12. Trigonometria I.

I. Elméleti összefoglaló

Szögmérés

A szög mérésének két gyakran használt módja van: **fok**ban, illetve **radián**ban (**ívmérték**ben) mérünk.

A teljesszög $360°$, ennek a 360-ad része az $1°$.

A szög nagyságát mérhetjük az egységsugarú kör kerületén is. Az α szög ívmértéke egyenlő az egységsugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körív hosszával. Az ívmérték egysége az 1 radián. A teljesszöghöz az egységsugarú körben tartozó körív hossza 2π, így a teljesszög ívmértéke 2π.

Tehát a 2π és a $360°$ ugyanazt a szöget méri, az első esetben radiánban, a második esetben fokban mértünk. Így $2\pi\ (rad) = 360°$, $\pi\ (rad) = 180°$.

Ha fokban mért szöget váltunk át radiánra, akkor elegendő azt tudnunk, hogy ez a szög a $180°$-nak hányszorosa, mert ugyanennyiszerese lesz a π-nek is (radiánban). Például a $18°$ a $180°$-nak tizedrésze, ezért $18° = \frac{\pi}{10}\ (rad)$. Ha a szög radiánban mérve $\frac{\pi}{9}$, ez a π-nek kilencede, így fokban mérve a szög a $180°$ kilenced része: $\frac{\pi}{9}\ (rad) = 20°$.

Az átváltások képlete: $\alpha\left(rad\right) = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi$ és $\alpha° = \frac{\alpha\left(rad\right)}{\pi} \cdot 180°$.

Legyünk figyelemmel a fok és a radián használatára. Nem ugyanazt jelenti a $\sin 180$ és a $\sin 180°$.

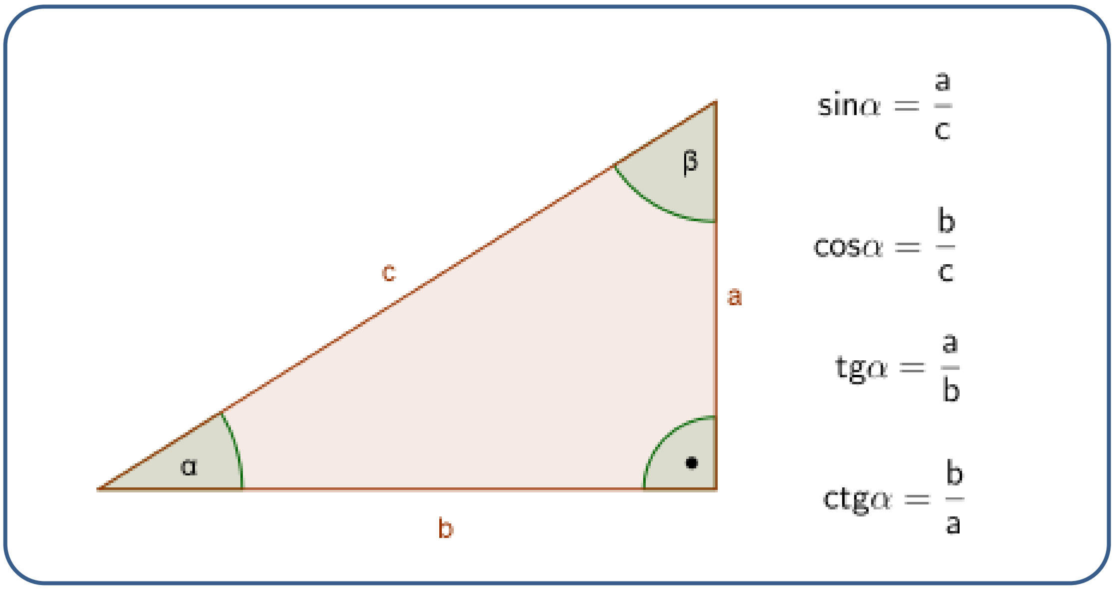
Hegyesszögek szögfüggvényei

Ha két derékszögű háromszögnek ugyanakkora az egyik hegyesszöge, akkor a háromszögek hasonlók. (Hiszen mindkét háromszögnek van még egy derékszöge, így a harmadik szögükben is megegyeznek.) Ezért ha két derékszögű háromszögnek ugyanakkora az egyik hegyesszöge, akkor a két háromszögben bármely két megfelelő oldal aránya ugyanakkora, mindegy, mekkorák az oldalak. Derékszögű háromszögben az oldalak aránya csak a háromszög hegyesszögétől függ.

Ezek az arányok csak az α szögtől függenek, ezért nevezzük ezeket az α szög szögfüggvényeinek. A lehetséges hat arányból négy arányt használunk, ezek az α szög szinusz, koszinusz, tangens és kotangens függvényei.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

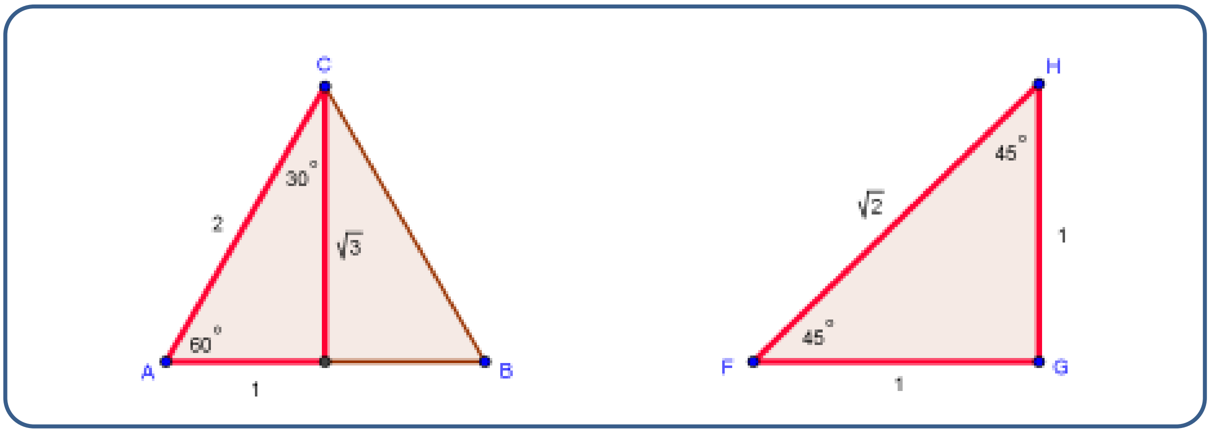
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$



A pótszögek szögfüggvényeit könnyű leolvasni az ábráról $(\beta = 90° - \alpha)$:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Nevezetes szögek szögfüggvényei



Tekintsük a 2 egység oldalú szabályos háromszöget. Az ábráról leolvashatók a $30°$ és a $60°$ szögfüggvényei:

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$$

Vegyünk egy derékszögű háromszöget, melynek a befogói 1 egység hosszúak, az átfogó hossza ekkor $\sqrt{2}$ hosszú. Az ábráról leolvashatjuk a $45°$ szögfüggvényeit:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$$

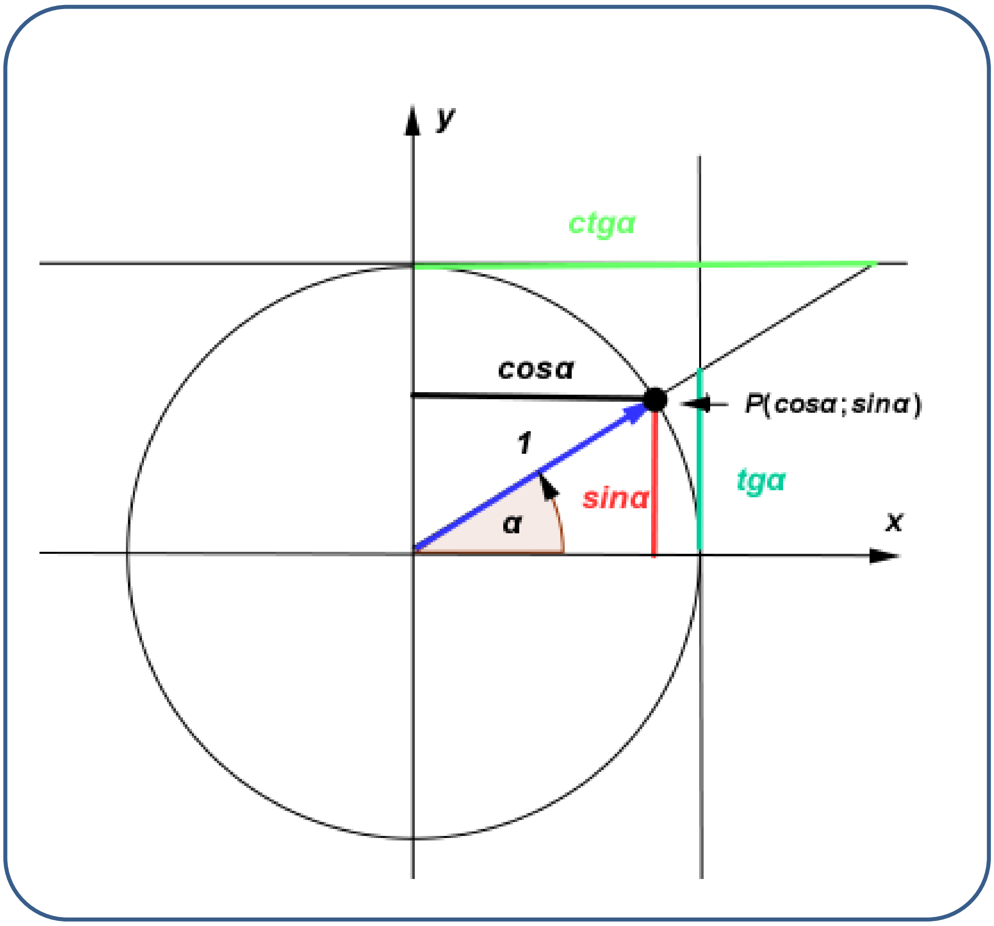
Gyakran használt kapcsolatok a szögfüggvények között:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Szögfüggvények értelmezése forgásszögre

