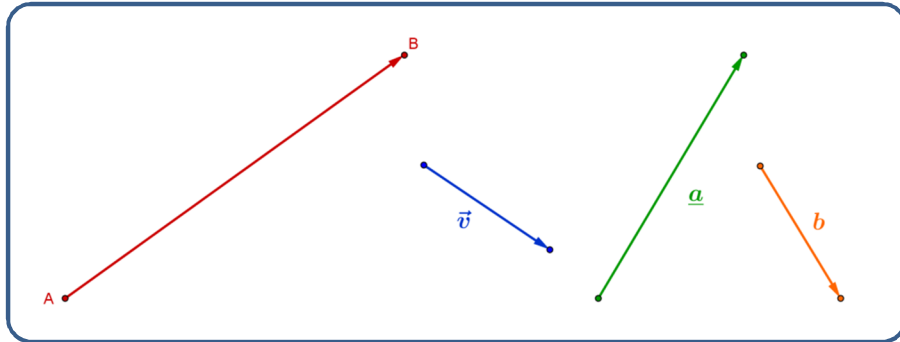


14. Vektorok

I. Elméleti összefoglaló

Vektor

Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük:



Jelölés:

- a kezdő és a végpont megadásával: $\overrightarrow{AB}$;
- egy kisbetűvel: $\vec{v}$, írásban aláhúzás is szokásos: $\underline{a}$; nyomtatásban félkövér betűt használhatunk: $\mathbf{b}$.

Két vektor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

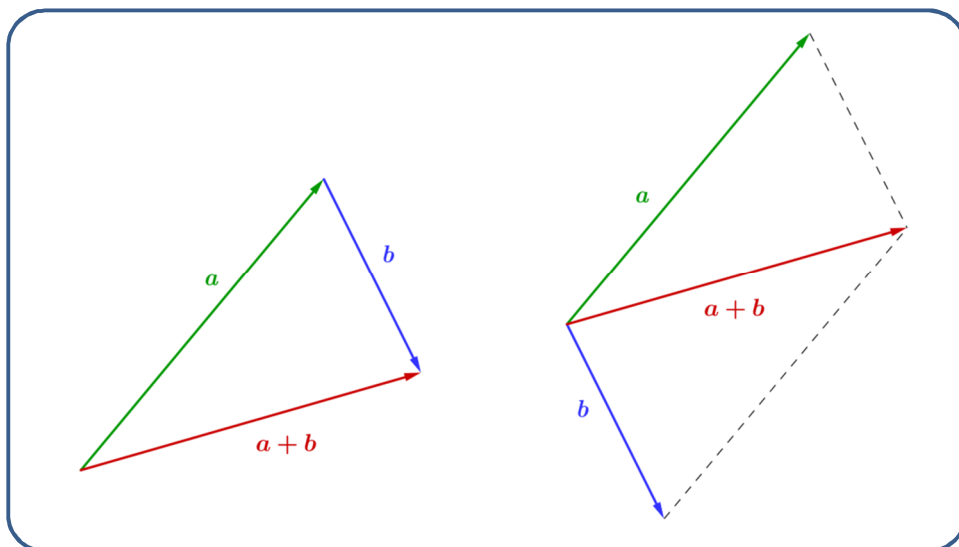
A vektor hosszát a **vektor abszolútértékének** is nevezzük: $|\mathbf{a}|$.

Nullvektornak nevezzük azt a vektort, amelynek abszolútértéke 0. A nullvektor iránya tetszőleges. Bármilyen meglepő, minden vektorral párhuzamosnak, minden vektorra merőlegesnek tekinthetjük.

Két vektor egymás **ellentettje**, ha abszolútértékük egyenlő, irányuk ellentétes. Jelölés: az $\mathbf{a}$ vektor ellentettje $-\mathbf{a}$.

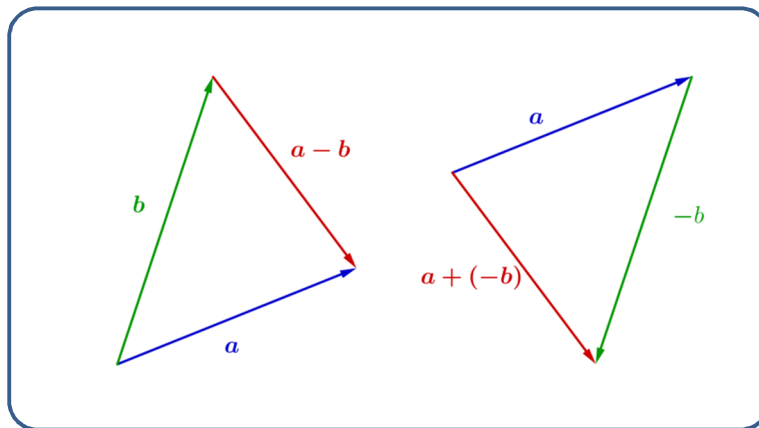
Két vektor összegét az ábra szerint

- háromszög-szabállyal vagy
- paralelogramma módszerrel szerkeszthetjük meg.



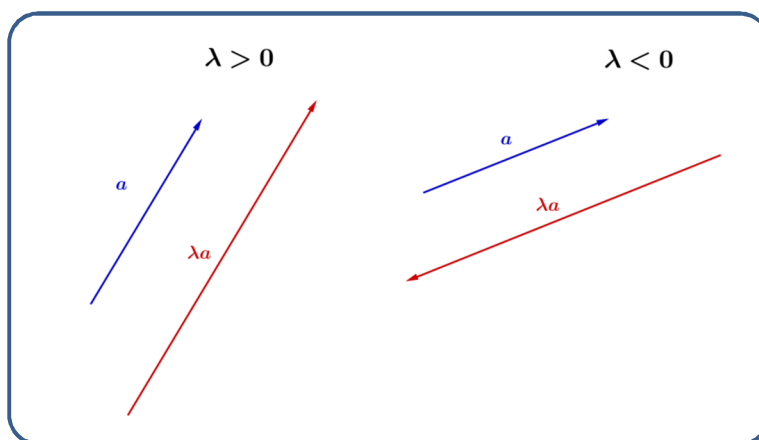
Ha a háromszög-szabályt használjuk, akkor egyszerre több vektort is összeadhatunk – egymás után felmérve őket – az összegvektor az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutat. A paralelogramma módszert például fizikában, az erők összegzése során alkalmazzuk.

Két vektor különbségét az ábra szerint szerkesztjük meg. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor különbségét úgy is megkaphatjuk, ha az $\mathbf{a}$ vektorhoz hozzáadjuk a $-\mathbf{b}$ vektort.



Vektor szorzása számmal: $\lambda \in \mathbb{R}$

- ha $\lambda = 0$, akkor $\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- ha $\lambda > 0$, akkor a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ vektor iránya megegyezik az $\mathbf{a}$ vektor irányával és $|\lambda \cdot \mathbf{a}| = \lambda \cdot |\mathbf{a}|$;
- ha $\lambda < 0$, akkor a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ vektor iránya ellentétes az $\mathbf{a}$ vektor irányával és $|\lambda \cdot \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.



Vektorok skaláris szorzata: Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), akkor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Tétel (vektorműveletek tulajdonságai):

A vektorok összeadása kommutatív és asszociatív:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

A vektorok számmal való szorzására teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b};$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a};$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}.$$

A skaláris szorzat tulajdonságai:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

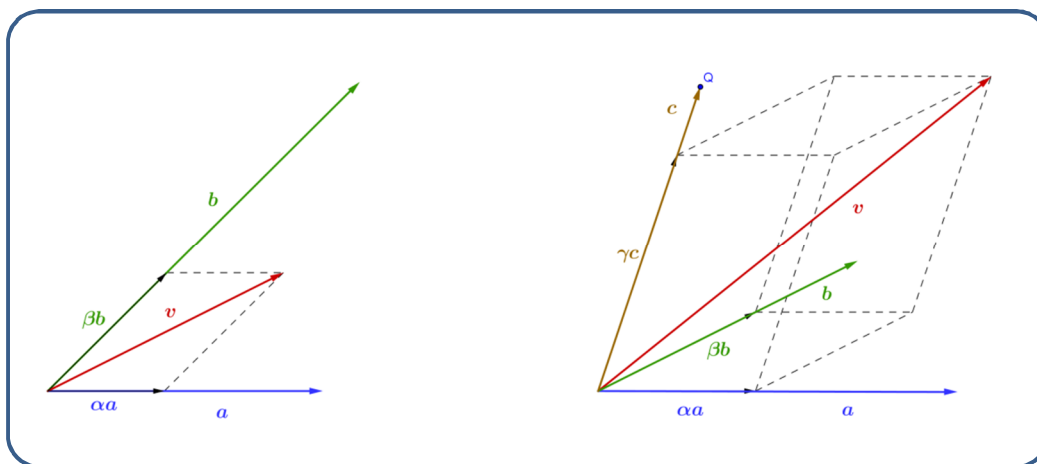
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c};$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{b});$$

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2.$$

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0.

Tétel:



Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a sík két nem párhuzamos vektora, akkor a sík tetszőleges $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen felbontható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre:

$$\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} ; \quad \alpha; \beta \in \mathbb{R}.$$

Ezt az előállítást az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjának is nevezzük.

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a tér három nem egysíkú vektora, akkor a tér tetszőleges $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen felbontható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre:

$$\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} ; \quad \alpha; \beta; \gamma \in \mathbb{R}.$$

Síkban az $\mathbf{a}; \mathbf{b}$, térben az $\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}$ vektorokat **bázisvektoroknak**, az $\alpha; \beta$ illetve $\alpha; \beta; \gamma$ számokat a $\mathbf{v}$ vektor **koordinátáinak** nevezzük.

A vektorok koordinátaival és a vektorműveletek koordinátákkal való kifejezésével a **15. témakörben** foglalkozunk részletesen.

Ha a síkban (térben) egy O pontot rögzítünk, akkor az O pontból a sík(tér) tetszőleges P pontjához vezető $\overrightarrow{OP}$ vektort a P pont **helyvektorának**, az O pontot **vonatkoztatási pontnak** nevezzük. A helyvektort szokás a megfelelő kisbetűvel jelölni: $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$.

