16. Sorozatok

I. Elméleti összefoglaló

A sorozat fogalma

Sorozatnak nevezzük az olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.

Számsorozat olyan sorozat, amelynek értékkészlete számhalmaz. (Az alábbiakban számsorozatokkal foglalkozunk, de röviden sorozatot írunk.)

Az a sorozat n-edik tagja: a_n, az n pozitív egész számhoz rendelt érték.

Sorozatok megadhatók

- a tagokat meghatározó egyértelmű utasítással, képlettel. Például:
  - a_n: az n-edik prímszám;
  - $b_n = 2^n - 3; \quad n \in \mathbb{Z}^+$.
- rekurzív módon: Megadjuk a sorozat első néhány tagját, majd egy olyan képletet, amellyel a további tagok a megelőző tagokból meghatározhatók.

  Például: $c_1 = 7,\ c_2 = 3,\ c_{n+2} = 2 \cdot c_n \cdot c_{n+1}^2,$ ha $n \in \mathbb{Z}^+$.

Nevezetes sorozatok

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan számsorozatot, amelyben bármelyik tag (a másodiktól kezdve) és az azt megelőző tag különbsége állandó. A sorozatra jellemző állandót **differenciá**nak/**különbség**nek nevezzük és d-vel jelöljük.

A definíció szerint $\qquad a_{n+1} = a_n + d; \qquad n \in \mathbb{Z}^+.$

Mértani sorozatnak nevezzük az olyan számsorozatot, amelyben bármelyik tag (a másodiktól kezdve) és az azt megelőző tag hányadosa állandó. A sorozatra jellemző állandót **kvóciens**nek (quotiens)/**hányados**nak nevezzük és q-val jelöljük.

A definíció szerint $\qquad a_{n+1} = a_n \cdot q; \quad (a_n \neq 0,\ q \neq 0) \quad n \in \mathbb{Z}^+.$

Fibonacci-sorozatnak nevezzük a következő rekurzív módon megadott sorozatot:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1},\ \text{ahol } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Az (a_n) sorozatból képzett **sor**nak nevezzük a következő sorozatot:

$$b_1 = a_1,$$

$$b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

A mértani sorozatból képzett sort **mértani sor**nak nevezzük.

Összefüggések:

	számtani sorozat	mértani sorozat
a sorozat tagjai közötti kapcsolat	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
	$a_n = a_k + (n-k) \cdot d$	$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$
	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	${a_n}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$
az első n tag összege	$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \begin{cases} n \cdot a_1, & ha\, q = 1 \\ a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}, & ha\, q \neq 1 \end{cases}$

A sorozatok, mint függvények tulajdonságai:

Az (a_n) **sorozat szigorúan monoton nő** (**szigorúan monoton csökken**), ha tetszőleges $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$.

Az (a_n) **sorozat felülről korlátos**, (**alulról korlátos**), ha van olyan K valós szám (k valós szám), amelynél a sorozat minden tagja kisebb vagy egyenlő (nagyobb vagy egyenlő), azaz $a_n \leq K$, $(a_n \geq k)$.

Korlátos egy sorozat, ha alulról és felülről is korlátos.

Konvergens, divergens sorozatok:

Az (a_n) sorozat **konvergens** és **határértéke** az A valós szám, ha tetszőleges ε pozitív számhoz van olyan N pozitív egész szám, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N$.

Jelölések: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$, $a_n \to A$

Azokat a sorozatokat, amelyeknek nincs határértéke, **divergens** sorozatoknak nevezzük.

A divergens sorozatok közül jelentősek az alábbiak:

Az (a_n) sorozat a $+\infty$ **-hez tart**, ha tetszőleges K valós számhoz van olyan N pozitív egész szám, hogy ha $n > N$, akkor $a_n > K$. (Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim a_n = +\infty$, $a_n \to +\infty$.)

Az (a_n) sorozat $-\infty$ **-hez tart**, ha tetszőleges k valós számhoz van olyan N pozitív egész szám, hogy ha $n > N$, akkor $a_n < k$. (Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim a_n = -\infty$, $a_n \to -\infty$.)

Tételek:

- Az (a_n) sorozat határértéke az A valós szám pontosan akkor, ha tetszőleges ε pozitív szám esetén a sorozatnak legfeljebb csak véges sok tagja nincs az $]A-\varepsilon; A+\varepsilon[$ intervallumban. (Ezt az intervallumot az **A szám $\boldsymbol{\varepsilon}$ sugarú környezetének** nevezzük.)
- Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.
- Minden konvergens sorozat korlátos.

- Ha az (a_n), (b_n), (c_n) sorozatokra $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} c_n = A$ és $a_n \le b_n \le c_n$ minden n pozitív egész számra teljesül, akkor a (b_n) sorozat konvergens és határértéke A. *(rendőrelv)*
- Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ (ahol A, B valós számok) és k tetszőleges valós szám, akkor

  a $(k \cdot a_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot A$;

  az $(a_n + b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$;

  az $(a_n - b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$;

  az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;

  ha továbbá $B \ne 0$, a $b_n \ne 0$ feltételt teljesítő tagokra értelmezett $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is konvergens,

  $$\text{és } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}.$$

- Ha $a_n \ge 0$ minden n pozitív egész szám esetén és $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, akkor $\left(\sqrt{a_n}\right)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.
- Néhány nevezetes sorozat határértéke:
  - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (e az Euler-féle szám, értéke: $e \approx 2{,}718$);
  - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$;
  - $\lim_{n\to\infty}(q^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \le -1 \end{cases}$;
  - Az $(a \cdot q^{n-1})$ sorozatból képezett mértani sor konvergens, ha $|q| < 1$ és $\lim_{n\to\infty}\left(a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \frac{a}{1-q}$;
    (Konvergens végtelen sor határértékét a **sor összegének** nevezzük.
    A $\sum_{i=1}^{n} a_i$ sor határértékét így jelöljük: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.)
  - Ha $a > 0$, akkor az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$.

II. Kidolgozott feladatok

1. Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 9?

$$a)\quad a_n = \frac{30n - 21}{3n + 13} \qquad\qquad b)\quad b_n = n^2 - 10n - 2$$

Megoldás:

a) $30n - 21 = 27n + 117 \implies n = 46$. Az a_{n} sorozat 46. tagja a 9.

b) $n^2 - 10n - 11 = 0$ Ennek pozitív egész gyöke $n = 11$. A b_{n} sorozat 11. tagja 9.

2. Egy számsorozat első tagja 5. Adjuk meg a sorozat első hat tagját, ha tudjuk, hogy $a_{n+1} = 2a_n + 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$! Fejezzük ki a sorozat *n*-edik tagját *n* segítségével!

