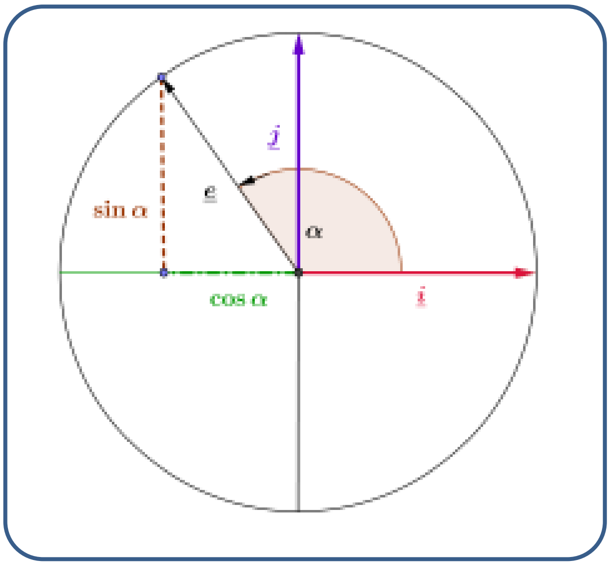
13. Trigonometria II.

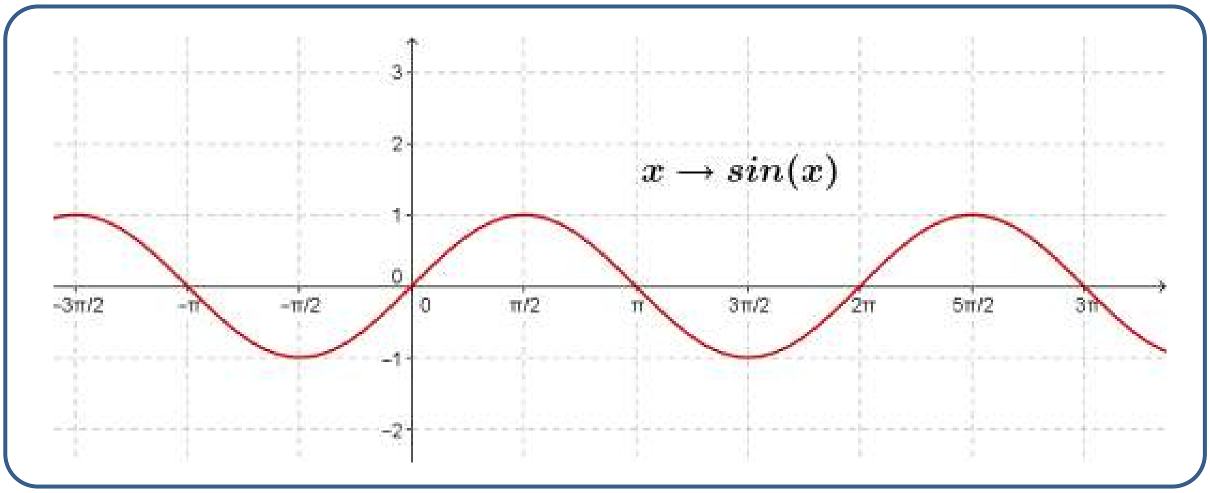
I. Elméleti összefoglaló

Tetszőleges α szög **szinusza** a koordinátasíkon az $\underline{i}$ vektortól az óramutató járásával ellentétes irányban α szöggel elforgatott $\underline{e}$ egységvektor második koordinátája.
Tetszőleges α szög **koszinusza** a koordinátasíkon az $\underline{i}$ vektortól az óramutató járásával ellentétes irányban α szöggel elforgatott $\underline{e}$ egységvektor első koordinátája.



Az α szöget az $\underline{e}$ vektor **irányszög**ének nevezzük. Ez a szög $360°$-nál nagyobb is lehet. Szoktuk használni a **forgásszög** megnevezést is.
Ha az $\underline{e}$ vektort az óramutató járásával azonos irányban forgatjuk, akkor $\alpha < 0°$.

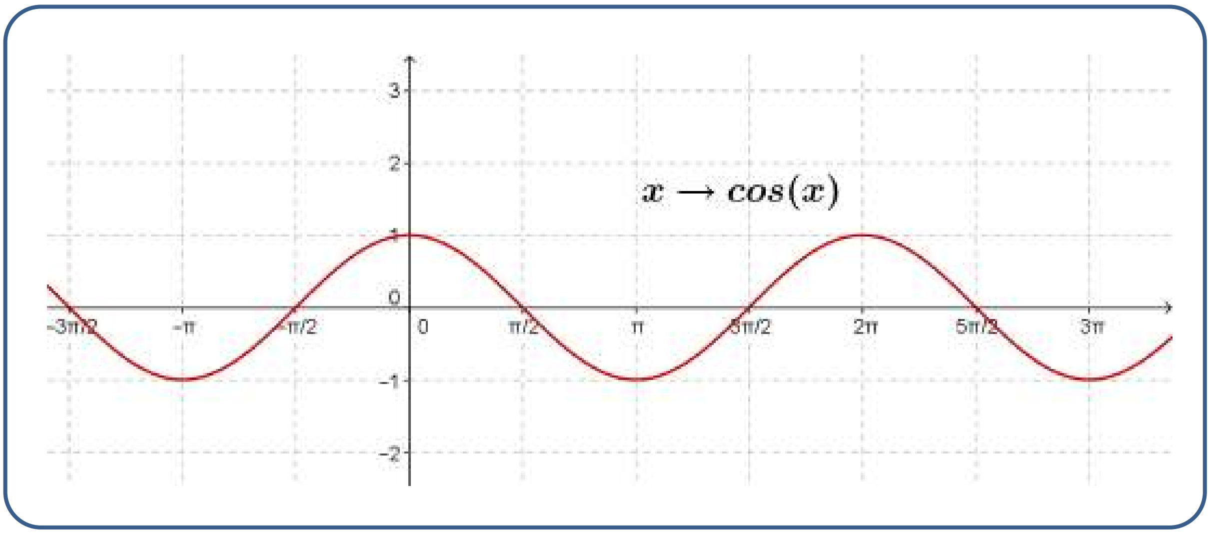
Az $x \mapsto \sin x$ függvény jellemzése:



- értelmezve van tetszőleges x valós számra. (A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.)

- értékkészlete: $[-1;\ 1]$
- a függvény 2π szerint periodikus, azaz $\sin x = \sin(x + 2\pi)$
- zérushelyei $x = k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám
- maximuma 1, maximumhelyei $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám
- minimuma -1, minimumhelyei $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám
- páratlan függvény, azaz $\sin(-x) = -\sin x$ (a függvény az origóra szimmetrikus)
- a függvény szigorúan monoton növekedő a $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ intervallumon, szigorúan monoton csökkenő a $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ intervallumon ahol k tetszőleges egész szám

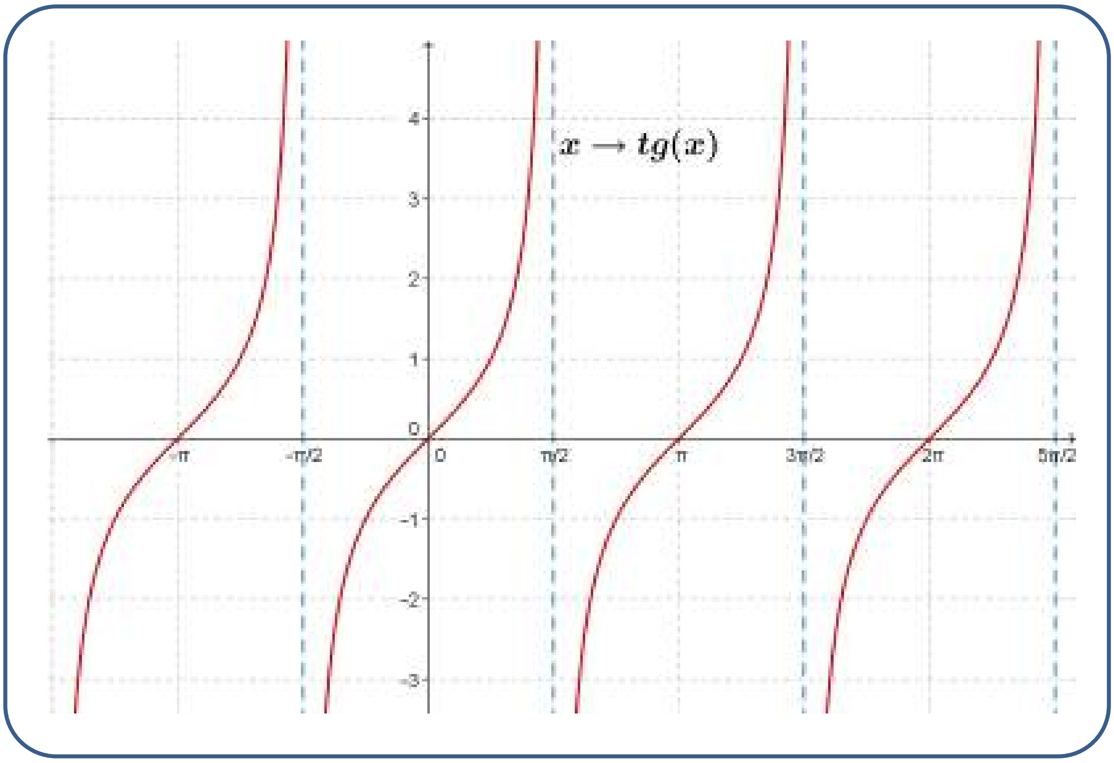
Az $x \mapsto \cos x$ függvény jellemzése:



- értelmezve van tetszőleges x valós számra. (A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.)
- értékkészlete: $[-1;\ 1]$
- a függvény 2π szerint periodikus, azaz $\cos x = \cos(x + 2\pi)$
- zérushelyei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám
- maximuma 1, maximumhelyei $2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám
- minimuma -1, minimumhelyei $\pi + 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám
- páros függvény, azaz $\cos(-x) = \cos x$ (a függvény az y-tengelyre szimmetrikus)
- a függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0 + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi]$ intervallumon, szigorúan monoton növekedő a $[\pi + 2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi]$ intervallumon ahol k tetszőleges egész szám

Az $x \mapsto \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (ahol $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$) tangens függvény jellemzése:

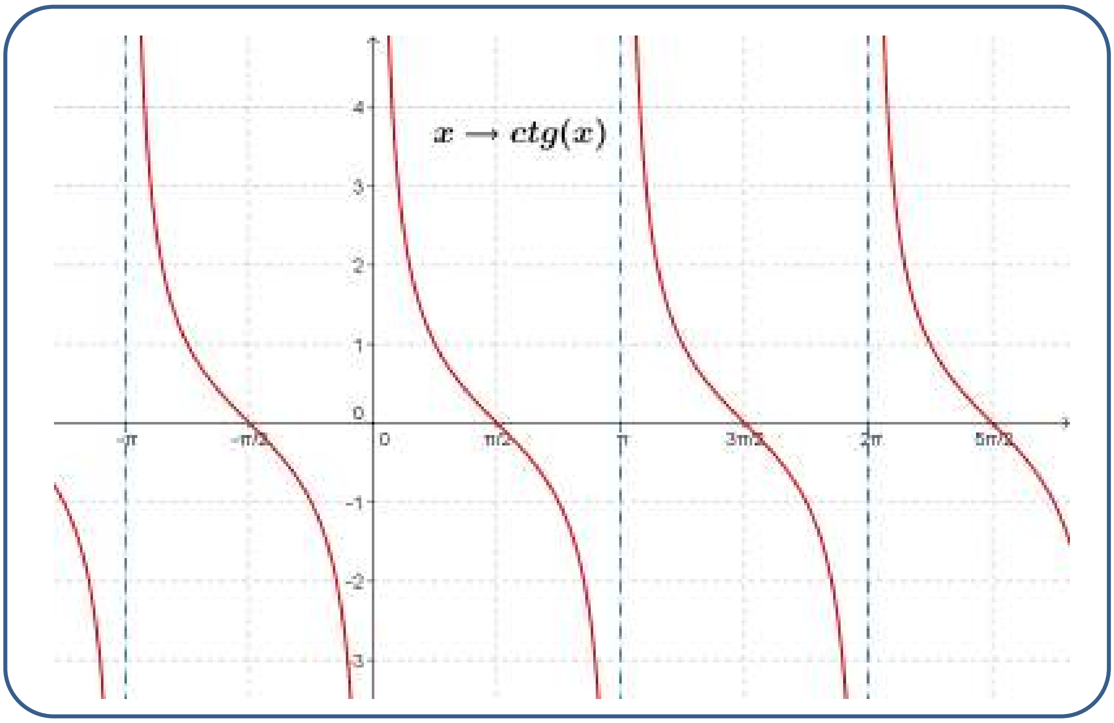
- értelmezési tartománya minden olyan x valós szám, amelyre $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$
- értékkészlete a valós számok halmaza
- a függvény π szerint periodikus, azaz $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$
- zérushelyei $x = k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám
- szélsőértékei nincsenek, így nem korlátos függvény
- páratlan függvény, azaz $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (a függvény az origóra szimmetrikus)
- a függvény szigorúan monoton növekedő a $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ intervallumon, ahol k tetszőleges egész szám



Az $x \mapsto \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (ahol $\sin x \neq 0$, azaz $x \neq k\pi,\ k \in Z$) kotangens függvény jellemzése:

- értelmezési tartománya minden olyan x valós szám, amelyre $x \neq k\pi,\ k \in Z$
- értékkészlete a valós számok halmaza
- a függvény π szerint periodikus, azaz $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi)$
- zérushelyei $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám
- szélsőértékei nincsenek, így nem korlátos függvény

- páratlan függvény, azaz $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ (a függvény az origóra szimmetrikus)
- a függvény szigorúan monoton csökkenő a $]0 + k\pi; \pi + k\pi[$ intervallumon, ahol k tetszőleges egész szám



Néhány összefüggés a szögfüggvények között.

Addíciós tételek:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Kétszeres szög szögfüggvényei:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Összegek szorzattá alakítása:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Szorzatok összeggé alakítása:

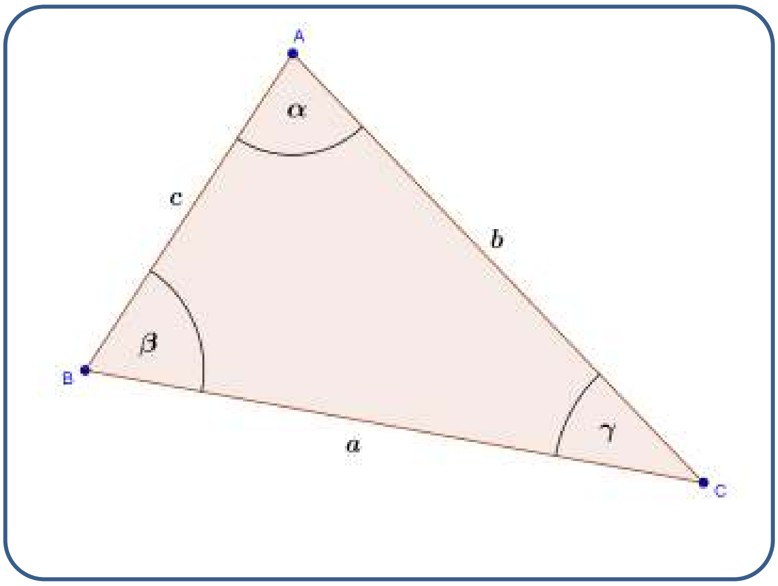
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

A háromszög oldalai és szögei között két jól ismert összefüggés van.

Szinusztétel: A háromszög két oldalának aránya egyenlő az oldalakkal szemközti szögek szinuszainak arányával: $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.



Koszinusztétel: A háromszög valamely oldalának négyzetét megkaphatjuk, ha a másik két oldal négyzetösszegéből kivonjuk ugyanezen két oldal és az általuk bezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

II. Kidolgozott feladatok

1. Pozitív vagy negatív szám $\sin 355$?

Megoldás: $113\pi < 355 < 113\pi + \frac{\pi}{2}$, és $0 = \sin 113\pi > \sin 355 > \sin\left(113\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

2. Melyik nagyobb: $\sin 3$ vagy $\sin 3°$?

Megoldás: $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$, így az a kérdés, $\sin(\pi - 3)$ vagy $\sin 3°$ a nagyobb? Mindkét szög az első síknegyedben van, ahol a szinusz függvény szigorúan monoton növekszik. Ezért azt kell vizsgálnunk, hogy $\pi - 3$ vagy $3°$ a nagyobb? Tegyük fel, hogy az első érték a nagyobb, vizsgáljuk ezt.

$\pi - 3 > \frac{3\pi}{180} \Leftrightarrow 60(\pi - 3) > \pi \Leftrightarrow 59\pi > 180 \Leftrightarrow \pi > 3\frac{3}{59}$, és ez igaz, mert

$\pi > 3{,}1 > 3\frac{3}{59}$. Tehát a feltevés igaz, ezért $\sin 3$ a nagyobb.

3. Mennyi a $\frac{\cos 70° \cdot \cos 10° + \cos 80° \cdot \cos 20°}{\cos 69° \cdot \cos 9° + \cos 81° \cdot \cos 21°}$ kifejezés értéke?

Megoldás: $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ és a $\cos(\alpha - \beta)$-ra ismert addíciós tétel miatt

$$\frac{\cos 70° \cdot \cos 10° + \cos 80° \cdot \cos 20°}{\cos 69° \cdot \cos 9° + \cos 81° \cdot \cos 21°} = \frac{\cos 70° \cdot \cos 10° + \sin 10° \cdot \sin 70°}{\cos 69° \cdot \cos 9° + \sin 9° \cdot \sin 69°} = \frac{\cos(70° - 10°)}{\cos(69° - 9°)} =$$

$$= \frac{\cos 60°}{\cos 60°} = 1.$$

4. Igazolja az alábbi egyenlőségeket!

a) $\sin 15° + \sin 45° = \sin 75°$

b) $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = \frac{1}{8}$

a) **I. Megoldás:** $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, azaz $\sin 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Továbbá $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és

$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$, tehát

$\sin 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Ezeket az értékeket helyettesítsük a $\sin 15° + \sin 45° = \sin 75°$ kifejezésbe, és látjuk, hogy helyes az egyenlőség.

a) **II. Megoldás:** $\sin 45° + \sin 15° = 2 \cdot \sin\frac{45° + 15°}{2} \cdot \cos\frac{45° - 15°}{2} = 2 \cdot \sin 30° \cdot \cos 15° =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(90° - 15°) = \sin 75°$.

b) A $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ azonosságot alkalmazzuk az átalakítások során.

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = \frac{(2\sin 20° \cdot \cos 20°) \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°}{2\sin 20°} = \frac{\sin 40° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°}{2\sin 20°}$$

így folytatva $\dfrac{\sin 40° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°}{2\sin 20°} = \dfrac{(2 \cdot \sin 40° \cdot \cos 40°) \cdot \cos 80°}{4\sin 20°} = \dfrac{\sin 80° \cdot \cos 80°}{4\sin 20°}$,

továbbá $\dfrac{\sin 80° \cdot \cos 80°}{4\sin 20°} = \dfrac{2 \cdot \sin 80° \cdot \cos 80°}{8\sin 20°} = \dfrac{\sin 160°}{8\sin 20°} = \dfrac{\sin 20°}{8\sin 20°} = \dfrac{1}{8}$.

5. Igazolja az alábbi állításokat!

a) $\dfrac{\sin 40° \cdot \sin 50°}{\cos 10°} = \dfrac{1}{2}$

b) $\left(1 + \dfrac{1}{\sin 40°}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\cos 40°}\right) > 5$

Megoldás:

a) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ miatt

$$\frac{\sin 40° \cdot \sin 50°}{\cos 10°} = \frac{1/2 \cdot (\cos 10° - \cos 90°)}{\cos 10°} = \frac{1/2 \cdot \cos 10°}{\cos 10°} = \frac{1}{2}.$$

b) $\left(1 + \dfrac{1}{\sin 40°}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\cos 40°}\right) = 1 + \dfrac{1}{\sin 40°} + \dfrac{1}{\cos 40°} + \dfrac{1}{\sin 40° \cdot \cos 40°}$, mivel

$\dfrac{1}{\sin 40°} > 1$, $\dfrac{1}{\cos 40°} > 1$ és $\dfrac{1}{\sin 40° \cdot \cos 40°} = \dfrac{2}{2\sin 40° \cdot \cos 40°} = \dfrac{2}{\sin 80°} > 2$, ezekből adódik a kívánt egyenlőtlenség.