Tétel:

Ha az AB szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor

- $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.
- az AB szakasz F felezőpontjába mutató helyvektor:

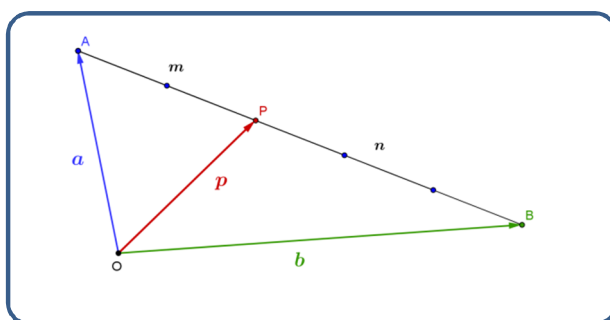
$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$

- az AB szakasz A -hoz közelebbi H harmadolópontjába mutató helyvektor:

$$\mathbf{h} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}.$$

- az AB szakaszt $m:n$ arányban osztó P pontba mutató helyvektor:

$$\mathbf{p} = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m + n}.$$



Tétel:

- Ha az ABC háromszög csúcspontjaiba mutató helyvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, akkor a háromszög S súlypontjába mutató helyvektor:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

- Ha az $ABCD$ tetraéder csúcspontjaiba mutató helyvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, akkor a tetraéder S súlypontjába mutató helyvektor:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}.$$

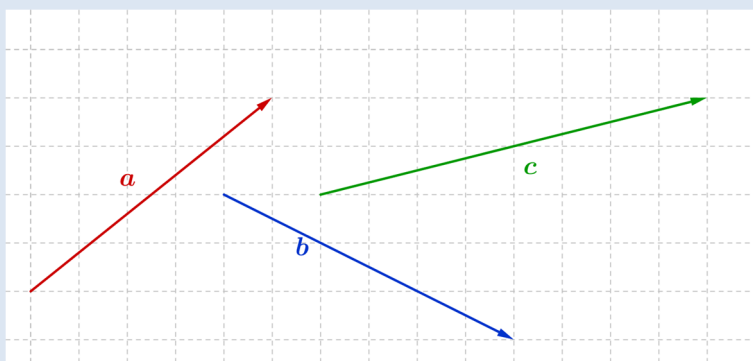
II. Kidolgozott feladatok

1. Adott az $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$; $\mathbf{c}$ vektor. Szerkesszük meg az alábbi vektorokat!

a) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

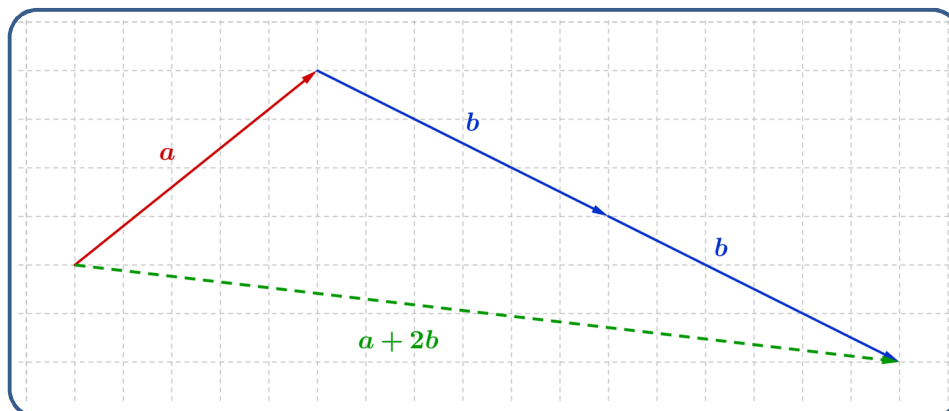
b) $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$

c) $-\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{3}{4}\mathbf{c}$

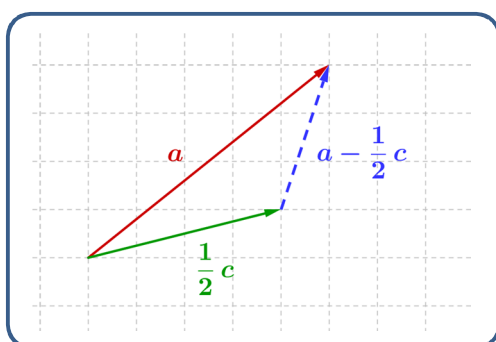


Megoldás:

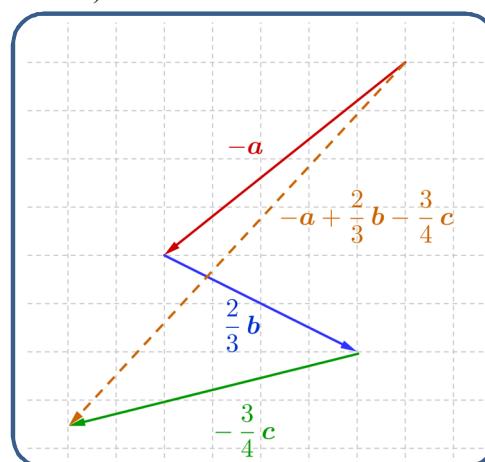
a)



b)

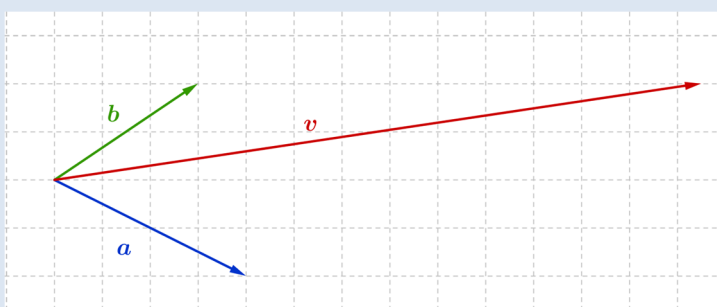


c)

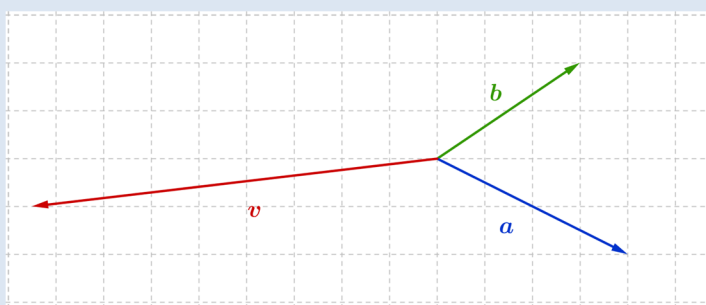


2. Bontsuk fel a v vektort az a és b vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

a)

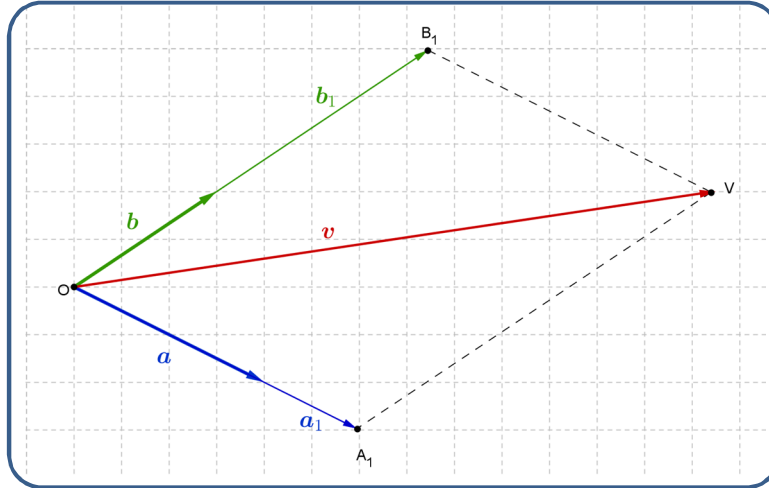


b)

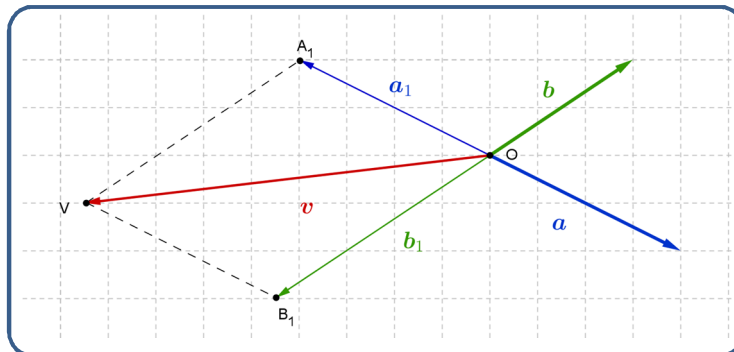


Megoldás:

- a) A v vektor végpontján keresztül párhuzamost húzunk az a illetve b vektorokkal. Így a v vektort egy paralelogrammába foglaljuk. $v = a_1 + b_1$ a vektorok összeadásának szabálya szerint. $a_1 = 1,5 \cdot a$, $b_1 = 2,5 \cdot b$, így $v = 1,5 \cdot a + 2,5 \cdot b$.



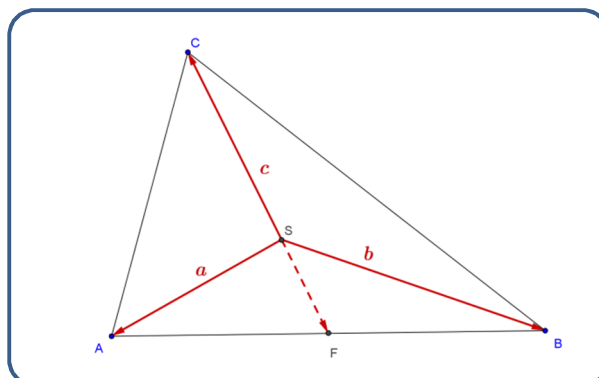
- b) Hasonlóan szerkesztünk, mint az előző esetben. Most az összetevők az a és b vektorokkal ellentétes irányúak, ezért negatív számokat használunk az összetevők kifejezésére:



$$v = a_1 + b_1 = -a - 1,5 \cdot b.$$

3. Az ABC háromszög S súlypontjából a csúcsokhoz mutató vektorok: a, b, c . Határozzuk meg az a, b, c vektorok összegét!

I. Megoldás:



Az F pont az AB oldal felezőpontja, ezért $\overrightarrow{SF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$. A súlypont a súlyvonalnak a csúctól távolabbi harmadoló pontja, ezért $\mathbf{c} = -2 \cdot \overrightarrow{SF} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Innen átrendezés után kapjuk:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

II. Megoldás:

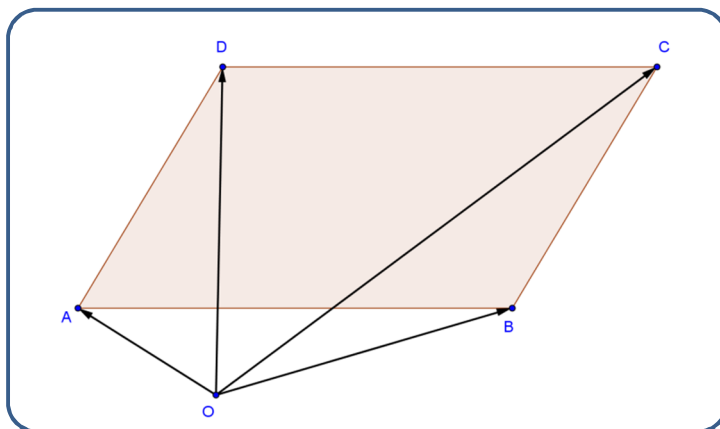
A fenti bizonyítás a súlyvonal és a súlypont geometriai tulajdonságára épít. Érdekes azonban „vektorosan” is gondolkozni. Legyen a vonatkoztatási pont S . Ekkor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a csúcsok helyvektorai. A súlypont helyvektorára fel tudjuk írni:

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{SS} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

Innen is megkapjuk az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ összefüggést.