Megoldás:

$a_1 = 5$, $a_2 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$, $a_3 = 2 \cdot 11 + 1 = 23$, $a_4 = 47$, $a_5 = 95$, $a_6 = 191$.

Ha a felírt számok között nem fedezünk fel kapcsolatot, akkor próbálkozhatunk így is:

$$a_2 = 2a_1 + 1$$
$$a_3 = 2a_2 + 1 = 4a_1 + 3$$
$$a_4 = 2a_3 + 1 = 8a_1 + 7$$
$$a_5 = 2a_4 + 1 = 16a_1 + 15$$
$$a_6 = 2a_5 + 1 = 32a_1 + 31.$$

Megfigyelhetjük, hogy a_1 együtthatója egy 2 hatvány, a konstans pedig ennél eggyel kisebb szám, illetve, ha a sorozat *n*-edik tagját 1-gyel növeljük $2^{n-1} \cdot (a_1 + 1)$ -et kapunk.

Tehát a sejtés: $a_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 1 = 3 \cdot 2^n - 1$. Ezt teljes indukcióval igazolhatjuk.

$a_1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

Tegyük fel, hogy az állítás *n*-re teljesül: $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$! (*)

Bizonyítsuk be, hogy *n*+1-re is fennáll, azaz igaz, hogy $a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1} - 1$!

A feltétel szerint $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Az indukciós feltételt (*) figyelembe véve kapjuk:

$a_{n+1} = 2 \cdot (3 \cdot 2^n - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{n+1} - 1$, amit bizonytani szerettünk volna.

Tehát a sorozat *n*-edik tagja: $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$.

2. Egy számtani sorozat első három tagjának összege -3, szorzata 63. Melyik ez a sorozat?

Megoldás:

A feltétel szerint:

$$a_1 + a_2 + a_3 = -3$$
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 63.$$

Az első egyenletből $(a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = -3 \Rightarrow a_2 = -1$. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve kapjuk: $(-1 - d) \cdot (-1) \cdot (-1 + d) = 63$. A másodfokú egyenlet gyökei -8 és 8.

Tehát két sorozat van: $a_1 = 7$ *és* $d = -8$, valamint $a_1 = -9$ *és* $d = 8$. Ezek a feltételnek megfelelnek, mert a két sorozat első három tagja: 7; -1; -9, illetve -9; -1; 7, összegük -3, szorzatuk 63.

3. Egy számtani sorozat első 10 tagjának összege 337,5, közülük a páros indexű tagok összege 177,5. Melyik ez a sorozat?

Megoldás:

Alkalmazzuk a számtani sorozat első 10, illetve első 5 tagjára az összegképletet!

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 337{,}5 \\ \dfrac{a_1 + d + a_1 + 9d}{2} \cdot 5 = 177{,}5\end{array}\right\}$$

Az egyenleteket rendezzük: $\left.\begin{array}{r}10a_1 + 45d = 337{,}5 \\ 10a_1 + 50d = 355\end{array}\right\}.$

Ebből $d = 3{,}5$. Ezt visszahelyettesítve az egyik egyenletbe, $a_1 = 18$ adódik.

A keresett sorozat első tagja 18, differenciája 3,5.

4. Egy számtani sorozat első hat tagjának az összege negyede a következő hat tag összegének. Adjuk meg a sorozatot, ha az első tizenkét tag összege 1080!

Megoldás:

A feltétel szerint $4 \cdot S_6 = S_{12} - S_6$. Innen $5 \cdot S_6 = S_{12}$.

Alkalmazzuk a számtani sorozat első 6, illetve első 12 tagjára az összegképletet!

$$5 \cdot \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = \frac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12.$$

Ebből rendezés után $15(2a_1 + 5d) = 12a_1 + 66d$, majd $d = -2a_1$ adódik.

Ezt visszahelyettesítjük az S_{12}-re kapott képletbe:

$S_{12} = 12a_1 + 66d = -6d + 66d = 60d$. Tudjuk tehát, hogy $60d = 1080$, ahonnan $d = 18$ és $a_1 = -9$, így a számtani sorozat első tagja -9, differenciája 18.

5. Egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik tagjának összege 98, ezek reciprokának összege $\frac{1}{8}$. Adjuk meg ezt a sorozatot!

Megoldás:

A feltételek szerint

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^4 = 98 \Rightarrow a_1(1 + q^2 + q^4) = 98$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot q^2} + \frac{1}{a_1 \cdot q^4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{q^4 + q^2 + 1}{a_1 \cdot q^4} = \frac{1}{8}$$

Az első egyenletből $(1 + q^2 + q^4)$-t kifejezzük és behelyettesítjük a második egyenletbe.

$$\frac{98}{{a_1}^2 \cdot q^4} = \frac{1}{8}$$

$${a_1}^2 \cdot q^4 = 784.$$

Ebből $a_3 = a_1 \cdot q^2 = \pm 28$ adódik. Az első egyenlet alapján a_1 és ezzel együtt $a_1 \cdot q^2$ is pozitív, tehát $a_1 \cdot q^2 = 28$. Ezt visszahelyettesítjük az első egyenletbe :

$$\frac{28}{q^2} + 28 + 28q^2 = 98,$$

innen $$q^4 - 2{,}5q^2 + 1 = 0.$$

Az egyenletből a $q^2 = 2$, illetve a $q^2 = \frac{1}{2}$ értékeket kapjuk.

Tehát négy sorozatot kaptunk:

I. $a_1 = 14,\ q = \sqrt{2};$

II. $a_1 = 14,\ q = -\sqrt{2};$

III. $a_1 = 56,\ q = \frac{\sqrt{2}}{2};$

IV. $a_1 = 56,\ q = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$

A sorozatok első, harmadik és ötödik tagja 14, 28 és 56, illetve 56, 28 és 14, amelyek a feladat feltételeinek megfelelnek.

6. Egy értékpapírért 500000 forintot fizetünk.
   a) Ha hat év múlva 1,5 millió forintot fizet a bank, akkor milyen átlagos kamatlábbal számolt?
   b) Hány év múlva vehetünk fel 1,5 millió forintot, ha az éves kamatláb 8%?

Megoldás:

a) A keresett átlagos kamatláb legyen p%. Ekkor 6 év múlva

$$5 \cdot 10^5 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 1{,}5 \cdot 10^6.$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 3$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[6]{3} \approx 1{,}2009$$

Innen $p = 20{,}1\%$, tehát a bank átlagosan 20,1%-os kamatlábbal dolgozik.

b) Ha a befektetett pénz után n év elteltével 8%-os kamatláb mellett 1,5 millió forintot kapunk, akkor a következő egyenlőség áll fenn:

$$5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}08^n = 15 \cdot 10^5.$$

Innen $$1{,}08^n = 3.$$

Vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát, majd alkalmazzuk a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot!

$$n \cdot lg1{,}08 = lg3$$

$$n = \frac{lg3}{lg1{,}08} \approx 14{,}27$$

A tizenötödik év folyamán nő az összeg 1,5 millió forintra, tehát a 15. év végén vehetjük fel a kívánt összeget.