6. Mutassa meg, hogy az alábbi egyenleteknek nincs megoldása a valós számok körében!

a) $5\sin x + 2\cos x = 7$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 3$

c) $\sin x \cdot \cos x = \sin 40°$

d) $\sin x \cdot \sin(x + \pi) = \dfrac{1}{3}$

e) $\sin x \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

Megoldás:

a) $\sin x \leq 1$ és $\cos x \leq 1$, ezért $5\sin x + 2\cos x \leq 7$. Az egyenlőtlenségben akkor lesz egyenlőség, ha $\sin x = 1$ és $\cos x = 1$ mindegyike teljesül ugyanarra az x számra, ami nem lehetséges.

b) $\sin\alpha \leq 1$, ezért $\sin x + \sin 2x + \sin 3x \leq 3$. Egyenlőség csak úgy lehet, ha x megoldása a $\sin x = 1$, $\sin 2x = 1$ és $\sin 3x = 1$ egyenleteknek. Az egyenletek megoldásai rendre $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{\pi}{4} + m \cdot \pi$, $\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$, ahol a *k, m, n* számok tetszőleges egész számok.

Ennek a három számhalmaznak nincs közös eleme, az egyenleteknek nincs közös megoldása, ezért az eredeti egyenletnek sincs.

c) $2\sin x \cdot \cos x = 2\sin 40°$, azaz $\sin 2x = 2\sin 40° > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, és ez sosem teljesül.

d) $\sin x \cdot \sin(x+\pi) \leq 0$, mert $\sin x$ és $\sin(x+\pi)$ ellentétes előjelű, vagy mindkettő nulla.

e) $-1 \leq \sin x \leq 1$ miatt $\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ csak úgy lehet, ha mindkét tényező 1, vagy ha mindkét tényező -1, ami nem teljesülhet.

7. Oldja meg a $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$ egyenletet!

Megoldás: $\sin 2x = \pm\frac{1}{2}$.

Ha $\sin 2x = \frac{1}{2}$, akkor vagy $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$,

vagy $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, ahol $k \in Z$.

Ha $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, akkor vagy $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{12} + k\pi$,

vagy $2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x_4 = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$, ahol $k \in Z$.

8. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x + \cos x = 0$

b) $\sin x + \cos x = 1$

c) $1 + 2\sin 2x = \sin x + \cos x$

a) **I. Megoldás:** $\sin x = -\cos x$. A $\cos x = 0$ megoldásai egyenletünknek nem megoldásai, így oszthatunk $\cos x$-el, nem veszítünk gyököt: $\frac{\sin x}{\cos x} = -1$, $tg\, x = -1$, a megoldás $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in Z$.

a) **II. Megoldás:** Emeljük négyzetre mindkét oldalt: $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0$, azaz $1 + 2\sin x \cdot \cos x = 0$, $1 + \sin 2x = 0$, $\sin 2x = -1$, így $2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$. Ellenőrzés mutatja, hogy ezek mind megoldások, a négyzetre emeléssel most nem kaptunk hamis gyököt. (Hiszen az $a = 0$ és az $a^2 = 0$ egyenletek ekvivalensek.)

a) **III. Megoldás:** Szorozzuk az egyenletet $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x = 0$, azaz $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, így $x + \frac{\pi}{4} = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in Z$.

b) **I. Megoldás:** Emeljük négyzetre mindkét oldalt, $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 1$, azaz $2\sin x \cdot \cos x = 0$. Ha $\sin x = 0$, akkor $x_1 = k\pi,\ k \in Z$; ha $\cos x = 0$, akkor $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$. A négyzetre emelés általában bővíti az egyenlet megoldásainak halmazát, emiatt a kapott megoldásokat ellenőrizni kell, nézzük meg egy perióduson belül a lehetséges gyököket. A gyökök egy része kiesik (a hamis gyökök a $\sin x + \cos x = -1$ megoldásai), a megoldások $x_1^* = 2k\pi,\ k \in Z$ és $x_2^* = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$.

b) **II. Megoldás:** Szorozzuk az egyenletet $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, azaz $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, így $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x_1 = 2k\pi$, illetve $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in Z$.

c) $1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2$ miatt egyenletünk átírható $(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x$ alakba. Az $a^2 = a,\ a(a-1) = 0$ egyenlet gyökei $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$. A $\sin x + \cos x = 0$ egyenlet megoldása az a) feladat szerint: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in Z$. A $\sin x + \cos x = 1$ megoldásai a b) feladat szerint: $x_2 = 2k\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. A gyökök: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = 2k\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sin 4x = \sin x$ b) $\sin 4x = -\sin x$

c) $\cos 4x = \sin x$ d) $\mathrm{tg}\, 4x = -\mathrm{ctg}\, x$

Megoldás:

a) Ha $\sin\alpha = \sin\beta$, akkor $\alpha = \beta + 2k\pi$, vagy $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi$, ahol $k \in Z$.

Ezért $4x = x + 2k\pi$, azaz $x_1 = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$, vagy $4x + x = \pi + 2k\pi$, azaz $x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{5}$, $k \in Z$.

b) A $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ azonossággal az előbbi típusú egyenlethez jutunk: a $\sin 4x = -\sin x$ egyenlet helyett a $\sin 4x = \sin(-x)$ egyenletet vizsgáljuk. Így vagy $4x = -x + 2k\pi$, azaz $x_1 = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in Z$, vagy $4x + (-x) = \pi + 2k\pi$, azaz $x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k \in Z$.

c) $\cos 4x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, így

vagy $4x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$, azaz $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in Z$,

vagy $4x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi$, azaz $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$.

d) $\mathrm{tg}\, 4x = -\mathrm{ctg}\, x = \mathrm{ctg}(-x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, így $4x = \frac{\pi}{2} + x + k\pi$, $x = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k \in Z$.

10. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\cos x = \mathrm{tg}\, x$ b) $2\,\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x + 3 = 0$

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartományába az $x \neq 90° + k \cdot 180°$, $k \in Z$ értékek tartoznak. $\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$, innen $\cos^2 x = \sin x$, azaz $1 - \sin^2 x = \sin x$. Rendezzük az egyenletet: $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Ennek a $\sin x$-re másodfokú egyenletnek a gyökei: $(\sin x)_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $(\sin x)_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Az első érték kisebb –1-nél, így annak az egyenletnek nincs megoldása. A második egyenlet gyökei adják egyenletünk megoldásait: $x_1 = 38{,}17° + k \cdot 360°$, $x_2 = 141{,}83° + k \cdot 360°$, ahol k tetszőleges egész szám.

b) Az egyenlet értelmezési tartományába az $x \neq 0° + k \cdot 90°$, $k \in Z$ értékek tartoznak. $2\,\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{\mathrm{tg}\,x} + 3 = 0$. Az $a = \mathrm{tg}\,x$ helyettesítés után az egyenlet: $2a^2 + 3a + 1 = 0$. Ennek megoldásai: $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -1$. Ha $\mathrm{tg}\,x = -\frac{1}{2}$, akkor $x_1 = -26{,}57° + k \cdot 180°$; ha $\mathrm{tg}\,x = -1$, akkor $x_2 = -45° + k \cdot 180°$, ahol k tetszőleges egész szám.

11. Oldja meg a $\sin 2x \cdot \cos 3x = \sin 4x \cdot \cos 5x$ egyenletet!

Megoldás: Használjuk a szorzatot összeggé alakító azonosságot:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

illetve a különbséget szorzattá alakító azonosságot:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$\frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 9x - \sin x)$, így $\sin 9x - \sin 5x = 0$, azaz $\sin 2x \cdot \cos 7x = 0$.

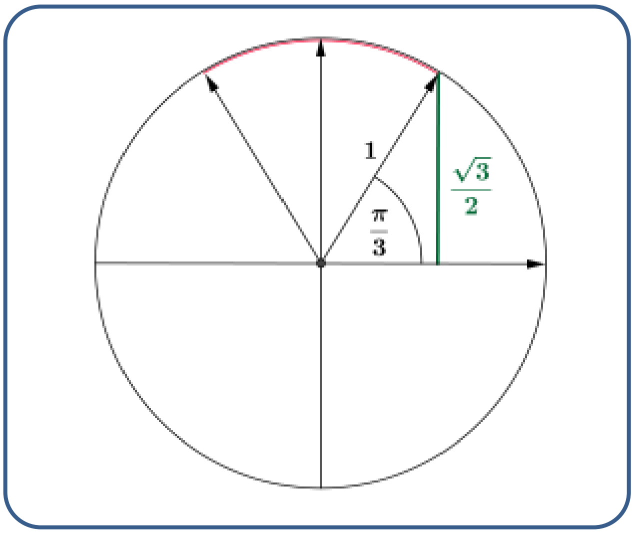
Ezért $\sin 2x = 0$ vagy $\cos 7x = 0$. Megoldás $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$, ahol $k \in \mathrm{Z}$.

12. Oldja meg az egyenlőtlenségeket.

a) $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x > \cos x$ c) $2\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$

Megoldás:

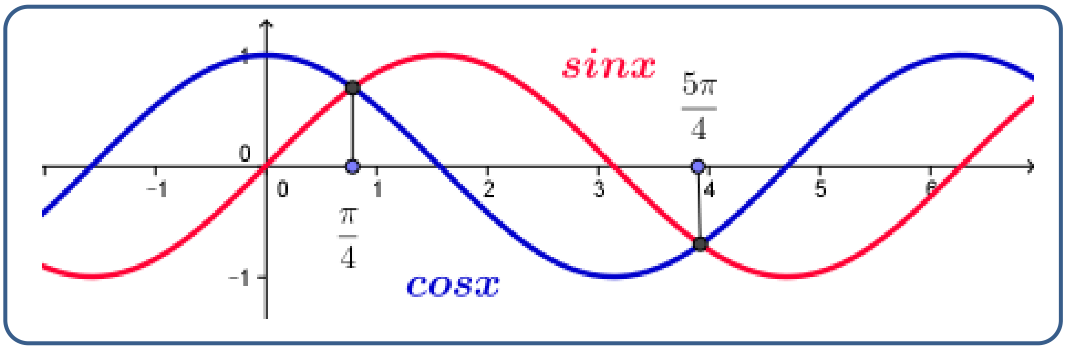
a) Tekintsük a trigonometrikus egységkört. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$\sin\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ pontosan akkor, ha $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Ezért a $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenség megoldása: $\left]\frac{\pi}{6}+k\pi; \frac{\pi}{3}+k\pi\right[$, $k \in Z$.

b) Ábrázoljuk a függvényeket, és innen leolvasható a megoldás.

