

15. Koordinátageometria

I. Elméleti összefoglaló

Koordinátákkal adott vektorok

Ha $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ a sík két vektora, λ valós szám, akkor

- az $\mathbf{a}$ vektor hossza: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- a két vektor összege: $\mathbf{a} + \mathbf{b} (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$
- a két vektor különbsége: $\mathbf{a} - \mathbf{b} (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$
- vektor számmal való szorzata: $\lambda \mathbf{a} (\lambda a_1; \lambda a_2)$
- az $\mathbf{a}$ vektor ellentettje: $-\mathbf{a} (-a_1; -a_2)$
- a két vektor skaláris szorzata: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Az $A(a_1; a_2)$ pontból a $B(b_1; b_2)$ pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$

Az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok távolsága: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

Ha az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektorok hajlásszöge φ , akkor: $\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

Ha az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ vektort $+90^\circ$ -kal elforgatjuk, az $\mathbf{a}'(-a_2; a_1)$ vektort,
ha -90° -kal elforgatjuk, az $\mathbf{a}''(a_2; -a_1)$ vektort kapjuk.

Szakasz adott arányú osztópontja, háromszög súlypontja

Ha $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$ a sík pontjai, akkor

- az AB szakasz F felezőpontja: $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
- az AB szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontja: $F\left(\frac{2a_1 + b_1}{3}; \frac{2a_2 + b_2}{3}\right)$
- az AB szakaszt $m:n$ arányban osztó P pont: $P\left(\frac{n \cdot a_1 + m \cdot b_1}{n + m}; \frac{n \cdot a_2 + m \cdot b_2}{n + m}\right)$
- az ABC háromszög S súlypontja: $S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$

Egyenes egyenlete

- **Normálvektoros egyenlet:**

Az $\mathbf{n}(A; B)$ nem nullvektort az egyenes **normálvektorának** nevezzük, ha merőleges az egyenesre.

A $P(x_0; y_0)$ ponton átmenő $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$Ax + By = Ax_0 + By_0$$

- **Írányvektoros egyenlet:**

A $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ nem nullvektort az egyenes **írányvektorának** nevezzük, ha párhuzamos az egyenessel.

A $P(x_0; y_0)$ ponton átmenő $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete:

$$v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0$$

- **Íránytényezős egyenlet:**

Az egyenesnek az x -tengely pozitív irányával bezárt szögét az egyenes **irányszögének**

nevezzük.

Ha az egyenes φ irányszöge nem 90° , akkor az $m = \operatorname{tg} \varphi$ számot az egyenes **iránytényezőjének (meredekségének)** nevezzük.

A $P(x_0; y_0)$ ponton m iránytényezőjű egyenes egyenlete:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

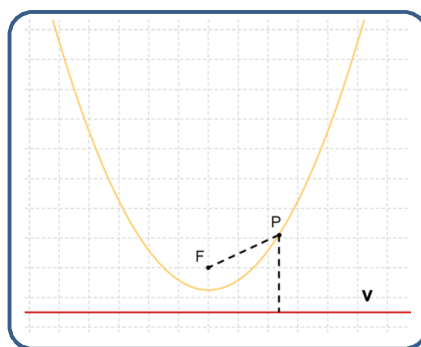
- **Két egyenes párhuzamos, ha**
 - normálvektoraik párhuzamosak;
 - irányvektoraik párhuzamosak;
 - irányszögük egyenlő;
 - iránytényezőjük egyenlő (ha van).
- **Két egyenes merőleges, ha**
 - normálvektoraik merőlegesek $\rightarrow$ normálvektoraik skaláris szorzata 0;
 - irányvektoraik merőlegesek $\rightarrow$ irányvektoraik skaláris szorzata 0;
 - a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenesek iránytényezőinek szorzata -1 .
- **Két egyenes metszéspontját** úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert.

Kör egyenlete

- Az $O(u, v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete:**
$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$
- **Kör és egyenes közös pontjait** úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk a kör és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert.
- **Két kör közös pontjait** úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk a két egyenletéből álló egyenletrendszert.

Parabola

- A **parabola** azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek egy egyenestől (**vezéregyenes**) és egy az egyenesre nem illeszkedő ponttól (**fókuszpont**) egyenlő távol vannak. A fókuszpont és a vezéregyenes távolságát paraméternek nevezzük.



- **A parabola tengelyponti egyenlete**
Ha a parabola paramétere p , a tengelye az y -tengely, a csúcspontja az origóban van, akkor a fókuszpont $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, a vezéregyenes egyenlete $y = -\frac{p}{2}$, a parabola tengelyponti egyenlete:

$$y = \frac{1}{2p} x^2 ;$$

ha a parabola csúcspontja az $(u; v)$ pontban van, akkor a fókuszpont $F(u; v + \frac{p}{2})$, a vezéregyenes egyenlete $y = v - \frac{p}{2}$, a parabola egyenlete:

$$y - v = \frac{1}{2p}(x - u)^2.$$

II. Kidolgozott feladatok

1. Adott az $\mathbf{a}(2; 3)$; $\mathbf{b}(6; 2)$; $\mathbf{c}(4; 5)$ vektor. Számítsuk ki az alábbi vektorok koordinátáit:

$$\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$$

$$3\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{c} + \frac{3}{4}\mathbf{b} !$$

Megoldás:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2 + 2 \cdot 6; 3 + 2 \cdot 2) = (14; 7)$$

$$3\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} = \left(3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 6; 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2\right) = (3; 8)$$

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{c} + \frac{3}{4}\mathbf{b} = \left(2 - 2 \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 6; 3 - 2 \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 2\right) = (-1,5; -5,5)$$

2. Bontsuk fel a $\mathbf{v}(3; -2)$ vektort az $\mathbf{a}(6; 3)$ és a $\mathbf{b}(4; -5)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

Megoldás:

Keressük azokat az α és β valós számokat, amelyekre teljesül:

$$\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b},$$

koordinátákkal kifejezve:

$$3 = 6\alpha + 4\beta$$

$$-2 = 3\alpha - 5\beta$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $\alpha = \frac{1}{6}$; $\beta = \frac{1}{2}$, így $\mathbf{v} = \frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$.

3. Adott az $A(7; -3)$ és $B(12; -4)$ pont. Hosszabbítsuk meg az AB szakaszt a B -n túl a háromszorosára! Számítsuk ki az így kapott C pont koordinátáit!

Megoldás:

A B pont az AC szakasznak az A ponthoz közelebbi harmadoló pontja. Így a $C(c_1; c_2)$ pontra teljesül:

$$\frac{2 \cdot 7 + c_1}{3} = 12 \quad \text{és} \quad \frac{2 \cdot (-3) + c_2}{3} = -4$$

Az egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a C pont koordinátáit: $c_1 = 22$ $c_2 = -6$.

4. Igazoljuk, hogy az $A(1; 3)$, $B(4; 7)$, $C(2; 8)$, $D(-1; 4)$ pontok egy paralelogramma csúcsai!

Megoldás:

$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 7 - 3) = (3; 4)$; $\overrightarrow{DC} = (2 - (-1); 8 - 4) = (3; 4)$. Ennek alapján az AB szakasz párhuzamos és egyenlő a DC szakasszal, tehát az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

5. Adott az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(2; 3)$; $B(13; 4)$; $C(6; 9)$. Határozzuk meg
- az α (A csúcsnál lévő) szög nagyságát;
 - az ABC háromszög területét!

Megoldás:

a) $\overrightarrow{AB} = (11; 1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{11^2 + 1} = \sqrt{122}$, $\overrightarrow{AC} = (4; 6)$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$.

A skaláris szorzat definíciója alapján: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

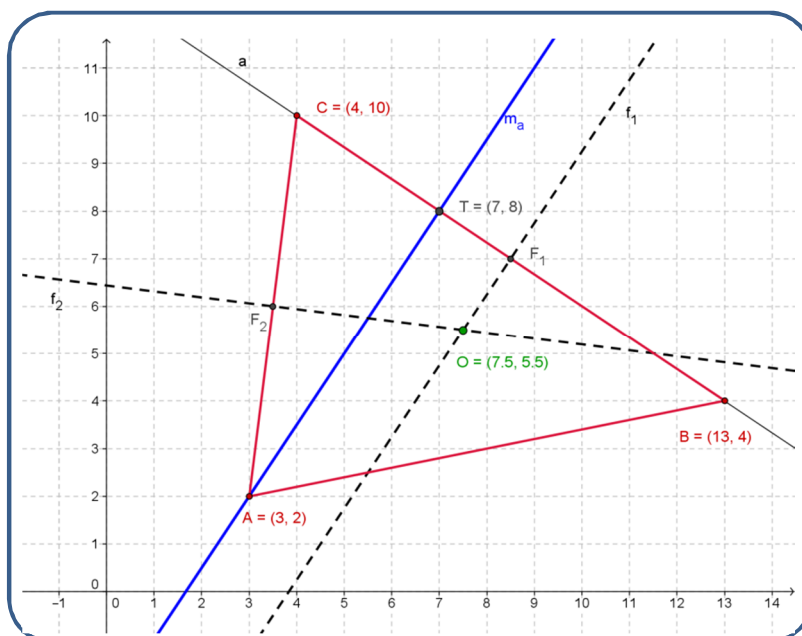
Ha a skaláris szorzatot kifejezzük a vektorok koordinátaival, akkor

$$\cos \alpha = \frac{11 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{\sqrt{122} \cdot \sqrt{52}} = 0,6276; \quad \alpha = 51,12^\circ.$$

- b) A háromszög területét két oldalból és a közbezárt szögből számoljuk ki:

$$t = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{122} \cdot \sin 51,12^\circ}{2} = 31.$$

6. Adott az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(3; 2)$; $B(13; 4)$; $C(4; 10)$. Határozzuk meg
- az A csúcsból induló magasságvonal egyenletét;
 - a BC oldal egyenletét;
 - az A csúcsból induló magasság hosszát;
 - a háromszög köré írt körének középpontját!

Megoldás:

- a) A $\overrightarrow{BC} = (-9; 6)$ vektor az A csúcsból induló magasságvonal normálvektora. Az $1/3$ ekkora $\mathbf{n} = (-3; 2)$ normálvektort is használhatjuk az egyenes egyenletének felírásához. A magasságvonal átmegy az $A(3; 2)$ ponton, így a magasságvonal egyenletét a normálvektor segítségével felírhatjuk:

$$m_a: -3x + 2y = -9 + 4 = -5.$$

- b) Az $\overrightarrow{BC}$ vektor a BC oldal irányvektora $\mathbf{v} = (-9; 6)$. Az oldal átmegy a $B(13; 4)$ ponton, tehát a BC egyenes egyenletét a $\mathbf{v}_1 = (-3; 2)$ irányvektorral felírva:

$$a: 2x + 3y = 26 + 12 = 38.$$

- c) Az pontból induló magasság talppontja az m_a egyenes és az a egyenes metszéspontja. Ezért a T pont koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg:

$$\begin{aligned} m_a: 3x - 2y &= 5 \\ a: 2x + 3y &= 38 \end{aligned}$$

A $T(7; 8)$ és $A(3; 2)$ pontok távolságának kiszámításával határozzuk meg a magasság hosszát:

$$\sqrt{(7-3)^2 + (8-2)^2} = 7,21.$$

- d) A háromszög körülírt körének a középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként kapjuk meg. A BC oldal felezőpontja $F_1\left(\frac{4+13}{2}; \frac{4+10}{2}\right) = (8,5; 7)$. A BC f_1 oldalfelező merőlegesének normálvektora

$$\mathbf{n}_1 = (-3; 2), \text{ egy pontja } F_1.$$

Így az oldalfelező merőleges egyenlete:

$$f_1: -3x + 2y = -11,5.$$

Hasonlóan írjuk fel az AC oldalfelező merőlegesének egyenletét:

$$\begin{aligned} F_2\left(\frac{4+3}{2}; \frac{10+2}{2}\right) &= (3,5; 6) \\ \mathbf{n}_2 &= (1; 8) \\ f_2: x + 8y &= 51,5 \end{aligned}$$

Az f_1 és f_2 egyenesek metszéspontját a megfelelő egyenletrendszer megoldásával határozzuk meg. Így megkapjuk a háromszög köré írt körének $O(7,5; 5,5)$ középpontját.