7. Egy számtani sorozat első kilenc tagjának az összege 171. A sorozat első, nyolcadik és 36. tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Adjuk meg a mértani sorozat hányadosát!

Megoldás:

Az első feltétel szerint

$$\frac{\mathbf{2a_1 + 8d}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{9} = \mathbf{171}.$$

Ebből $a_1 + 4d = 19(= a_5)$.

A mértani sorozat szomszédos tagjai:

$$b_1 = a_1 = 19 - 4d, \qquad b_2 = a_8 = 19 + 3d, \qquad b_3 = a_{36} = 19 + 31d.$$

A mértani sorozat bármely tagjának négyzete, (a másodiktól kezdve) a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával egyenlő. Így $(19 + 3d)^2 = (19 - 4d) \cdot (19 + 31d)$.
A kijelölt műveletek elvégzése és rendezés után kapjuk: $133d^2 - 399d = 0$.
A másodfokú egyenlet két gyöke: $d = 0$ és $d = 3$.
$d = 0$ esetén a számtani sorozat mindegyik tagja 19. (Az első kilenc tag összege $9 \cdot 19 = 171$.)
A mértani sorozat hányadosa $q = 1$.
$d = 3$ esetén a számtani sorozat első tagja $a_1 = 7$. (Az első kilenc tag összege $\frac{14+24}{2} \cdot 9 = 171$.)
A mértani sorozat szomszédos tagjai rendre: 7, 28 és 112, hányadosa $\frac{28}{7} = \frac{112}{28} = 4$.

8. Legyen egy sorozat *n*-edik tagja $a_n = \frac{4}{(4n+1)(4n+5)}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$. Adjuk meg az első 100 tag összegét!

Megoldás:

Vizsgáljuk meg nem írható-e fel két tört összegeként az adott tört! Határozzuk meg azokat az *a* és *b* valós számokat, amelyekre $\frac{4}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{a}{4n+1} + \frac{b}{4n+5}$ fennáll!

Ha van ilyen számpár, akkor ezekre $a(4n+5)+b(4n+1)=4$. Rendezés után kapjuk

$$4n(a+b)+5a+b=4.$$

Mivel tetszőleges n-re teljesül az egyenlet, ezért

$$a+b=0 \Longrightarrow b=-a \Longrightarrow 4a=4 \Longrightarrow a=1,\ b=-1.$$

Így

$$a_n=\frac{4}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}.$$

Az első száz tag összege:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{401}-\frac{1}{405}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{405}=\frac{80}{405}=\frac{16}{81}.$$

(Általában két egymást követő tag:

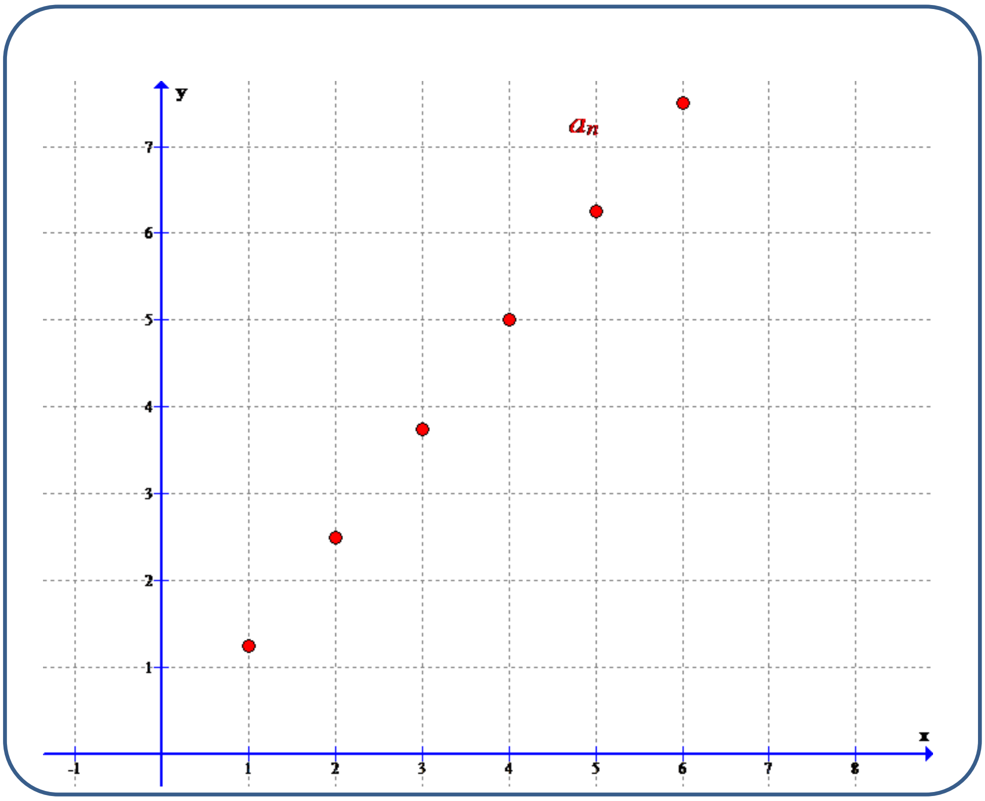
$$a_k=\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+5},\qquad a_{k+1}=\frac{1}{4(k+1)+1}-\frac{1}{4(k+1)+5}=\frac{1}{4k+5}-\frac{1}{4k+9}.$$

