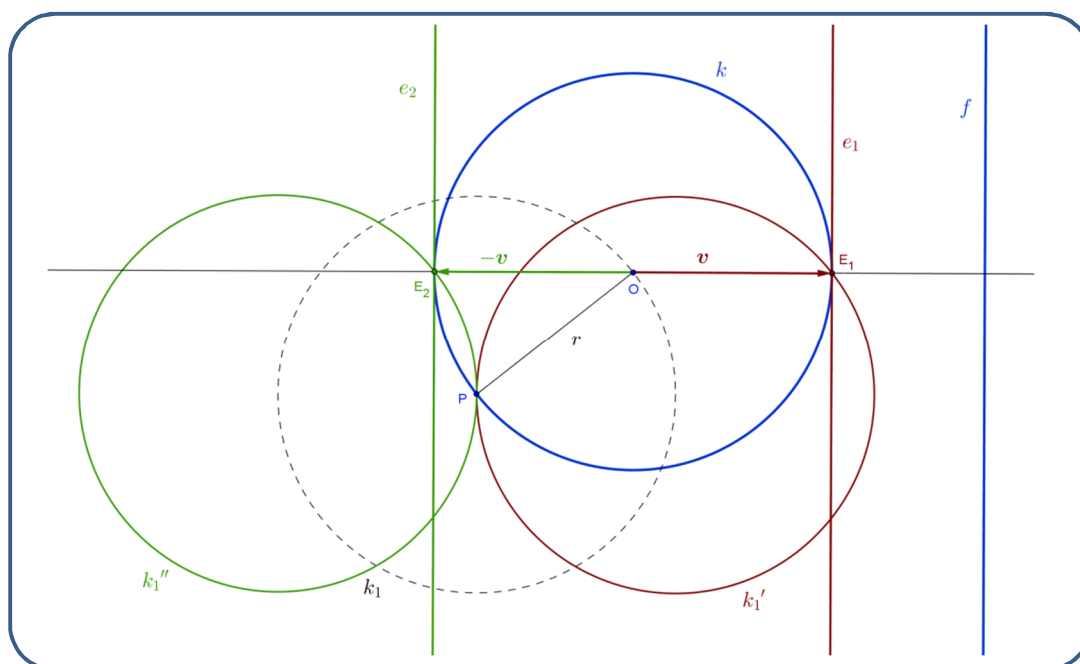
A $PP'P''$ háromszög középvonala az AB szakasz, ezért $PP'' \parallel AB$ és $PP'' = 2 \cdot AB$, tehát $\overrightarrow{PP''} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. Ez abban az esetben is igaz, ha a P pont az AB egyenesre illeszkedik:



Megállapíthatjuk, hogy a két középpontos tükrözés egymás utáni alkalmazása egy eltolással helyettesíthető. Az eltolás iránya a két középpontot összekötő szakasszal párhuzamos, nagysága pedig a szakasz hosszának kétszeresével egyenlő. Ha a tükrözéseket fordított sorrendben végezzük el, akkor az eltolás ellentétes irányú lesz.

5. Adott egy pont, egy a ponton átmenő kör és egy egyenes. Forgassuk a pont körül a kört és minden helyzetben szerkesszük meg az egyenessel párhuzamos érintőit. Milyen ponthalmazt alkotnak az érintési pontok?

Megoldás:

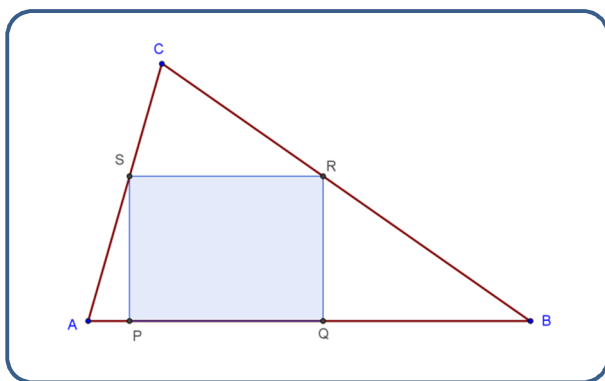


A P ponton átmenő, O középpontú, r sugarú k kört forgatjuk. A k körhöz az f egyenessel párhuzamosan szerkesztünk érintőt. Két ilyen érintő van, e_1 és e_2 , a megfelelő érintési pontok E_1 és E_2 . Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért az $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{v}$ vektor merőleges az f egyenesre és nagysága az r sugárral egyenlő, az $\overrightarrow{OE_2}$ vektor ellentétes irányú, $-\mathbf{v}$. Ha a kört a P pont körül forgatjuk, akkor az O pont a P középpontú, r sugarú k_1 körön mozog. Ennek a körnek a pontjait a $\mathbf{v}$ vektorral kell eltolnunk, hogy a megkapjuk a megfelelő E_1 érintési pontokat, így ezek a pontok a k'_1 körvonalon vannak. Az E_2 pontok halmazát akkor kapjuk meg, ha a k_1 kört $-\mathbf{v}$ vektorral toljuk el, ez a k''_1 körvonal.