A koordinátarendszer origója körül forgatott egységvektornak az x tengellyel bezárt szögét jelölje α. A $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ szögfüggvényeket ennek az egységvektornak a koordinátáival azonosítjuk, és ezzel a derékszögű háromszögben definiált $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ szögfüggvényeket hegyesszögnél nagyobb szögekre is értelmezzük, összhangban az eddigi definíciókkal. Az α szög ***koszinusza*** az egységvektor első koordinátája; az α szög ***szinusza*** az egységvektor második koordinátája.



Tetszőleges szögekre a tangens és kotangens függvényeket kétféle módon is definiálhatjuk, mely definíciók ekvivalensek.

Az α szög ***tangense*** a koordinátasíkon annak a pontnak a második koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó körüli egységsugarú kör $(1;\, 0)$ pontjához húzott érintőből kimetsz – ezt látjuk az előző oldalon levő ábrán. (A metszéspont akkor létezik, ha $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°,\ k \in Z$.)

Az α szög ***kotangense*** a koordinátasíkon annak a pontnak az első koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó körüli egységsugarú kör $(0;\, 1)$ pontjához húzott érintőből kimetsz – ezt látjuk az előző oldalon levő ábrán. (A metszéspont akkor létezik, ha $\alpha \neq 0° + k \cdot 180°,\ k \in Z$.)

A másik értelmezés:

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ahol $\cos\alpha \neq 0$, azaz $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°,\ k \in Z$.

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, ahol $\sin\alpha \neq 0$, azaz $\alpha \neq 0° + k \cdot 180°,\ k \in Z$.

Ha ismerjük a szögfüggvények értékeit az első síknegyedben, abból ki tudjuk számolni a szögfüggvények értékét más síknegyedben is. Az α szög helyett vegyük azt az α' hegyesszöget, amelyet az α szög az x tengellyel bezár. Az α' szöghöz tartozó függvényérték, vagy annak az ellentettje lesz az α szöghöz tartozó függvényérték.

Negyed	Szög	Hegyesszög	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
I.	$0° < \alpha < 90°$	$\alpha' = \alpha$	$\sin\alpha'$	$\cos\alpha'$	$tg\,\alpha'$	$ctg\,\alpha'$
II.	$90° < \alpha < 180°$	$\alpha' = 180° - \alpha$	$\sin\alpha'$	$-\cos\alpha'$	$-tg\,\alpha'$	$-ctg\,\alpha'$
III.	$180° < \alpha < 270°$	$\alpha' = \alpha - 180°$	$-\sin\alpha'$	$-\cos\alpha'$	$tg\,\alpha'$	$ctg\,\alpha'$
IV.	$270° < \alpha < 360°$	$\alpha' = 360° - \alpha$	$-\sin\alpha'$	$\cos\alpha'$	$-tg\,\alpha'$	$-ctg\,\alpha'$

Példa: Mennyi $\sin 210°$ értéke? A $210°$ a III. síknegyedben van, ez a szög az x tengellyel $30° = 210° - 180°$-os hegyesszöget zár be, így a táblázat szerint $\sin 210° = -\sin 30° = -\dfrac{1}{2}$.

A szögfüggvények értékeit $0°, 90°, 180°, 270°$ szögekre a táblázat mutatja. ($360°$-hoz ugyanolyan függvényértékek tartoznak, mint a $0°$-hoz.)

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
$\alpha = 0°$	0	1	0	Nincs értelmezve.
$\alpha = 90°$	1	0	Nincs értelmezve.	0
$\alpha = 180°$	0	-1	0	Nincs értelmezve.
$\alpha = 270°$	-1	0	Nincs értelmezve.	0

Összefüggések a szögfüggvények között

Az egységvektor $90°$-kal való elforgatása felcseréli a koordinátákat és az egyiknek megváltoztatja az előjelét. Ezt használva láthatóak a következő összefüggések:

$\sin(\alpha + 90°) = \cos\alpha$ $\quad$ $\cos(\alpha + 90°) = -\sin\alpha$

$\sin(\alpha - 90°) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(\alpha - 90°) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha + 90°) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{ctg}(\alpha + 90°) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha - 90°) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{ctg}(\alpha - 90°) = -\operatorname{tg}\alpha$

Az egységvektor $180°$-kal való elforgatása megváltoztatja a koordináták előjelét. Erre gondolva kapjuk a következő összefüggéseket:

$\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha + 180°) = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{ctg}(\alpha + 180°) = \operatorname{ctg}\alpha$

A hegyesszögekre megismert összefüggések (például $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vagy a pótszögek szögfüggvényei) érvényesek a hegyesszögnél nagyobb szögekre is.

Geometriai feladatokban nagy segítséget nyújthatnak a szögfüggvények. Két hasznos összefüggés:

- Ha egy háromszög két oldala *a* és *b*, a közbezárt szög γ, akkor a háromszög területe $t = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$.
- Ha egy háromszög *a* oldalával szemközti szöge α, a köré írt kör sugara *R*, akkor fennáll az $a = 2R \cdot \sin\alpha$ összefüggés.

II. Kidolgozott feladatok

1. Töltse ki a táblázatot! Egy-egy szögnek a nagyságát megadtuk fokban, határozza meg a nagyságát radiánban, illetve fordítva: adott a szög nagysága radiánban, határozza meg, hogy az hány fokos szög!

Fok	Radián	Fok	Radián	Fok	Radián	Fok	Radián
0°		330°			$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
300°		225°			$\frac{7\pi}{6}$		π
27°		90°			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$
315°		132°			$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$

Megoldás: $300°$ a $180°$-nak $\frac{5}{3}$-szorosa, így a $300°$ radiánban mérve a π-nek $\frac{5}{3}$-szorosa. Arányosság helyett kényelmesen számolhatunk az átváltó képletekkel is: $\alpha(rad)=\frac{\alpha°}{180°}\cdot\pi$ és $\alpha°=\frac{\alpha(rad)}{\pi}\cdot 180°$. Például $137°=\frac{137°}{180°}\cdot\pi\approx 2{,}39\,(rad)$, illetve $1{,}23\,(rad)=\frac{1{,}23}{\pi}\cdot 180°\approx 70{,}47°$. A kitöltött táblázat:

Fok	Radián	Fok	Radián	Fok	Radián	Fok	Radián
$0°$	0	$330°$	$\frac{11\pi}{6}\approx 5{,}760$	$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$270°$	$\frac{3\pi}{2}$
$300°$	$\frac{5\pi}{3}\approx 5{,}236$	$225°$	$\frac{5\pi}{4}\approx 3{,}927$	$210°$	$\frac{7\pi}{6}$	$180°$	π
$27°$	$0{,}15\cdot\pi\approx 0{,}471$	$90°$	$\frac{\pi}{2}\approx 1{,}571$	$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$135°$	$\frac{3\pi}{4}$
$315°$	$\frac{7\pi}{4}\approx 5{,}498$	$132°$	$0{,}733\cdot\pi\approx$ $\approx 2{,}304$	$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$30°$	$\frac{\pi}{6}$