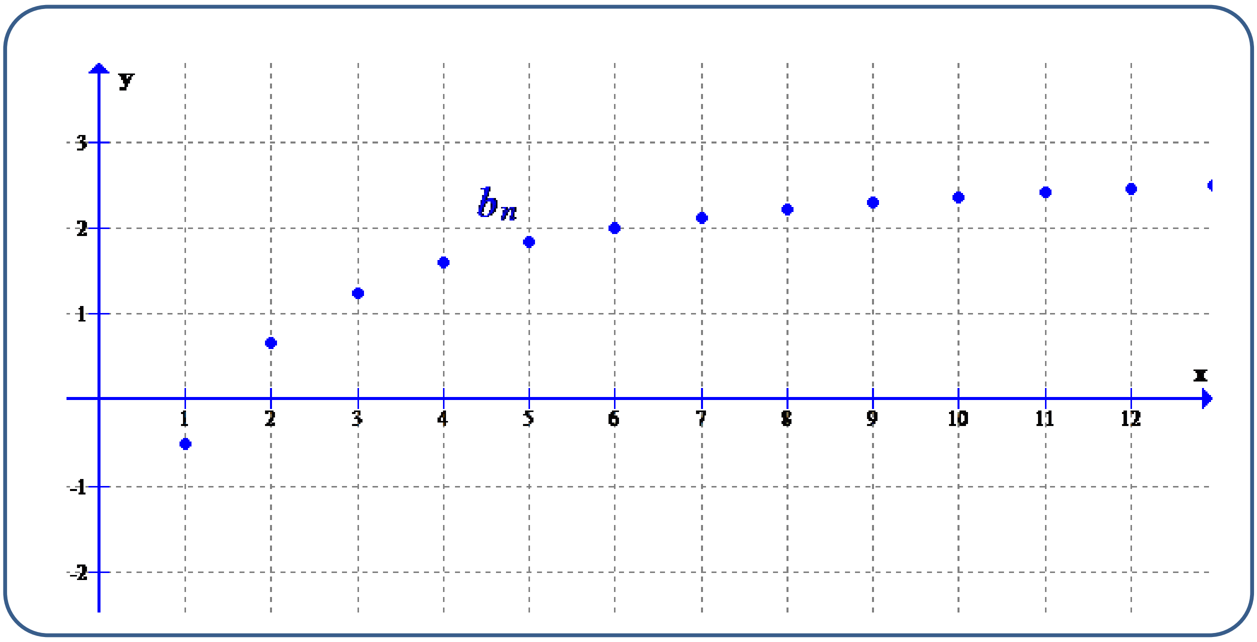
Az összegből a közbülső tagok kiesnek. Az ilyen összeget teleszkópikus összegnek nevezzük.)

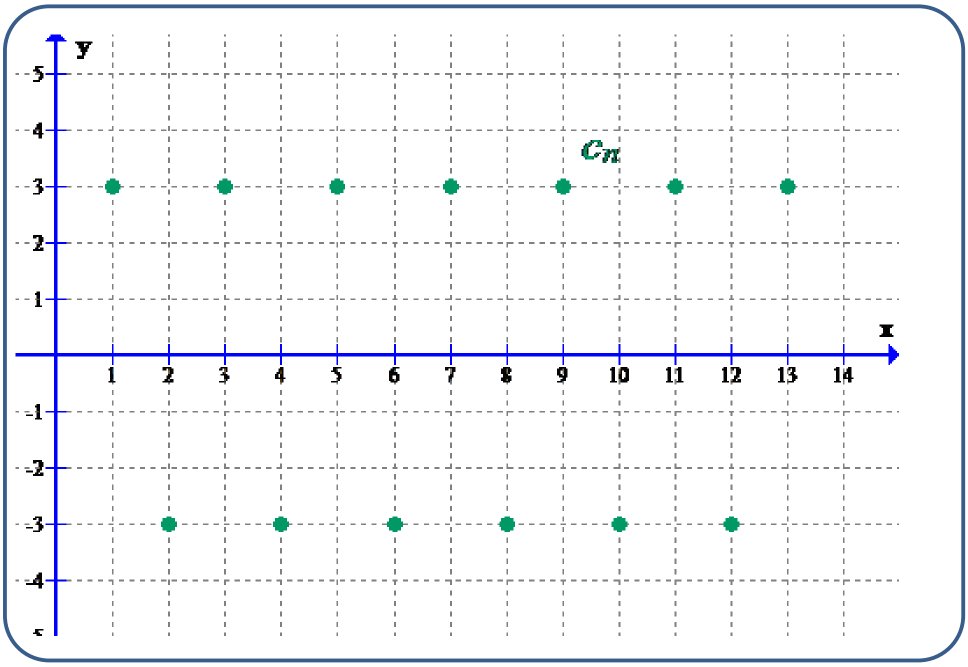
9. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi sorozatokat!

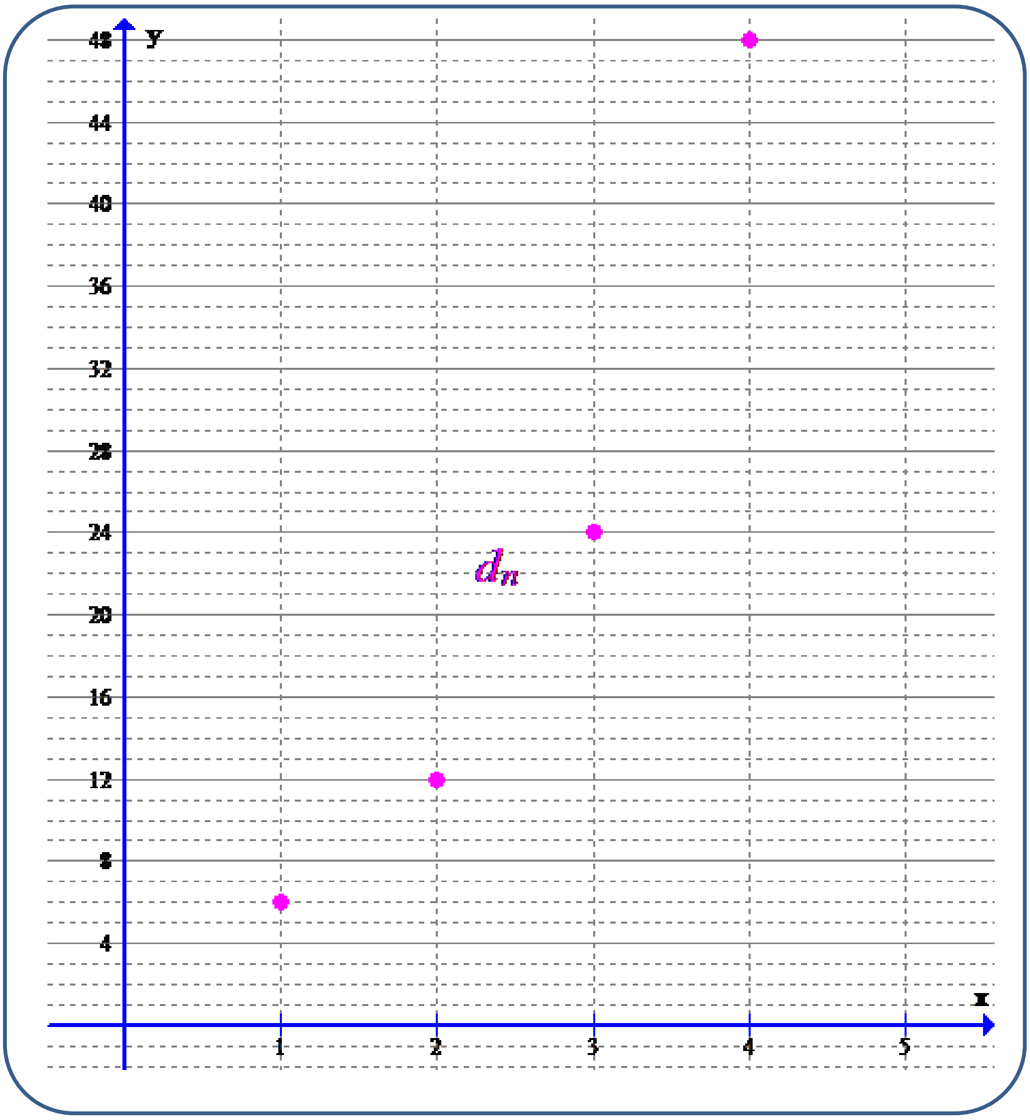
$$a)\ a_n=\frac{5n}{4};\quad b)\ b_n=\frac{3n-4}{n+1};\quad c)\ c_n=3\cdot(-1)^{n-1};\quad d)\ d_n=3\cdot 2^n\ ;\quad e)\ e_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Megoldás:

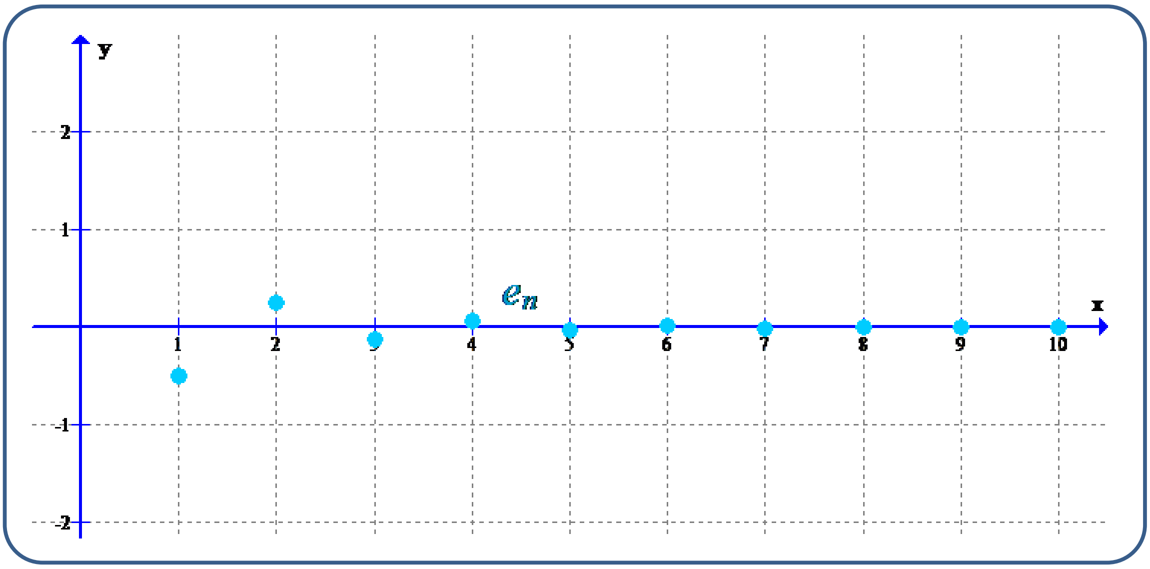



y
x
b_n
3
2
1
-1
-2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12


y
x
c_n
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14



y
48
44
40
36
32
28
24
20
16
12
8
4
x
1
2
3
4
5
d_n



y
2
1
-1
-2
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
e_n

10. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat korlátosság és monotonitás szempontjából!

a) $a_n = \frac{2}{3}n - 9$ b) $b_n = \frac{n-1}{n+3}$ c) $c_n = \frac{3^{n+1}+1}{3^n}$

Megoldás:

a) $a_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1) - 9 = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} - 9 = a_n + \frac{2}{3} > a_n \implies$ a sorozat szigorúan monoton nő, és ezért alulról korlátos, legnagyobb alsó korlátja $a_1 = -\frac{25}{3}$.

A sorozat felülről nem korlátos, mert tetszőleges P szám esetén van olyan n pozitív egész szám, amelyre $\frac{2}{3}n - 9 > P$. Ez teljesül, ha $n > \frac{3}{2}(P+9)$.

b) $b_n = \frac{n-1}{n+3} = \frac{n+3-4}{n+3} = 1 - \frac{4}{n+3} < 1$, így a sorozat felülről korlátos.

$b_{n+1} = 1 - \frac{4}{n+4} > 1 - \frac{4}{n+3} = b_n$, mert $n+4 > n+3 \Leftrightarrow \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n+3} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+4} > 1 - \frac{1}{n+3}$.

Tehát a b_n sorozat szigorúan monoton nő, ezért alulról is korlátos, legkisebb alsó korlátja $b_1 = 0$.

c) $c_n = 3 + \frac{1}{3^n} > 3 + \frac{1}{3^{n+1}} = c_{n+1}$ alapján a sorozat szigorúan monoton csökken. Ezért felülről korlátos, legkisebb felső korlátja $c_1 = \frac{10}{3}$; alulról is korlátos, mert minden tagja nagyobb 3-nál.

11. Mutassuk meg a határérték definíciójának felhasználásával, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n-1} = \frac{2}{3}$!

Megoldás:

Jelöljön ε tetszőleges pozitív számot! Meg kell mutatni, hogy a sorozat tagjainak $\frac{2}{3}$-tól való eltérése, egy tagtól kezdve kisebb, mint ε. Ehhez oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget n-re!

$$\left|\frac{2n+5}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

Közös nevezőre hozás és rendezés után kapjuk:

$$\left|\frac{6n+15-6n+2}{3(3n-1)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{17}{3(3n-1)}\right| < \varepsilon.$$

n pozitív egész szám, ezért

$$\left|\frac{17}{3(3n-1)}\right| = \frac{17}{3(3n-1)}$$

.

A $\frac{17}{3(3n-1)} < \varepsilon$ egyenlőtlenséget $3(3n-1)$ pozitív kifejezéssel szorozva kapjuk

$$17 < \varepsilon(9n-3).$$

Ebből

$$n > \frac{17+3\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Minden lépés megfordítható. Az ε-hoz tartozó küszöbszám $N = \left[\frac{17+3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$.

($[x]$ (x egész része) az x valós számnál nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb.)

Így tetszőleges ε pozitív számhoz van olyan N küszöbszám, hogy $n > N$ esetén $\left|\frac{2n+5}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, ezért a sorozat határértéke $\frac{2}{3}$.

12. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából! Adjuk meg a konvergens sorozatok határértékét!