7. Adott az $A(2; 3)$ és $B(10; 6)$ pont. Hol vannak a síkban azok a P pontok, amelyekre teljesül az $AP^2 - BP^2 = 20$ összefüggés?

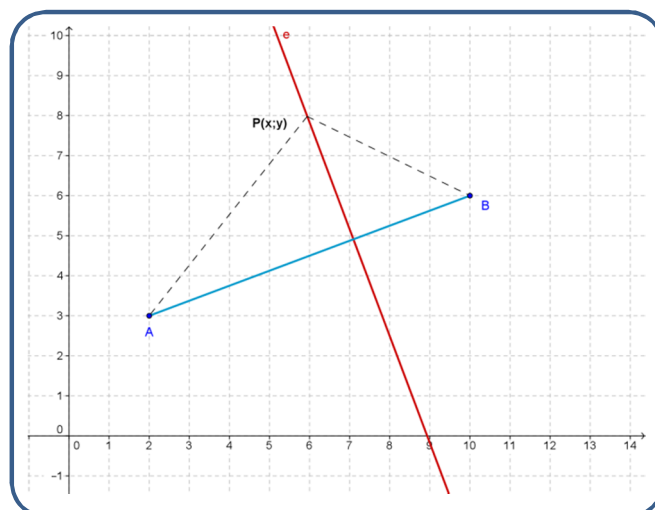
Megoldás:

A $P(x; y)$ pontra a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 - (x-10)^2 - (y-6)^2 = 20$$

Az egyenletet rendezve egy egyenes egyenletét kapjuk:

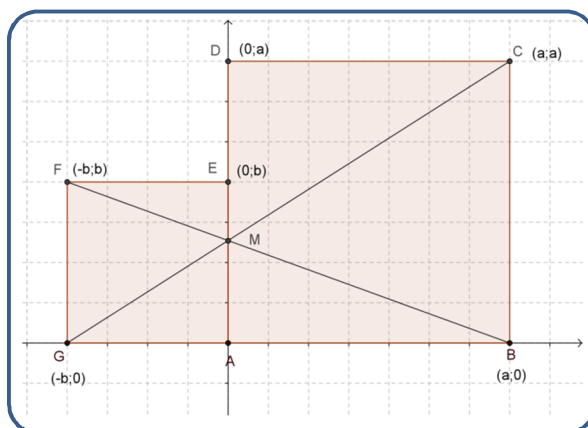
$$e: 16x + 6y = 143$$



Az e egyenes normálvektora $\mathbf{n}_e = (8; 3)$; az $\overrightarrow{AB} = (8; 3)$. Az e egyenes normálvektora megegyezik az AB egyenes irányvektorával, tehát a keresett pontthalmaz az AB szakaszra merőleges egyenes.

8. Az $ABCD$ és $GAEF$ négyzetek az ábra szerint érintik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a GC és BF egyenesek a négyzetek közös oldalán metszik egymást!

Megoldás:



A négyzetek oldalhossza legyen a és b , az ábra szerint helyezzük el a négyzeteket a koordináta-rendszerben. A GC egyenes egyenlete:

$$v(a + b; a)$$

$$C(a; a)$$

$$ax - (a + b)y = a^2 - a^2 - ab = -ab$$

A BF egyenes egyenlete:

$$v(a + b; -b)$$

$$B(a; 0)$$

$$bx + (a + b)y = ab$$

A két egyenes M metszéspontját úgy határozhatjuk meg, ha megoldjuk ezt az egyenletrendszert:

$$x = 0 ; y = \frac{ab}{a+b}$$

Ez azt jelenti, hogy az M pont az y -tengelyen van, tehát az egyenesek valóban a közös négyzetoldalon metszik egymást.

9. Igazoljuk, hogy az $k: x^2 + y^2 - 18x + 6y + 65 = 0$ egyenlet kör egyenlete.

- Írjuk fel az adott körrel koncentrikus, a $P(2; 4)$ ponton átmenő kör egyenletét!
- Írjuk fel a k kör $E(6; 1)$ ponton átmenő érintőjének egyenletét!
- Adott az $F(8; -6)$ pont. Határozzuk meg a k körön az A és B pontokat úgy, hogy az F pont az AB húr felezőpontja legyen!

Megoldás:

Teljes négyzetté kiegészítéssel átalakítjuk az adott egyenletet:

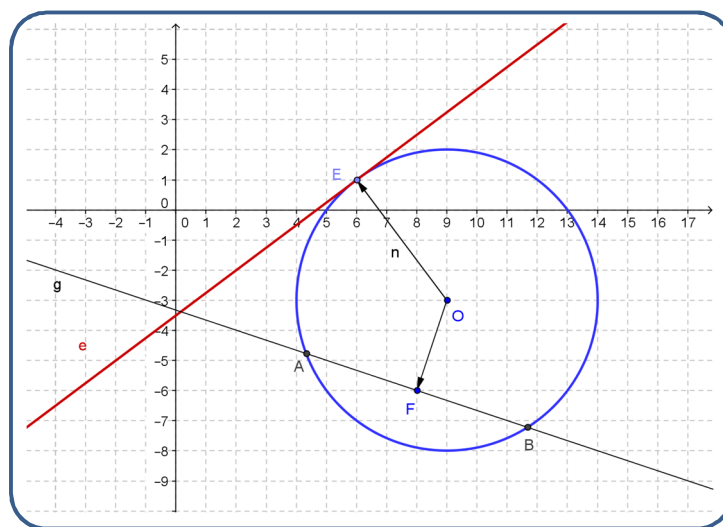
$$x^2 - 18x + 81 + y^2 + 6y + 9 - 25 = 0$$

$$k: (x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Ez az egyenlet az $O(9; -3)$ középpontú, 5 egység sugarú kör egyenlete.

a) Az OP távolság $\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98}$. Így a koncentrikus kör egyenlete:

$$k_1: (x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 98 .$$



b) Az E pont koordinátái kielégítik a k kör egyenletét, tehát a pont rajta van a körön. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért az $\overrightarrow{OE} = (-3; 4)$ vektor az érintő normálvektora. Így az érintő egyenlete:

$$e : -3x + 4y = -14$$

c) Az F pont koordinátáit behelyettesítjük be a kör egyenletébe:

$$(8 - 9)^2 + (-6 + 3)^2 = 10 < 25 ,$$

ezért az F pont a körvonalon belül van. A középpontból a húrra bocsátott merőleges felezi a húr, ezért az OF szakaszra az F pontban merőlegest állítunk. Az így kapott g egyenes kimetszi a körvonalból az A és B pontokat.

$$g : \mathbf{n} = \overrightarrow{FO} = (1; 3)$$

$$F(8; -6)$$

$$g: x + 3y = -10$$

$$k: (x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

A k kör és a g egyenes közös pontjait megkapjuk, ha megoldjuk a fenti egyenletrendszert.

$$x = -3y - 10$$

$$k: (-3y - 19)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Egyenletrendezés után az

$$y^2 + 12y + 34,5 = 0$$

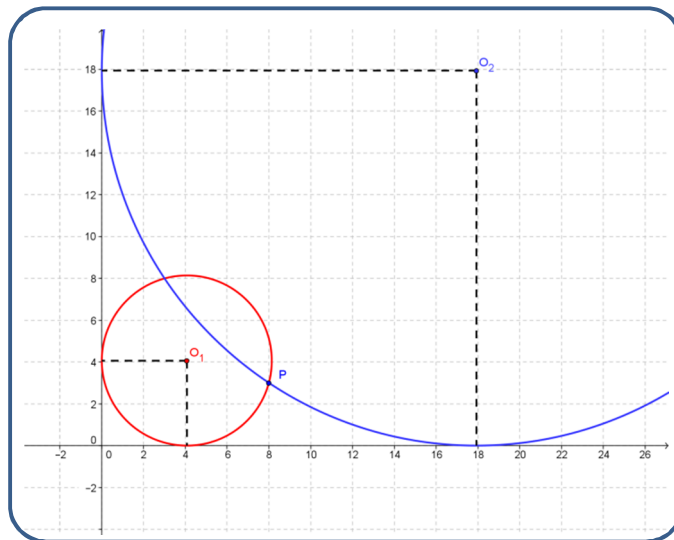
másodfokú egyenletet kapjuk, aminek a gyökei: $y_1 = -4,78$ és $y_2 = -7,22$.

A megfelelő x értékek: $x_1 = 4,34$ és $x_2 = 11,66$.

A keresett pontok $A = (4,34; -4,78)$ és $B = (11,66; -7,22)$.

10. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P(8; 3)$ ponton és mindkét koordinátatengelyt érinti!

Megoldás:



A keresett kör középpontja egyenlő távol van a koordinátatengelyektől. A P pont az I. síknegyedben van, ezért ha a kör sugara r , akkor az egyenlete:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

Azt az r értéket keressük, amelyre a P pont rajta van a körön:

$$(8 - r)^2 + (3 - r)^2 = r^2$$

Az egyenletet rendezve:

$$r^2 - 22r + 73 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásával megkapjuk a kör sugarát. Két kör teljesíti a feltételeket:

$$k_1: (x - 4,1)^2 + (y - 4,1)^2 = 16,81$$

$$k_2: (x - 17,9)^2 + (y - 17,9)^2 = 320,41$$

11. Adott az $A(0;0)$ és $B(16;0)$ pont. Hol vannak a síkban azok a P pontok, amelyekre $AP:PB = 3:5$?

Megoldás:

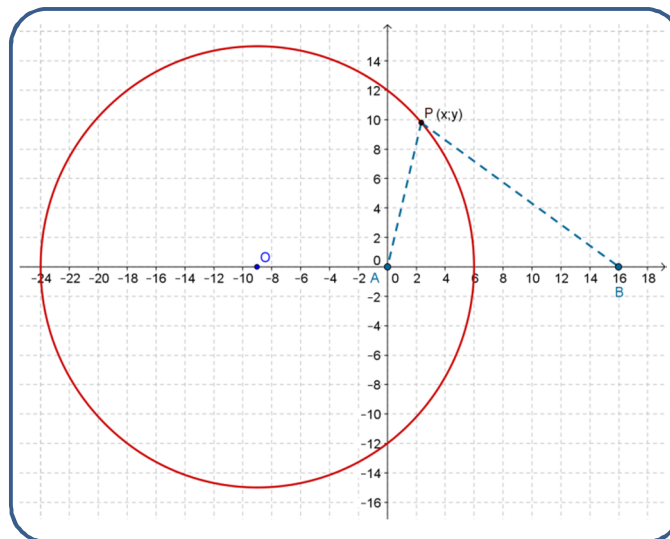
A $P(x; y)$ pontra a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-16)^2 + y^2}} = \frac{3}{5}$$

Az egyenletet négyzetre emeljük és rendezzük:

$$\begin{aligned} 25 \cdot (x^2 + y^2) &= 9 \cdot ((x-16)^2 + y^2) \\ 16x^2 + 16y^2 + 288x &= 2304 \\ x^2 + y^2 + 18x &= 144 \\ k: (x+9)^2 + y^2 &= 225 \end{aligned}$$

Egy olyan kör egyenletét kaptuk, amelynek középpontja $O(-9;0)$ és a sugara 15 egység. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kör minden pontja hozzátartozik a keresett ponthalmazhoz.