2. Mennyi az alábbi kifejezések értéke?

a) $\dfrac{\sin 0°+\sin 1°+\sin 2°+\ldots+\sin 90°}{\cos 0°+\cos 1°+\cos 2°+\ldots+\cos 90°}$

b) $\mathrm{tg}\,1°\cdot\mathrm{tg}\,2°\cdot\mathrm{tg}\,3°\cdot\ldots\cdot\mathrm{tg}\,89°$

c) $(1-\mathrm{tg}\,1°)\cdot(1-\mathrm{tg}\,2°)\cdot(1-\mathrm{tg}\,3°)\cdot\ldots\cdot(1-\mathrm{tg}\,89°)$

d) $\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\ldots+\sin^2 90°$

e) $\cos\frac{5\pi}{4}\cdot\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}$

Megoldás:

a) $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$, így $\sin 0°=\cos 90°$, $\sin 1°=\cos 89°$, $\sin 2°=\cos 88°$, …

A számlálóban és a nevezőben ugyanazon számok összege áll, ezért a tört értéke 1.

b) $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin(90°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$, ezért $\mathrm{tg}\,1°\cdot\mathrm{tg}\,89°=1$, $\mathrm{tg}\,2°\cdot\mathrm{tg}\,88°=1$, $\mathrm{tg}\,3°\cdot\mathrm{tg}\,87°=1$,..., $\mathrm{tg}\,44°\cdot\mathrm{tg}\,46°=1$ és $\mathrm{tg}\,45°=1$, a szorzat értéke 1.

c) $1-\mathrm{tg}\,45°=0$, tehát a szorzat értéke 0 lesz.

d) $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ és $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ miatt

$\sin^2 10°+\sin^2 80°=\sin^2 10°+\cos^2 10°=1$,

$\sin^2 20°+\sin^2 70°=\sin^2 20°+\cos^2 20°=1$,

$\sin^2 30°+\sin^2 60°=\sin^2 30°+\cos^2 30°=1$,

$\sin^2 40°+\sin^2 50°=\sin^2 40°+\cos^2 40°=1$ és $\sin^2 90°=1$.

Ezért az összeg $1+1+1+1+1=5$.

e) $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, ezért a szorzat értéke 0.

3. Mekkora lehet $\sin\alpha$ értéke, ha $\operatorname{ctg}\alpha = 3$?

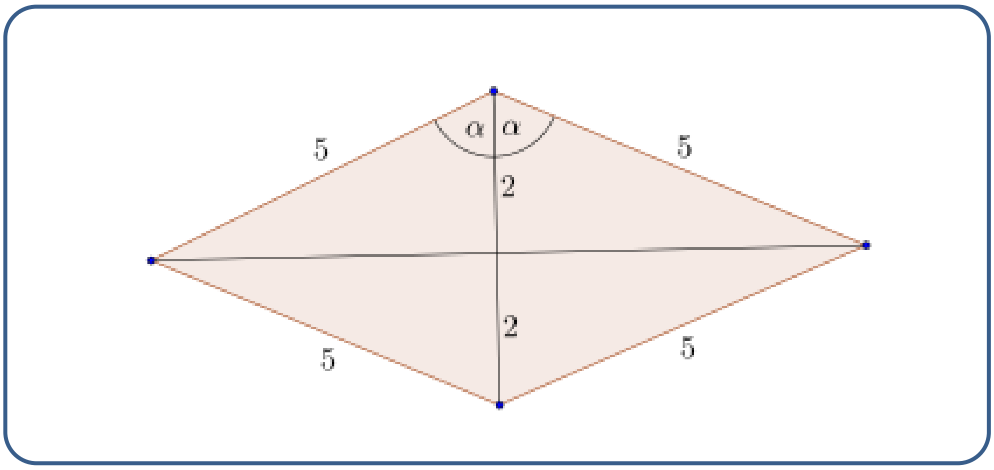
I. Megoldás: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 3$, azaz $\cos\alpha = 3\sin\alpha$. Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, így $\sin^2\alpha + (3\sin\alpha)^2 = 1$, innen $\sin^2\alpha = \frac{1}{10}$, $\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$.

II. Megoldás: Tegyük fel, hogy α hegyesszög, majd vegyünk fel egy 1 és 3 egység befogójú, α hegyesszögű derékszögű háromszöget. Ennek átfogója a Pitagorasz-tétel alapján $\sqrt{10}$, innen definíció alapján leolvashatók a keresett szögfüggvényérték, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

A $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + 180°)$ tulajdonság miatt még a III. síknegyedben is van egy megoldás, ekkor $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

4. Mekkora annak a rombusznak a nagyobbik belső szöge, amelynek rövidebb átlója 4 egység, oldala 5 egység hosszúságú?

Megoldás. A nagyobbik belső szög a rombusz nagyobbik átlójával szemben fekszik. $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, ezért $\alpha = 66{,}42°$.

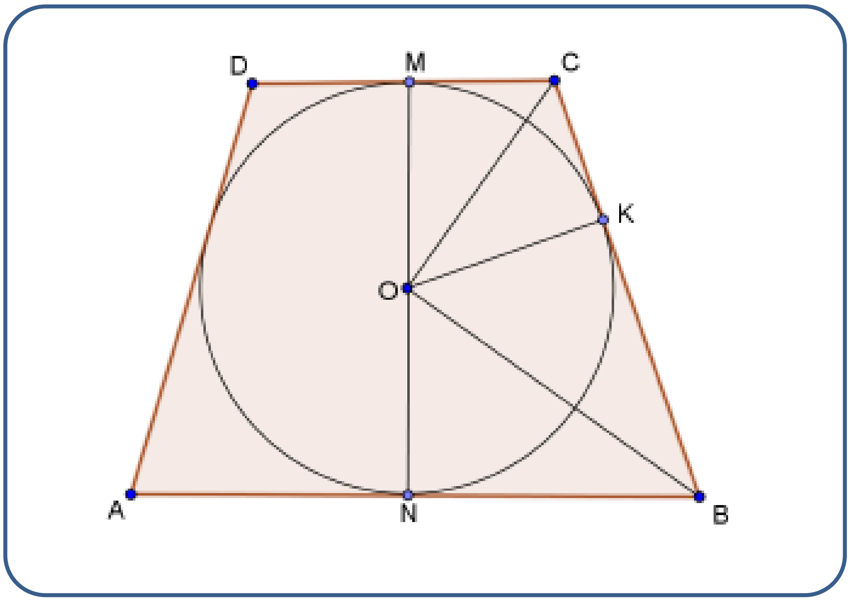


A rombusz legnagyobb szöge: $2\alpha = 132{,}84°$.

5. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz hosszabbik alapján fekvő szögei $60°$-osak, a trapézba írt, az oldalakat érintő kör sugara $3\sqrt{3}$ cm. Mekkora a trapéz kerülete?

Megoldás: A trapéz oldalait a beírt kör négy pontban érinti, közülük hármat megneveztünk az ábrán, ezek a *K, M, N* pontok.

A BKO derékszögű háromszögben $BK = OK \cdot \operatorname{ctg} 30° = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9\,\text{cm}$.



A CKO derékszögű háromszögben $CK = OK \cdot \operatorname{ctg} 60° = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3\,\text{cm}$.

$AD = BC = 9 + 3 = 12\,\text{cm}$.

Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, ezért a szemközti oldalak összege egyenlő: $AB + CD = AD + BC = 12 + 12 = 24\,\text{cm}$, a trapéz kerülete $24 + 24 = 48\,\text{cm}$.

6. Egy háromszög legkisebb oldala 1 egység. Szögeinek nagysága $45°$, $60°$, $75°$.

a) Mekkora a háromszög köré írt körének sugara?

b) Mekkora a háromszög területe?

c) Mekkora a háromszög kerülete?

Megoldás: a) A $45°$-os szöggel szemben van az 1 egység hosszúságú oldal, hiszen a legkisebb oldal a legkisebb szöggel szemben van.

Az $a = 2R \cdot \sin\alpha$ összefüggésből (ahol a a háromszög egyik oldala, R a köré írt kör sugara, α az a-val szemközti szög) $1 = 2R \cdot \sin 45°$ adódik. $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ egység.

Ugyanezt a képletet használva a $60°$-os szöggel szemközti oldal $2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin 60° = \sqrt{\frac{3}{2}}$ egység hosszú.

Ismét az előbbi képletet használjuk, így a $75°$-os szöggel szemközti oldal hossza $2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin 75° = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin(45°+30°) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ egység. ($\sin 75°$ értékét számolhatjuk a megfelelő addíciós képlettel, vagy úgy, ahogyan ezt a 7. ajánlott feladatban teszszük. Választhatjuk az egyszerűbb utat is: használjunk számológépet!)