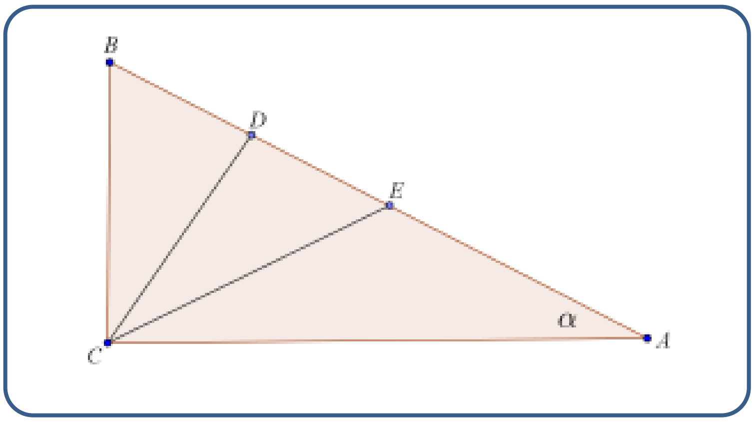


Megoldás: $\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi; \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k \in Z$.

c) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} > 0$, innen az $a = \sin x$ helyettesítés után az $a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Az $y = a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$ parabola felfelé nyitott, zérushelyei $a = -1$ és $a = \frac{1}{2}$. Így az $a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} > 0$ egyenlőtlenség megoldásai az $a < -1$, illetve $a > \frac{1}{2}$ valós számok.

A $\sin x < -1$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása,
a $\sin x > \frac{1}{2}$ megoldása $\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right[$, $k \in Z$.

13. Az ABC derékszögű háromszög derékszögű C csúcsából induló szögharmadolók az átfogót a D és E pontban metszik, és $\frac{CE}{CD} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?



Megoldás. A szögharmadolók $30°$-os szögekre osztják a derékszöget. $CED\angle = \alpha + 30°$ és $CDE\angle = 120° - \alpha$.

A CED háromszögben írjuk fel a szinusztételt: $\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{CE}{CD} = \frac{\sin(120° - \alpha)}{\sin(30° + \alpha)}$.

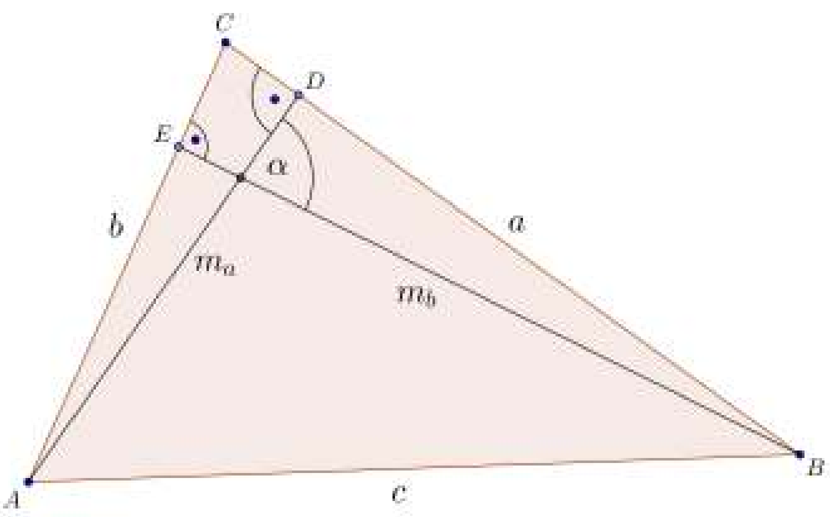
$3\sqrt{3} \cdot \sin(30° + \alpha) = 4 \cdot \sin(120° - \alpha)$.

$5\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $\alpha \approx 19{,}10°$, és így $90° - \alpha \approx 70{,}90°$. A háromszög hegyesszögei $19{,}10°$ és $70{,}90°$.

14. A hegyesszögű ABC háromszög a és b oldalához tartozó magasságok hossza m_a és m_b, és ezek egymással α szöget zárnak be.

Mutassa meg, hogy $c = \frac{\sqrt{m_a^2 + m_b^2 - 2m_a m_b \cos\alpha}}{\sin\alpha}$.



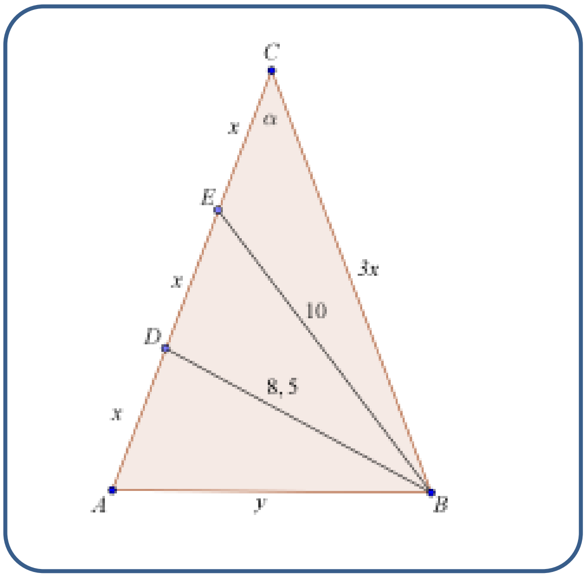
Megoldás. Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge is α, így $b = \frac{m_a}{\sin\alpha}$, $a = \frac{m_b}{\sin\alpha}$. Írjuk fel a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = \frac{m_b^2}{\sin^2\alpha} + \frac{m_a^2}{\sin^2\alpha} - 2 \cdot \frac{m_a \cdot m_b}{\sin^2\alpha} \cdot \cos\alpha,$$

azaz $c = \frac{\sqrt{m_a^2 + m_b^2 - 2m_a m_b \cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

15. Az ABC háromszögben $AC = BC$. Az AC oldalon felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $AD = DE = EC$ legyen. Számítsa ki a háromszög területét, ha $BD = 8{,}5$ és $BE = 10$.

Megoldás. $t_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2} = \dfrac{9x^2 \cdot \sin\alpha}{2}$, tehát x^2 és $\sin\alpha$ értékét kell meghatározni.



A koszinusztétel miatt a BCE háromszögből $\cos\alpha = \dfrac{x^2 + 9x^2 - 100}{6x^2}$, a BCD háromszögből $\cos\alpha = \dfrac{4x^2 + 9x^2 - 72{,}25}{12x^2}$.

Az $\dfrac{x^2 + 9x^2 - 100}{6x^2} = \dfrac{4x^2 + 9x^2 - 72{,}25}{12x^2}$ egyenlet megoldása $x^2 = 18{,}25$, így $\cos\alpha = \dfrac{55}{73}$, és $\sin\alpha = \dfrac{48}{73}$.

A háromszög területe $t_{ABC} = \dfrac{9 \cdot 18{,}25}{2} \cdot \dfrac{48}{73} = 54$ területegység.

16. Egy háromszög oldalainak hossza: $n^2 + n + 1$, $2n + 1$, $n^2 - 1$, ahol n 1-nél nagyobb egész szám. Mutassa meg, hogy a háromszögnek van $120°$-os szöge.

Megoldás: Írjuk fel a koszinusztételt:

$$\left(n^2 + n + 1\right)^2 = (2n + 1)^2 + \left(n^2 - 1\right)^2 - 2 \cdot (2n + 1) \cdot \left(n^2 - 1\right) \cdot \cos\gamma .$$

Innen átalakítások után kapjuk: $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$, tehát $\gamma = 120°$.

17. Egy háromszög oldalainak hossza egy olyan számtani sorozat három egymást követő eleme, amelynek differenciája 1. A háromszög területének mérőszáma kétszer akkora, mint a kerület mérőszáma. Mekkorák az oldalak?

Megoldás. A háromszög oldalai $a-1,\ a,\ a+1$. A háromszög kerülete $3a$.
A háromszög területe $6a=\frac{(a+1)(a-1)\sin\alpha}{2}$, innen $\sin\alpha=\frac{12a}{a^2-1}$.
Írjuk fel a koszinusztételt: $a^2=(a+1)^2+(a-1)^2-2(a+1)(a-1)\cos\alpha$, innen $\cos\alpha=\frac{a^2+2}{2(a^2-1)}$.

Mivel $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, így $\left(\frac{12a}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{a^2+2}{2(a^2-1)}\right)^2=1$, ebből rendezéssel: $3a^4-588a^2=0$, $3a^2\cdot(a^2-196)=0$. Mivel $a\neq 0$, ezért $a^2-196=0$, innen $a=14$.
A háromszög oldalainak hossza 13, 14, 15 egység.

III. Ajánlott feladatok

1. Melyik a nagyobb: $\frac{\sin 1°}{\sin 2°}$ vagy $\frac{\sin 3°}{\sin 4°}$?

2. Igazolja az alábbi egyenlőségeket!

a) $\operatorname{tg}15°+\operatorname{ctg}15°=4$

b) $\sin 20°\cdot\sin 70°\cdot\frac{1}{\cos 50°}=\frac{1}{2}$

3. Igazolja az alábbi állításokat!

a) $\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b) $(1-\operatorname{ctg}23°)(1-\operatorname{ctg}22°)=2$

4. Hozza egyszerűbb alakra a bal oldali oszlopban álló kifejezéseket. Az eredményeket a jobb oldali oszlopban felsoroltuk, csak más sorrendben. Keresse meg az összetartozó párokat.

(A) $\cos^4 x-\sin^4 x$	(a) $\sin x$
(B) $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)$	(b) $\cos x$
(C) $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$	(c) $\sin x\cdot\cos x$

(D) $\dfrac{\cos x-\sin x}{1-\operatorname{tg} x}$ | (d) $\dfrac{1}{\sin x}$

(E) $\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} y-\operatorname{ctg} x}$ | (e) $\dfrac{1}{\cos x}$

(F) $\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} y-\operatorname{ctg} x}$ | (f) $\cos^2 x-\sin^2 x$

(G) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$ | (g) $\cos^2 x-\sin^2 y$

(H) $1-\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}$ | (h) $\sin^2 x-\sin^2 y$

(I) $\sin x\cdot\operatorname{tg} x+\cos x$ | (i) $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y$

(J) $\cos x\cdot\operatorname{ctg} x+\sin x$ | (j) $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} y$

5. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $(x-2)^2\cdot|\cos x|=\cos x$

b) $1+\sin^2 x=\cos x$

c) $\sin x=2^{\sin^2 x}$

6. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x=0$ b) $2\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-6\cos^2 x=-2$

7. Oldja meg a $\sin x\cdot(1+\cos x)=1+\cos x+\cos^2 x$ egyenletet!

8. Oldja meg a $\sin^2 8x-\sin^2 4x=-1$ egyenletet!

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $3\sin x+4\cos x=5$ b) $4\sin x+5\cos x=6$

10. Oldja meg a $\cos 4x\cdot\cos 5x=\cos 6x\cdot\cos 7x$ egyenletet!

11. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

a) $\cos x\le 0$ b) $\sin x\ge\dfrac{1}{2}$ c) $\operatorname{ctg} x<-\sqrt{3}$

12. Oldja meg a $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x<1$ egyenlőtlenséget.

13. Az *ABCD* négyzetbe írtuk az *AEF* egyenlő szárú háromszöget, ahol *E* a *BC* oldalon, *F* a *DC* oldalon nyugszik és $AE=AF$. Ha $\operatorname{tg} AFE\angle=3$, akkor mennyi $\cos EAB\angle$?