Megjegyzés: Bármely 1-től különböző arány esetében a pontok egy körvonalon helyezkednek el, ezt a kört az AB szakasz adott arányhoz tartozó Apollóniusz-körének nevezzük.

12. Adott az $A(-2; -2)$ és $B(6; 4)$ pont és az $e: x + 2y = 9$ egyenes. Határozzuk meg az e egyenesnek azokat a pontjait, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik!

Megoldás:

A Thalesz tétel miatt a keresett pontok az AB átmérőjű körvonalon vannak. Az AB szakasz felezőpontja $O(2; 1)$. A kör sugara $OA = \sqrt{16 + 9} = 5$. Így a Thalesz kör egyenlete:

$$\begin{aligned} k: (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 25 \\ e: x + 2y &= 9 \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszert megoldjuk:

$$x = 9 - 2y$$

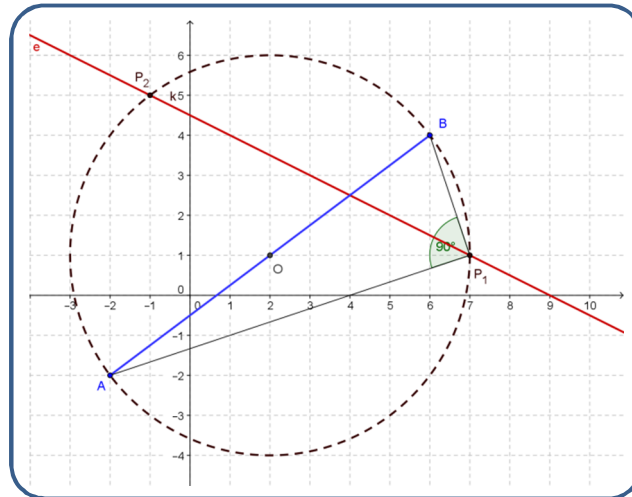
$$(7 - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Egyenletrendezés után:

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

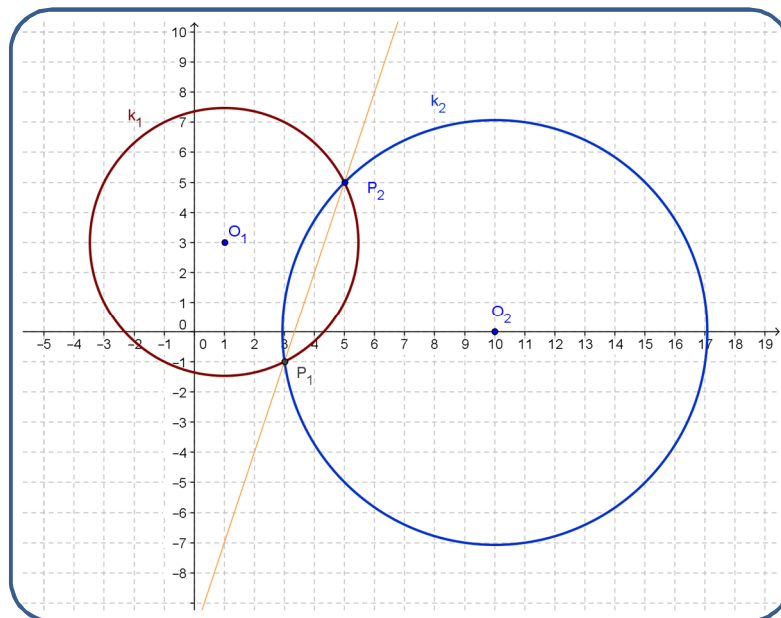
Két megoldást kapunk: $y_1 = 1$ és $y_2 = 5$, a pontok első koordinátái: $x_1 = 7$ és $x_2 = -1$.

A keresett pontok: $P_1(7; 1)$ és $P_2(-1; 5)$.



13. Határozzuk meg az $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$ és az $(x - 10)^2 + y^2 = 50$ egyenletű körök közös húrájának hosszát!

Megoldás:



$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$$

$$(x - 10)^2 + y^2 = 50$$

A fenti két egyenletet kivonjuk egymásból és rendezzük:

$$18x - 99 - 6y + 9 = -30$$

$$y = 3x - 10 \quad (*)$$

Behelyettesítünk a második kör egyenletébe:

$$(x - 10)^2 + (3x - 10)^2 = 50$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldása után felírjuk az egyenletrendszer megoldását:

$$x_1 = 3 ; y_1 = -1$$

$$x_2 = 5 ; y_2 = 5$$

A körök közös pontjai $P_1(3; -1)$ és $P_2(5; 5)$. A két pont távolsága megadja a közös húr hosszát: $\sqrt{4 + 36} = 6,32$.

Megjegyzés: A két kör egyenletének kivonásával kapott (*) egyenlet elsőfokú, tehát egyenes egyenlete. Ezen az egyenesen rajta vannak a közös pontok, ezért ez az egyenlet a közös húr egyenesének az egyenlete.

14. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $A(-1; 16)$; $B(1; 6)$; $C(3; 0)$ pontokon és a tengelye párhuzamos az y-tengellyel!

Megoldás:

A parabola egyenlete $y = ax^2 + bx + c$ alakban adható meg. Az $a \neq 0$; b ; c paramétereket kell úgy megválasztanunk, hogy az A, B, C pontok rajta legyenek a parabolán. A pontok koordinátáit behelyettesítjük az adott egyenletbe:

$$16 = a - b + c \quad (1)$$

$$6 = a + b + c \quad (2)$$

$$0 = 9a + 3b + c \quad (3)$$

A (2) egyenletből kivonjuk az (1) egyenletet és az eredményt 2-vel osztjuk.

$$-10 = 2b$$

$$b = -5$$

Ezt az eredményt a (2) és a (3) egyenletbe behelyettesítjük:

$$11 = a + c$$

$$15 = 9a + c$$

Tehát

$$a = 0,5 \quad \text{és} \quad c = 10,5.$$

A keresett parabola egyenlete:

$$y = 0,5x^2 - 5x + 10,5.$$

15. Írjuk fel az $y = x^2 - 4x + 5$ egyenletű parabola $(3; 2)$ pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

Megoldás:

Jelöljük m -mel az érintő iránytangensét. A $(3; 2)$ ponton átmenő m iránytangensű egyenes egyenlete:

$$e: y - 2 = m(x - 3)$$

Azt az m értéket keressük, amelyre az e egyenesnek és a parabolának egy közös pontja van.

$$y = m(x - 3) + 2 = mx - 3m + 2$$

kifejezést behelyettesítjük a parabola egyenletébe:

$$mx - 3m + 2 = x^2 - 4x + 5.$$

Az egyenletet rendezve:

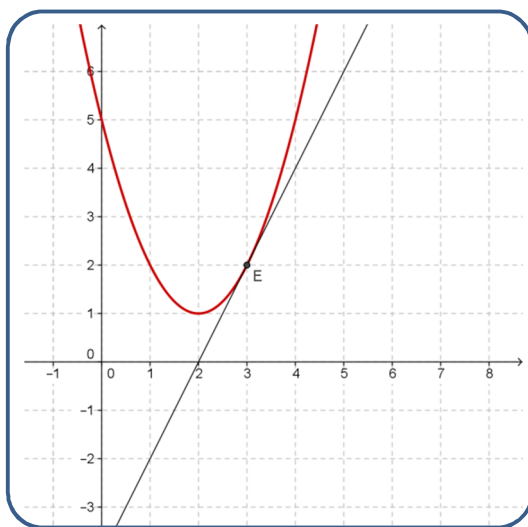
$$x^2 - (4 + m)x + 3m + 3 = 0.$$

Akkor kapunk egy megoldást, ha a másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0.

$$D = (4 + m)^2 - 12m - 12 = m^2 - 4m + 4 = 0,$$

tehát $m = 2$.

Az érintő egyenlete: $y = 2x - 4$.



III. Ajánlott feladatok

1. Adott az $\mathbf{a}(-5; 2)$; $\mathbf{b}(7; -4)$; $\mathbf{c}(0; 3)$; $\mathbf{d}(1; 6)$. Határozza meg a következő vektorok koordinátáit:

a) $-\mathbf{a}$

b) $-\frac{2}{5}\mathbf{b}$

c) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

d) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{d} + \mathbf{c}$

e) $\frac{2\mathbf{a}-\mathbf{b}}{3}$

f) $\mathbf{d} - 3\mathbf{c} + \frac{3}{2}\mathbf{a}$

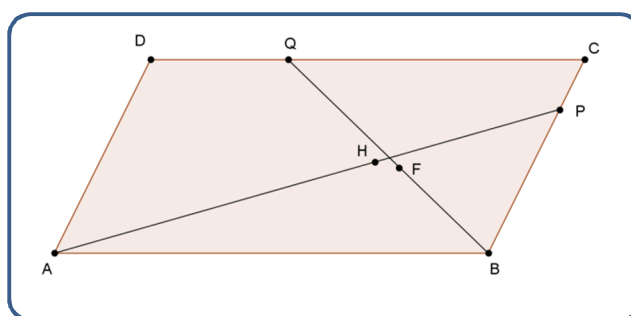
g) $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}}{5}$

h) $\frac{\mathbf{a}-2\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}}{3}$

2. Egy háromszög csúcsai: $A(5; 2)$; $B(-3; 8)$; $C(10; 14)$. A háromszöget a koordináta-rendszer kezdőpontja körül $+90^\circ$ -kal elforgatva az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk. Határozzuk meg az elforgatott háromszög csúcsainak koordinátáit!

3. Számítsuk ki az $\mathbf{a}(-7; 5)$ és $\mathbf{b}(2; -4)$ vektorok skaláris szorzatát és hajlásszögét!

4. Határozzuk meg a b értéket úgy, hogy az $\mathbf{a}(-3; 12)$ és $\mathbf{b}(8; b)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra!
5. Egy négyszög csúcsainak koordinátái: $A(3; -6); B(11; -1); C(8; 4); D(3; 3)$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra! Számítsuk ki a négyszög területét!
6. Az $A(2; 5)$ és $B(-7; 12)$ pontokat összekötő szakaszt a $P; Q; R$ pontok 4 egyenlő szakaszra osztják. Adjuk meg a $P; Q; R$ pontok koordinátáit!
7. Az ABC háromszög két csúcsa $A(5; -4)$ és $B(13; 1)$, súlypontja $S(7; 4)$. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit!
8. Az $A(0; 0); B(9; 0); C(11; 4); D(2; 4)$ pontok egy paralelogrammát határoznak meg. A P pont a BC oldal C -hez közelebbi negyedelő pontja, a Q pont a DC szakasz D -hez közelebbi harmadoló pontja.