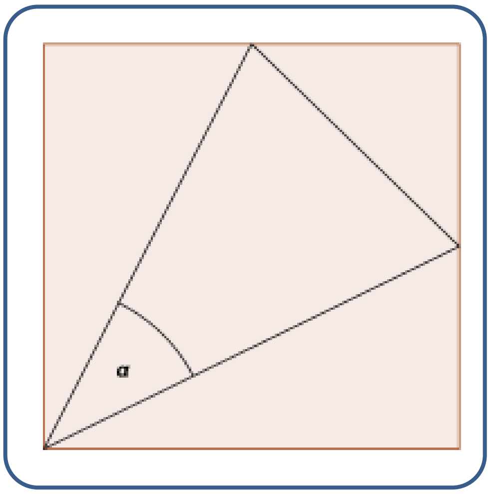
b) A háromszög területe:

$$T = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{2} = 1\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sin 75°}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sin(45°+30°)}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}592 \text{ területegység.}$$

c) A kerület $K = 1+\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{3}+1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \approx 3{,}59$ egység.

7. Egy négyzet egyik csúcsát és a szemközti oldalak felezőpontjait összekötöttük, így kaptunk egy egyenlő szárú háromszöget. Mekkora a háromszög szárszöge?

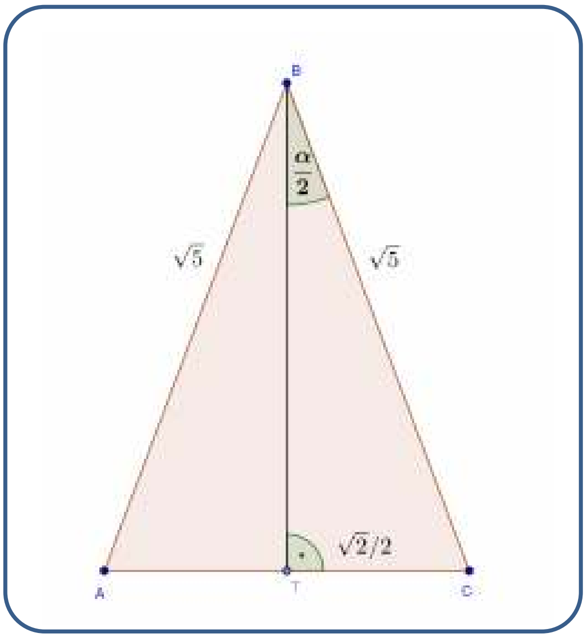
I. Megoldás: Válasszuk a négyzet oldalát 2 egységnek. A Pitagorasz-tétel segít kiszámolni az egyenlő szárú háromszög szárának hosszát: $\sqrt{5}$.



A háromszög területe: $t = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{5\cdot\sin\alpha}{2}$. A háromszög területét megkaphatjuk úgy is, hogy a négyzet területéből elhagyjuk a felesleges területrészeket: $t = 4-\left(1+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Ezekből: $t = \frac{5\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{3}{2}$, így $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ és $\alpha = 36{,}86°$ (közelítőleg).

II. Megoldás: Ha a négyzet oldala 2 egység, akkor (Pitagorasz tétellel számolva) a háromszög oldalai: $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$.



A háromszöget az alaphoz tartozó magassággal két derékszögű háromszögre bontjuk:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} \approx 0{,}3162\text{, így } \frac{\alpha}{2} = 18{,}43° \text{ (közelítőleg), és } \alpha = 36{,}86°.$$

III. Ajánlott feladatok

1. Melyik a legnagyobb a $\sin 15°$, $\cos 15°$, $\mathrm{tg}\, 15°$, $\frac{1}{\sin 15°}$, $\frac{1}{\cos 15°}$ számok közül? Válaszát számológép segítsége nélkül indokolja!

2. Számolja ki az alábbi műveletsorok értékét! (Számológép használata nélkül.)

a) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}}$

b) $4 \cdot \sin^2\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}^3\frac{\pi}{4}$

c) $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}$

d) $\cos\frac{4\pi}{3} \cdot \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{6}$

e) $\mathrm{tg}\, 20° \cdot \mathrm{ctg}\, 20°$

f) $\dfrac{\cos 20°}{\sin 70°}$

g) $\cos 150° + \sin 315° + \sin 135° - \sin 300°$

h) $\cos 10° + \cos 50° + \cos 90° + \cos 130° + \cos 170°$

3. Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Válaszát számológép segítsége nélkül indokolja!

a) $\sin 1° + \sin 89° > 1$

b) $\sin \frac{2\pi}{5} < \cos \frac{2\pi}{5}$

c) $\sin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) < \cos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\sin 10° \cdot \cos 20° < \sin 40°$

4. Számológép segítsége nélkül döntse el, melyik szám a nagyobb:

a) $\sin 50°$ vagy $\cos 50°$?

b) $\cos 35°$ vagy $\sin 55°$?

5. Számológép segítsége nélkül mutassa meg, hogy

a) $\sin 40° + \cos 40° > 1$

b) $\sqrt{\sin 40°} + \sqrt{\cos 40°} > 1$

6. Mekkora szöget zár be egymással a kocka két különböző testátlója?

7. Igazoljuk a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ azonosságot, ahol $0° < \alpha < 45°$.

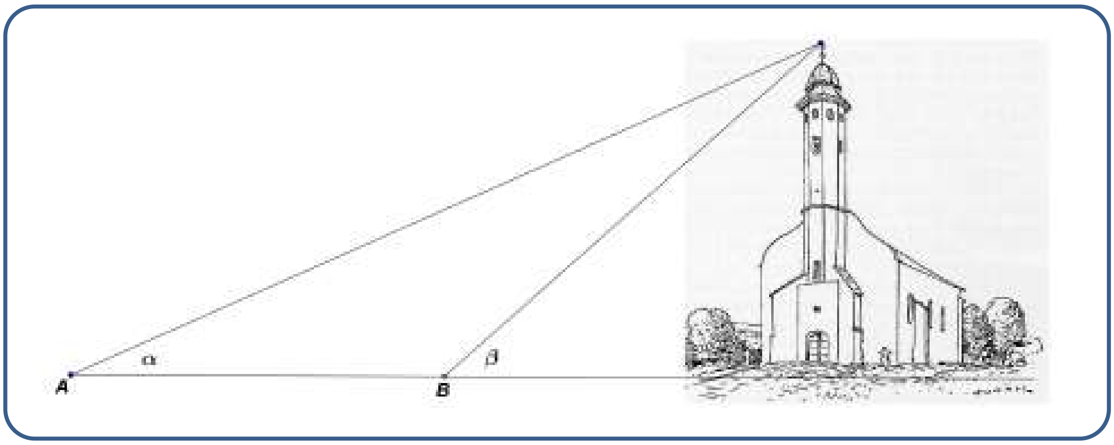
8. Mennyi $\sin 75°$ pontos értéke? Számológép nélkül számoljon!

9. Mutassa meg, hogy igazak a következő azonosságok, ahol α hegyesszög.

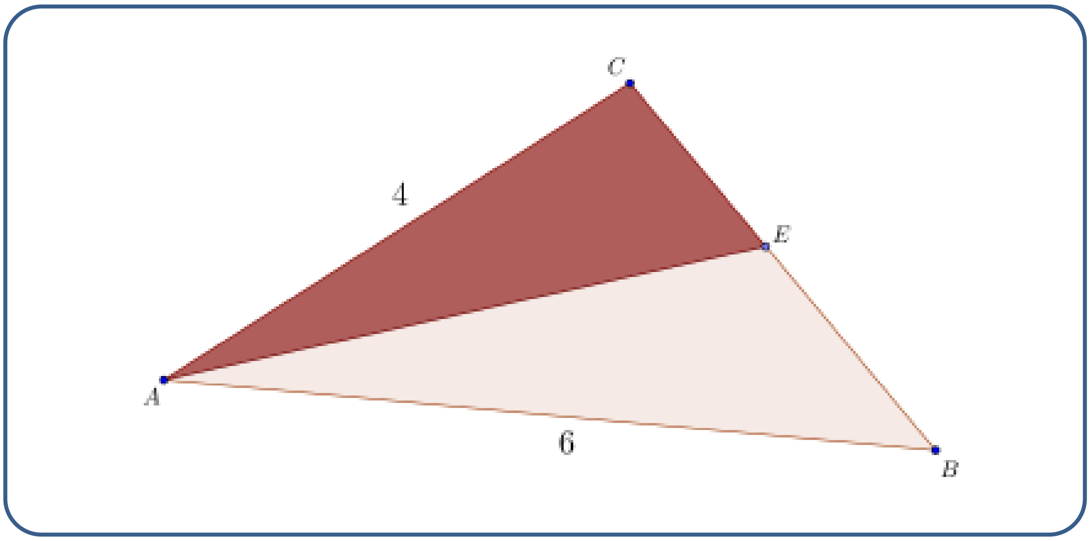
$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

10. Mutassa meg, hogy az *r* sugarú körbe írt szabályos 12-szög területe $3r^2$.

11. Egy templomtorony magasságának meghatározása céljából egy, a torony alappontján átmenő vízszintes egyenes *A* pontjából a torony α, egy másik *B* pontjából β szögben látszik. Ha az *A* és *B* pontok távolsága *x* méter, akkor milyen magas a torony?