14. Mutassa meg, ha *ABCDEFGHI* szabályos kilencszög, akkor $AF=AB+AC$.

15. Az ABC háromszögben $AB = 8,\ AC = 3,\ BAC\sphericalangle = 60°$, és az A csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt a D pontban metszi. Mekkora a CD szakasz?

16. Egy 5 egység sugarú körbe írt háromszög két oldala 7 és 9 egység. Mekkora a harmadik oldal?

17. Egy háromszög oldalainak hossza $n-1,\ n,\ n+1$, ahol n egész szám, és a háromszög legnagyobb szöge kétszerese a legkisebb szögének. Mekkorák a háromszög oldalai?

18. Egységsugarú félkörbe téglalapot írtunk, melynek két csúcsa az átmérőn, két másik csúcsa a félköríven nyugszik. Legfeljebb mekkora lehet a téglalap területe?

19. Az ABC szabályos háromszögben felvettük az M és N pontokat úgy, hogy $MAB\angle = MBA\angle = 40°$, $NAB\angle = 20°$, $NBA\angle = 30°$. Bizonyítsa be, hogy MN párhuzamos BC-vel.

20. Az ABC háromszög oldalai $a,\ b,\ c$, területe $t = a^2 - (b-c)^2$. Határozza meg az a oldallal szemközti szög nagyságát.

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Melyik a nagyobb: $\dfrac{\sin 1°}{\sin 2°}$ vagy $\dfrac{\sin 3°}{\sin 4°}$?

I. Megoldás: $\dfrac{\sin 1°}{\sin 2°} - \dfrac{\sin 3°}{\sin 4°} = \dfrac{\sin 1° \cdot \sin 4° - \sin 2° \cdot \sin 3°}{\sin 2° \cdot \sin 4°}$, mivel

$\sin 1° \cdot \sin 4° = \dfrac{1}{2}(\cos 3° - \cos 5°)$ és $\sin 2° \cdot \sin 3° = \dfrac{1}{2}(\cos 1° - \cos 5°)$, miatt a tört

$$= \frac{(\cos 3° - \cos 5°) - (\cos 1° - \cos 5°)}{2\sin 2° \cdot \sin 4°} = \frac{\cos 3° - \cos 1°}{2\sin 2° \cdot \sin 4°} = \frac{-2\sin 2° \cdot \sin 1°}{2\sin 2° \cdot \sin 4°} = -\frac{\sin 1°}{\sin 4°} < 0.$$

Ezekből következik, hogy $\dfrac{\sin 3°}{\sin 4°}$ a nagyobb.

II. Megoldás: $\dfrac{\sin 1°}{\sin 2°} : \dfrac{\sin 3°}{\sin 4°} = \dfrac{\sin 1° \cdot \sin 4°}{\sin 2° \cdot \sin 3°} = \dfrac{\cos 3° - \cos 5°}{\cos 1° - \cos 5°} < 1$, így $\dfrac{\sin 3°}{\sin 4°}$ a nagyobb.

2. Igazolja az alábbi egyenlőségeket!

a) $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15° = 4$

b) $\sin 20° \cdot \sin 70° \cdot \dfrac{1}{\cos 50°} = \dfrac{1}{2}$

Megoldás:

a) $\operatorname{tg}15° + \operatorname{ctg}15° = \dfrac{\sin 15°}{\cos 15°} + \dfrac{\cos 15°}{\sin 15°} = \dfrac{\sin^2 15° + \cos^2 15°}{\cos 15° \cdot \sin 15°} = \dfrac{1}{\cos 15° \cdot \sin 15°}$,

és $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ miatt:

$$\frac{1}{\cos 15° \cdot \sin 15°} = \frac{2}{2 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15°} = \frac{2}{\sin 30°} = \frac{2}{1/2} = 4.$$

b) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ és $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, így

$$\sin 20° \cdot \sin 70° \cdot \frac{1}{\cos 50°} = \frac{1}{2}(2\sin 20° \cdot \cos 20°) \cdot \frac{1}{\cos 50°} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 40°}{\cos 50°} = \frac{1}{2}.$$

3. Igazolja az alábbi állításokat!

a) $\cos^4 \dfrac{\pi}{24} - \sin^4 \dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b) $(1 - \operatorname{ctg} 23°)(1 - \operatorname{ctg} 22°) = 2$

Megoldás:

a) $\cos^4 \dfrac{\pi}{24} - \sin^4 \dfrac{\pi}{24} = \left(\cos^2 \dfrac{\pi}{24} - \sin^2 \dfrac{\pi}{24}\right) \cdot \left(\cos^2 \dfrac{\pi}{24} + \sin^2 \dfrac{\pi}{24}\right) = \cos \dfrac{\pi}{12}$, és

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos(60° - 45°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

b) $(1 - \operatorname{ctg} 23°)(1 - \operatorname{ctg} 22°) = \left(1 - \dfrac{\cos 23°}{\sin 23°}\right)\left(1 - \dfrac{\cos 22°}{\sin 22°}\right) =$

$$\frac{\sin 23° - \cos 23°}{\sin 23°} \cdot \frac{\sin 22° - \cos 22°}{\sin 22°} = \frac{\sqrt{2}\sin(23° - 45°) \cdot \sqrt{2}\sin(22° - 45°)}{\sin 23° \cdot \sin 22°} =$$

$$= \frac{2\sin(-22°) \cdot \sin(-23°)}{\sin 22° \cdot \sin 23°} = \frac{2\sin 22° \cdot \sin 23°}{\sin 22° \cdot \sin 23°} = 2.$$

Más megoldás. Használjuk a $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$ összefüggést.

$$(1 - \operatorname{ctg}(45° - 22°))(1 - \operatorname{ctg} 22°) = \left(1 - \frac{\operatorname{ctg} 22° \cdot \operatorname{ctg} 45° + 1}{\operatorname{ctg} 22° - \operatorname{ctg} 45°}\right)(1 - \operatorname{ctg} 22°) =$$

$$= \left(1 - \frac{\operatorname{ctg} 22° \cdot 1 + 1}{\operatorname{ctg} 22° - 1}\right)(1 - \operatorname{ctg} 22°) = \frac{\operatorname{ctg} 22° - 1 - \operatorname{ctg} 22° - 1}{\operatorname{ctg} 22° - 1} \cdot (1 - \operatorname{ctg} 22°) =$$

$$= \frac{-2}{\operatorname{ctg} 22° - 1} \cdot (1 - \operatorname{ctg} 22°) = 2.$$

4. Hozza egyszerűbb alakra a bal oldali oszlopban álló kifejezéseket. Az eredményeket a jobb oldali oszlopban felsoroltuk, csak más sorrendben. Keresse meg az összetartozó párokat.

(A) $\cos^4 x - \sin^4 x$	(a) $\sin x$
(B) $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)$	(b) $\cos x$
(C) $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$	(c) $\sin x \cdot \cos x$
(D) $\dfrac{\cos x - \sin x}{1 - \operatorname{tg} x}$	(d) $\dfrac{1}{\sin x}$
(E) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}$	(e) $\dfrac{1}{\cos x}$
(F) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x}$	(f) $\cos^2 x - \sin^2 x$
(G) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$	(g) $\cos^2 x - \sin^2 y$
(H) $1 - \dfrac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$	(h) $\sin^2 x - \sin^2 y$
(I) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x$	(i) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$
(J) $\cos x \cdot \operatorname{ctg} x + \sin x$	(j) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y$

Megoldás: (A) – (f), (B) – (g), (C) – (h), (D) – (b), (E) – (i), (F) – (j), (G) – (c), (H) – (a), (I) – (e), (J) – (d).

5. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $(x-2)^2 \cdot |\cos x| = \cos x$ b) $1 + \sin^2 x = \cos x$ c) $\sin x = 2^{\sin^2 x}$

Megoldás:

a) Ha $\cos x = 0$, akkor $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. Ezek megoldásai az egyenletnek. Ha $\cos x \neq 0$, akkor $(x-2)^2 = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

Ha $\cos x > 0$, akkor $\dfrac{\cos x}{|\cos x|} = 1$, azaz $(x-2)^2 = 1$, $x = 3$ vagy $x = 1$. A $\cos x > 0$ feltételt $x = 1$ teljesíti, ezért ez is megoldása egyenletünknek.

Ha $\cos x < 0$, akkor $\dfrac{\cos x}{|\cos x|} = -1$, ám az $(x-2)^2 = -1$ egyenletnek nincs megoldása.

Az $(x-2)^2 \cdot |\cos x| = \cos x$ egyenlet megoldásai $x = 1$ és $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám.

b) $1+\sin^2 x \ge 1 \ge \cos x$ miatt az egyenletnek akkor van megoldása, ha $1+\sin^2 x = 1$ és $\cos x = 1$ teljesül. A megoldás: $x = 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám.

Másképp: $1+\sin^2 x = 1+1-\cos^2 x = \cos x$, azaz $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$. Ennek gyökei $\cos x = -2$ és $\cos x = 1$, ezek közül csak $\cos x = 1$ lehetséges, a megoldás $x = 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám.

c) $\sin x \le 1 = 2^0 \le 2^{\sin^2 x}$ miatt az egyenletnek akkor van megoldása, ha az egyenlet mindkét oldala 1, azaz ha $\sin x = 1$ és $\sin x = 0$ egyszerre teljesül, ami nem lehetséges. Az egyenletnek nincs megoldása.

6. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$

b) $2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 6\cos^2 x = -2$

Megoldás:

a) Ha $\cos x = 0$ lenne, akkor az egyenlet miatt $\sin x = 0$, ami lehetetlen. Ezért most $\cos x \ne 0$, oszthatunk $\cos^2 x$-el, és így kapjuk a $\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0$ másodfokú egyenletet. Ennek gyökei $\mathrm{tg}\, x = 1$ és $\mathrm{tg}\, x = 2$, ahonnan $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$ és $x_2 \approx 1{,}1071 + k\pi$, ahol $k \in \mathrm{Z}$.

b) Ha $\cos x = 0$ lenne, akkor az egyenlet miatt $\sin^2 x = -1$, ami lehetetlen. Ezért most $\cos x \ne 0$, oszthatunk $\cos^2 x$-el, azonban a kapott $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 6 = -\frac{2}{\cos^2 x}$ egyenlet most nem lesz $\mathrm{tg}\, x$-re nézve másodfokú egyenlet.