$a_n = (-1)^n \cdot n^2$ $\quad b_n = \dfrac{5n^2 - 4n + 3}{2n^2 - n - 2}$ $\quad c_n = \dfrac{n - 11}{n^2 + 4n + 3\pi}$ $\quad d_n = \dfrac{13n^3 - 7n^2 + 8n}{\sqrt{2}n - 2n^2 + 1}$

$e_n = \sqrt{4n^2 - 6n} - 2n$ $\quad f_n = \dfrac{3^{n+1}}{4^{n-1} + 5^n}$ $\quad g_n = \dfrac{5^{n+2} - 2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 4}$ $\quad h_n = \sqrt{\dfrac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}}$

Megoldás:

Az $a_n = (-1)^n \cdot n^2$ sorozat divergens, mert nem korlátos. Megmutatjuk, hogy a sorozat például felülről nem korlátos. Legyen P tetszőleges pozitív szám és n páros pozitív szám. $(-1)^n \cdot n^2 > P$, ha $n > \sqrt{P}$. Tehát a sorozat összes, $\sqrt{P}$-nél nagyobb páros indexű tagja, P-nél nagyobb szám.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 4n + 3}{2n^2 - n - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{5}{2}.$$

Felhasználtuk, hogy tetszőleges k konstans esetén $\left(\frac{k}{n}\right), \left(\frac{k}{n^2}\right)$ sorozatok 0-hoz tartanak, valamint ilyen sorozatok összege/különbsége is 0-hoz tart. A számláló 5-höz, a nevezőbeli sorozat 2-höz tart, így a hányados határértéke $\frac{5}{2}$.

A következőkben felhasználjuk, a konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának, illetve hányadosának határértékére vonatkozó tételeket, valamint a pozitív tagú konvergens sorozat négyzetgyökének határértékére vonatkozó tételt.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n - 11}{n^2 + 4n + 3\pi} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2} \cdot \frac{1 - \frac{11}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{3\pi}{n^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim \frac{13n^3 - 7n^2 + 8n}{\sqrt{2}n - 2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{13n^3}{-2n^2} \cdot \frac{1 - \frac{7}{13n} + \frac{8}{13n^2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2n} - \frac{1}{2n^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{13n}{2}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2 - 6n} - 2n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 6n} + 2n}{4n^2 - 6n - 4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{4 - \frac{6}{n}} + 2\right)}{-6n} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot (2 + 2) = -\frac{2}{3}.$$

A következő két sorozat esetében felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \qquad \text{ha} \quad |q| < 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}+5^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{5^n}\cdot\frac{3}{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}\right) = 0\cdot 3 = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+2}-2\cdot 3^{n+1}}{2\cdot 5^n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{5^n}\cdot\frac{25-6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n}{2+4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}\right) = \frac{25}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n^2+1}{n^2+5}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}} = \sqrt{2}.$$

13. Írja fel két egész szám hányadosaként a $12{,}34\dot{5}\dot{6}$ végtelen szakaszos tizedes törtet!

Megoldás:

$$\mathbf{12{,}34\dot{5}\dot{6} = \frac{1234}{100} + \frac{56}{10^4} + \frac{56}{10^6} + \frac{56}{10^8} + \cdots}$$

Az $a = \frac{56}{10^4}, q = \frac{1}{10^2}$ mértani sor összegképlete alapján

$$12{,}34\dot{5}\dot{6} = \frac{1234}{100} + \frac{56}{10^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1234}{100} + \frac{56}{9900} = \frac{122222}{9900} = \frac{61111}{4950}.$$

III. Ajánlott feladatok

1. Egy számtani sorozat első tagja 20, *n*-edik tagja 174. Határozzuk meg *n* értékét, ha az első *n* tag összege 2231. Tagja-e a sorozatnak a 2014?

2. Egy számsorozat első tagja 2, második tagja 1, a sorozat további tagjait az

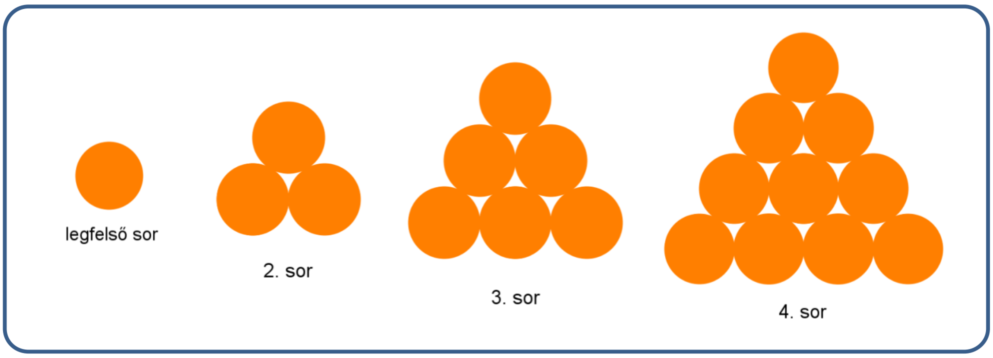
   $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$ képlet alapján képezzük. Adjuk meg a sorozat 2000. tagját, valamint az első 2000 tag összegét!

3. 2013 darab különböző pozitív egész szám összege 4052167. Mutassuk meg, hogy a számok között legalább két páros szám van!

4. Egy számtani sorozat negyedik, tizenegyedik, tizenhetedik és huszonnegyedik tagjának összege 3960. Számítsuk ki a sorozat tizennegyedik tagját és az első 27 tag összegét!

5. Egy számtani sorozat tízedik tagja 22, a századik tag 202. Hagyjuk el a sorozat minden olyan tagját, amelynek utolsó számjegye 2! Számítsuk ki a megmaradt sorozat első 200 tagjának összegét! (Felvételi feladat külföldi ösztöndíjra pályázók részére 1990.)

6. Egy szupermarketben azt a feladatot kapják a kereskedelmi tanulók, hogy a narancsokból rakjanak gúlát az alábbiak szerint: a legfelső sorban egy narancs, az alatta levőben 3 narancs, az ez alatti sorban 6 narancs legyen. Általában felülről számítva az n-edik sorba n-nel több narancs kerüljön, mint a fölötte levő sorba.



   a) Ha húsz rétegből álló gúlát szeretnénk, akkor hány narancsot tegyenek a legalsó sorba?

   b) Hány narancsból lehet egy ilyen gúlát megépíteni? Oldjuk meg általánosan is a feladatot!

   c) A gúlához egy szabályos háromszög alakú keretet készítenek, hogy ne guruljanak szerteszét a narancsok. Milyen hosszú legyen annak a háromszögnek az oldala, amelyik a legalsó sorban levő narancsokat tartja össze, ha feltételezzük, hogy a narancsok 10 cm átmérőjűek?

   d) Egy másik részlegen bonbonos dobozokból építettek 20 emeletes tornyot a tanulók. Legalulra 117 doboz került és emeletenként azonos számmal csökkent a beépítésre kerülő dobozok száma. Pakolás közben kiderült, hogy az alsó 10 sorhoz háromszor annyi dobozra volt szükség, mint a felső 10 sorhoz. Hány bonbonos doboz került a legfelső szintre? Összesen hány dobozt használtak fel a toronyhoz?