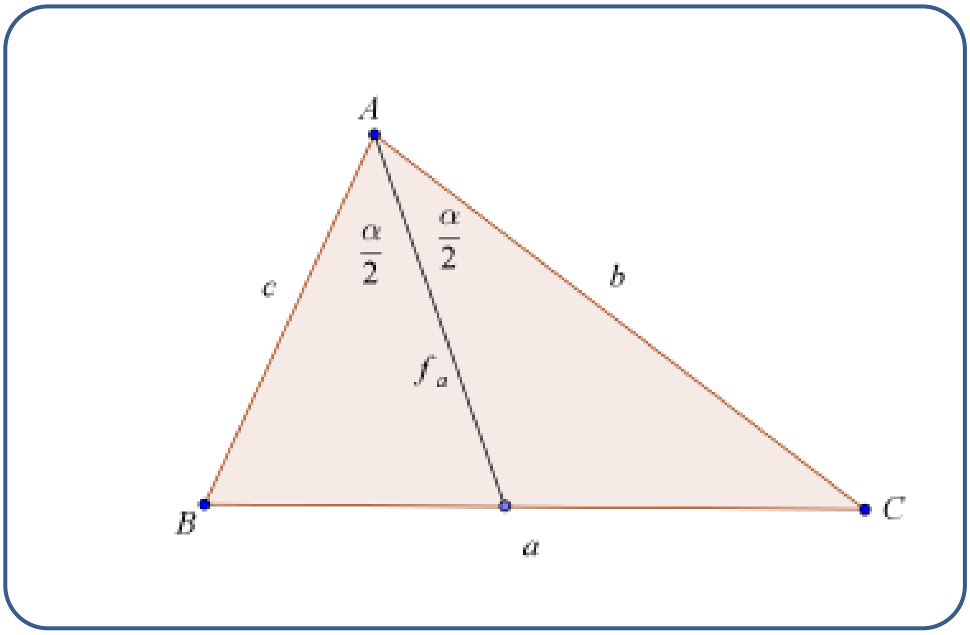


12. Az ABC háromszög A csúcsánál levő szög $30°$, az innen induló szögfelező a szemközti oldalt az E pontban metszi. Mekkora az AEC háromszög területe, ha $AB = 6,\ AC = 4$?



13. Mutassa meg, hogy az ABC háromszög A csúcsából induló szögfelezőjének hossza

$$f_a = \frac{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}.$$



Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Melyik a legnagyobb a $\sin 15°$, $\cos 15°$, $\operatorname{tg} 15°$, $\frac{1}{\sin 15°}$, $\frac{1}{\cos 15°}$ számok közül? Válaszát számológép segítsége nélkül indokolja!

Megoldás: Ha $0° < \alpha < 45°$, akkor $\sin\alpha < \cos\alpha$, így $\sin 15° < \cos 15° < 1$, és innen $1 < \frac{1}{\cos 15°} < \frac{1}{\sin 15°}$, továbbá $\operatorname{tg} 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} < 1$.

Tehát az öt szám közül a legnagyobb szám: $\frac{1}{\sin 15°}$.

2. Számolja ki az alábbi műveletsorok értékét! (Számológép használata nélkül.)

a) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}}$

b) $4 \cdot \sin^2\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{4}$

c) $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$

d) $\cos\frac{4\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{6}$

e) $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{ctg} 20°$

f) $\dfrac{\cos 20°}{\sin 70°}$

g) $\cos 150° + \sin 315° + \sin 135° - \sin 300°$

h) $\cos 10° + \cos 50° + \cos 90° + \cos 130° + \cos 170°$

Megoldás:

a) $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$, így a tört értéke 0.

b) $4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1^3 = 1$.

c) $0 - (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

d) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) - \frac{1}{2} = 0$.

e) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

f) $\cos 20° = \sin(90° - 20°) = \sin 70°$, így a tört értéke 1.

g) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

h) $\cos 10° + \cos 170° = 0$, $\cos 50° + \cos 130° = 0$, $\cos 90° = 0$, ezért az összeg értéke 0.

3. Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Válaszát számológép segítsége nélkül indokolja!

a) $\sin 1° + \sin 89° > 1$

b) $\sin\frac{2\pi}{5} < \cos\frac{2\pi}{5}$

c) $\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) < \cos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$

d) $\sin 10° \cdot \cos 20° < \sin 40°$

Megoldás:

a) IGAZ. A baloldali összeg két tagja egy 1 egység átfogójú derékszögű háromszög két befogójának hossza (ahol az egyik hegyesszög $89°$), így azok összege nagyobb 1-nél.

Másképp: $\sin 1° + \sin 89° = \sin 1° + \cos 1° > \sin^2 1° + \cos^2 1° = 1$.

(Felhasználtuk, hogy $1 > \sin\alpha > 0$, így $\sin\alpha > \sin^2\alpha$.)

b) HAMIS. Ugyanis $\sin\alpha > \cos\alpha$, ha $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

c) IGAZ. $\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) < 1 = \cos 0 = \cos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$.

d) IGAZ. $\sin 10° \cdot \cos 20° < \sin 10° < \sin 40°$.

4. Számológép segítsége nélkül döntse el, melyik szám a nagyobb:

a) $\sin 50°$ vagy $\cos 50°$?

b) $\cos 35°$ vagy $\sin 55°$?

Megoldás:

a) $\sin 50° > \sin 40° = \cos 50°$.

b) $\cos 35° = \sin 55°$.

5. Számológép segítsége nélkül mutassa meg, hogy

a) $\sin 40° + \cos 40° > 1$

b) $\sqrt{\sin 40°} + \sqrt{\cos 40°} > 1$

Megoldás: Ha $0 < \sin x < 1$, akkor $\sin^2 x < \sin x < \sqrt{\sin x} < 1$, ugyanígy ha $0 < \cos x < 1$, akkor $\cos^2 x < \cos x < \sqrt{\cos x} < 1$.

Továbbá $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

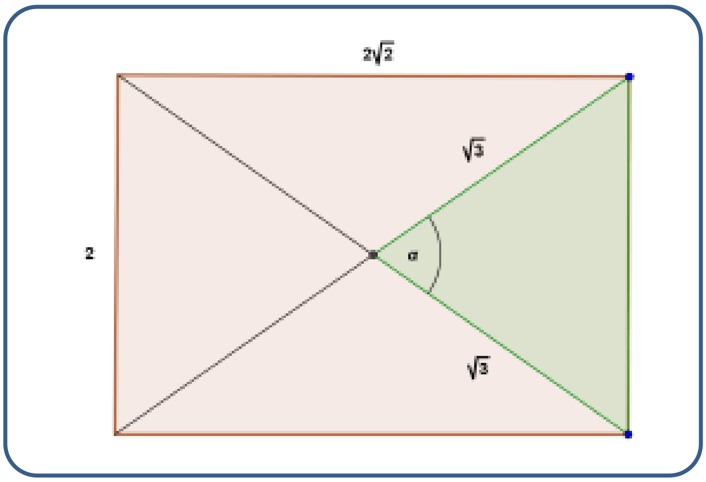
Ezeket használjuk a bizonyításban.

a) $\sin 40° + \cos 40° > \sin^2 40° + \cos^2 40° = 1$.

b) $\sqrt{\sin 40°} + \sqrt{\cos 40°} > \sin 40° + \cos 40° > \sin^2 40° + \cos^2 40° = 1$.

6. Mekkora szöget zár be egymással a kocka két különböző testátlója?

Megoldás: Vegyük a kockának azt a síkmetszetét, melyen rajta van két testátló. Ez a síkmetszet egy téglalap, a téglalap rövidebb oldala a kocka éle, hosszabb oldala a kocka lapátlója, átlója a kocka testátlója.