Használjuk, hogy $2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2$, ezért egyenletünk előbb a $2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 6\cos^2 x = -2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$, azaz a $4\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$ alakot ölti, majd a $\cos^2 x$-el való osztás után kapjuk a $4\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 3 = 0$ egyenletet. Ennek gyökei: $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{4}$ és $\mathrm{tg}\, x = -2$, ahonnan $x_1 \approx 0{,}6435 + k\pi$ és $x_2 \approx 2{,}1850 + k\pi$, ahol $k \in \mathrm{Z}$.

7. Oldja meg a $\sin x \cdot (1+\cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$ egyenletet!

Megoldás: Ha $\cos x = 1$, akkor $\sin x = \frac{3}{2}$, ám ennek nincs megoldása. Ezért ha egyenletünknek megoldása x, akkor $\cos x \ne 1$, $1-\cos x \ne 0$. Szorozzuk az egyenletet $(1-\cos x)$-el.

$$\sin x \cdot \left(1-\cos^2 x\right) = 1 - \cos^3 x,$$

$$\sin^3 x = 1 - \cos^3 x,$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$$

Mivel $\sin^3 x \le \sin^2 x$, $\cos^3 x \le \cos^2 x$ és $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, így $\sin^3 x + \cos^3 x \le 1$. Ezért $\sin^3 x = \sin^2 x$ és $\cos^3 x = \cos^2 x$, azaz $\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0$ és $\cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$.

Mivel $\cos x \ne 1$, így $\cos x = 0$. Ha $\cos x = 0$, akkor $\sin x = \pm 1$, ám $\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0$ miatt csak $\sin x = 1$ lehet.

Így az egyenlet megoldása $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in Z$.

8. Oldja meg a $\sin^2 8x - \sin^2 4x = -1$ egyenletet!

Megoldás: $1 - \sin^2 4x = \cos^2 4x$, így az egyenlet $\sin^2 8x + \cos^2 4x = 0$ alakban írható. Mivel $\sin^2 8x \ge 0, \cos^2 4x \ge 0$, így $\sin^2 8x + \cos^2 4x = 0$ csak úgy lehet, ha $\sin^2 8x = 0$ és $\cos^2 4x = 0$, azaz $\sin 8x = 0$ és $\cos 4x = 0$. A $\sin 8x = 0$ egyenlet megoldásai: $8x_1 = k\pi$, így $x_1 = \frac{k\pi}{8}, k \in Z$. A $\cos 4x = 0$ egyenlet megoldásai: $4x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, így $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in Z$. Olyan x szám lehet csak az egyenlet megoldása, amelyre $\sin 8x = 0$ és $\cos 4x = 0$ is teljesül, így a megoldások: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in Z$.

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $3\sin x + 4\cos x = 5$

b) $4\sin x + 5\cos x = 6$

Megoldás:

a) $\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$, mivel $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, így van olyan φ hegyesszög, amelyre $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ és $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ (gondoljunk a $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ összefüggésre). Ez a szög $\varphi = 53{,}13°$.

$1 = \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = \sin(x + \varphi)$, azaz $\sin(x + \varphi) = 1$, $\sin(x + 53{,}13°) = 1$, ennek megoldása

$x + 53{,}13° = 90° + k \cdot 360°$, így $x = 36{,}87° + k \cdot 360°$, ahol k tetszőleges egész szám.

b) $4^2 + 5^2 = 41$, így $\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right)^2 = 1$. Legyen φ olyan hegyesszög, amelyre $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{41}}$, ez a szög $\varphi = 51{,}34°$.

Osszuk az egyenletet $\sqrt{41}$ -gyel, és ezután alkalmazható az addíciós tétel:

$\frac{4}{\sqrt{41}} \cdot \sin x + \frac{5}{\sqrt{41}} \cdot \cos x = \frac{6}{\sqrt{41}}$,

$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = \frac{6}{\sqrt{41}}$, vagyis $\sin(x+\varphi) = \frac{6}{\sqrt{41}}$,

$\sin(x + 51{,}34°) = \frac{6}{\sqrt{41}} = \sin 69{,}56°$,

tehát $x + 51{,}34° = 69{,}56° + k \cdot 360°$, $x = 18{,}22° + k \cdot 360°$,

vagy $x + 51{,}34° = (180° - 69{,}56°) + k \cdot 360°$, $x = 59{,}10° + k \cdot 360°$, ahol k tetszőleges egész szám.

10. Oldja meg a $\cos 4x \cdot \cos 5x = \cos 6x \cdot \cos 7x$ egyenletet!

Megoldás: Használjuk a szorzatot összeggé alakító azonosságot:

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$.

Így $\frac{1}{2}(\cos 9x + \cos x) = \frac{1}{2}(\cos 13x + \cos x)$, $\cos 9x - \cos 13x = 0$.

A $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ azonosság miatt egyenletünk a következő alakot ölti: $2\sin 11x \cdot \sin 2x = 0$.

Ezért $\sin 2x = 0$, $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$, vagy $\sin 11x = 0$, $x_2 = k \cdot \frac{\pi}{11}$, ahol $k \in Z$.

11. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

a) $\cos x \le 0$

b) $\sin x \ge \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$

Megoldás:

a) $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in Z$.

b) $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$, $k \in Z$.

c) $\left]-\frac{\pi}{6} + k\pi; k\pi\right[$, $k \in Z$.

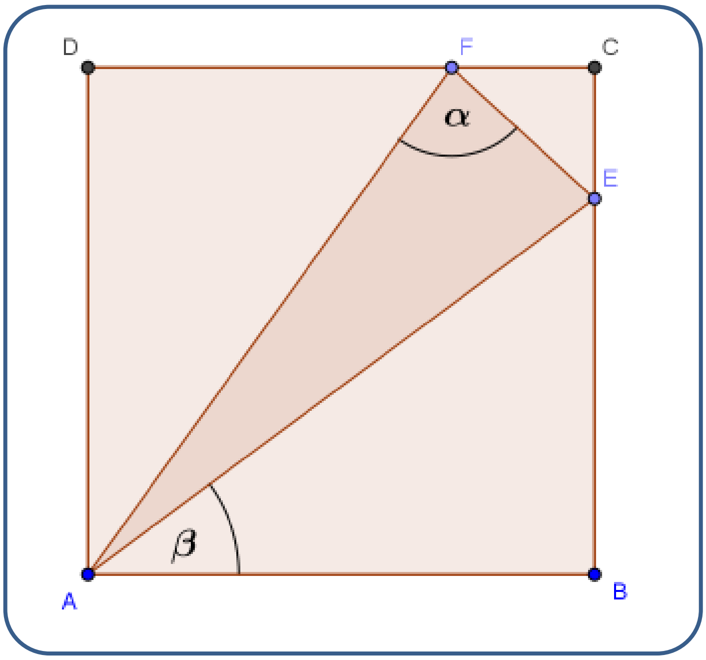
12. Oldja meg a $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x < 1$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Az $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x < \frac{1}{2}$, azaz $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2x + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2x < \frac{1}{2}$, és az addíciós tétel miatt $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$.

Ennek megoldása $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$, így $\frac{4\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{12\pi}{6} + 2k\pi$, azaz $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám.

13. Az $ABCD$ négyzetbe írtuk az AEF egyenlő szárú háromszöget, ahol E a BC oldalon, F a DC oldalon nyugszik és $AE = AF$. Ha $\operatorname{tg} AFE\angle = 3$, akkor mennyi $\cos EAB\angle$?

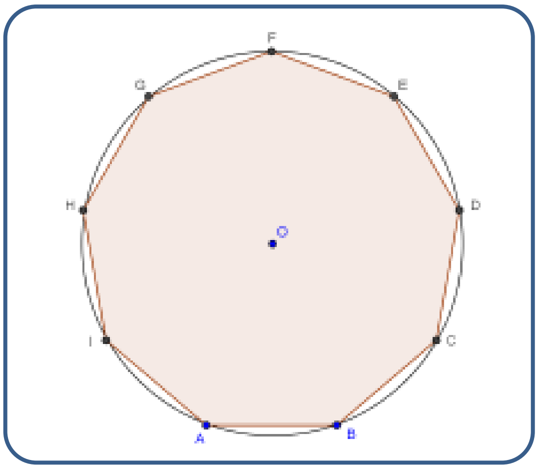
Megoldás: Az ábra az AC átlóra szimmetrikus, így az A-nál lévő szög: $90° = (180° - 2\alpha) + 2\beta$, így $\beta = \alpha - 45°$, ahol $AFE\angle = \alpha,\ EAB\angle = \beta$.



$\cos\beta = \cos(\alpha - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$. Mivel $\operatorname{tg}\alpha = 3$, így $\sin\alpha = 3\cos\alpha$, és $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ miatt $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, innen $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ és $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

14. Mutassa meg, ha $ABCDEFGHI$ szabályos kilencszög, akkor $AF = AB + AC$.

Megoldás: Tudjuk, hogy ha egy r sugarú körben az a hosszúságú húrhoz α kerületi szög tartozik, akkor $a = 2r \cdot \sin\alpha$. A szabályos kilencszög egy oldalához $\frac{360°}{9} = 40°$ -os középponti szög, és $20°$-os kerületi szög tartozik.

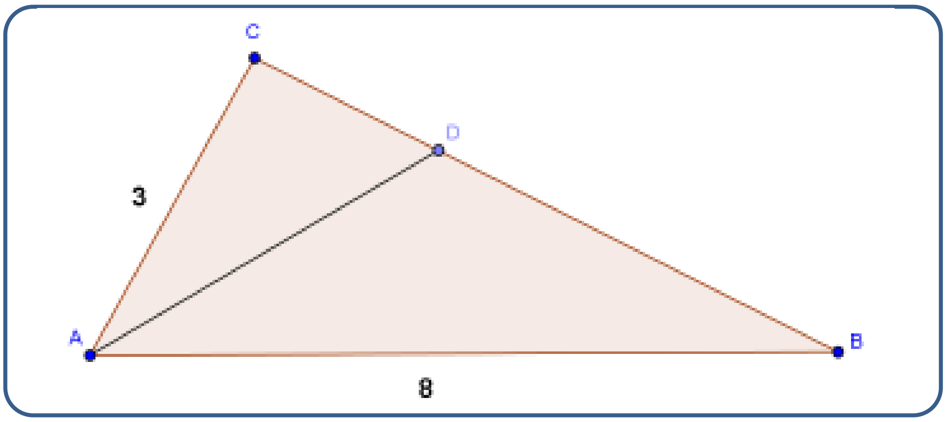


Az AB húrhoz $20°$-os, az AC húrhoz $40°$-os és az AF húrhoz $80°$-os kerületi szög tartozik. Ezek miatt az $AF = AB + AC$ egyenlőség felírható a következő alakban: $2r \cdot \sin 80° = 2r \cdot \sin 20° + 2r \cdot \sin 40°$. A $\sin 80° = \sin 20° + \sin 40°$ összefüggést kell igazolnunk. A $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosság miatt

$\sin 20° + \sin 40° = 2\sin 30° \cdot \cos 10° = \cos 10°$, és $\cos 10° = \sin 80°$,
így $\sin 20° + \sin 40° = \sin 80°$.