7. Egy számtani sorozat tagjai különböző pozitív egész számok.

   a) Bizonyítsuk be, hogy nem lehet a sorozatnak mindegyik tagja prímszám!

   b) Bizonyítsuk be, hogy nem lehet a sorozatnak mindegyik tagja négyzetszám!

8. Egy erős fájdalomcsillapítót a betegeknek infúzióban adnak. A tele zsák térfogata 500 ml. Az infúzió csepegési sebességét úgy állítják be, hogy az első órában percenként 14 cseppet, minden további órában percenként fél cseppel kevesebbet kap a beteg. Egy csepp térfogata 0,05 ml, és az infúziós oldat 4 mg gyógyszert tartalmaz milliliterenként.

   a) Hány milliliter infúzió csepeg le az első 5 órában?

   b) Hány mg gyógyszert kap a beteg összesen az első 5 órában?

c) Melyik órában kap a beteg 96 mg gyógyszert?

d) Mikor kell lecserélni az infúziós ballont, mert kiürült?

9. Egy mértani sorozat első tagja 5. Az első n tag összege 605, az első n tag reciprokának összege $\frac{121}{405}$. Keressük a sorozat első n tagját!

10. Három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Ha az első két szám változatlanul hagyása mellett, a harmadik számból elveszünk 80-at, akkor egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Ha ezek közül a középsőt 10-zel csökkentjük, akkor ismét egy mértani sorozat szomszédos tagjaihoz jutunk. Határozzuk meg az eredeti három számot!

11. Róbert 2600$-t szeretne befektetni. A bank fix, évi 7%-os kamatlábat ígér.
    a) Hány dollár lesz Róbert számláján 4 év elteltével, ha a bank minden év leteltével tőkésít?
    b) Változatlan kamatláb mellett hány év alatt növekedne fel a befektetett összeg a kétszeresére?

12. Karcsi bácsi tíz év múlva megy nyugdíjba. A nyugdíját ki szeretné egészíteni, ezért tíz éven keresztül minden év elején betesz a bankba 500000 forintot. Nyugdíjba vonulásától számított 20 éven keresztül minden hónap elején azonos összeget vesz fel. A bank e harminc éven keresztül végig évi 6%-os kamatlábbal számol. (p %-os éves kamatláb esetén a havi kamatláb $\frac{p}{12}$%)
    Mekkora összeggel tudja kiegészíteni havi nyugdíját Karcsi bácsi, ha a 20. év végére elfogy a pénze?

13. Határozzuk meg az $a_n = \frac{5n^2+20}{n^2-100}$ $(n \neq 10)$ sorozat $\varepsilon = 0{,}01$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határértéke A=5!

14. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából! Adjuk meg a konvergens sorozatok határértékét!

$$a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{n+4}{n^2} \qquad b_n = \frac{3n^3 - 4n - 8}{2n^3 - n^2} \qquad c_n = \frac{1+2+3+\cdots n}{(5n-2)\cdot(n-3)} \qquad d_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$$

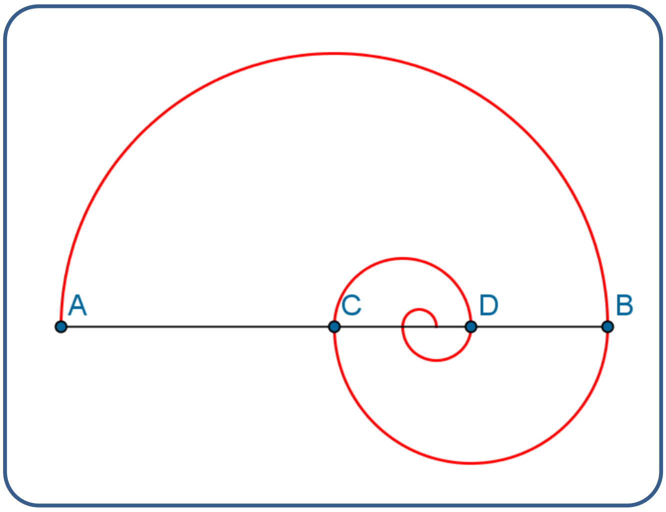
$$e_n = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right) \qquad f_n = \frac{\sqrt[5]{4n^5 - 9n + 3}}{\sqrt{n^2+6}} \qquad g_n = \frac{n}{\sqrt{n} - \sqrt{n+4}} \qquad h_n = \frac{7^{n+1} + (-1)^n}{7^n}$$

$$i_n = \frac{\sqrt[3]{8n^2 - 5n}}{n+2} \qquad j_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2013} \qquad k_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \qquad l_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$m_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad p_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \qquad q_n = \left(\frac{n+6}{n-1}\right)^n \qquad r_n = \left(\frac{2n+6}{2n+1}\right)^{2n}$$

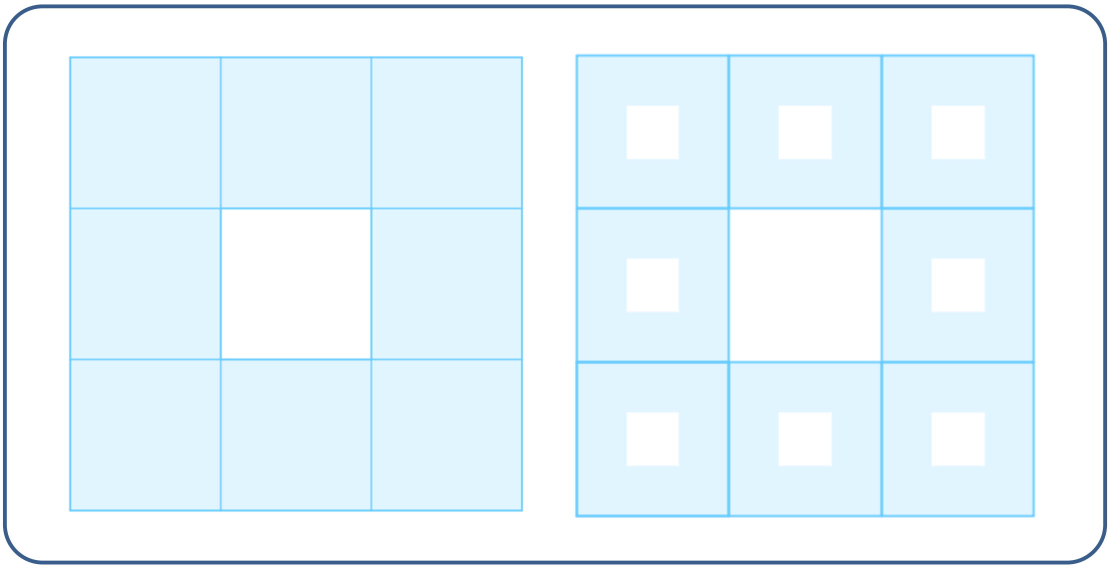
15. Az x valós paraméter mely értékei mellett lesz konvergens az $(a_n) = \left((x-4)(x-2)\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$sorozat?