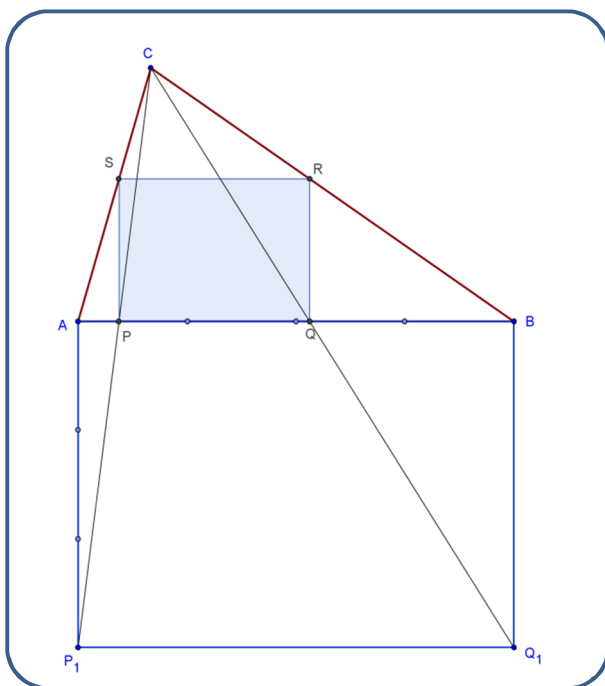
Megmutatható, hogy a k'_1 és k''_1 kör minden pontját megkapjuk érintési pontként a k kör valamelyik helyzetében.

A keresett pontthalmaz $k'_1 \cup k''_1$.

6. Szerkesszen adott hegyesszögű háromszögbe téglalapot az ábra szerint, melyben az oldalak aránya 3:4! Mekkora a beírt téglalap oldalai, ha $AB = 12$ cm és a hozzá tartozó magasság 6 cm?!

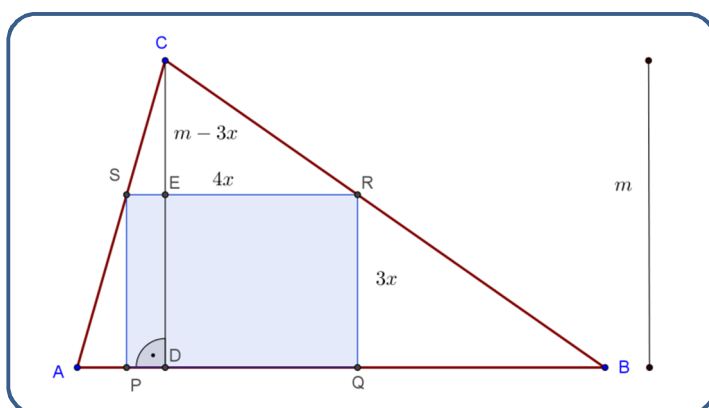


Megoldás:



Az AB szakaszra szerkesztünk egy olyan téglalapot, amelyben az oldalak aránya $AP_1:AB = 3:4$. A téglalapot úgy kicsinyítjük a C pontból, hogy a PQ szakasz az AB oldalra kerüljön: az AB és P_1C szakaszok metszéspontja a P pont, az AB és Q_1C metszéspontja Q . A P ponton keresztül párhuzamost húzunk AP_1 -gyel, ez kimetszi az AC oldalból az S pontot. A Q ponton keresztül BQ_1 párhuzamost húzva kapjuk meg a BC oldalon lévő az R pontot. Ezekkel a lépésekkel az AP_1Q_1B téglalapot kicsinyítettük a C pontból. A középpontos hasonlóság aránytartó, ezért a $PQRS$ téglalap oldalainak aránya 3:4, tehát ez a szerkesztendő téglalap.

(A téglalap a 11. kidolgozott feladat módszerével is megszerkeszthető.)