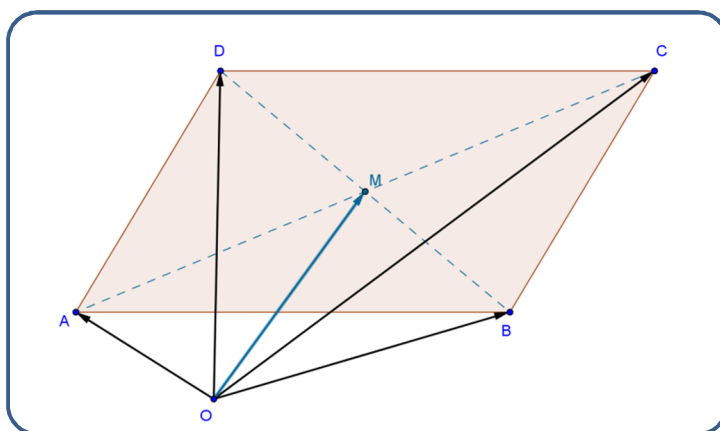
4. Az $ABCD$ paralelogramma síkjának egy tetszőleges pontja O . Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$!

I. Megoldás:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. A paralelogramma szemben lévő oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, ezért $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. Ezt az összefüggést átrendezve megkapjuk az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ bizonyítandó állítást.

II. Megoldás:



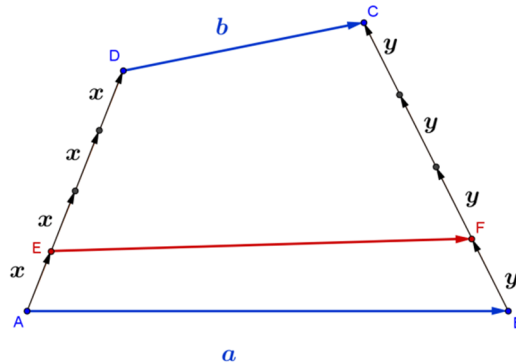
A paralelogramma átlói felezve metszik egymást, ezért az M pont az AC és BD szakasznak is felezőpontja, vektorokkal kifejezve:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD},$$

ezzel megkaptuk a bizonyítandó állítást.

5. Az $ABCD$ négyszög szemközti oldalaira vektorokat illesztünk: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{DC} = \mathbf{b}$. Az AD oldal A -hoz közelebbi negyedelő pontja E , a BC oldal B -hez közelebbi negyedelő pontja F . Határozzuk meg az $\overrightarrow{EF}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok segítségével!

I. Megoldás:



Az ábra szerint az $\overrightarrow{AD} = 4 \cdot \mathbf{x}$; $\overrightarrow{BC} = 4 \cdot \mathbf{y}$. Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kifejezzük kétféle módon:

$$\overrightarrow{EF} = -\mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{y}$$

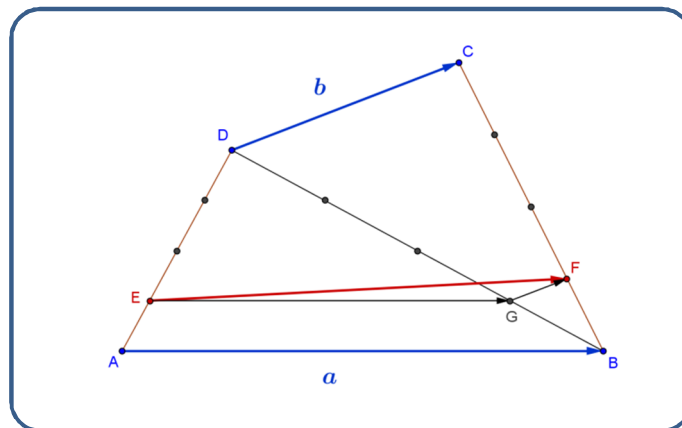
$$\overrightarrow{EF} = 3 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} - 3 \cdot \mathbf{y}.$$

Az első egyenlet háromszorosához hozzáadjuk a második egyenletet:

$$4 \cdot \overrightarrow{EF} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3\mathbf{a} + \mathbf{b}}{4}.$$

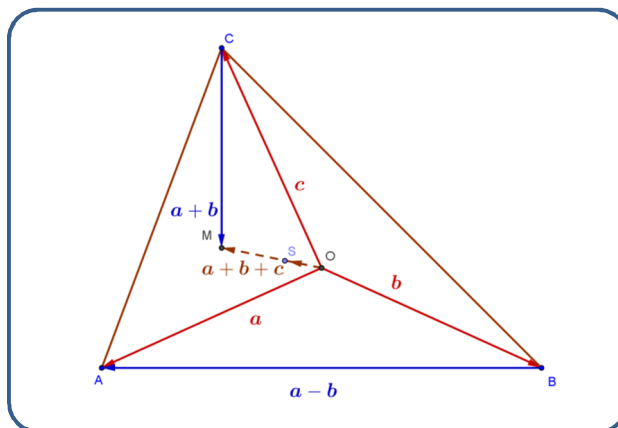
II. Megoldás:



Húzzuk be a BD átlót és osszuk fel négy egyenlő részre. A párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $EG \parallel AB$, a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $EG = \frac{3}{4}AB$, tehát $\overrightarrow{EG} = \frac{3}{4}\mathbf{a}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{4}\mathbf{b}$. A vektorösszeadás szabálya szerint $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b} = \frac{3\mathbf{a} + \mathbf{b}}{4}$.

6. Az ABC háromszög köré írható körének középpontja O . Ebből a pontból a csúcsokhoz mutató vektorok: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Bizonyítsuk be, hogy az O pontból felmért $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektor a háromszög magasságpontjába mutat! Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, súlypontja és a köré írható körének a középpontja egy egyenesen van (Euler-egyenes)!

Megoldás:

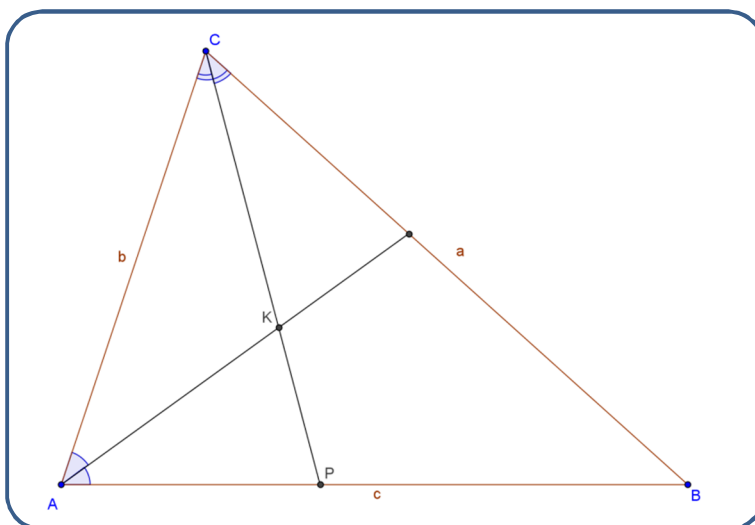


Az ábra szerint legyen $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, mert az O pont a háromszög körülírtó körének a középpontja, így $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$. A két vektor skaláris szorzata 0, így merőlegesek egymásra. Ezzel bizonyítottuk, hogy $CM \perp AB$, tehát az M pont rajta van a C csúcsból induló magasságvonalon. Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy a másik két magasságvonalon is rajta van M , tehát M a háromszög magasságpontja.

A háromszög S súlypontjába mutató vektor $\overrightarrow{OS} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OM}$. Ezzel beláttuk, hogy az M, S, O pontok egy egyenesen vannak, az S pont az O -hoz közelebbi harmadoló pontja az MO szakasznak. Ezt az egyenest Euler-egyenesnek nevezzük.

7. A ABC háromszög oldalainak a hossza a, b, c ; a szemközti csúcsok helyvektorai $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Határozzuk meg a háromszögbe írt kör középpontjának helyvektorát!

Megoldás:



Az ábrán a helyvektorokat az áttekinthetőség miatt nem jelöltük. A szokásnak megfelelően az adott pontba a megfelelő kisbetűvel adjuk meg a helyvektort. A háromszög beírt körének középpontja a

szögfelezők metszéspontja, az ábrán a K pont. A szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, ezért: $p = \frac{aa+bb}{a+b}$ és az AP szakasz hossza $\frac{b}{a+b}c = \frac{bc}{a+b}$. Az APC háromszögben AK szögfelező, erre is alkalmazzuk az előbb említett tételt:

$$k = \frac{bp + \frac{bc}{a+b}c}{\frac{bc}{a+b} + b} = \frac{b \frac{aa+bb}{a+b} + \frac{bc}{a+b}c}{\frac{bc}{a+b} + b} = \frac{b \frac{aa+bb+cc}{a+b}}{b \frac{a+b+c}{a+b}} = \frac{aa+bb+cc}{a+b+c}.$$

A beírt kör középpontjának helyvektora ezek szerint a csúcsok helyvektorainak az oldalak hosszával súlyozott közepe.

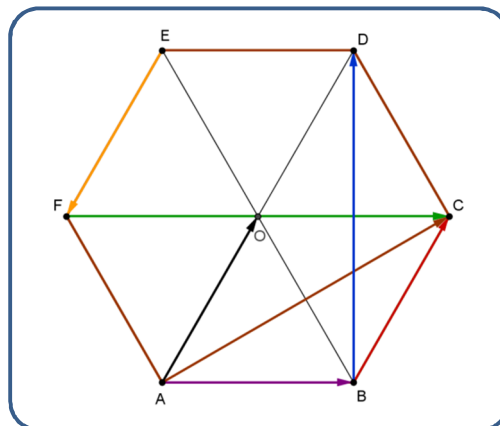
8. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét, ha $|\mathbf{a}| = 7$; $|\mathbf{b}| = 12$ és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -60$!

Megoldás:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ ahol } \varphi \text{ a két vektor szöge. Innen } \cos \varphi = -\frac{60}{7 \cdot 12} = -\frac{5}{7} \Rightarrow \varphi = 135,58^\circ.$$

9. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak a hossza 10, a hatszög középpontja O . Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{EF}$ skaláris szorzatok értékét!