15. Az ABC háromszögben $AB = 8$, $AC = 3$, $BAC \sphericalangle = 60°$, és az A csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt a D pontban metszi. Mekkora a CD szakasz?

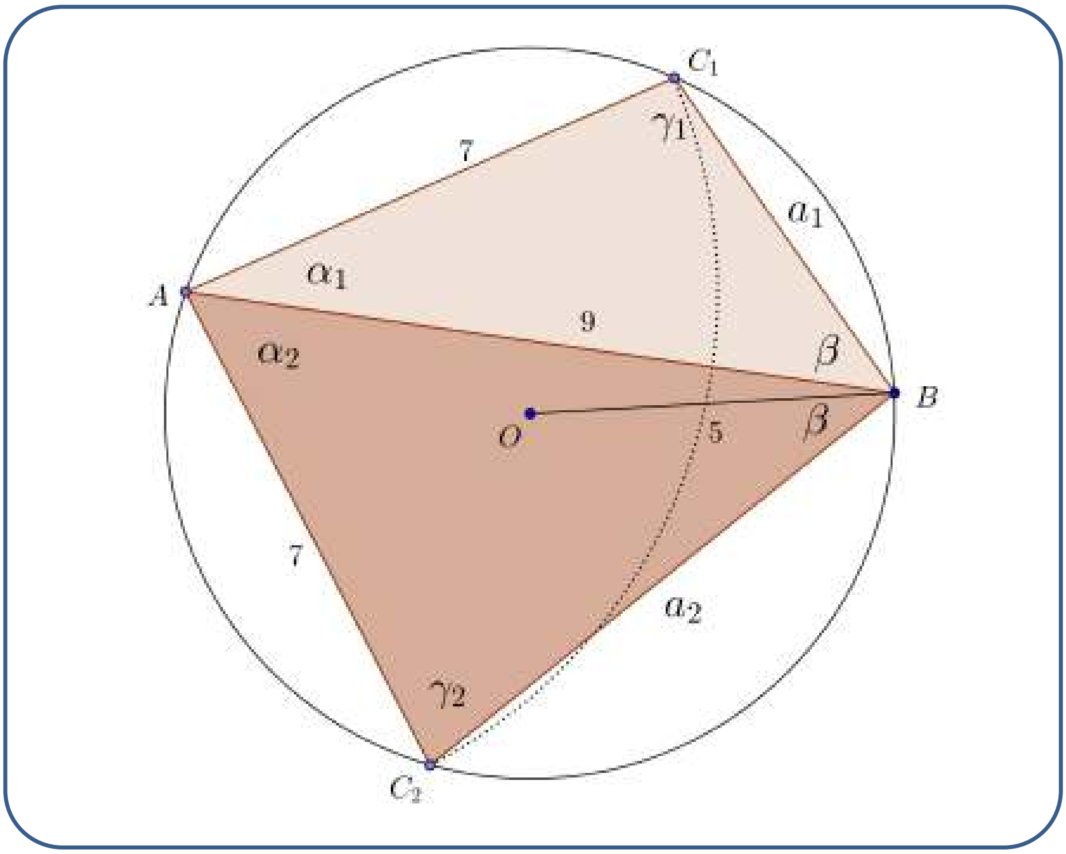
Megoldás: A koszinusz-tétel miatt: $BC = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60°} = \sqrt{73 - 24} = 7.$



A szögfelező-tétel miatt $\frac{CD}{DB} = \frac{3}{8}$, így $CD = \frac{3}{11}BC = \frac{3}{11} \cdot 7 = \frac{21}{11}$.

16. Egy 5 egység sugarú körbe írt háromszög két oldala 7 és 9 egység. Mekkora a harmadik oldal?

Megoldás: Két megoldás van, amit a szerkesztésből is látunk.
Felhasználjuk, ha az r sugarú körbe írt háromszög a oldalával szemben α szög van, akkor $a = 2r \cdot \sin\alpha$.
Így $7 = 10 \cdot \sin\beta$ és $9 = 10 \cdot \sin\gamma_1$, illetve $9 = 10 \cdot \sin\gamma_2$, ahol $\gamma_1 + \gamma_2 = 180°$, és a γ_1, γ_2 szögek egyike hegyesszög, a másik tompaszög (hiszen egyik sem derékszög). Válasszuk a γ_1 szöget tompaszögnek.



$\sin\gamma_1 = \dfrac{9}{10}$, γ_1 tompaszög, ezért $\cos\gamma_1 = -\dfrac{\sqrt{19}}{10}$; és $\cos\gamma_2 = \dfrac{\sqrt{19}}{10}$.

$\sin\beta = \dfrac{7}{10}$, és β hegyesszög, ezért $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$.

Az első esetben: $\sin\alpha_1 = \sin(180° - (\beta + \gamma_1)) = \sin(\beta + \gamma_1) =$

$= \sin\beta \cdot \cos\gamma_1 + \cos\beta \cdot \sin\gamma_1 = \dfrac{-7\sqrt{19} + 9\sqrt{51}}{100}$.

Az $a_1 = 2r \cdot \sin\alpha_1$ összefüggés alapján: $a_1 = \dfrac{-7\sqrt{19} + 9\sqrt{51}}{10} \approx 3{,}38$.

A második esetben: $\sin\alpha_2 = \sin(180° - (\beta + \gamma_2)) = \sin(\beta + \gamma_2) =$

$= \sin\beta \cdot \cos\gamma_2 + \cos\beta \cdot \sin\gamma_2 = \dfrac{7\sqrt{19} + 9\sqrt{51}}{100}$.

Az $a_2 = 2r \cdot \sin\alpha_2$ összefüggés alapján: $a_2 = \dfrac{7\sqrt{19} + 9\sqrt{51}}{10} \approx 9{,}48$.

Két megoldás van: a háromszög harmadik oldala 3,38, vagy 9,48 egység.

17. Egy háromszög oldalainak hossza $n-1,\ n,\ n+1$, ahol n egész szám, és a háromszög legnagyobb szöge kétszerese a legkisebb szögének.
Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás: A háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, így ha a kisebb szög α, akkor a szinusz-tétel szerint: $\dfrac{n-1}{\sin\alpha} = \dfrac{n+1}{\sin 2\alpha}$, azaz

$\dfrac{n-1}{\sin\alpha} = \dfrac{n+1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, és így $\cos\alpha = \dfrac{n+1}{2(n-1)}$.

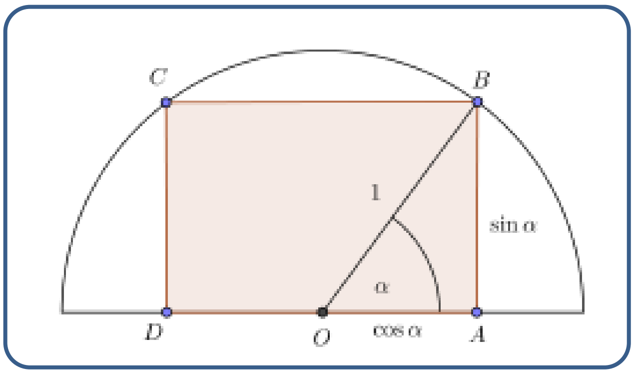
Most írjuk fel a koszinusztételt: $(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1)\cos\alpha$, innen

$(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1) \cdot \dfrac{n+1}{2(n-1)}$.

Ebből a műveletek és az összevonások elvégzése után $n = 5$.
Tehát a háromszög oldalai 4, 5 és 6 egység hosszúak.

18. Egységsugarú félkörbe téglalapot írtunk, melynek két csúcsa az átmérőn, két másik csúcsa a félköríven nyugszik. Legfeljebb mekkora lehet a téglalap területe?

Megoldás: Az ábrán látható adatokkal felírhatjuk a téglalap területét.



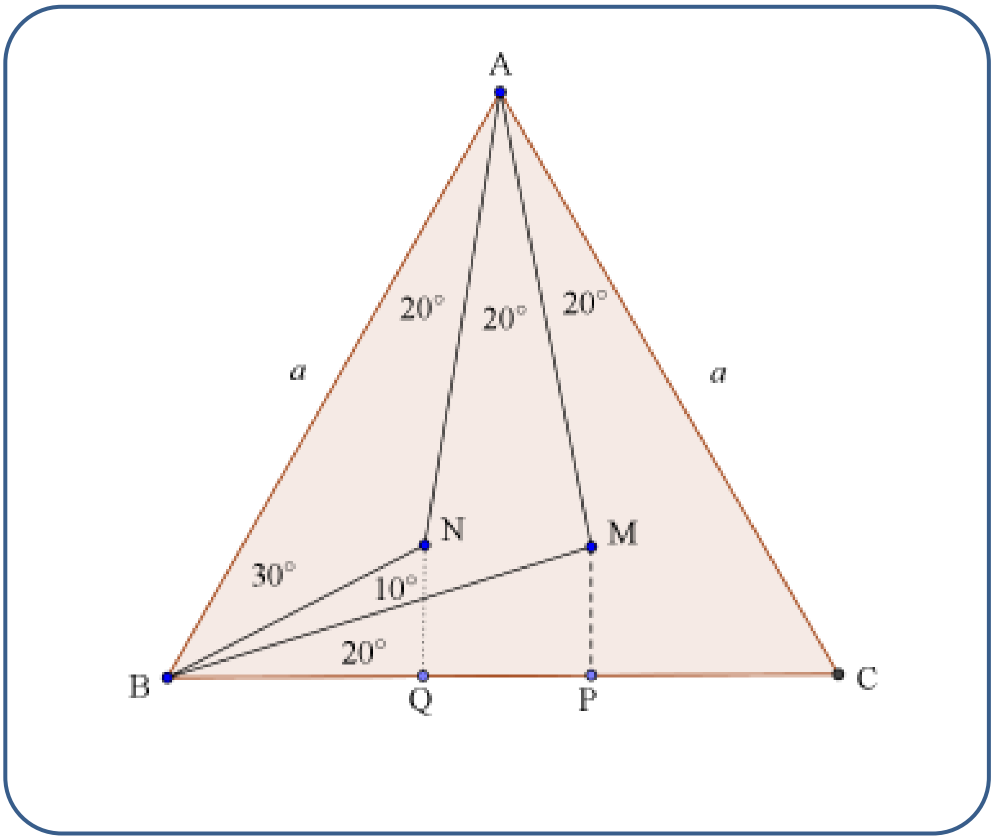
$t = 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \sin 2\alpha$. Mivel $\sin 2\alpha \le 1$, így a téglalap területe legfeljebb 1 területegység. A téglalap területe ezt az értéket felveszi, ha $\alpha = 45°$. (Ekkor a téglalap egyik oldala kétszerese a másik oldalának.)