Ha a kocka éle 2 egység, akkor a lapátlója $2\sqrt{2}$, a testátlója $2\sqrt{3}$ hosszú. A síkmetszet, a téglalap két szomszédos csúcsát és középpontját összekötve (lásd az ábrát) kapunk egy hegyesszögű, egyenlő szárú háromszöget. Ennek területe a téglalap területének negyede: $t = \sqrt{2}$, másrészt $t = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{2} = \dfrac{3\cdot\sin\alpha}{2}$,

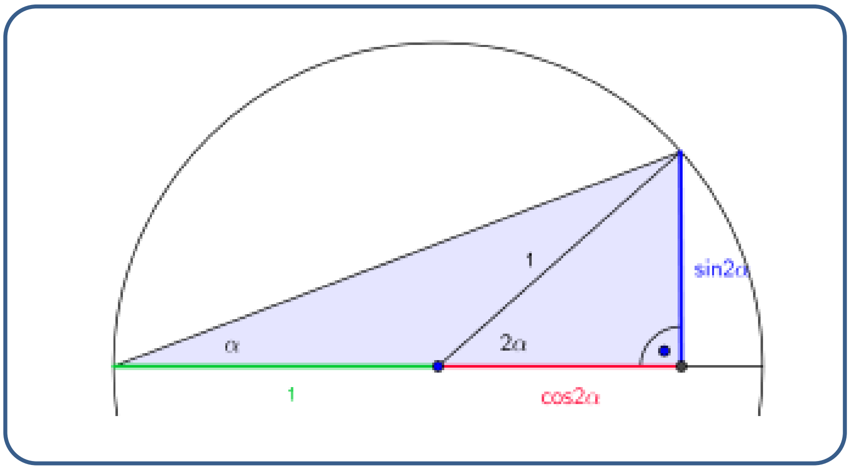
így $\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{2} = \dfrac{3\cdot\sin\alpha}{2}$, $\alpha \approx 70{,}53°$.

Megjegyzés: Kényelmesen számolhatunk a szinusz definícióját felhasználva:

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha \approx 35{,}264°$, így $\alpha \approx 70{,}53°$.

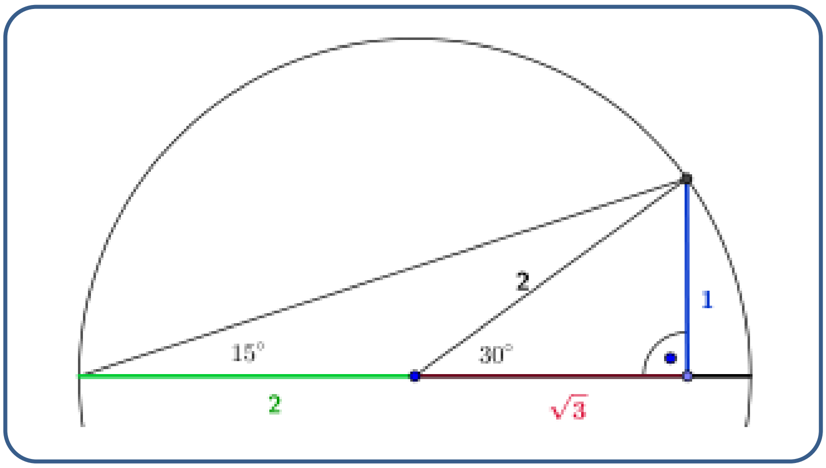
7. Igazoljuk a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ azonosságot, ahol $0° < \alpha < 45°$.

Megoldás: Vegyünk fel egy egységsugarú kört, majd egyik átmérőjén a középpontból mérjünk fel 2α nagyságú szöget. Az ábráról leolvasható az összefüggés.



8. Mennyi $\sin 75°$ pontos értéke? Számológép nélkül számoljon!

Megoldás: A $15°$-os szöget tartalmazó derékszögű háromszög átfogója a Pitagorasz-tétel alapján: $\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.



Ebben a derékszögű háromszögben számolhatjuk a keresett szögfüggvényértéket:

$$\cos 15°=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

és $\sin 75°=\cos 15°$, így $\sin 75°=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

9. Mutassa meg, hogy igazak a következő azonosságok, ahol α hegyesszög.

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \qquad \cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

I. Megoldás: Vegyünk fel egy olyan derékszögű háromszöget, ahol az α hegyesszög melletti befogó 1 egység. Ekkor a szemközti befogó $\operatorname{tg}\alpha$, az átfogó a Pitagorasz-tétel szerint $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Innen $\sin\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

Majd vegyünk fel egy olyan derékszögű háromszöget, ahol az α hegyesszöggel szemközti befogó 1 egység. Ekkor a szög melletti befogó $\operatorname{ctg}\alpha$, az átfogó a Pitagorasz-tétel szerint $\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Innen $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$, $\cos\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

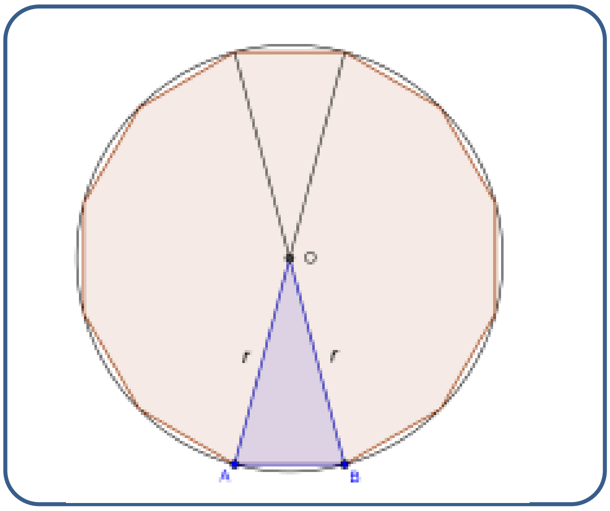
II. Megoldás: Használjuk a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ azonosságot.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \sin\alpha$$

Hasonló átalakítással megkapjuk a másik, igazolásra váró összefüggést is.

10. Mutassa meg, hogy az r-sugarú körbe írt szabályos 12-szög területe $3r^2$.

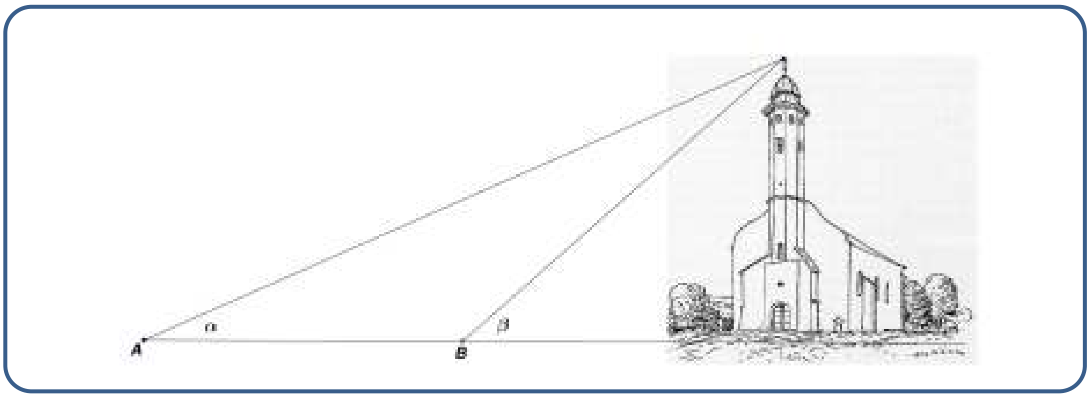
Megoldás: A sokszög területe 12-szerese az OAB egyenlő szárú háromszög területének. A háromszög szárszöge $\gamma = \dfrac{360°}{12} = 30°$.