A téglalap oldalainak arányát figyelembe véve az oldalakat az ábra szerint $3x$ -el illetve $4x$ -el jelöljük. $ABC \triangle \sim SRC \triangle$, mert szögeik egyenlőek. Hasonló háromszögekben a megfelelő szakaszok aránya megegyezik, most egy oldalt és a hozzá tartozó magasságot hasonlítjuk össze:

$$\frac{4x}{AB} = \frac{m - 3x}{m}$$

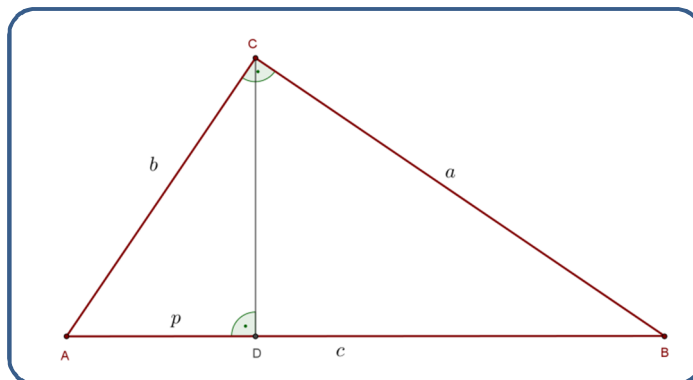
$$\frac{4x}{12} = \frac{6 - 3x}{6}$$

$$4x = 12 - 6x \Rightarrow x = 1,2 \Rightarrow 3x = 3,6 ; 4x = 4,8 .$$

A beírt téglalap oldalainak hossza 3,6 cm és 4,8 cm.

7. Egy derékszögű háromszögben az egyik befogó 10 cm, ennek a vetülete az átfogón 3 cm. Mekkora az átfogó és a másik befogó?

Megoldás:



A befogótétel lapján:

$$b^2 = pc,$$

a feladat adataival: $100 = 3c \Rightarrow c = \frac{100}{3} \approx 33,3$ (cm).

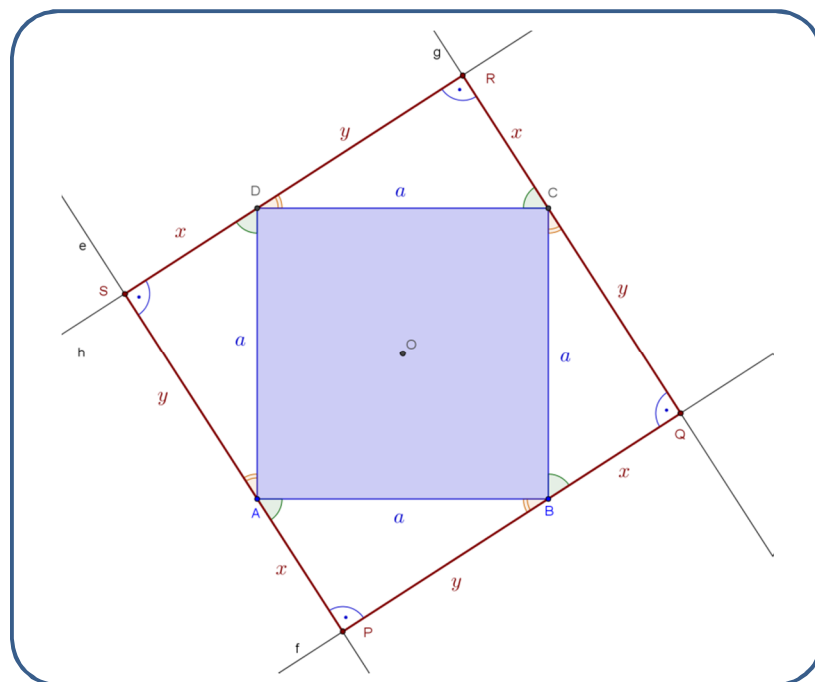
Az a oldalt is kiszámíthatjuk a befogótétel segítségével:

$$a = \sqrt{c \cdot (c - p)} = \sqrt{33,3 \cdot 30,3} = 31,8 \text{ (cm)}.$$

(Az a oldal a Pitagorasz-tétellel is kiszámítható.)

8. Húzzunk két párhuzamos egyenest egy négyzet két átlós csúcsán, és emeljünk ezekre merőlegeseket a másik két csúcsból. Igazoljuk, hogy az így szerkesztett négy egyenes négyzetet határoz meg!