19. Az ABC szabályos háromszögben felvettük az M és N pontokat úgy, hogy $MAB\angle = MBA\angle = 40°$, $NAB\angle = 20°$, $NBA\angle = 30°$. Bizonyítsa be, hogy MN párhuzamos BC-vel.

Megoldás. Az M és az N pontok merőleges vetülete a BC oldalon P és Q. Az MN párhuzamos BC-vel, ha $MP = NQ$.

A BAN háromszögben a szinusztétel miatt: $\dfrac{BN}{\sin 20°} = \dfrac{a}{\sin 130°} = \dfrac{a}{\sin 50°}$.

A BAM háromszögben a szinusztétel miatt: $\dfrac{BM}{\sin 40°} = \dfrac{a}{\sin 100°} = \dfrac{a}{\sin 80°}$.



Ekkor: $NQ = BN \cdot \sin 30° = \dfrac{a \cdot \sin 20° \cdot \sin 30°}{\sin 50°}$, és

$MP = BM \cdot \sin 20° = \dfrac{a \cdot \sin 40° \cdot \sin 20°}{\sin 80°}$.

$MP = NQ$ teljesül, ha $\dfrac{\sin 30°}{\sin 50°} = \dfrac{\sin 40°}{\sin 80°}$. Ez igaz,

mivel $\sin 30° \cdot \sin 80° = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sin 40° \cdot \cos 40° = \sin 40° \cdot \sin 50°$.

20. Az ABC háromszög oldalai a, b, c, területe $t = a^2 - (b-c)^2$. Határozza meg az a oldallal szemközti szög nagyságát.

Megoldás. Az a oldallal szemközti szöget jelölje α.

$t = \dfrac{bc \cdot \sin\alpha}{2} = a^2 - (b-c)^2 = a^2 - b^2 + 2bc - c^2$, azaz $\dfrac{bc \cdot \sin\alpha}{2} - 2bc = a^2 - b^2 - c^2$.

A koszinusztétel miatt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, azaz $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos\alpha$.

Ezekből $\dfrac{bc \cdot \sin\alpha}{2} - 2bc = -2bc \cdot \cos\alpha$.

Osszunk bc-vel ($bc \neq 0$): $\dfrac{\sin\alpha}{2} - 2 = -2\cos\alpha$, azaz $\sin\alpha = 4(1 - \cos\alpha)$.

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$\sin^2\alpha = 16 - 32\cos\alpha + 16\cos^2\alpha$. Használjuk a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ azonosságot, és rendezzük az egyenletet: $17\cos^2\alpha - 32\cos\alpha + 15 = 0$. Az egyenlet gyökei: $\cos\alpha = 1$ és $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$. Az első gyök nem megoldása a feladatnak, mert $\alpha \neq 0°$.

$\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$, így $\alpha \approx 28{,}07°$.

IV. Ellenőrző feladatok

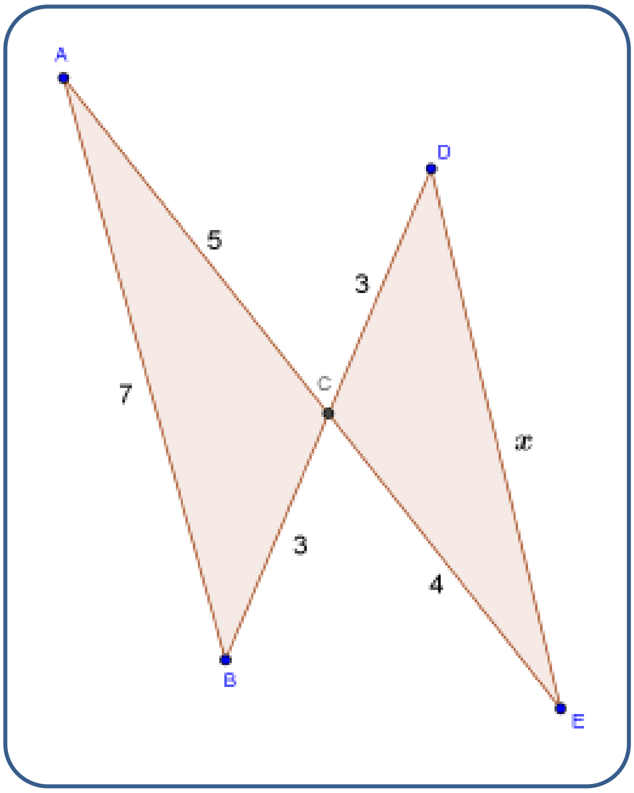
1. Számolja ki $\cos 20° + \cos 60° + \cos 100° + \cos 140°$ értékét számológép segítsége nélkül!

2. Az *a, b, c* oldalú háromszög oldalaira fenn áll az $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ összefüggés. Mutassa meg, hogy a háromszögnek van $60°$-os szöge.

3. Oldja meg a $\sin(60° + x) = 2\sin x$ egyenletet.

4. Oldja meg a $\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{tg}\, x \geq 0$ egyenlőtlenséget.

5. Mekkora az ábrán látható *ED* szakasz?



6. Egy egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szög szinusza kétszerese a csúcsnál fekvő szög koszinuszának. Mekkora a szárszög?

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Számolja ki $\cos 20° + \cos 60° + \cos 100° + \cos 140°$ értékét számológép segítsége nélkül!

Megoldás: $\cos 20° + \cos 60° + \cos 100° + \cos 140° =$
$= \cos 140° + \cos 20° + \cos 100° + \cos 60° =$
$= 2\cos\left(\frac{140° + 20°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{140° - 20°}{2}\right) + \cos 100° + \cos 60° =$
$= 2\cos 80° \cdot \cos 60° + \cos 100° + \cos 60° =$
$= 2\cos 80° \cdot \frac{1}{2} + \cos 100° + \frac{1}{2} = \cos 80° + (-\cos 80°) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

2. Az *a, b, c* oldalú háromszög oldalaira fenn áll az $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ összefüggés. Mutassa meg, hogy a háromszögnek van $60°$-os szöge.

Megoldás: A feltétel átrendezett alakja: $b^2 = a^2 + c^2 - a \cdot c$, és ez a koszinusztétel szerint azt jelenti, hogy a *b* oldallal szemközti β szögre $\cos\beta = \frac{1}{2}$, tehát $\beta = 60°$.

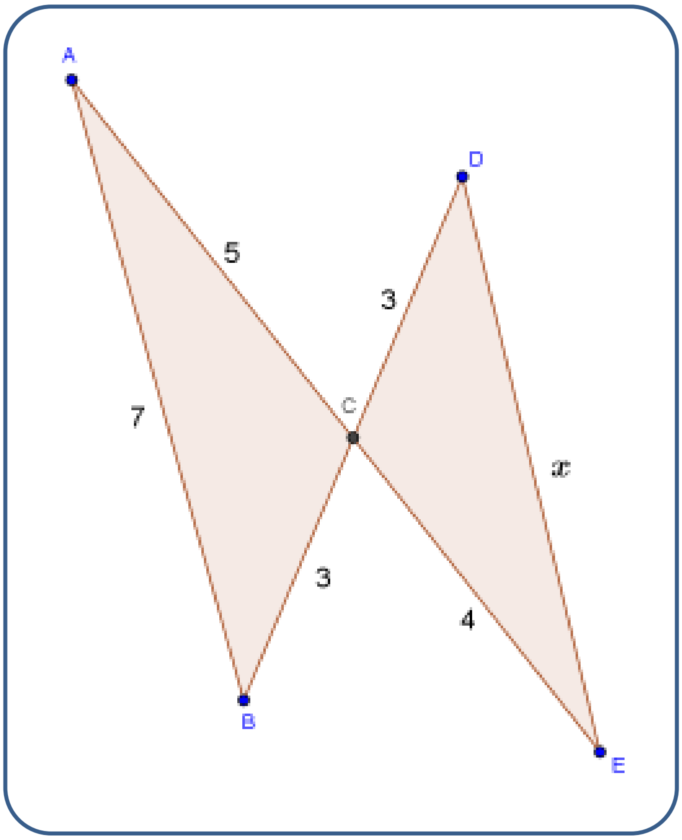
3. Oldja meg a $\sin(60° + x) = 2\sin x$ egyenletet.

Megoldás: Az addíciós tétel miatt: $\sin 60° \cdot \cos x + \cos 60° \cdot \sin x = 2\sin x$, itt helyettesítsük az ismert szögfüggvényértékeket: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot \sin x = 2\sin x$, azaz
$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \frac{3}{2} \cdot \sin x$. Mivel $\cos x \neq 0$, így oszthatunk vele, és rendezés után:
$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, azaz $x = 30° + k \cdot 180°$, ahol *k* tetszőleges egész szám.

4. Oldja meg a $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \geq 0$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Az egyenlet értelmezési tartományába az $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in Z$ értékek tartoznak. Az $a = \operatorname{tg} x$ helyettesítés után az $a^2 + a \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Az $y = a^2 + a$ parabola felfelé nyitott, zérushelyei $a = 0$ és $a = -1$. Így az $a^2 + a \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásai az $a \leq -1$, illetve $a \geq 0$ valós számok.
A $\operatorname{tg} x \leq -1$ egyenlőtlenség megoldása $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, a $\operatorname{tg} x \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása $0 + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol *k* tetszőleges egész szám.

5. Mekkora az ábrán látható *ED* szakasz?



Megoldás: Az *ABC* háromszögben írjuk fel a koszinusz-tételt:

$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos\gamma$, ahol $\gamma = ACB\angle = DCE\angle$. Innen $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$.

A *DCE* háromszögben a koszinusz-tétel szerint

$DE^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\gamma = 9 + 16 - 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 37$, $DE = \sqrt{37}$.

6. Egy egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szög szinusza kétszerese a csúcsnál fekvő szög koszinuszának. Mekkora a szárszög?

Megoldás. Az alapon fekvő szögek nagysága α, a szárszög β. Ekkor $\sin\alpha = 2\cos\beta$, továbbá $2\alpha + \beta = 180°$.

Ebből $\cos\beta = \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$, ezt az előbbi egyenletbe írva kapjuk a $4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 2 = 0$ egyenletet, melynek gyökei $\sin\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$. Mivel α hegyesszög, $\sin\alpha = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$, $\alpha = 57{,}47°$, és a szárszög $\beta = 65{,}07°$.