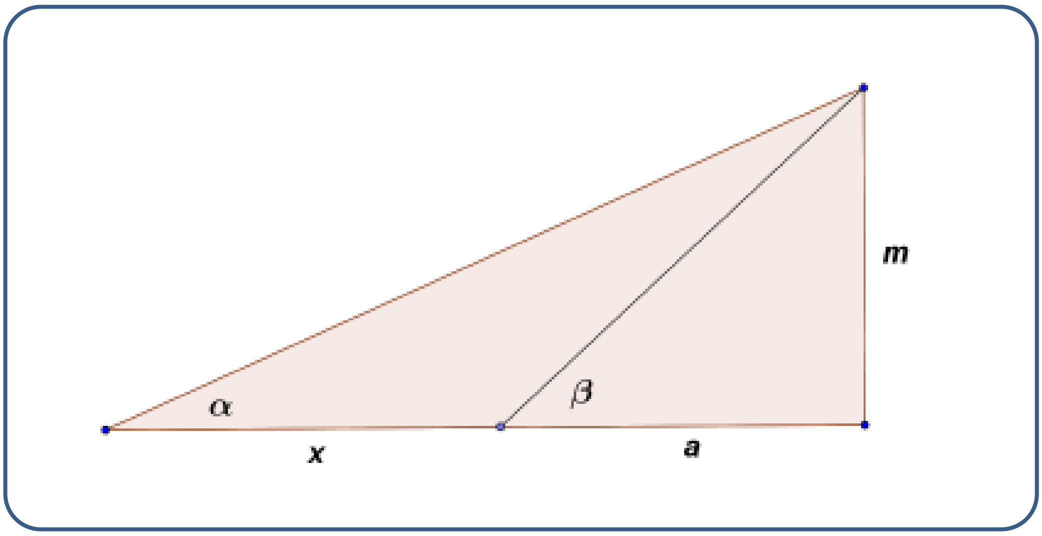
A háromszög területe $\dfrac{r \cdot r \cdot \sin 30°}{2} = \dfrac{r^2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{r^2}{4}$. A 12-szög területe: $12 \cdot \dfrac{r^2}{4} = 3r^2$.

Megjegyzés: Kürschák József (1864–1933) ezt az állítást egy elegáns átdarabolással bizonyította.

11. Egy templomtorony magasságának meghatározása céljából egy, a torony alappontján átmenő vízszintes egyenes A pontjából a torony α, egy másik B pontjából β szögben látszik. Ha az A és B pontok távolsága x méter, akkor milyen magas a torony?



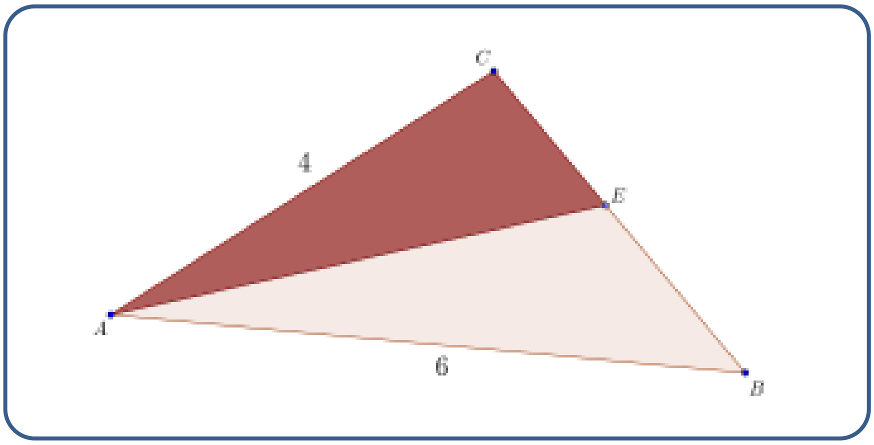
Megoldás: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m}{x+a}$ és $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m}{a}$.



Ezekből: $m = (x+a)\cdot\operatorname{tg}\alpha = a\cdot\operatorname{tg}\beta$, így $a = \dfrac{x\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$.

A torony magassága: $m = a\cdot\operatorname{tg}\beta = \dfrac{x\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$.

12. Az ABC háromszög A csúcsánál levő szög $30°$, az innen induló szögfelező a szemközti oldalt az E pontban metszi. Mekkora az AEC háromszög területe, ha $AB = 6,\ AC = 4$?

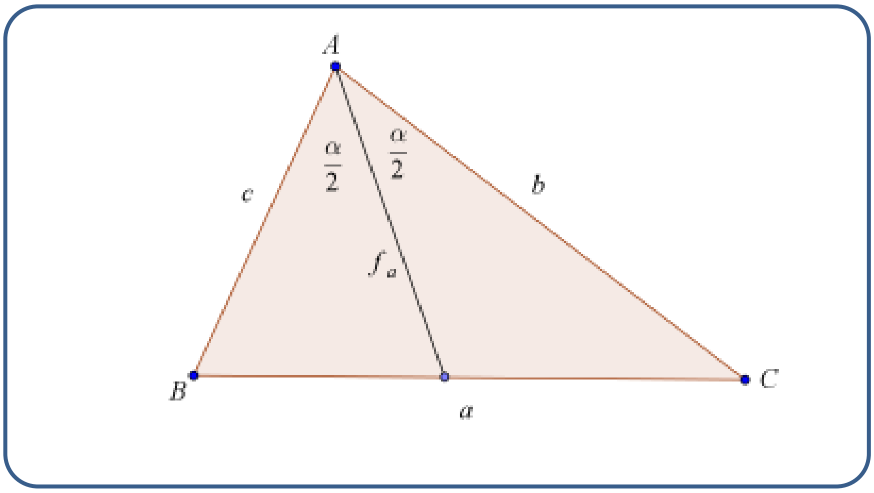


Megoldás. $t_{ABC} = t_{ABE} + t_{AEC}$, azaz

$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\sin 30° = \dfrac{1}{2}\cdot AE\cdot 6\cdot\sin 15° + \dfrac{1}{2}\cdot AE\cdot 4\cdot\sin 15°$. Ezért $AE = \dfrac{6}{5\cdot\sin 15°}$.

$t_{AEC} = \dfrac{1}{2}\cdot AE\cdot 4\cdot\sin 15° = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{5\cdot\sin 15°}\cdot 4\cdot\sin 15° = 2{,}4$ egység.

13. Mutassa meg, hogy az ABC háromszög A csúcsából induló szögfelezőjének hossza $f_a = \dfrac{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}$.



Megoldás. A háromszöget a szögfelező két kisebb háromszögre vágja. Ezek területének összege egyenlő a háromszög területével, azaz

$\frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot bf_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot cf_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, azaz $bc \cdot \sin\alpha = bf_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + cf_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

A $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ összefüggést használva, rendezés után kapjuk az

$f_a = \dfrac{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}$ összefüggést.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Számolja ki az alábbi műveletsorok értékét! (Számológép használata nélkül.)

a) $2 \cdot \cos 60° - \mathrm{tg}\, 45°$

b) $\sin 30° + \cos 60°$

c) $\dfrac{2 - \mathrm{tg}\, 45°}{\sin 45° \cdot \cos 45°}$

d) $\dfrac{1 + \cos 90°}{2 - \sin 90°} - \mathrm{tg}\, 45°$

e) $\sin 270° \cdot \cos 270° + \dfrac{1}{\cos 180°} + \dfrac{1}{\cos 360°}$

f) $\sin 120° + \cos 330° - 2\,\mathrm{tg}\, 135° + \mathrm{tg}\, 120°$

g) $\cos^2\dfrac{\pi}{6} + \sin^2\dfrac{\pi}{6}$

h) $\cos^2\dfrac{\pi}{6} - \cos^2\dfrac{\pi}{4}$

2. Töltse ki a táblázatot számológép segítsége nélkül, ha $0° < \alpha < 90°$.

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{4}{5}$			
		$\sqrt{3}$	
			$\sqrt{8}$
	$\frac{12}{13}$		

3. Egy háromszög két szöge $30°$ és $45°$. A $45°$-os szöggel szemközti oldal hossza 12 egység. Mekkora a $30°$-os szöggel szemközti oldal?

4. Az *ABC* egyenlő szárú háromszög *BC* szárához tartozó súlyvonal 6 egység, az *AB* alaphoz tartozó magasság 3 egység. Mekkora a háromszög szárszöge?

5. Egy 5 egység sugarú kör kerületének egyik felén az *A, B* és *C* pontok ebben a sorrendben helyezkednek el. $AB = 6,\ BC = 4$. Milyen hosszú az *AC* szakasz?

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Számolja ki az alábbi műveletsorok értékét! (Számológép használata nélkül.)

a) $2 \cdot \cos 60° - \operatorname{tg} 45°$

b) $\sin 30° + \cos 60°$

c) $\dfrac{2 - \operatorname{tg} 45°}{\sin 45° \cdot \cos 45°}$

d) $\dfrac{1 + \cos 90°}{2 - \sin 90°} - \operatorname{tg} 45°$

e) $\sin 270° \cdot \cos 270° + \dfrac{1}{\cos 180°} + \dfrac{1}{\cos 360°}$

f) $\sin 120° + \cos 330° - 2\operatorname{tg} 135° + \operatorname{tg} 120°$

g) $\cos^2 \dfrac{\pi}{6} + \sin^2 \dfrac{\pi}{6}$

h) $\cos^2 \dfrac{\pi}{6} - \cos^2 \dfrac{\pi}{4}$

Megoldás:

a) $2 \cdot \dfrac{1}{2} - 1 = 0$.