- a) Határozzuk meg annak a H pontnak a koordinátáit, amely az AP szakaszt 2:1 arányban osztja!
 - b) Határozzuk meg a BQ szakasz F felezőpontját!
 - c) Mit tapasztalunk? Fogalmazzuk meg általánosan az észrevételünket!
9. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely
 - a) átmegy a $P(2; -5)$ ponton és normálvektora $\mathbf{n}(-5; 2)$;
 - b) átmegy a $P(-4; 6)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(-3; 1)$;
 - c) átmegy a $P(3; -2)$ ponton és a meredeksége $m = 1,2$;
 - d) átmegy az $A(2; -1)$ és a $B(6; -3)$ pontokon!
10. Egy háromszög egyik csúcsa $A(3; -4)$, két magasságvonalának egyenlete $7x - 2y - 1 = 0$ és $2x - 7y - 6 = 0$. Határozzuk meg a hiányzó csúcspontok koordinátáit!
11. Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$. Közepontja az $(2; 1)$ pont. Adjuk meg a csúcsok koordinátáit!
12. Egy derékszögű háromszög csúcspontjai: $A(5; 0); B(0; 3); C(0; 0)$. Az ábra szerint a befogókra négyzeteket rajzolunk.

21. Adott az $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1; -2)$. Számítsa ki a háromszög másik két csúcsának koordinátáit!
(Emelt szintű érettségi 2011. május)
22. Az ABC háromszög beírt körének egyenlete $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 10$, az $A(8; -1)$ csúccsal szemközti oldal egyenlete $a: -x + 3y = 13$. Határozzuk meg a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit!
23. Határozzuk meg annak a 3 egység sugarú körnek az egyenletét, amely kívülről érinti az $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ és $(x - 11)^2 + (y + 6)^2 = 100$ köröket!
24. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a fókuszpontja a $(4; -2)$ pont, vezéregyenesének egyenlete $y = -6$!
25. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolának azokat a pontjait, amelyek az $A(-4; -5)$ és $B(-8; 3)$ pontoktól egyenlő távol vannak!
26. Írjuk fel az $y = \frac{1}{20}x^2$ parabola olyan húr egyenesének az egyenletét, amely áthalad az $(5; 2)$ ponton és ez a pont a húr felezi!
27. Igazoljuk, hogy az $y = mx + \frac{a}{m}$ ($m \neq 0$) egyenes az $y^2 = 4ax$ ($a \neq 0$) parabola érintője!
28. Milyen görbét írnak le az ordinátatengelyt és az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű kört érintő körök középpontjai?
29. Egy parabola fókuszpontja $F(0; 2)$, vezéregyenesének egyenlete $v: y = -2$. A vezéregyenes $P(3; -2)$ pontjából érintőket húzunk a parabolához. Határozzuk meg az érintési pontokat! Bizonyítsuk be, hogy a két érintési pont és a fókuszpont egy egyenesen van!
30. Adott az $e: x = -8$ egyenletű egyenes, az $F_1(-2; 0)$ és $F_2(2; 0)$ pontok. Adjunk feltételt az olyan $P(x; y)$ pontok koordinátáira,
- amelyek az e egyenestől kétszer olyan messze vannak, mint az F_1 ponttól!
 - amelyeknek az F_1 és F_2 pontoktól mért távolságösszege 8 egység!

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Adott az $\mathbf{a}(-5; 2)$; $\mathbf{b}(7; -4)$; $\mathbf{c}(0; 3)$; $\mathbf{d}(1; 6)$. Határozza meg a következő vektorok koordinátáit:

- | | | | |
|---------------------------------------|---|--|---|
| a) $-\mathbf{a}$ | b) $-\frac{2}{5}\mathbf{b}$ | c) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ | d) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{d} + \mathbf{c}$ |
| e) $\frac{2\mathbf{a}-\mathbf{b}}{3}$ | f) $\mathbf{d} - 3\mathbf{c} + \frac{3}{2}\mathbf{a}$ | g) $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}}{5}$ | h) $\frac{\mathbf{a}-2\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}}{3}$ |

Megoldás:

- | | | | |
|--------------|-----------------------------------|--------------|------------------------------------|
| a) $(5; -2)$ | b) $(-2\frac{4}{5}; \frac{8}{5})$ | c) $(9; -6)$ | d) $(-3\frac{1}{4}; -\frac{1}{2})$ |
|--------------|-----------------------------------|--------------|------------------------------------|

$$\text{e) } \left(-5\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}\right) \quad \text{f) } \left(-6\frac{1}{2}; 0\right) \quad \text{g) } \left(-2\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right) \quad \text{h) } \left(-6\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

2. Egy háromszög csúcsai: $A(5; 2); B(-3; 8); C(10; 14)$. A háromszöget a koordináta-rendszer kezdőpontja körül $+90^\circ$ -kal elforgatva az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk. Határozzuk meg az elforgatott háromszög csúcsainak koordinátáit!

Megoldás:

Ha az $\overrightarrow{OA}(5; 2)$ vektort $+90^\circ$ -kal elforgatjuk, az $\overrightarrow{OA_1}(-2; 5)$ vektort kapjuk. Így az elforgatott háromszög csúcsai: $A_1(-2; 5); B_1(-8; -3); C_1(-14; 10)$.

3. Számítsuk ki az $\mathbf{a}(-7; 5)$ és $\mathbf{b}(2; -4)$ vektorok skaláris szorzatát és hajlásszögét!

Megoldás:

$$\mathbf{ab} = (-7) \cdot 2 + 5 \cdot (-4) = -34.$$

A két vektor szögét jelöljük φ -vel. Ekkor $\cos \varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{-34}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{20}} = -0,8838, \varphi = 152,10^\circ$.

4. Határozzuk meg a b értéket úgy, hogy az $\mathbf{a}(-3; 12)$ és $\mathbf{b}(8; b)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra!

Megoldás:

Két vektor akkor és csak akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0. $\mathbf{ab} = (-3) \cdot 8 + 12b = 0$, tehát $b = 2$.

5. Egy négyszög csúcsainak koordinátái: $A(3; -6); B(11; -1); C(8; 4); D(3; 3)$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra! Számítsuk ki a négyszög területét!

Megoldás:

$\overrightarrow{AC} = (5; 10); \overrightarrow{BD} = (-8; 4)$, skaláris szorzatuk $5 \cdot (-8) + 10 \cdot 4 = 0$. Ezért az AC és BD átló merőleges. $AC = \sqrt{125}; BD = \sqrt{80}$. Ekkor a négyszög területe: $T = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{125 \cdot 80}}{2} = 50$.

6. Az $A(2; 5)$ és $B(-7; 12)$ pontokat összekötő szakaszt a $P; Q; R$ pontok 4 egyenlő szakaszra osztják. Adjuk meg a $P; Q; R$ pontok koordinátáit!

Megoldás:

A Q pont az AB szakasz felezőpontja, P és R az AB szakasz harmadoló pontjai:

$$P\left(\frac{3 \cdot 2 - 7}{4}; \frac{3 \cdot 5 + 12}{4}\right) \quad Q\left(\frac{2 - 7}{2}; \frac{5 + 12}{2}\right) \quad R\left(\frac{2 - 3 \cdot 7}{4}; \frac{5 + 3 \cdot 12}{4}\right)$$

$$P(-0,25; 6,75) \quad Q(-2,5; 8,5) \quad R(-4,75; 10,25)$$

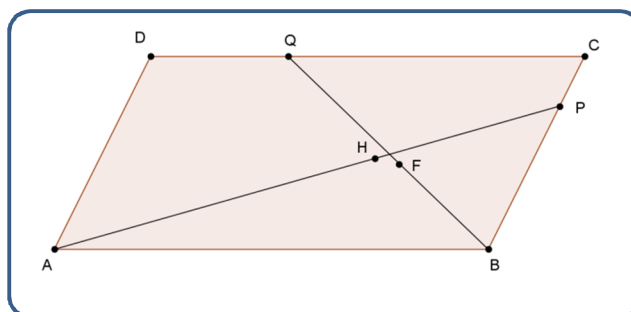
7. Az ABC háromszög két csúcsa $A(5; -4)$ és $B(13; 1)$, súlypontja $S(7; 4)$. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit!

Megoldás:

A háromszög harmadik csúcsát keressük $C(c_1; c_2)$ alakban.

Ekkor: $\frac{5+13+c_1}{3} = 7; \frac{-4+1+c_2}{3} = 4$. Tehát $c_1 = 3; c_2 = 15$.

8. Az $A(0;0); B(9;0); C(11;4); D(2;4)$ pontok egy paralelogrammát határoznak meg. A P pont a BC oldal C -hez közelebbi negyedelő pontja, a Q pont a DC szakasz D -hez közelebbi harmadoló pontja.



- Határozzuk meg annak a H pontnak a koordinátáit, amely az AP szakaszt 2:1 arányban osztja!
- Határozzuk meg a BQ szakasz F felezőpontját!
- Mit tapasztalunk? Fogalmazzuk meg általánosan az észrevételünket!

Megoldás:

$$P\left(\frac{3 \cdot 11 + 9}{4}; \frac{3 \cdot 4 + 0}{4}\right) = (10,5; 3); Q\left(\frac{2 \cdot 2 + 11}{3}; \frac{2 \cdot 4 + 4}{4}\right) = (5; 4).$$

- $H\left(\frac{2}{3} \cdot 10,5; \frac{2}{3} \cdot 3\right) = (7; 2)$
- $F\left(\frac{9+5}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = (7; 2)$
- A H és F pont egybeesik, az AP és BQ szakasz metszéspontjával azonos. Ezzel bizonyítottuk, hogy a metszéspont az AP szakaszt negyedeli, a BQ szakaszt felezi. (Tetszőleges paralelogramma esetében teljesül ez a tulajdonság.)

9. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely

- átmegy a $P(2; -5)$ ponton és normálvektora $\mathbf{n}(-5; 2)$;
- átmegy a $P(-4; 6)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(-3; 1)$;
- átmegy a $P(3; -2)$ ponton és a meredeksége $m = 1,2$;
- átmegy az $A(2; -1)$ és a $B(6; -3)$ pontokon;

Megoldás:

- $-5x + 2y = -5 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = -20$
- $\mathbf{v}(-3; 1) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 3)$, így az egyenes egyenlete: $x + 3y = -4 + 3 \cdot 6 = 14$
- $y - (-2) = 1,2 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 1,2x - 5,6$
- $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}(4; -2) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 2)$, az egyenes egyenlete: $x + 2y = 2 - 2 = 0$

10. Egy háromszög egyik csúcsa $A(3; -4)$, két magasságvonálának egyenlete $7x - 2y - 1 = 0$ és $2x - 7y - 6 = 0$. Határozzuk meg a hiányzó csúcspontok koordinátáit!

Megoldás:

$$m_b: 7x - 2y - 1 = 0$$

$$m_c: 2x - 7y - 6 = 0$$

Az AC egyenes merőleges az m_b magasságvonalra.