Megoldás:



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10 \cdot 10\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 100 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 150;$$

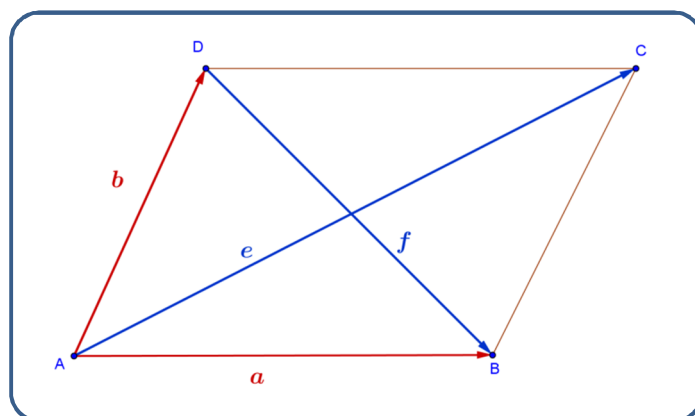
$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} = 10 \cdot 10 \cdot \cos 180^\circ = -100;$$

$$\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BD} = 20 \cdot 10\sqrt{3} \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{EF} = 20 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ = 200 \cdot (-0,5) = -100.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével!

Megoldás:

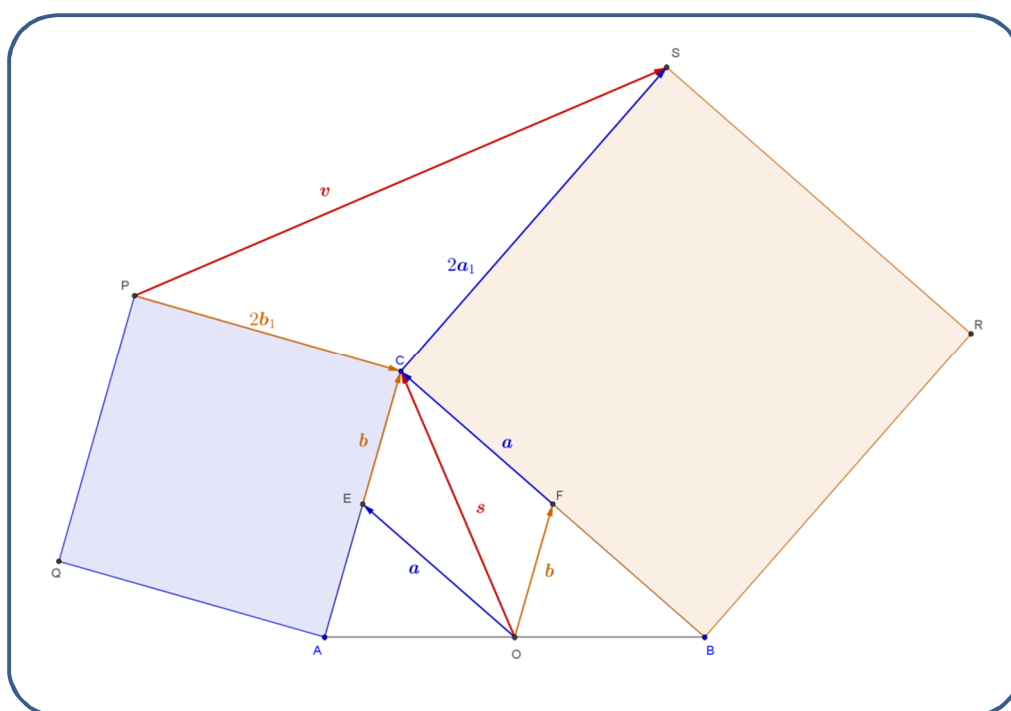


A paralelogramma oldalaira és az átlókra az ábra szerint vektorokat illesztünk. A szakaszok hosszát kisbetűvel, a vektorokat félkövér betűkkel jelöljük. A megoldás során kihasználjuk, hogy egy vektor négyzete egyenlő a hosszának a négyzetével:

$$e^2 + f^2 = \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2 \cdot \mathbf{a}^2 + 2 \cdot \mathbf{b}^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

11. Szerkesszük meg az ABC háromszög AC és BC oldalára kifelé az $ACPQ$ és $CBR S$ négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy a PS szakasz kétszer akkora, mint a háromszög C -hez tartozó súlyvonala!

Megoldás:



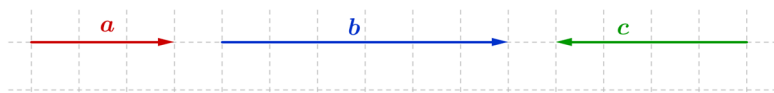
Az AB oldal felezőpontja O , a CB oldal felezőpontja E , az AC oldal felezőpontja F . A háromszög középvonala párhuzamos a háromszög egyik oldalával és fele olyan hosszú. Ezt felhasználva jelölünk vektorokat az ábrán:

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FC} = \mathbf{a}; \quad \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{EC} = \mathbf{b}.$$

Az $\mathbf{a}_1$ vektor az $\mathbf{a}$ vektornak, a $\mathbf{b}_1$ vektor az $\mathbf{b}$ vektornak a -90° -os (az óramutató járásával azonos irányú) elforgatottja. Így $\overrightarrow{CS} = 2\mathbf{a}_1$; $\overrightarrow{PC} = 2\mathbf{b}_1$. A vektorösszeadás szabálya szerint a háromszög súlyvonalára illesztett vektor: $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; a PS szakaszra illesztett vektor: $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{b}_1 = 2(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1)$. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{s}$ vektor -90° -os elforgatottjának a 2-szerese. Tehát beláttuk, hogy a PS szakasz kétszer olyan hosszú, mint a súlyvonal, továbbá azt is, hogy merőleges rá.

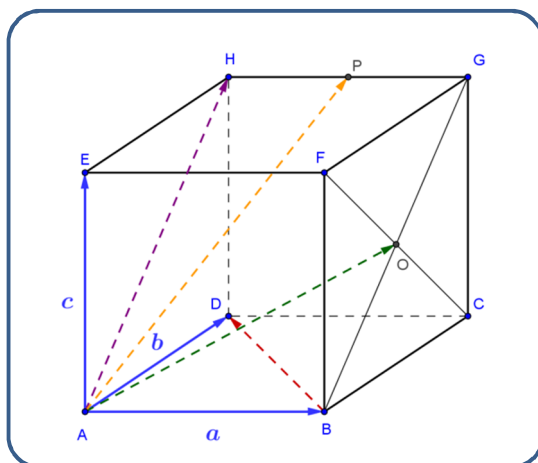
III. Ajánlott feladatok

- Adott az $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$; $\mathbf{c}$ vektor. Szerkessze meg az alábbi vektorokat!

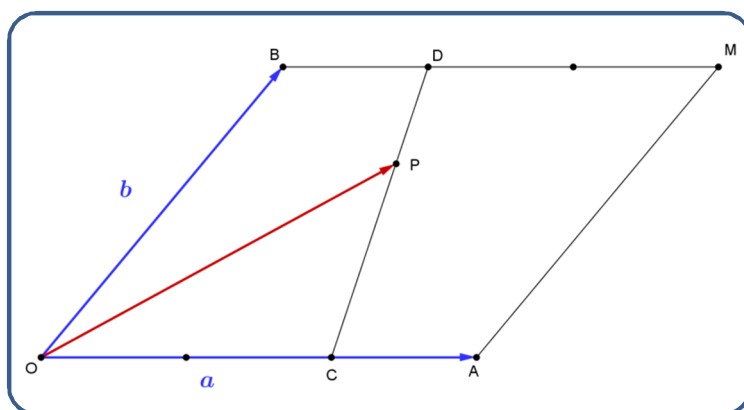


- $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$
- $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$
- $-\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{3}{4}\mathbf{c}$

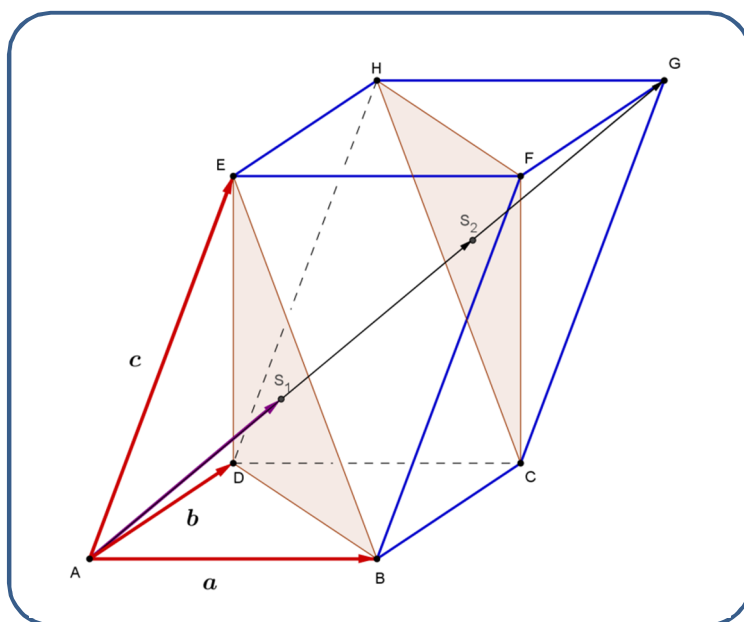
- Az $ABCDEFGH$ kocka A csúcsából kiinduló élvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. A HG él felezőpontja P , a $BCGF$ lap középpontja O . Fejezzük ki az $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO}$ vektorokat az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok segítségével!



- Az $OBMA$ paralelogramma OA és BM oldalát osszuk három egyenlő részre, így kapjuk az ábra szerint a C és D pontokat. Osszuk fel a CD szakaszt is három egyenlő részre, a P pont a CD szakasz D -hez közelebbi harmadoló pontja. Írja fel az $\overrightarrow{OP}$ vektort az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és az $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ vektorok segítségével! (Nemzetközi Előkészítő Intézet felvételi feladata, 1985)



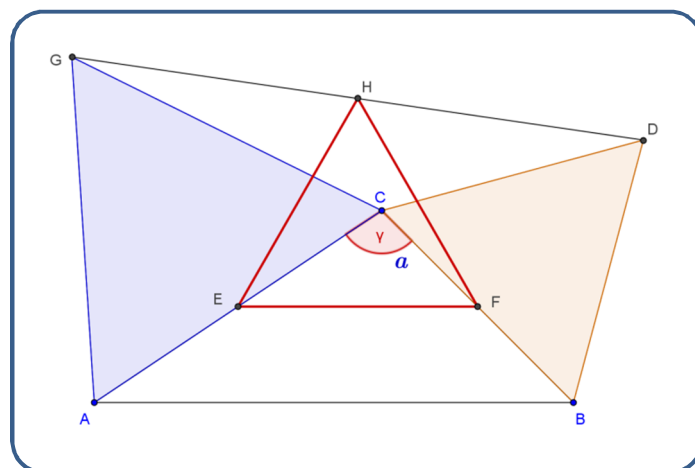
4. Az $ABCDEFGH$ paralelepipedon éleire az ábra szerint vektorokat illesztünk. A DBE háromszög súlypontja S_1 , a CFH háromszög súlypontja S_2 . Fejezzük ki az $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AS_1}$, $\overrightarrow{AS_2}$ vektorokat az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok segítségével! Határozzuk meg, hogy a paralelepipedon testátlóját milyen arányban osztja a két háromszög síkja!