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

c) $\dfrac{2-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$.

d) $\dfrac{1+0}{2-1}-1=0$.

e) $(-1)\cdot 0+\dfrac{1}{-1}+\dfrac{1}{1}=0$.

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot(-1)-\sqrt{3}=2$.

g) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

h) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

2. Töltse ki a táblázatot számológép segítsége nélkül, ha $0°<\alpha<90°$.

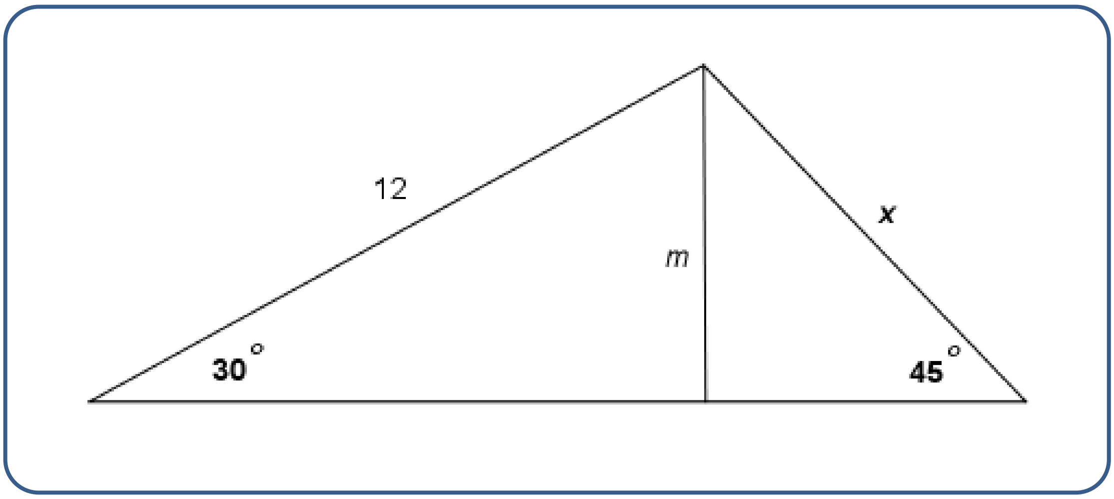
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{4}{5}$			
		$\sqrt{3}$	
			$\sqrt{8}$
	$\frac{12}{13}$		

Megoldás:

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{8}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\sqrt{8}$
$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{5}$

3. Egy háromszög két szöge $30°$ és $45°$. A $45°$-os szöggel szemközti oldal hossza 12 egység. Mekkora a $30°$-os szöggel szemközti oldal?

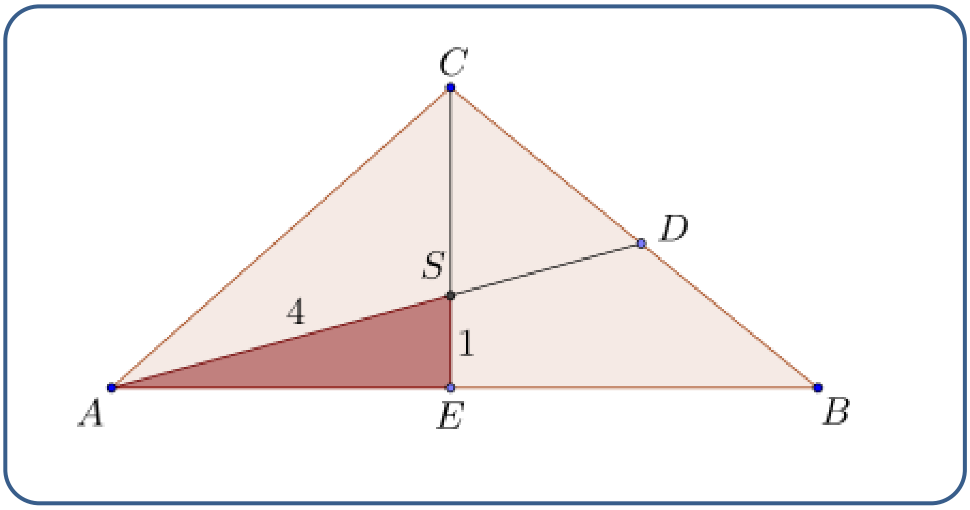
Megoldás: Az ábra alapján $\sin 30° = \frac{m}{12}$, így $m = 6$.



$\sin 45° = \frac{m}{x}$, tehát $x = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6\sqrt{2}$.

4. Az ABC egyenlő szárú háromszög BC szárához tartozó súlyvonal 6 egység, az AB alaphoz tartozó magasság 3 egység. Mekkora a háromszög szárszöge?

Megoldás. Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága egyben súlyvonal is, a súlyvonalak harmadolják egymást. Így $AS = 4$, $SE = 1$.



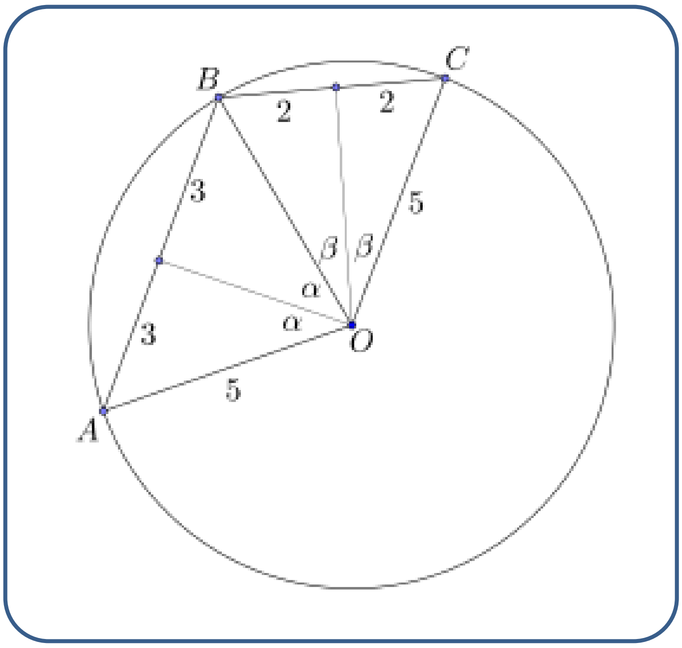
A Pitagorasz-tétel alapján $AE = \sqrt{15}$.

$\operatorname{tg} CAE\angle = \frac{3}{\sqrt{15}}$, $CAE\angle = 37{,}76°$.

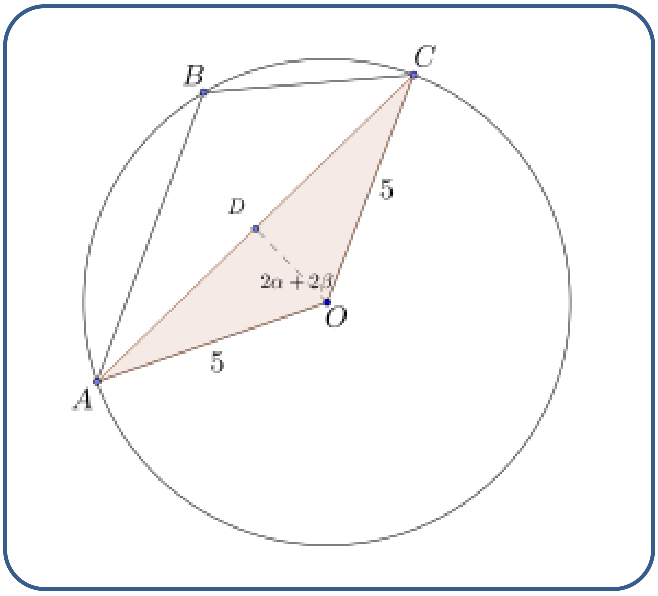
A szárszög $104{,}48°$.

5. Egy 5 egység sugarú kör kerületének egyik felén az *A, B* és *C* pontok ebben a sorrendben helyezkednek el. $AB = 6,\ BC = 4$. Milyen hosszú az *AC* szakasz?

Megoldás. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, így $\alpha = 36{,}87°$ és $\sin\beta = \frac{2}{5}$, így $\beta = 23{,}58°$.



Az *AOC* háromszög *O*-nál lévő szöge $2\alpha + 2\beta$.



Az *AC* húr felezőpontja *D*, $\sin(\alpha+\beta) = \frac{CD}{CO}$.

Mivel $\alpha + \beta = 60{,}45°$, így $\sin 60{,}45° = 0{,}87 = \frac{CD}{5}$, tehát $AC = 2 \cdot CD = 8{,}7$.