$\mathbf{n}_b = (2; 7)$ és $A(3; -4)$ adatokból az AC oldal egyenlete:

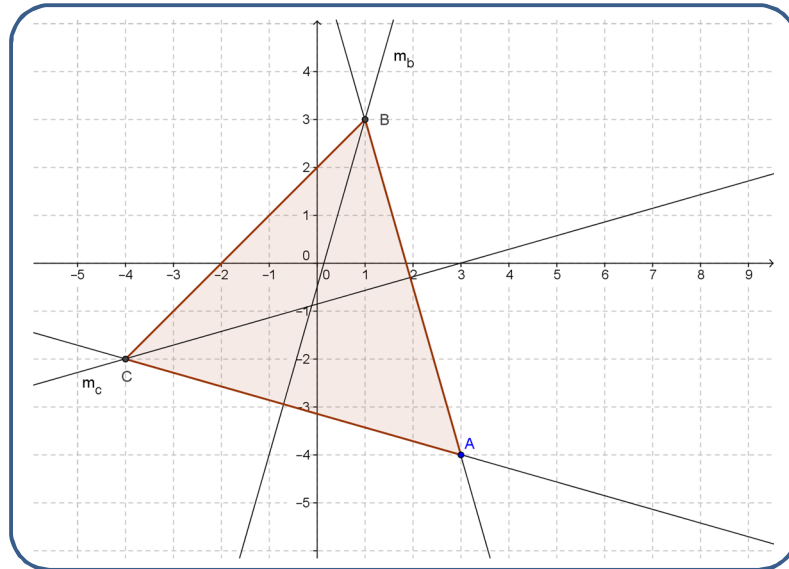
$$b: 2x + 7y = -22$$

A b egyenes és az m_c magasságvonal metszéspontja a C pont. A megfelelő egyenletrendszer megoldásával kapjuk a $C(-4; -2)$ megoldást.

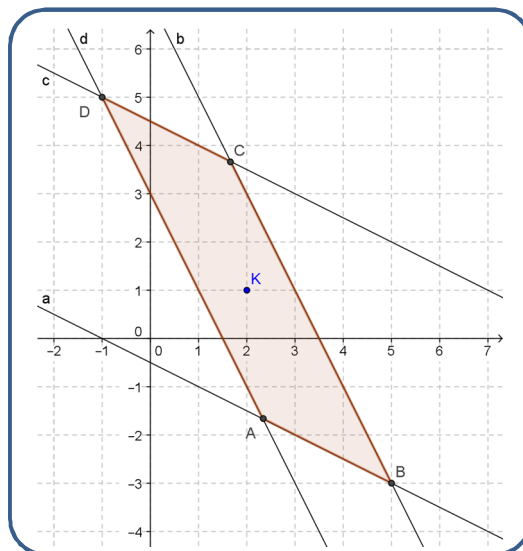
Hasonlóan az AB egyenes egyenlete:

$$c: 7x + 2y = 13$$

A c egyenes és az m_b magasságvonal metszéspontjaként kapjuk a $B(1; 3)$ pontot.



11. Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$. Középpontja a $(2; 1)$ pont. Adjuk meg a csúcsok koordinátáit!



Megoldás:

Az $a: x + 2y + 1 = 0$ és $d: 2x + y - 3 = 0$ egyenesek metszéspontja a paralelogramma A csúcsa. Az egyenletrendszer megoldásával $A\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért a $K(2; 1)$ pont az AC szakasz felezőpontja. Ez alapján megkapjuk a $C\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right)$ csúcsot. A BC oldal egyenese, a b egyenes, párhuzamos a d egyenessel és átmegy a C ponton.

$$b: 2x + y = 7$$

$$a: x + 2y = -1$$

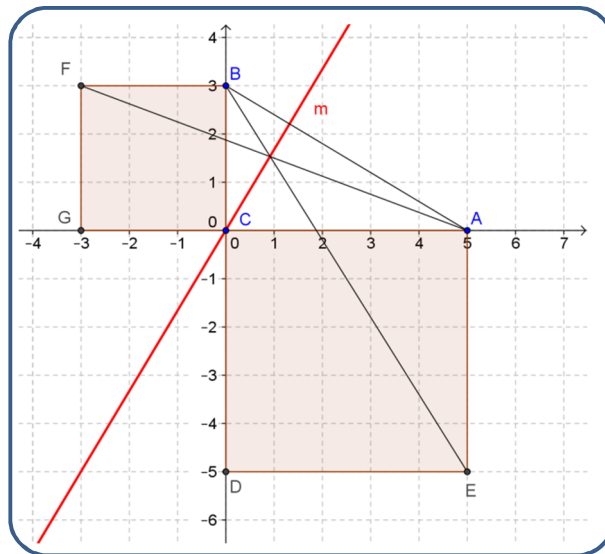
Az a és b egyenesek metszéspontja a $B(5; -3)$ pont.

DB szakasz felezőpontja a K pont, Ezt a tulajdonságot felhasználva határozzuk meg a paralelogramma $D(-1; 5)$ csúcsát.

12. Egy derékszögű háromszög csúcspontjai: $A(5; 0); B(0; 3); C(0; 0)$.

Az ábra szerint a befogókra négyzeteket rajzolunk.

- Írjuk fel az AF és BE egyenesek egyenletét!
- Határozzuk meg a két egyenes M metszéspontját!
- Írjuk fel a derékszögű háromszög C csúcsából induló magasság egyenesének egyenletét!
- Mutassuk meg, hogy a magasságvonál áthalad az M ponton!
- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges derékszögű háromszög esetében igaz a d) állítás!



Megoldás:

- Az A és F pontokon átmenő f egyenes egyenlete: $f: 3x + 8y = 15$
A B és E pontokon átmenő e egyenes egyenlete: $e: 8x + 5y = 15$
- Az f és e egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a metszéspontot: $M\left(\frac{45}{49}; \frac{75}{49}\right)$.
- A magasságvonál normálvektora $\overrightarrow{BA} = (5; -3)$, Átmegy az $O(0; 0)$ ponton, így az egyenlete: $m: 5x - 3y = 0$.
- Az $M\left(\frac{45}{49}; \frac{75}{49}\right)$ pont koordinátáit behelyettesítjük az m egyenes egyenletébe:
 $5 \cdot \frac{45}{49} - 3 \cdot \frac{75}{49} = 0$, így az M pont illeszkedik a magasságvonálra.
- Paramétereket használva: $A(a; 0)$ és $B(0; b)$ az átfogó két végpontja:

$$f: bx + (a + b)y = ab$$

$$e: (a + b)x + ay = ab$$

$$M\left(\frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2}; \frac{a^2b}{a^2 + ab + b^2}\right)$$

$$m: ax - by = 0$$

Ekkor is igaz, hogy az M pont koordinátáit az m egyenes egyenletébe helyettesítve azonosságot kapunk, tehát az M pont illeszkedik az C csúcsból induló magasságvonálra.

13. Egy háromszög csúcspontjai $A(2; 3); B(13; 4); C(6; 9)$. Hol vannak azok a pontok a síkban, amelyekre $PA^2 + PB^2 = 2 \cdot PC^2$?

Megoldás:

A $P(x; y)$ pontra a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (x - 13)^2 + (y - 4)^2 = 2 \cdot (x - 6)^2 + 2 \cdot (y - 9)^2.$$

Az egyenletet rendezve egy egyenes egyenletét kapjuk:

$$e: 3x - 11y = -18.$$

Ez azt jelenti, hogy a keresett pontok egy egyenesen helyezkednek el.

14. Egy kör átmérőjének végpontjai $A(-6; 11)$ és $B(4; -5)$. Írjuk fel a kör egyenletét!

Megoldás:

Az AB szakasz felezőpontja a kör $O(-1; 3)$ középpontja, sugara pedig az AO szakasz: $\sqrt{89}$. A kör egyenlete:

$$k: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 89.$$

15. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit és sugarát, ha egyenlete:

- a) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$
 c) $2x^2 + 2y^2 + 12x - 6y + 10 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$

Megoldás:

Az adott egyenleteket teljes négyzetté kiegészítéssel átalakítjuk:

a) $x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 25 + y^2 - 2 \cdot 2y + 4 = 25 + 4 - 13$
 $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$

A kör középpontja $O(5; 2)$, sugara $r = 4$.

b) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$
 $x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 16 + y^2 = 16 - 7$
 $(x + 4)^2 + y^2 = 9$

A kör középpontja $O(-4; 0)$, sugara $r = 3$.

c) $2x^2 + 2y^2 + 12x - 6y + 10 = 0$, az egyenletet 2-vel osztjuk:
 $x^2 + y^2 + 6x - 3y + 5 = 0$
 $x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 + y^2 - 2 \cdot 1,5y + 2,25 = 9 + 2,25 - 5$
 $(x + 3)^2 + (y - 1,5)^2 = 6,25$

A kör középpontja $O(-3; 1,5)$, sugara $r = 2,5$.

d) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$
 $(x - 3)^2 + y^2 = 0$

Ezt az egyenletet egyetlen pont, a $(3; 0)$ pont elégíti ki, tehát nem kör egyenlete.

16. Toljuk el az $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 40 = 0$ egyenletű kört a $v(-3; 5)$ vektorral! Írjuk fel az így kapott kör egyenletét!

Megoldás:

Átalakítjuk az adott egyenletet, meghatározzuk a kör középpontját és sugarát:

$$k: (x - 8)^2 + (y + 1)^2 = 64 + 1 - 40 = 25$$

A kör középpontja $O(8; -1)$, sugara 5 egység. A kör középpontját eltoljuk az adott vektorral, sugara az eltolás során változatlan marad:

$$O'(8 - 3; -1 + 5) = (5; 4).$$

Az eltolás után a kör egyenlete:

$$k': (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

17. Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$ egyenletű kör és az $x - 8,4 = 0$ egyenletű egyenes.

- Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit!
- Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől?

(Középszintű érettségi 2009. október)

Megoldás:

- A közös pont első koordinátája $x = 8,4$. A kör egyenletébe ezt az értéket behelyettesítve, az $y^2 + 8y - 35,84 = 0$ egyenletet megoldva megkapjuk a kör és egyenes két közös pontjait: $P_1(8,4; 3,2)$ és $P_2(8,4; -11,2)$.
- A kör egyenlete $k: (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 81$, a kör középpontja $O(3; -4)$. Ez a pont az $x = 8,4$ egyenletű egyenestől $8,4 - 3 = 5,4$ egység távolságra van.

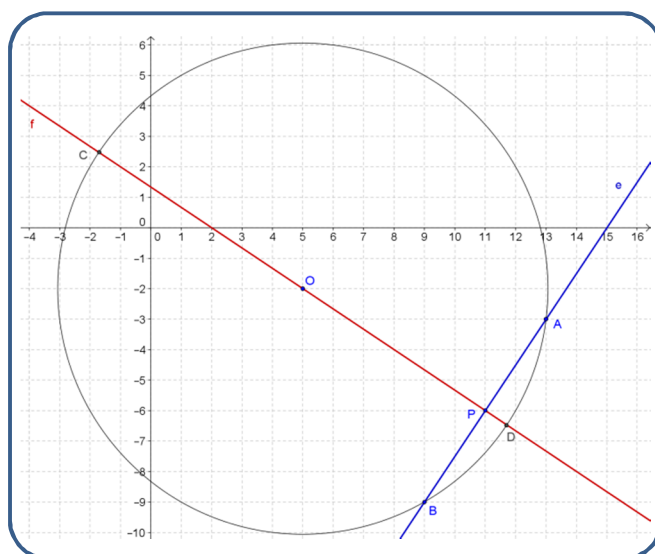
18. Határozzuk meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyek az $A(2; -3)$ ponttól 5 egység távolságra vannak és illeszkednek a $7x - y = -8$ egyenesre!