5. Az ABC háromszög A csúcsát tükrözzük a B csúcsra, így az A_1 pontot kapjuk. Hasonlóan a B csúcsnak a C -re vonatkozó tükörképe B_1 , C -nek az A -ra vonatkozó tükörképe C_1 . Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög és az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontja azonos!
6. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög magasságpontját az oldalfelező pontokra tükrözzük, akkor a háromszög köré írható körének pontjait kapjuk!
7. Legyen P és Q az ABC háromszög AB , illetve AC oldalán lévő két belső pont úgy, hogy $BP = CQ$. Jelölje a BC oldal felezőpontját E , a PQ szakasz felezőpontját F . Igazolja, hogy az EF egyenes párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével! (Felvételi feladat, 1992)
8. Egy szánkót 30 N erővel húzunk, az erő 40° -os szöget zár be az elmozdulással. Mekkora munkát végzünk, ha 50 m úton húzzuk a szánkót?
9. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szöge, ha $(2\mathbf{a} - \mathbf{b})(3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}) = -0,5$?
10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes merőleges egy sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor merőleges a sík minden egyenesére!
11. Az $OABC$ tetraéder OA, OB, OC élei páronként merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög hegyesszögű!
12. Adott egy $ABCD$ paralelogramma és egy O pont. Bizonyítsuk be, hogy :

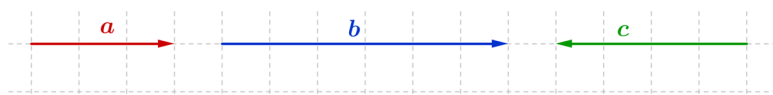
$$(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2) - (\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}!$$

13. Az ABC háromszög BC és CA oldalára kifelé szerkesszük meg a BCD , illetve a CAG szabályos háromszögeket. Az AC , BC , GD szakaszok felezőpontjai E , F , H . Bizonyítsuk be, hogy az EFH háromszög is szabályos!



Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Adott az $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$; $\mathbf{c}$ vektor. Szerkessze meg az alábbi vektorokat!

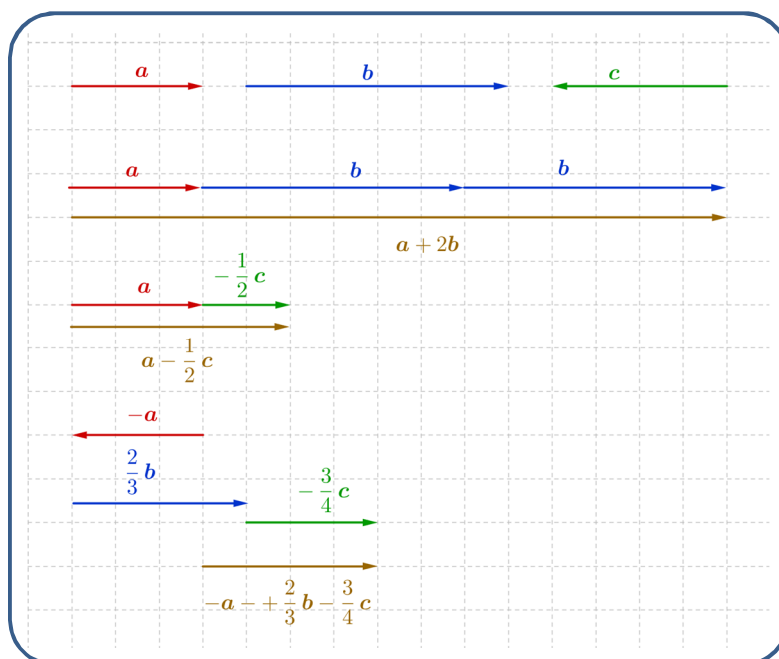


d) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

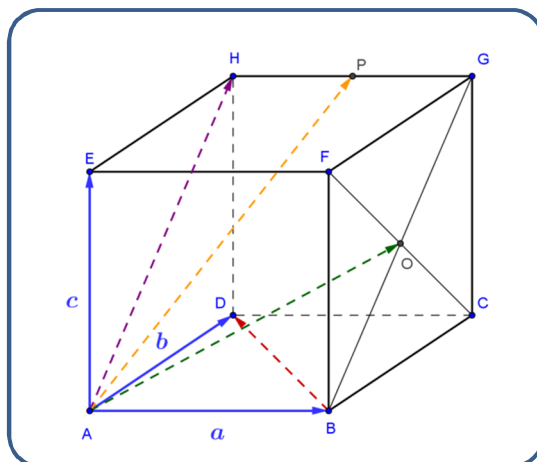
e) $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$

f) $-\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{3}{4}\mathbf{c}$

Megoldás:



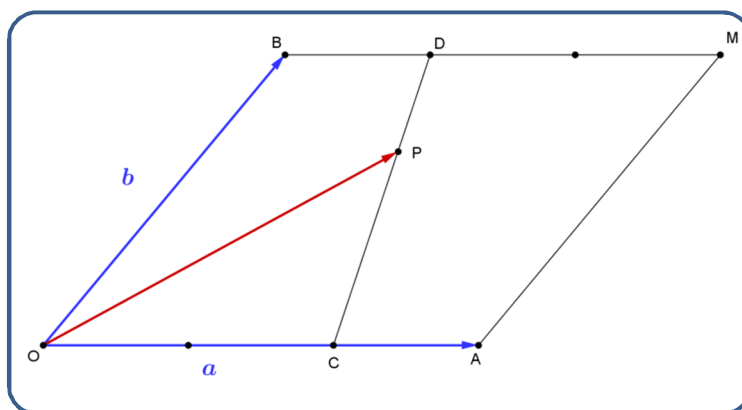
2. Az $ABCDEFGH$ kocka A csúcsából kiinduló élvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. A HG él felezőpontja P , a $BCGF$ lap középpontja O . Fejezzük ki az $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO}$ vektorokat az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok segítségével!



Megoldás:

$$\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c}; \overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}; \overrightarrow{AP} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + 0,5\mathbf{a}; \overrightarrow{AO} = \mathbf{a} + 0,5\mathbf{b} + 0,5\mathbf{c}.$$

3. Az $OBMA$ paralelogramma OA és BM oldalát osszuk három egyenlő részre, így kapjuk a C és D pontokat. Osszuk fel a CD szakaszt is három egyenlő részre, így kapjuk a P pontot. Az ábrának megfelelően rajzolt $\overrightarrow{OP}$ vektort írja fel az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és az $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ vektorok segítségével!



(Nemzetközi Előkészítő Intézet felvételi feladata, 1985)

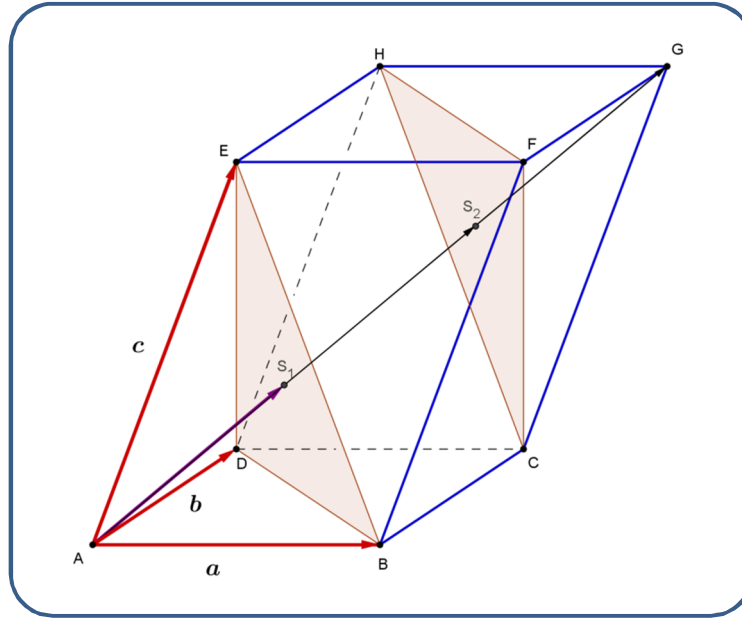
Megoldás:

$$\overrightarrow{OD} = \mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{a}; \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\mathbf{a}. \text{ A } P \text{ pont a } CD \text{ szakasz } D\text{-hez közelebbi harmadoló pontja, ezért}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2 \cdot (\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{a}) + \frac{2}{3}\mathbf{a}}{3} = \frac{4}{9}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}.$$

4. Az $ABCDEFGH$ paralelepipedon éleire az ábra szerint vektorokat illesztünk. A DBE háromszög súlypontja S_1 , a CFH háromszög súlypontja S_2 . Fejezzük ki az $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AS_1}, \overrightarrow{AS_2}$ vektorokat az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok segítségével! Határozzuk meg, hogy a paralelepipedon testátlóját milyen arányban osztja a két háromszög síkja!

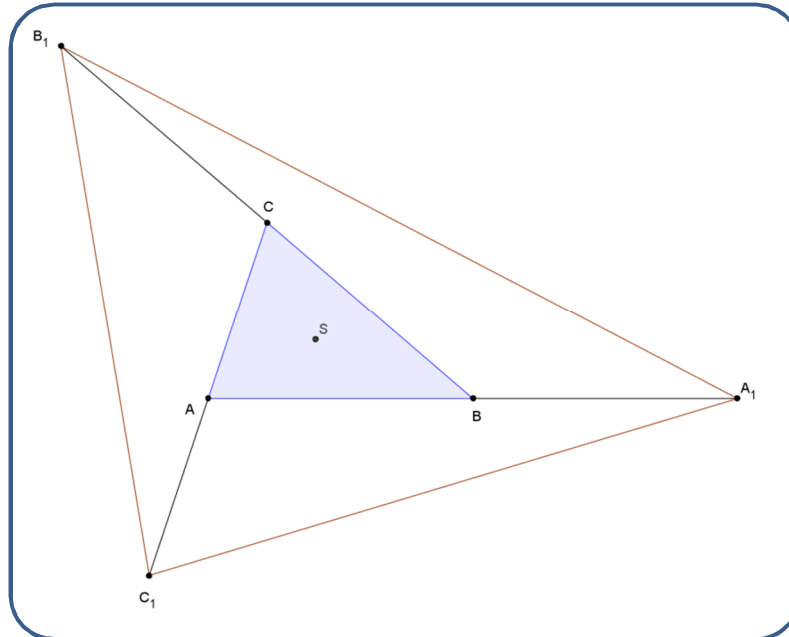
Megoldás:



$\overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. S_1 pont a DBE háromszög súlypontja, ezért $\overrightarrow{AS_1} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$.

$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ és S_2 a CFH háromszög súlypontja, ezért $\overrightarrow{AS_2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{a} + \mathbf{c}}{3} = \frac{2}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$. Ebből látható, hogy az A, S_1, S_2, G pontok egy egyenesre esnek és a két háromszög síkja harmadolja a paralelepipedon átlóját.