Megoldás:



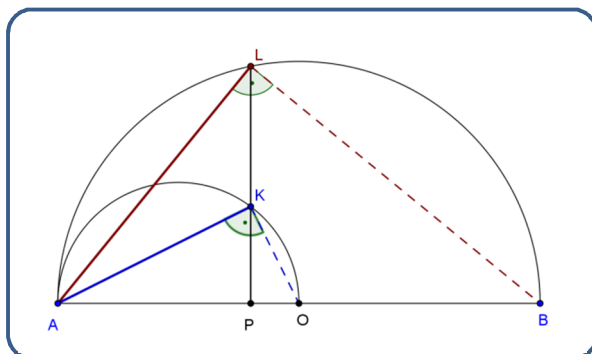
$\angle BAP = \angle CBQ$, mert merőleges szárú szögek. Az azonosan jelölt szögek ugyanezen ok miatt egyenlők. Az $\triangle APB; \triangle BQC; \triangle CRD; \triangle DSA$ háromszögek egybevágók, mert a négyzet a oldalában és az ezen fekvő két szög nagyságában megegyeznek. Az egybevágó háromszögek megfelelő oldalai egyenlők, ezeket az ábrán azonos betűkkel jelöljük: $x; y$. A $PQRS$ négyszög minden szöge derékszög, mindegyik oldala $x + y$, így valóban négyzet keletkezett a feladatban leírt szerkesztéssel.

Megjegyzés:

A feladat állítása bizonyítható azzal a gondolattal is, hogy ha az ábrát az $ABCD$ négyzet középpontja körül 90° -kal elforgatjuk, akkor az ábra önmagával fedésbe kerül, tehát a $PQRS$ négyszög is, így valóban négyzet.

9. Az AB átmérőjű félkörbe az OA sugár, mint átmérő fölé újabb félkört írunk. Az OA sugár tetszőleges P pontjában merőlegest állítunk az átmérőre. Ez az egyenes a kisebb félkört K -ban, a nagyobbat L -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AL^2 = 2AK^2$!

Megoldás:



A Thalész-tétel miatt az AOK háromszögben a K csúcsnál, az ABL háromszögben az L csúcsnál derékszög van, ezért alkalmazhatjuk a befogótételt:

$$AL^2 = AP \cdot AB$$

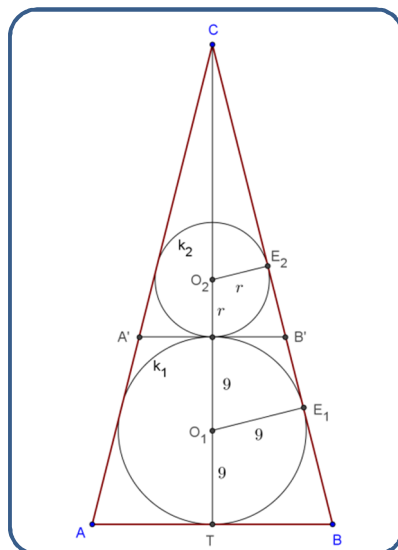
$$AK^2 = AP \cdot AO$$

Az O pont a félkör középpontja, ezért $AB = 2 \cdot AO$, amiből következik a feladat állítása:

$$AL^2 = 2 \cdot AK^2.$$

10. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja 27 egység, beírt körének sugara 9 egység. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti a beírt kört és a háromszög oldalait?
(Pótírásbeli érettségi-felvételi feladat; 1999.)

Megoldás:



A k_1 és a k_2 körök az ábra szerint érintik a háromszög oldalait és egymást, E_1 és E_2 a BC oldalon lévő érintési pontok.

$TBC \triangle \sim O_1E_1C \triangle$, mert egy hegyes szögük közös és derékszögszögűek. Erre a két háromszögre felírjuk a megfelelő oldalak arányát. Ha az $ABC \triangle$ háromszög magasságát m -mel jelöljük:

$$\frac{9}{13,5} = \frac{2}{3} = \frac{m-9}{\sqrt{m^2 + 13,5^2}}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{m^2 - 18m + 81}{m^2 + 13,5^2}$$

$$4m^2 + 729 = 9m^2 - 162m + 729$$

$$5m^2 - 162m = 0$$

Innen $m = 0$ vagy $m = 32,4$. m csak pozitív lehet, ezért $m = 32,4$.

$CO_1E_1 \Delta \sim CO_2E_2 \Delta$, mert a C csúcsnál lévő szögük közös és mindkettő derékszögű. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{r}{9} = \frac{m - 18 - r}{m - 9}.$$

$$rm - 9r = 9m - 162 - 9r$$

Az m -re kapott értéket behelyettesítve:

$$32,4r = 129,6 \Rightarrow r = 4,$$

tehát a k_2 kör sugara 4 egység.