Megoldás:

Az A ponttól 5 egységre lévő pontok a $k: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ egyenletű egyenesen vannak. A kör és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszernek két megoldása van, így két ilyen pont létezik: $P_1(-1; 1)$ és $P_2(-2; -6)$.

19. Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 36 = 0$ egyenletű kör $P(11; -6)$ belső pontján áthaladó legrövidebb illetve leghosszabb húrját tartalmazó egyenes egyenletét!

Megoldás:



A kör egyenlete: $k: (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 65$, a kör középpontja $O(5; -2)$. A legrövidebb húrt akkor kapjuk, ha az OP szakaszra merőleges húrt veszünk, a leghosszabb pedig az OP -re illeszkedő átmérő. Az $\overrightarrow{OP} = (6; -4)$ az első egyenes (e) normálvektora, a második egyenes (f) irányvektora, és illeszkednek a P pontra, tehát:

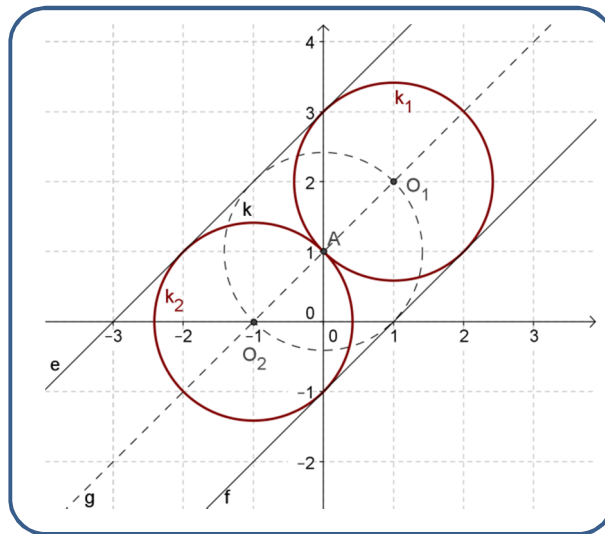
$$e: 3x - 2y = 45$$

$$f: 2x + 3y = 4$$

20. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelyik az y -tengelyt a $(0; 1)$ pontban metszi és érinti az $y = x + 3$ és $y = x - 1$ egyenletű egyeneseket!

(Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1999.)

Megoldás:



A keresett kör középpontja egyenlő távol van a két adott egyenestől, ezért az ábra szerint rajta van az e és f egyenesek közép-párhuzamosán, ennek egyenlete: $g: y = x + 1$. Az e és g párhuzamos egyenesek távolsága megadja a kör sugarát, például az e egyenes $(0; 3)$ pontjának távolsága a g egyenestől $\sqrt{2}$. A kör átmegy az $A(0; 1)$ ponton, tehát a keresett kör középpontja rajta van az A középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú $k: x^2 + (y - 1)^2 = 2$ körvonalon. A k kör és a g egyenes metszéspontjait a megfelelő egyenletrendszer megoldásával megkapjuk: $O_1(1; 2)$ és $O_2(-1; 0)$. A két kör egyenlete:

$$k_1: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

$$k_2: (x + 1)^2 + y^2 = 2$$

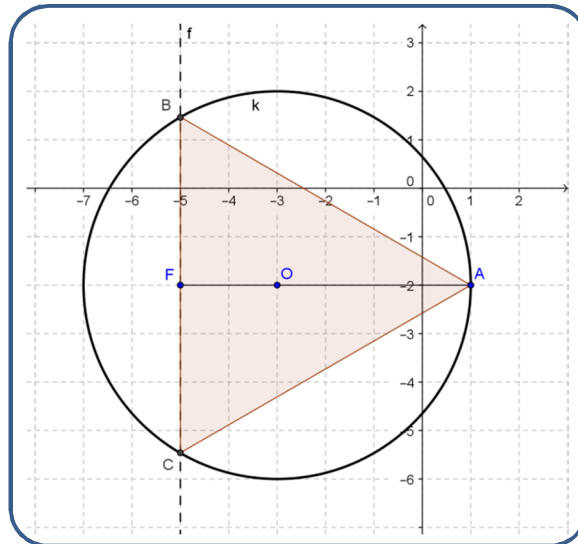
21. Adott az $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1; -2)$ Számítsa ki a háromszög másik két csúcsának koordinátáit!

(Emelt szintű érettségi 2011. május)

Megoldás:

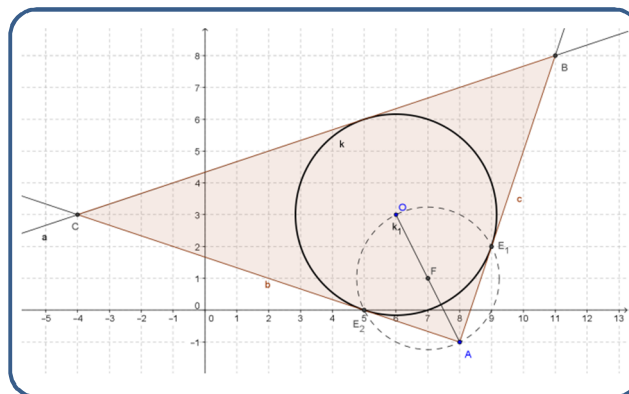
Teljes négyzetté kiegészítéssel meghatározzuk a kör középpontját, amely egyben a szabályos háromszög súlypontja is: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$, $O(-3; -2)$. A súlypont a súlyvonal csúcsától távolabbi harmadoló pontja, így a BC oldal felezőpontja $F(-5; -2)$. A BC oldal merőleges az AF

szakaszra, ezért egyenlete: $f: x = -5$. A kör és az egyenes közös pontjaira: $y_1 = -2 + 2\sqrt{3}$; $y_2 = -2 - 2\sqrt{3}$ adódik, tehát a szabályos háromszög hiányzó csúcsai $B(-5; -2 + 2\sqrt{3})$ és $C(-5; -2 - 2\sqrt{3})$.



22. Az ABC háromszög beírt körének egyenlete $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 10$, az $A(8; -1)$ csúccsal szemközti oldal egyenlete $a: -x + 3y = 13$. Határozzuk meg a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit!

Megoldás:



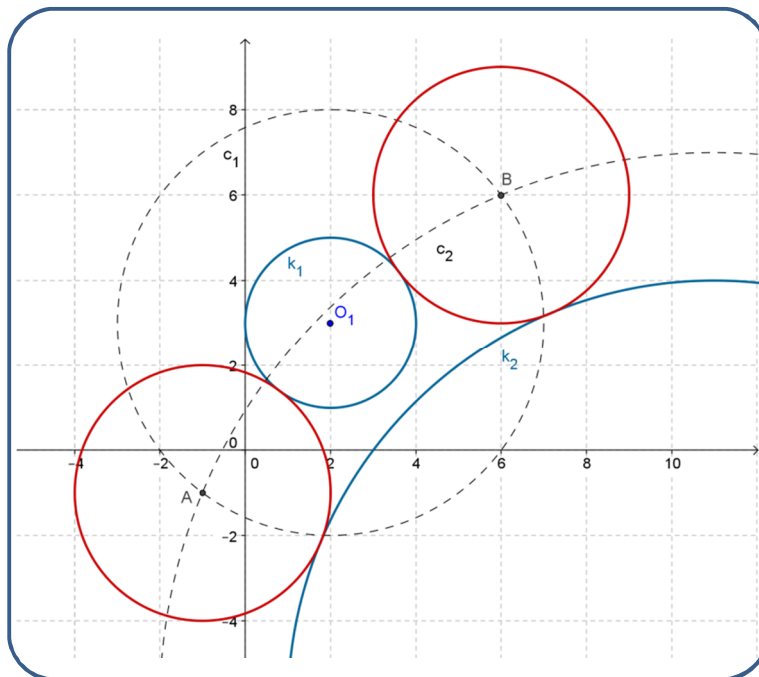
Ellenőrizhető, hogy az a egyenes valóban érinti az adott kört. Az A pontból érintőket húzunk az adott körhöz. Az érintési pontok az OA szakasz Thalész-körén vannak. Ennek a körnek a középpontja az OA szakasz $F(7; 1)$ felezőpontja, sugara $OF = \sqrt{5}$, így a Thalész-kör egyenlete: $k_1 = (x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 5$. A k és k_1 egyenletekből álló egyenletrendszert megoldjuk: a két egyenletet kivonva és rendezve $x = 2y + 5$.

A k_1 egyenletbe behelyettesítünk. $k_1 = (2y - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$. Az egyenletrendszert megoldva: $y_1 = 2$ és $y_2 = 0$; $x_1 = 9$ és $x_2 = 5$. Az érintési pontok $E_1(9; 2)$ és $E_2(5; 0)$.

A c oldalegyenes átmegy az A és E_1 pontokon, egyenlete $3x - y = 25$. Az a és c egyenesek metszéspontja a $B(11; 8)$ csúcs. Hasonlóan a $b: x + 3y = 5$ egyenes és az a egyenes metszéspontjaként a harmadik csúcs $C(-4; 3)$.

23. Határozzuk meg annak a 3 egység sugarú körnek az egyenletét, amely kívülről érinti az $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ és $(x - 11)^2 + (y + 6)^2 = 100$ köröket!

Megoldás:



A körök középpontjait az O_1 középpontú 5 egység sugarú k_3 és az O_2 középpontú 13 egység sugarú k_4 kör metszéspontjaiként kapjuk meg:

$$k_3: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$k_4: (x - 11)^2 + (y + 6)^2 = 169$$

A két egyenletet kivonjuk:

$$18x - 18y - 144 = -144$$

$$x = y$$

Visszahelyettesítjük a k_3 egyenletbe és rendezzük:

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

A másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk a keresett körök középpontjait: $A(-1; -1)$; $B(6; 6)$. Felírjuk a körök egyenletét:

$$a: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

$$b: (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 9$$

Létezik két olyan 3 egység sugarú kör is, amelyet a k_1 kör belülről, a k_2 kör kívülről érint. Ezeknek az egyenlete hasonló módszerrel adható meg.

24. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a fókuszpontja a $(3; -2)$ pont, vezéregyenesének egyenlete $y = -6$!

Megoldás:

Legyen a parabola egy pontja $P(x; y)$. Ez a pont a fókuszponttól és a vezéregyenesestől egyenlő távol van:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = |y+6|$$

Mindkét oldal pozitív, ezért a négyzetre emelhetünk és rendezés után megkapjuk a parabola egyenletét:

$$y = \frac{(x-3)^2}{8} - 4$$

Megjegyzés:

A parabola egyenletében szereplő állandókat használva: a parabola paramétere a fókuszpont és a vezéregyenes távolsága, $p = 4$. A parabola csúcspontja $T(3; -4)$. Ezek alapján a parabola egyenlete: $8 \cdot (y + 4) = (x - 3)^2$.

25. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolának azokat a pontjait, amelyek az $A(-4; -5)$ és $B(-8; 3)$ pontoktól egyenlő távol vannak!

Megoldás:

Az A és B pontoktól egyenlő távol lévő pontok az AB szakasz felező merőlegesén vannak:

$$f: -x + 2y = 4$$

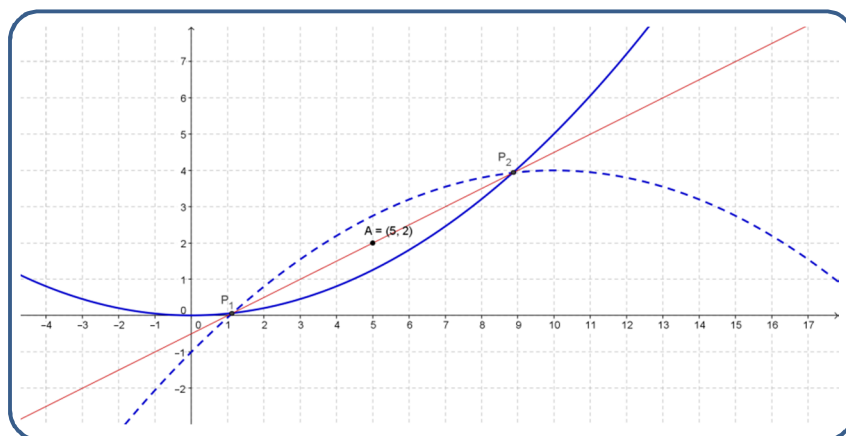
Az f egyenes és a parabola egyenletéből álló egyenletrendszert megoldjuk:

$$-x + 2 \cdot \frac{1}{4}x^2 = 4$$

A $P_1(4; 4)$ és $P_2(-2; 1)$ pontok adják a megoldást.

26. Írjuk fel az $y = \frac{1}{20}x^2$ parabola olyan húr egyenesének az egyenletét, amely áthalad az $(5; 2)$ ponton és ez a pont a húrt felezi!

Megoldás:



A P_1P_2 húr felezőpontja az $A(5; 2)$ pont. Ha a P_1 pontot az A pontra tükrözzük, akkor a P_2 pontot kapjuk. A P_1 pont rajta van az $y = \frac{1}{20}x^2$ egyenletű parabolán, ezért a P_2 pont a parabola A pontra való tükröképén lesz. A parabola $(0; 0)$ csúcspontját az $A(5; 2)$ pontra tükrözve a $(10; 4)$ pontot kapjuk. A tükrözéssel a parabola paramétere nem változik, de a tükrökép egy lefelé álló parabola lesz, így egyenlete: $y = -\frac{1}{20}(x - 10)^2 + 4$. A P_1 és P_2 pont a két parabola két közös pontja.

$$y = \frac{1}{20}x^2$$

$$y = -\frac{1}{20}(x - 10)^2 + 4$$

A fenti egyenleteket összeadjuk és rendezzük:

$$2y = x - 1$$

$$e: x - 2y = 1$$

Ez utóbbi egy egyenes egyenlete, amelyre a P_1 és P_2 pontok illeszkednek. Így ez lesz a keresett egyenes egyenlete.

Megjegyzés:

Az egyenletrendszer megoldásával megkaphatjuk a húr végpontjait pontosan is:

$$P_1 \left(5 - \sqrt{15}; \frac{1}{20} (5 - \sqrt{15})^2 \right); P_2 \left(5 + \sqrt{15}; \frac{1}{20} (5 + \sqrt{15})^2 \right).$$

27. Igazoljuk, hogy az $y = mx + \frac{a}{m}$ ($m \neq 0$) egyenes az $y^2 = 4ax$ ($a \neq 0$) parabola érintője !

Megoldás:

Az egyenes és a parabola közös pontjait a megfelelő egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg:

$$\left(mx + \frac{a}{m} \right)^2 = 4ax$$

$$m^2 x^2 + 2ax + \frac{a^2}{m^2} = 4ax$$

$$m^2 x^2 - 2ax + \frac{a^2}{m^2} = 0$$

$$\left(mx - \frac{a}{m} \right)^2 = 0$$

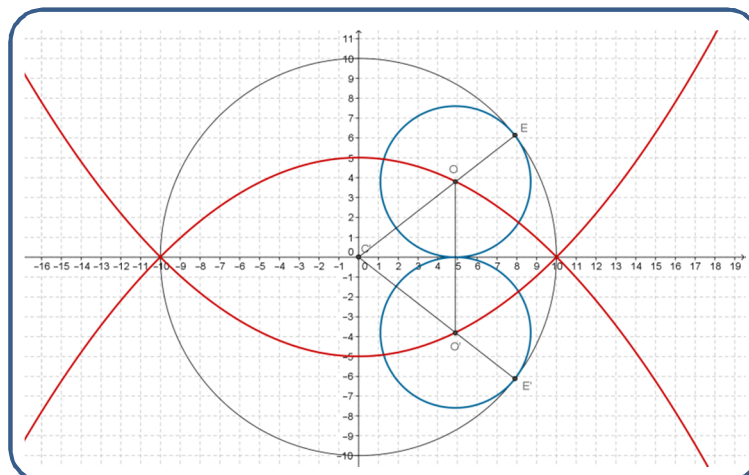
$$mx = \frac{a}{m}$$

$$x = \frac{a}{m^2} \quad y = \frac{2a}{m}$$

Az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, az egyenes a parabolát az $E \left(\frac{a}{m^2}; \frac{2a}{m} \right)$ pontban érinti.

28. Milyen görbét írnak le az x -tengelyt és az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű kört érintő körök középpontjai?

Megoldás:



Azokat a köröket vizsgáljuk először, amelyek az I vagy II síknegyedben belülről érintik az adott kört. Ha a keresett kör középpontja $O(x; y)$, akkor a kör sugara y , az érintkezés feltétele miatt az O pont az origótól $10 - y$ távolságra van, tehát:

$$x^2 + y^2 = (10 - y)^2$$

Átalakítva és rendezve:

$$y = 5 - \frac{1}{20}x^2.$$

Egy parabola egyenletét kaptuk, amelynek a körön belüli darabján vannak a belülről érintkező körök középpontjai.

Ha ugyanezt a gondolatmenetet a III. és IV. síknegyedre alkalmazzuk, akkor az

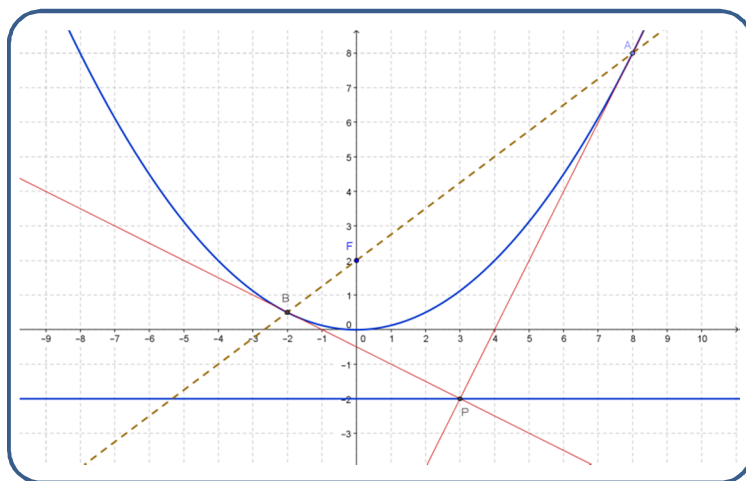
$$y = \frac{1}{20}x^2 - 5$$

parabolát kapjuk.

Ha a kört kívülről érintő köröket is megvizsgáljuk, akkor a parabolák, körön kívüli darabjait kapjuk. Így a két parabola vonal a keresett ponthalmaz, a körvonalon lévő pontokat tekinthetjük 0 sugarú körök középpontjainak.

29. Egy parabola fókuszpontja $F(0; 2)$, vezéregyenesének egyenlete $v: y = -2$. A vezéregyenes $P(3; -2)$ pontjából érintőket húzunk a parabolához. Határozzuk meg az érintési pontokat! Bizonyítsuk be, hogy a két érintési pont és a fókuszpont egy egyenesen van!

Megoldás:



A parabola paramétere 4, így egyenlete:

$$8y = x^2.$$

A P ponton átmenő egyenesek közül azokat keressük, amelyeknek a parabolával egy közös pontjuk van és nem párhuzamosak a parabola tengelyével. Jelöljük az ilyen egyenes meredekségét m -mel:

$$e: y + 2 = m(x - 3)$$

A parabola egyenletét figyelembe véve keressük a közös pontokat:

$$\frac{1}{8}x^2 + 2 = mx - 3m$$

$$x^2 - 8mx + 24m + 16 = 0$$

Az egyenletnek akkor van egy megoldása, ha a diszkrimináns 0:

$$64m^2 - 96m - 64 = 0$$

Innen $m = 2$ vagy $m = -0,5$. Az érintők egyenlete $e_1 : 2x - 8$ illetve $e_2 : -0,5x - 0,5$, az érintési pontok: $A(8; 8)$ és $B(-2; 0,5)$.

Az $\overrightarrow{FA}(8; 6) = 4 \cdot \overrightarrow{BF}(2; 1,5)$, így a vektorok párhuzamosak, ezért a B, F, A pontok egy egyenesen vannak.

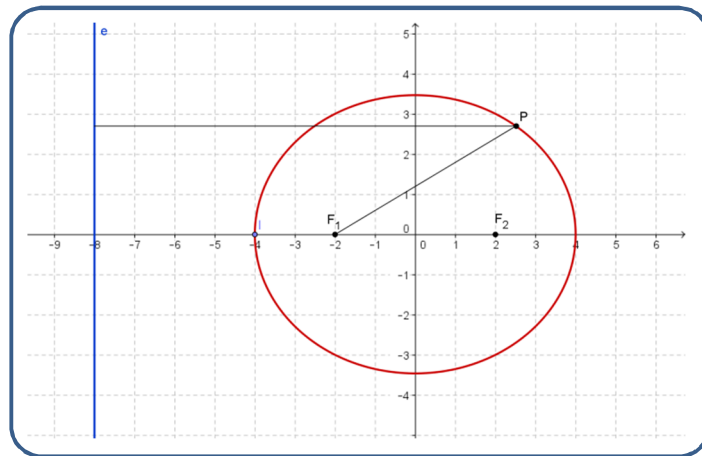
Megjegyzés:

A feladat állítása a vezéregyenes minden pontjára igaz bármely parabola esetében.

30. Adott az $e: x = -8$ egyenletű egyenes, az $F_1(-2; 0)$ és $F_2(2; 0)$ pontok. Adjunk feltételt az olyan $P(x; y)$ pontok koordinátáira,

- amelyek az e egyenestől kétszer olyan messze vannak, mint az F_1 ponttól!
- amelyeknek az F_1 és F_2 pontoktól mért távolságösszege 8 egység!

Megoldás:



- a) A $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor felel meg a feltételeknek, ha

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + y^2} &= x + 8 \\ 4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 &= x^2 + 16x + 64 \\ 3x^2 + 4y^2 &= 48 \end{aligned}$$

Ez az egyenlet egy ellipszist határoz meg, amelyet

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

alakban szoktak megadni.