5. Az ABC háromszög A csúcsát tükrözzük a B csúcsra, így az A_1 pontot kapjuk. Hasonlóan a B csúcsnak a C -re vonatkozó tükörképe B_1 , C -nek az A -ra vonatkozó tükörképe C_1 . Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög és az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontja azonos!



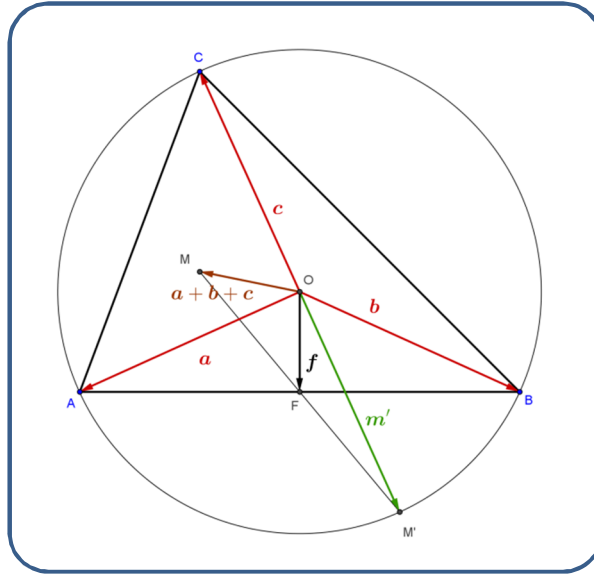
Megoldás:

Az adott pontokba mutató helyvektorokat a megfelelő kisbetűvel jelöljük. A B pont az AA_1 szakasz felezőpontja, ezért $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}_1}{2}$. Innen átrendezve azt kapjuk, hogy $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Hasonlóan

$b_1 = 2c - b$; $c_1 = 2a - c$. Az ABC háromszög súlypontjába mutató helyvektor $s = \frac{a+b+c}{3}$. Az $A_1B_1C_1$ háromszög S_1 súlypontjába mutató helyvektor $s_1 = \frac{2b-a+2c-b+2a-c}{3} = \frac{a+b+c}{3} = s$. Ezzel beláttuk, hogy a két háromszög súlypontja azonos.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög magasságpontját az oldalfelező pontokra tükrözzük, akkor a háromszög köré írható körének pontjait kapjuk!

Megoldás:



Most is válasszuk vonatkoztatási pontnak a körülírható kör O középpontját. A 6. kidolgozott feladatban bizonyítottuk, hogy ha a körülírható kör középpontjából a csúcsokba mutató helyvektorok a, b, c , akkor a magasságpontba mutató helyvektor $a + b + c$. Jelöljük az AB oldal felezőpontját F -el, ekkor $f = \frac{a+b}{2}$. A tükrözés miatt F az MM' szakasz felezőpontja is. Ebből az M' pont helyvektora kiszámítható:

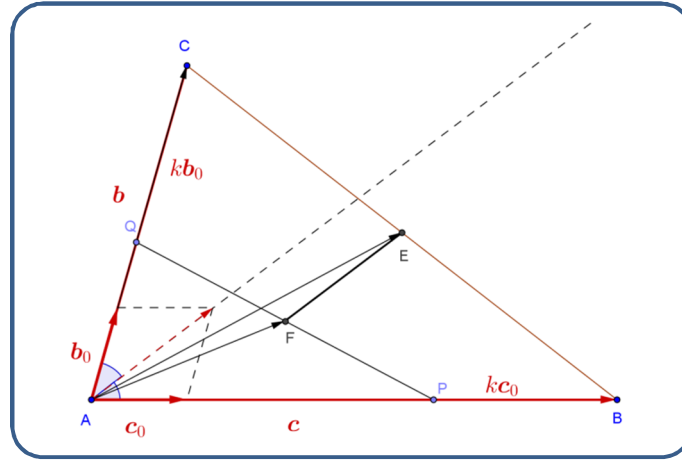
$$f = \frac{a+b}{2} = \frac{m+m'}{2} \Rightarrow a+b = a+b+c+m'.$$

Tehát $m' = -c$. Ez azt jelenti, hogy az M' pont a C pontnak az O körközeppontra vonatkozó tükröképe, tehát rajta van a körülírható körön.

7. Legyen P és Q az ABC háromszög AB , illetve AC oldalán lévő két belső pont úgy, hogy $BP = CQ$. Jelölje a BC oldal felezőpontját E , a PQ szakasz felezőpontját F . Igazolja, hogy az EF egyenes párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével!

(Felvételi feladat, 1992)

I. Megoldás:

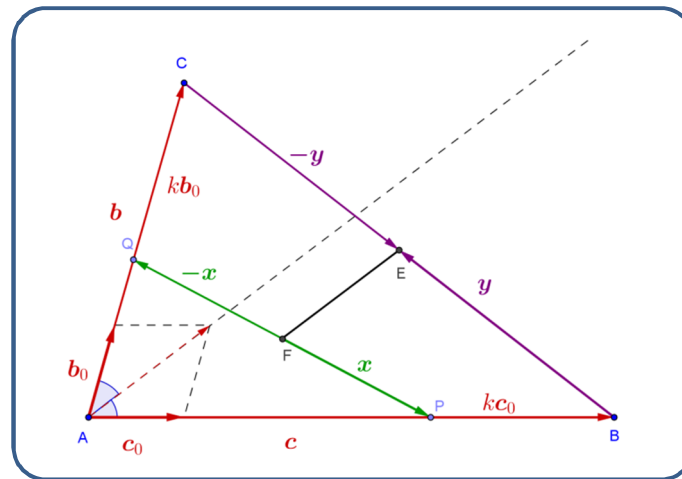


Az ábra szerint bevezetjük a következő jelöléseket: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$; a $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos egységvektor $\mathbf{b}_0$; a $\mathbf{c}$ vektorral párhuzamos egységvektor $\mathbf{c}_0$. Alkalmas k valós számmal felírható: $\overrightarrow{PB} = k\mathbf{c}_0$; $\overrightarrow{QC} = k\mathbf{b}_0$. Ezeket használva kifejezhetők: $\overrightarrow{AE} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{\mathbf{b} - k\mathbf{b}_0 + \mathbf{c} - k\mathbf{c}_0}{2}$. Majd meghatározzuk:

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{b} + k\mathbf{b}_0 - \mathbf{c} + k\mathbf{c}_0}{2} = \frac{k(\mathbf{b}_0 + \mathbf{c}_0)}{2}.$$

$\mathbf{b}_0$ és $\mathbf{c}_0$ egyenlő hosszú vektorok, ezért az összegük a szögfelező irányába mutat, mert egy rombusz átlója. Ebből látható, hogy $\frac{k(\mathbf{b}_0 + \mathbf{c}_0)}{2}$ párhuzamos a $\frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{c}_0}{2}$ vektorral, így a szögfelezővel. $AB = AC$ esetén EF a szögfelezőre esik, ezt a párhuzamosság speciális esetének tekintjük. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

II. Megoldás:



Az első megoldás szerint bevezetjük az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ vektorokat; az ezekkel párhuzamos $\mathbf{b}_0$ és $\mathbf{c}_0$ egységvektorokat, a k valós számot, amellyel felírható: $\overrightarrow{PB} = k\mathbf{c}_0$; $\overrightarrow{QC} = k\mathbf{b}_0$. A PQ szakasz felezőpontja F , a BC szakasz felezőpontja E . A PC és BC szakaszokra az ábra szerint vektorokat illesztünk: $\overrightarrow{FP} = \mathbf{x}$; $\overrightarrow{FQ} = -\mathbf{x}$; $\overrightarrow{BE} = \mathbf{y}$; $\overrightarrow{CE} = -\mathbf{y}$, ezekkel az $\overrightarrow{FE}$ vektort kétféle módon kifejezzük:

$$\overrightarrow{FE} = \mathbf{x} + k\mathbf{c}_0 + \mathbf{y}$$

$$\overrightarrow{FE} = -\mathbf{x} + k\mathbf{b}_0 - \mathbf{y}$$

A két egyenletet összeadjuk és az eredményt megfelezzük:

$$\overrightarrow{FE} = \frac{k\mathbf{b}_0 + k\mathbf{c}_0}{2} = \frac{k(\mathbf{b}_0 + \mathbf{c}_0)}{2}$$

Innen az első megoldásnak megfelelően fejezzük be a megoldást.

8. Egy szánkót 30 N erővel húzunk, az erő 40° -os szöget zár be az elmozdulással. Mekkora munkát végzünk, ha 50 m úton húzzuk a szánkót?

Megoldás:

Ha $\vec{F}$ erőt fejtünk ki és eközben az elmozdulást az $\vec{s}$ vektor adja meg, akkor a fizikai munkavégzést az erő és az elmozdulás skaláris szorzatával számoljuk ki:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 30\text{N} \cdot 50\text{m} \cdot \cos 40^\circ = 1149 \text{ J.}$$

9. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szöge, ha $(2\mathbf{a} - \mathbf{b})(3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}) = -0,5$?

Megoldás:

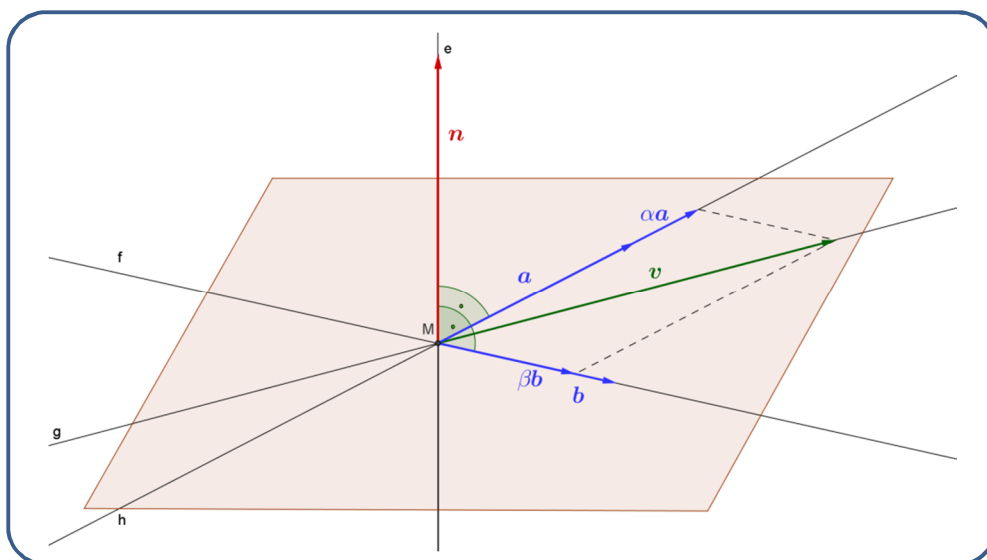
A skaláris szorzat tulajdonságai alapján felbontjuk a zárójelet és felhasználjuk, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hossza egységnyi:

$$(2\mathbf{a} - \mathbf{b})(3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}) = 6\mathbf{a}^2 - 3\mathbf{a}\mathbf{b} + 8\mathbf{a}\mathbf{b} - 4\mathbf{b}^2 = 6 + 5\mathbf{a}\mathbf{b} - 4 = 2 + 5\mathbf{a}\mathbf{b} = -0,5.$$

Ebből $\mathbf{a}\mathbf{b} = -0,5$ adódik. Ha a két vektor szöge φ , akkor $\cos \varphi = -0,5$, tehát $\varphi = 120^\circ$.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes merőleges egy sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor merőleges a sík minden egyenesére!