- b) A $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor felel meg a feltételeknek, ha

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} &= 8 \\ \sqrt{(x+2)^2 + y^2} &= 8 - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 &= 64 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ 16\sqrt{(x-2)^2 + y^2} &= 64 - 8x \\ 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} &= 8 - x \\ 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 &= 64 - 16x + x^2 \\ 3x^2 + 4y^2 &= 48 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} &= 1 \end{aligned}$$

Ugyanazt az ellipszist kapjuk, mint az a) feladatrészen.

IV. Ellenőrző feladatok

1. $A(3; 7)$; $B(1; 1)$; $C(8; -4)$. Határozza meg az ABC háromszögben az A csúcsból induló magasságvonal egyenletét! Írja fel az A csúcsból induló súlyvonal egyenletét!
2. Határozza meg az $e: 6x - 8y = 5$ egyenesnek és az $f: 3x - 4y = -1$ egyenesnek a távolságát!
3. Vannak-e párhuzamos vagy merőleges egyenesek az alábbi egyenesek között?
 $e: x + 2y + 1 = 0$ $f: 6x - 3y = 5$ $g: y = 2x - 1$ $h: 4x + 8y + 7 = 0$
4. Bizonyítsa be, hogy a $(6; 2)$, $(13; 1)$, $(12; -6)$, $(1; -8)$ pontok egy deltoid csúcsai. Számítsa ki a deltoid területét!
5. Az $ABCD$ rombusz A csúcsának koordinátái $(-1; 3)$, a rombusz középpontja $O(2; 1)$. Az AB oldal egyik pontja $P(0; 2)$. Határozza meg a rombusz csúcsainak a koordinátáit!
6. Határozza meg az $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ egyenletű kör $P(1; 3)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenletét!
7. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $(2; 11)$ és a $(10; 11)$ pontokon és érinti az $x + y = 5$ egyenest!
8. Egy derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja $A(-2; 2)$, a másik végpontja a B pont, amelynek ordinátája 4. Az egyik befogó egyenlete $x + y = 10$. Számítsa ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!
9. Egy parabola egy pontja a $P(5; 2)$, csúcspontjának a koordinátái $(3; -2)$. A parabola tengelye párhuzamos az y tengellyel. Írja fel a parabola egyenletét!
10. Az $ABCD$ négyzet C csúcsa az $y = x^2 - 5x + 8,25$ egyenletű parabola csúcsában, B és D szintén a parabolán van. Adja meg a négyzet csúcsainak a koordinátáit!

Ellenőrző feladatok megoldásai

1. $A(3; 7)$; $B(1; 1)$; $C(8; -4)$. Határozza meg az ABC háromszögben az A csúcsból induló magasságvonal egyenletét! Írja fel az A csúcsból induló súlyvonal egyenletét!

Megoldás:

A magasságvonal egyenlete: $m_a: 7x - 5y = -14$

A súlyvonal egyenlete: $s_a: 17x + 3y = 72$

2. Határozza meg az $e: 6x - 8y = 5$ egyenesnek és az $f: 3x - 4y = -1$ egyenesnek a távolságát!

Megoldás:

Az e egyenes valamely pontjából merőlegest bocsátunk az f egyenesre. A merőleges összekötő szakasz hossza adja meg a két párhuzamos egyenes távolságát: 0,7 egység.

3. Vannak-e párhuzamos vagy merőleges egyenesek az alábbi egyenesek között?

$$e: x + 2y + 1 = 0 \quad f: 6x - 3y = 5 \quad g: y = 2x - 1 \quad h: 4x + 8y + 7 = 0$$

Megoldás:

Az irányvektorok, a normálvektorok vagy az iránytényezők összehasonlításával dönthetjük el a kérdést. Az alábbi táblázat tartalmazza ezeket az adatokat mindegyik egyenes esetében:

	e	f	g	h
normálvektor	(1; 2)	(2; -1)	(2; -1)	(1; 2)
irányvektor	(2; -1)	(1; 2)	(1; 2)	(2; -1)
iránytényező	-0,5	2	2	-0,5

Ez alapján e és h párhuzamos, f és g párhuzamos, e és h merőleges f -re és g -re.

4. Bizonyítsa be, hogy a (6;2), (13;1), (12;-6), (1;-8) pontok egy deltoid csúcsai. Számítsa ki a deltoid területét!

Megoldás:

Az $A(6;2)$, $B(13;1)$, $C(12;-6)$, $D(1;-8)$ betűzéssel $AB = BC = \sqrt{50}$, $CD = DA = \sqrt{125}$, a pontok valóban deltoidot határoznak meg. A területet az átlók hosszának felhasználásával számoljuk ki.

$$T = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{10 \cdot 15}{2} = 75.$$

5. Az $ABCD$ rombusz A csúcsának koordinátái $(-1; 3)$, a rombusz középpontja $O(2; 1)$. Az AB oldal egyik pontja $P(0; 2)$. Határozza meg a rombusz csúcsainak a koordinátáit!

Megoldás:

Az O pont az AC átló felezőpontja, ebből meghatározható a C pont koordinátái: $(5; -1)$. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymásra, ezért a B pont az AC felező merőlegesén van, amelynek az egyenlete: $f: 3x - 2y = 4$. Az A és P pontokon átmenő egyenes egyenlete $a: x + y = 2$. Az a és f egyenes metszéspontja a $B(1,6; 0,4)$ pont. A B pontot O -ra tükrözve megkapjuk a rombusz $D(2,4; 1,6)$ csúcsát.

6. Határozza meg az $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ egyenletű kör $P(1; 3)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenletét!

Megoldás:

Az kör egyenletét átalakítva:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

meghatározzuk a kör $O(3; 2)$ középpontját és $r = 4$ sugarát. A középpontot tükrözve felírjuk a tükörkép egyenletét:

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16.$$

7. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $(2; 11)$ és a $(10; 11)$ pontokon és érinti az $x + y = 5$ egyenest!

1. Megoldás:

A kör középpontja egyenlő távol van az $A(2; 11)$ és $B(10; 11)$ pontoktól, ezért rajta van az AB szakasz $f: x = 6$ felezőmerőlegesén. Így a keresett kör középpontját $O(6; v)$ alakban keressük. Az AO távolság, a kör sugara, $\sqrt{(6-2)^2 + (11-v)^2}$. Így a kör egyenletét

$$k: (x-6)^2 + (y-v)^2 = 16 + (11-v)^2$$

formában írjuk fel. Azt a v értéket keressük, amelyre a körnek az $x+y=5$ egyenletű egyenessel egy közös pontja van. Ezt az összefüggést a k kör egyenletébe behelyettesítve és rendezve az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$y^2 + y(1-v) + 11v - 68 = 0.$$

Akkor van egy megoldásunk, ha az egyenlet diszkriminánsa 0:

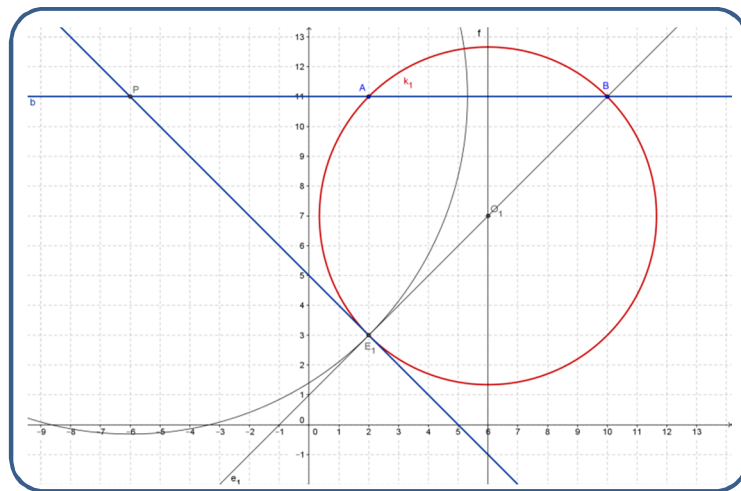
$$D = (1-v)^2 - 44v + 272 = 0.$$

Innen $v = 7$ vagy $v = 39$ adódik. Ezekkel az értékekkel két kört kaptunk:

$$k_1: (x-6)^2 + (y-7)^2 = 32$$

$$k_2: (x-6)^2 + (y-39)^2 = 800$$

2. Megoldás:



Az $x+y=5$ egyenes a keresett körnek érintője, az AB egyenes a kör szelője. A szelő és érintő metszéspontja a $P(-6; 11)$ pont. Alkalmazhatjuk a szelőtételt: az érintőszakasz négyzete megegyezik a $PA \cdot PB = 128$ szorzattal. Így az érintési pont a P középpontú, $\sqrt{128}$ sugarú körnek és az érintőnek a metszéspontjaként határozható meg:

$$(x+6)^2 + (y-11)^2 = 128$$

$$x+y=5$$

Az egyenletrendszer megoldásából két érintési pontot kapunk: $E_1(2; 3)$ és $E_2(-14; 19)$. Az érintési pontokban az érintőre merőlegest állítunk. A merőlegesek az AB szakasz felezőmerőlegeséből, $f: x = 6$, kimetszik a körök középpontjait: $O_1(6; 7)$ és $O_2(6; 39)$. A sugár kiszámítása után felírhatjuk a körök egyenletét:

$$k_1: (x-6)^2 + (y-7)^2 = 32$$

$$k_2: (x-6)^2 + (y-39)^2 = 800$$

8. Egy derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja $A(-2; 2)$, a másik végpontja a B pont, amelynek ordinátája 4. Az egyik befogó egyenlete $x + y = 10$. Számítsa ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!

Megoldás:

Az A pont nincs rajta az adott befogón, így a befogó a B pontra illeszkedik, a B pont első koordinátája meghatározható, $x = 6$. A háromszög derékszögű csúcsa rajta van az AB átmérőjű Thalész-körön:

$$k: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 17.$$

A Thalész-kör és az adott befogó két metszéspontja közül az egyik a $B(6; 4)$ pont, a másik pedig a háromszög derékszögű csúcsa: $C(3; 7)$.

9. Egy parabola egy pontja a $P(5; 2)$, csúcspontjának a koordinátái $(3; -2)$. A parabola tengelye párhuzamos az y tengellyel. Írja fel a parabola egyenletét!

Megoldás:

A parabola egyenlete $y = a(x - 3)^2 - 2$ alakban adható meg. Azt az a paramétert keressük, amelyre a $P(5; 2)$ pont illeszkedik a parabolára. A P pont koordinátáit behelyettesítve $a = 1$, tehát a parabola egyenlete: $y = (x - 3)^2 - 2$.

10. Az $ABCD$ négyzet C csúcsa az $y = x^2 - 5x + 8,25$ egyenletű parabola csúcsában, B és D szintén a parabolán van. Adja meg a négyzet csúcsainak a koordinátáit!

Megoldás:

A parabola egyenlete átalakítva: $y = (x - 2,5)^2 + 2$, tehát a parabola csúcspontja a $C(2,5; 2)$ pont. Szimmetria miatt a BC oldal meredeksége 1, a DC oldal meredeksége -1. Ezeknek az oldalaknak az egyenlete felírható, és a parabolával való metszéspontból megkapjuk a $B(3,5; 3)$ és $D(1,5; 3)$ pontokat. $\overrightarrow{CD}(-1; 1) = \overrightarrow{BA}$, így $A(2,5; 4)$.