Megoldás:



Tegyük fel, hogy az e egyenes merőleges a sík f és h egyenesére, amelyek nem párhuzamosak. Legyen g a sík tetszőleges egyenese. Az e, f, h, g egyenesek egy-egy irányvektora $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{v}$. A $\mathbf{v}$

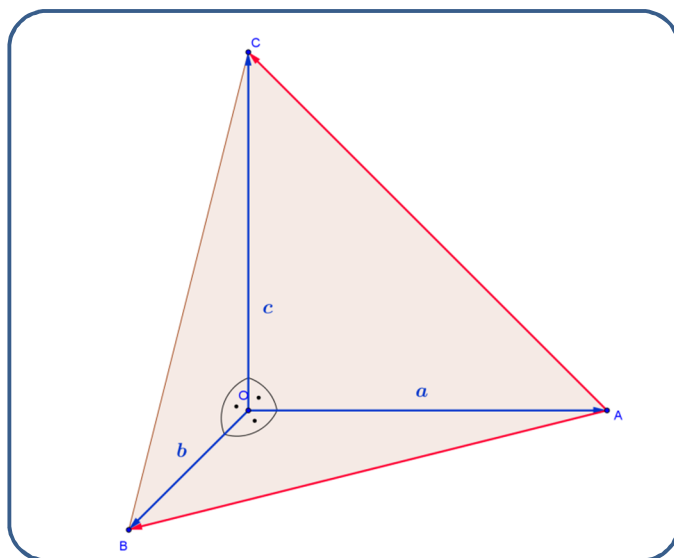
vektor felírható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként; $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ alakban, ahol α, β valós számok.

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0. Így $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$. Ekkor: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) = 0$ is teljesül, amiből következik, hogy $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$, tehát az e egyenes merőleges a g egyenesre is.

A fenti ábra közös ponton átmenő egyenesekre mutatja a bizonyítást a jobb áttekinthetőség miatt, de meggondolható, hogy a bizonyítás általános esetben ugyanígy igaz, az egyenesek szöge nem változik, ha közös pontba toljuk el őket.

11. Az $OABC$ tetraéder OA, OB, OC élei páronként merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög hegyesszögű!

Megoldás:

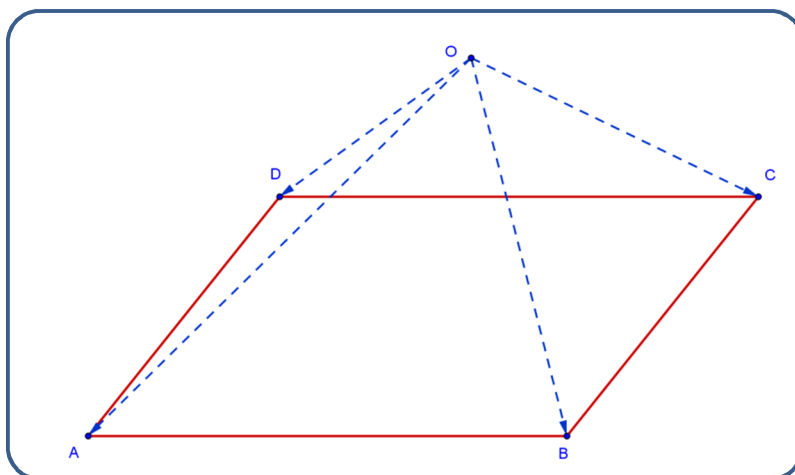


A tetraéder éleire vektorokat illesztünk: $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. $\mathbf{ab} = \mathbf{ac} = \mathbf{bc} = 0$ az élek merőlegessége miatt. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{bc} - \mathbf{ba} - \mathbf{ac} + \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^2 > 0$. Ha két vektor skaláris szorzata pozitív, akkor a két vektor hegyesszöget zár be, tehát az ABC háromszögben az A csúcsnál hegyesszög van. Ugyanígy bizonyítható, hogy a másik két szög is hegyesszög, így a háromszög hegyesszögű.

12. Adott egy $ABCD$ paralelogramma és egy O pont. Bizonyítsuk be, hogy

$$(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2) - (\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}!$$

Megoldás:



$$\begin{aligned}
& (\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2) - (\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2) = \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OD}^2 = \\
& = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \\
& = \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AB}(-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \\
& = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

Az átalakítások során felhasználtuk, hogy a paralelogramma szemben lévő oldalai párhuzamosak és egyenlőek, továbbá alkalmaztuk a vektorműveletek tulajdonságait.

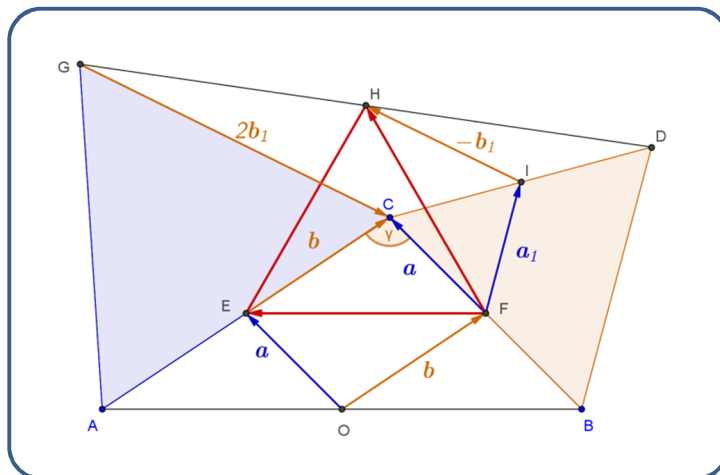
Megjegyzés:

Ha $ABCD$ téglalap, akkor $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, mert a téglalap oldalai merőlegesek egymásra. Ezért igaz a következő állítás:

A téglalap alapú gúla két-két szemben lévő oldalélének négyzetösszege egyenlő.

13. Az ABC háromszög BC és CA oldalára kifelé szerkesszük meg a BCD , illetve a CAG szabályos háromszögeket. Az AC , BC , GD szakaszok felezőpontjai E , F , H . Bizonyítsuk be, hogy az EFH háromszög is szabályos!

Megoldás:



Az AB oldal felezőpontja O . A háromszög középvonala párhuzamos a háromszög egyik oldalával és fele olyan hosszú. Ezt felhasználva jelölünk vektorokat az ábrán:

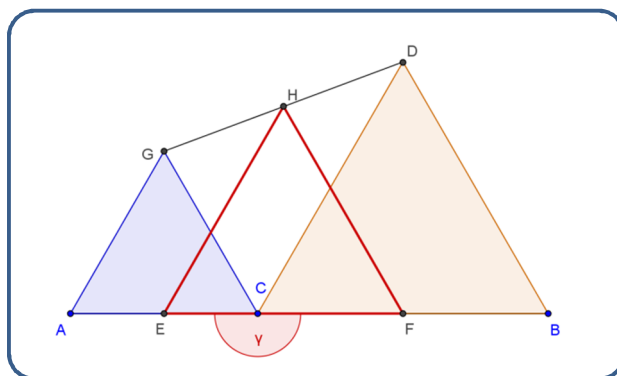
$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FC} = \mathbf{a}; \quad \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{EC} = \mathbf{b}.$$

Az $\mathbf{a}_1$ vektor az $\mathbf{a}$ vektornak, a $\mathbf{b}_1$ vektor az $\mathbf{b}$ vektornak a -60° -os (az óramutató járásával azonos irányú) elforgatottja, így $\overrightarrow{GC} = 2\mathbf{b}_1$; $\overrightarrow{FI} = \mathbf{a}_1$. A GCD háromszögben HI középvonal, ezért $\overrightarrow{IH} = -\mathbf{b}_1$. Vektorműveleteket használva $\overrightarrow{FE} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$; $\overrightarrow{FH} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1$. Ez az eredmény azt mutatja, hogy ha az FE szakaszt az F pont körül -60° -al elforgatjuk, akkor az FH szakaszt kapjuk, tehát az EFH háromszög szabályos.

Megjegyzés:

Ha az ABC háromszög γ szögét „határesetként” 180° -nak választjuk, akkor is igaz a feladat állítása:

Legyen az AB szakasz belső pontja a C pont. Az AC és CB szakaszra szerkesszük meg az ACG , illetve a CBD szabályos háromszögeket. Az AC , BC , GD szakaszok felezőpontjai E , F , H . Bizonyítsuk be, hogy az EFH háromszög is szabályos!



A bizonyítás erre az esetre is a fent leírt módon alkalmazható..

IV. Ellenőrző feladatok

- Adottak az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ egysíkú vektorok. Szerkessze meg az alábbi vektorokat!
 - $\mathbf{a} - 2(\mathbf{b} + \mathbf{c})$
 - $\frac{2\mathbf{a}-\mathbf{b}}{3} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 - $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}+2\mathbf{c}}{2}$
- Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak, egyik sem nullvektor. Milyen α és β valós számokra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} + (\beta - 2)\mathbf{b} = (2\alpha - \beta)(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$
- Határozza meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok hosszát, ha $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 10$ és a két vektor szöge 80° !
- Az $ABCD$ négyszög oldalvektorai: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$. Fejezze ki ezeknek a vektoroknak a segítségével az átlók felezőpontjait összekötő vektort!
- Bizonyítsa be, hogy a tetraéder súlypontja felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszt!
- Az $ABCD$ húrnégyszög BCD, ACD, ABD, ABC részháromszögeinek magasságpontjai P, R, S, Q . Bizonyítsa be, hogy a $PQRS$ négyszög egybevágó az $ABCD$ négyszöggel!
- Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor szöge, ha $|\mathbf{a}| = 10$; $|\mathbf{b}| = 8$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 60$?
- Egy tetraéder szemközti éleinek négyzetösszege egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a kitérő élek merőlegesek egymásra!

Az ellenőrző feladatok megoldásai

- Adottak az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ egysíkú vektorok. Szerkessze meg az alábbi vektorokat!

$$\text{a) } \mathbf{a} - 2(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \qquad \text{b) } \frac{2\mathbf{a}-\mathbf{b}}{3} + \frac{1}{2}\mathbf{c} \qquad \text{c) } \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}+2\mathbf{c}}{2}$$

Megoldás:

Alkalmazzuk a vektorműveletek szabályait!

2. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak, egyik sem nullvektor. Milyen α és β valós számokra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} + (\beta - 2)\mathbf{b} = (2\alpha - \beta)(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

Megoldás:

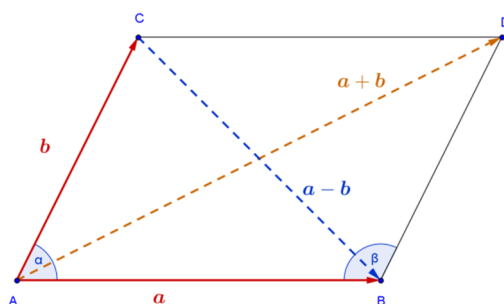
Bármely vektor egyértelműen bontható fel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre, ezért az egyenlet két oldalán az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok együtthatói egyenlőek:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \\ \beta - 2 = \beta - 2\alpha \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $\alpha = 1$; $\beta = 0,5$.

3. Határozza meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok hosszát, ha $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 10$ és a két vektor szöge 80° !

Megoldás:



A paralelogramma szomszédos szögei 180° -ra egészítik ki egymás, ezért $\beta = 100^\circ$. Az ABD háromszögre a koszinusztételt felírva megkapjuk az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor hosszát.

$$AD^2 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 100^\circ = 285,68$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{285,68} = 16,9$$

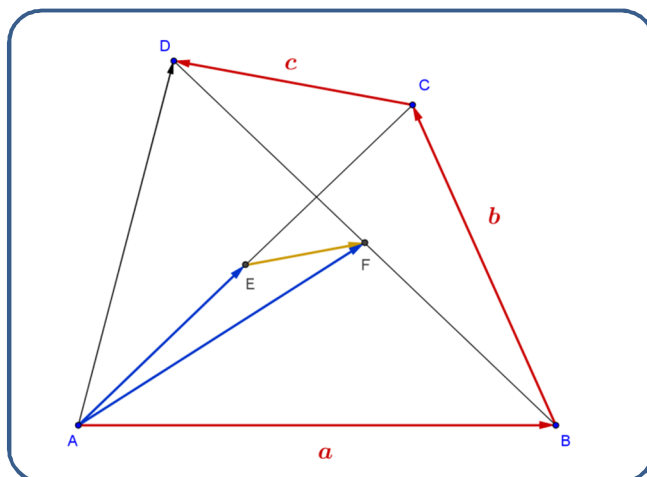
Az ABC háromszögre felírva a koszinusztételt megkapjuk az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor hosszát.

$$BC^2 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 80^\circ = 202,32$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{202,32} = 14,2$$

4. Az $ABCD$ négyszög oldalvektorai: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$. Fejezze ki ezeknek a vektoroknak a segítségével az átlók felezőpontjait összekötő vektort!

I. Megoldás:



Az AC átló felezőpontja E , a BD átló felezőpontja F .

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2},$$

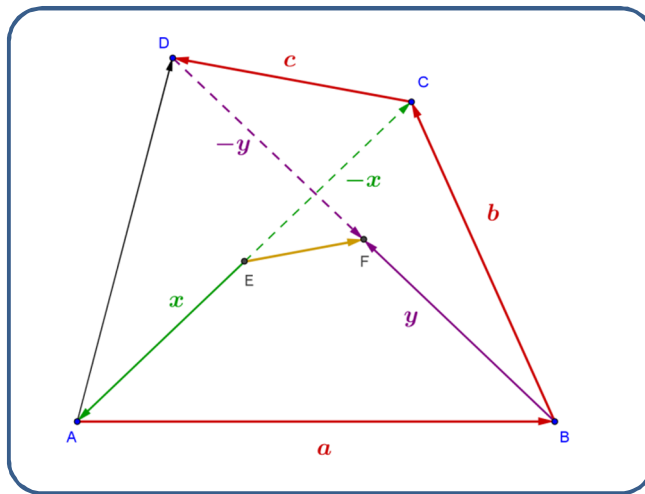
$$\overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{a}}{2}.$$

Ezt felhasználva:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}.$$

Megjegyzés: Az eredményből látható, hogy az $\overrightarrow{EF}$ vektort a $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ vektor nélkül ki tudjuk fejezni. Arra is tudunk következtetni, hogy ha az $ABCD$ négyszög trapéz ($AB \parallel CD$), akkor EF párhuzamos a trapéz AB és CD alapjával.

II. Megoldás:



Az AC átló felezőpontja E , a BD átló felezőpontja F . Az ábra szerint bevezetjük az $\overrightarrow{EA} = \mathbf{x}$ és $\overrightarrow{BF} = \mathbf{y}$ vektorokat, így $\overrightarrow{EC} = -\mathbf{x}$ és $\overrightarrow{DF} = -\mathbf{y}$. Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kétféle módon kifejezzük:

$$\overrightarrow{EF} = \mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{y}$$

$$\overrightarrow{EF} = -\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{y}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{EF} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$$

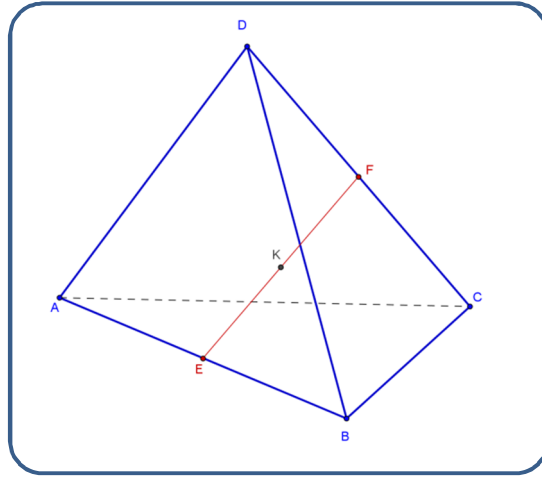
$$\overrightarrow{EF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}$$

Ebből a levezetésből az is érthetővé válik, hogy miért nincs szükségünk a $\mathbf{b}$ vektorra az $\overrightarrow{EF}$ vektor kifejezéséhez.

5. Bizonyítsa be, hogy a tetraéder súlypontja felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszt!

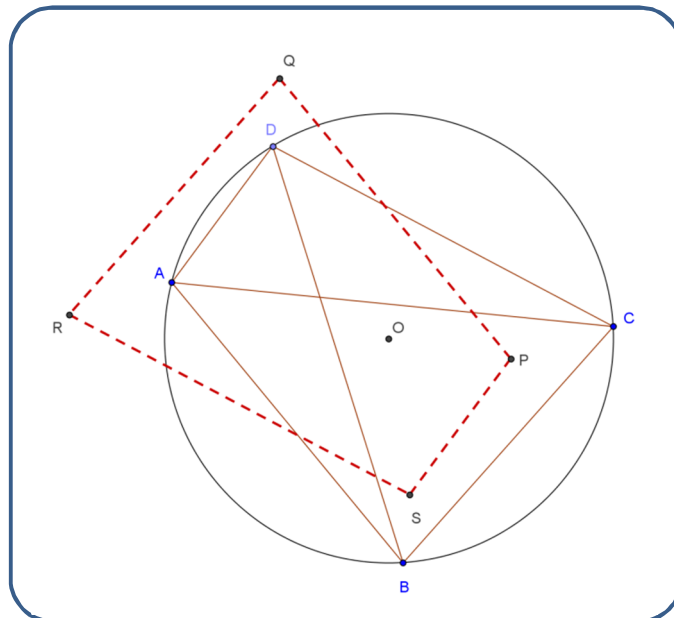
Megoldás:

Egy rögzített O pontból a pontokba mutató helyvektorokat a megfelelő kisbetűvel jelöljük. E és F oldalfelező pontok, ezért $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$; $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}$. az EF szakasz felezőpontja K : $\mathbf{k} = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$. Ez éppen a tetraéder súlypontjának helyvektora, tehát beláttuk a feladat állítását.



6. Az $ABCD$ húrnégyszög BCD ; ACD ; ABD ; ABC részháromszögeinek magasságpontjai P ; Q ; R ; S . Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög egybevágó az $ABCD$ négyszöggel!

Megoldás:



A körülírható kör középpontját választjuk vonatkoztatási pontnak, az ebből a pontból induló helyvektorokat a megfelelő kisbetűvel jelöljük. A 6. kidolgozott feladat eredménye alapján megadjuk a magasságpontokba mutató helyvektorokat:

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}; \mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}; \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}; \mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Ez alapján:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}; \overrightarrow{QP} = \mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} - (\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Tehát az AB oldal párhuzamos és egyenlő a QP oldallal. Hasonlóan tudjuk belátni a többi oldalról is, hogy az $ABCD$ négyszög megfelelő oldalával párhuzamos és egyenlő. Így a $PQRS$ négyszög valóban egybevágó az $ABCD$ négyszöggel.

7. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor szöge, ha $|\mathbf{a}| = 10$; $|\mathbf{b}| = 8$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 60$?

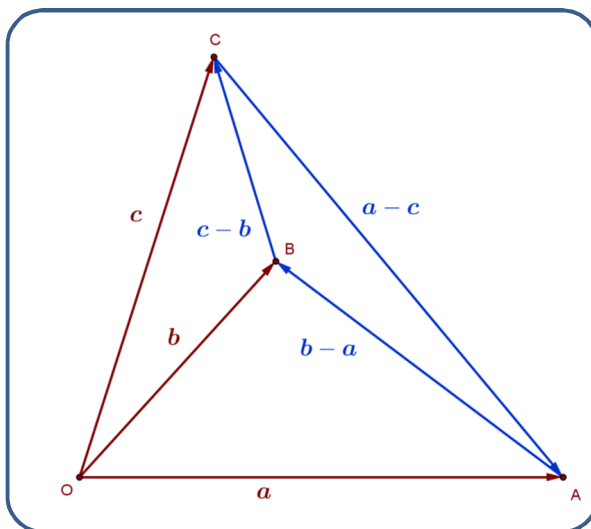
Megoldás:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{60}{80} = 0,75$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 41,41^\circ \text{ a két vektor szöge.}$$

8. Egy tetraéder szemközti éleinek négyzetösszege egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a kitérő élek merőlegesek egymásra!

Megoldás:



A tetraéder O csúcsából induló éleire illesztjük az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorokat. Egy vektor négyzete megegyezik a hosszának a négyzetével. A feladat feltételét vektorokkal így írhatjuk le:

$$OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2 \Leftrightarrow \mathbf{a}^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{b}^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{c})^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{cb} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ac} + \mathbf{c}^2$$

$$0 = 2\mathbf{cb} - 2\mathbf{ac}$$

$$0 = 2\mathbf{c}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

A skaláris szorzat csak akkor lehet nulla, ha a két vektor merőleges egymásra, tehát a tetraéder OC és AB kitérő élei merőlegesek egymásra. A másik két élpárra a bizonyítás ugyanilyen módon történik.