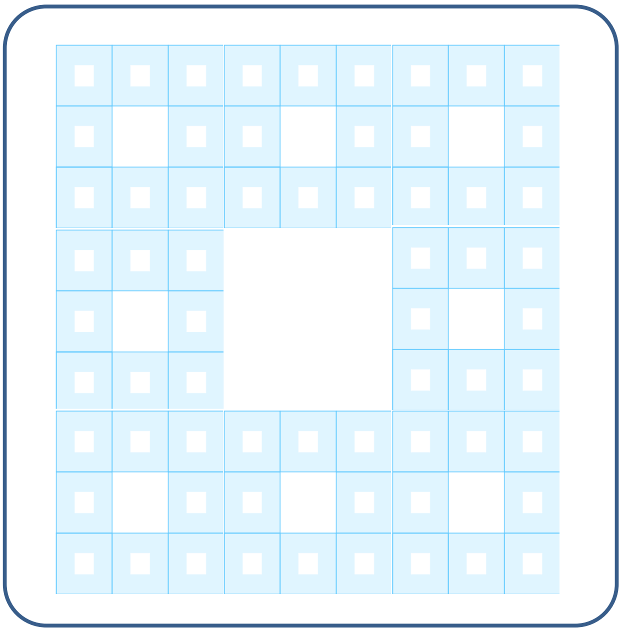
16. Az ábrán félkörök rajzolásával egy csigavonal rajzát kezdtük el. Mindegyik körív sugara fele az előzőnek. Az AB szakasz hossza 20 cm.



a) Milyen hosszú az n-edik félkörív?
b) Milyen hosszú az első 10 félkörívből álló csigavonal?
c) Hány félkörívből álló csigavonal hossza körülbelül 60 cm?
d) Hány félkörívből álló csigavonal hossza 100 cm?
e) Milyen hosszú lesz a csigavonal, ha az ábra rajzolását nem hagyjuk abba?

17. Tekintsünk egy egységoldalú négyzetet! Osszuk fel az oldalakkal párhuzamos egyenesek segítségével kilenc egybevágó négyzetre, majd hagyjuk el a középső négyzetet. A megmaradt nyolc négyzettel ismételjük meg az eljárást. Adjuk meg az n-edik lépés után keletkező síkidom kerületét (a határoló szakaszok hosszának összegét) és területét!





Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Egy számtani sorozat első tagja 20, *n*-edik tagja 174. Határozzuk meg *n* értékét, ha az első *n* tag összege 2231. Tagja-e a sorozatnak a 2014?

Megoldás:

Az első *n* tag összege: $2231 = \frac{20+174}{2} \cdot n$. Innen $n = 23$.

$$a_{23=}a_1 + 22d.$$

Az adatokat behelyettesítve $174 = 20 + 22d$, ahonnan $d = 7$.

Tegyük fel hogy 2014 a sorozat *k*-adik tagja!

$$2014 = 20 + (k-1) \cdot 7$$

Ebből $k - 1 = \frac{1994}{7}$, ami nem egész, ezért 2014 nem tagja a sorozatnak.

2. Egy számsorozat első tagja 2, második tagja 1, a sorozat további tagjait az $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$ képlet alapján képezzük. Adjuk meg a sorozat 2000. tagját, valamint az első 2000 tag összegét!

Megoldás:

$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 0,\ a_4 = -1, a_5 = -2, a_6 = -3, a_7 = -4, \ldots$

Megfigyelhetjük, hogy a sorozat számtani és általános tagja $a_n = 3 - n$ képlettel adható meg.

A sejtést teljes indukcióval igazoljuk.

Az első néhány tagra teljesül az állítás.

Feltéve, hogy a sorozat n-edik, illetve $(n+1)$-edik tagja $a_n = 3 - n$, illetve

$a_{n+1} = 3 - (n+1) = 2 - n$, bizonyítjuk:$a_{n+2} = 3 - (n+2) = 1 - n$.

A képzési szabály és az indukciós feltétel alapján:

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n = 2(2-n) - (3-n) = 1 - n$, amit bizonyítani akartunk.

A bizonyított szabály alapján a sorozat tetszőleges, így a 2000. tagja is egyszerűen felírható:

$$a_{2000} = 3 - 2000 = -1997.$$

A számtani sorozat első 2000 tagjának összege: $S_{2000} = \frac{2+(-1997)}{2} \cdot 2000 = -1995000.$

3. 2013 darab különböző pozitív egész szám összege 4052167. Mutassuk meg, hogy a számok között legalább két páros szám van!

Megoldás:

Ha a számok között vannak párosak, akkor páros soknak kell lenniük, mert ha páratlan sok páros szám lenne köztük, akkor a páratlanok száma páros lenne, s így az összegük biztosan páros, tehát nem 4052167.

Megmutatjuk, hogy a 2013 különböző szám között biztosan van páros szám.

Ha mindegyik szám páratlan lenne, akkor az összegük az első 2013 pozitív páratlan szám összegénél nem lehet kisebb. Az első 2013 pozitív páratlan szám összege $\frac{2+2012\cdot 2}{2} \cdot 2013 = 2013^2 = 4052169$. Mivel a feladatban szereplő számok összege ennél kisebb, ezért nem lehet mindegyik szám páratlan. A fentiek szerint, ha van köztük páros, akkor legalább kettő szám páros. (A megoldásban kihasználtuk, hogy a feladat különböző pozitív egész számokról szólt.)

(Illik megmutatni, hogy van is ilyen 2013db pozitív szám. Ezek lehetnek például, ha az első 2013 pozitív páratlan szám közül 2011-et kiválasztunk, a maradék kettőt pedig kicseréljük a náluk eggyel kisebb számmal.)

4. Egy számtani sorozat negyedik, tizenegyedik, tizenhetedik és huszonnegyedik tagjának összege 3960. Számítsuk ki a sorozat tizennegyedik tagját és az első 27 tag összegét!

Megoldás:

$$a_4 + a_{11} + a_{17} + a_{24} = 3960.$$

$$a_1 + 3d + a_1 + 10d + a_1 + 16d + a_1 + 23d = 3960$$

$$4a_1 + 52d = 3960$$

$$a_1 + 13d = 990.$$

Ez éppen a sorozat 14. tagja. Az első 27 tag összege:

$$S_{27} = \frac{2a_1 + 26d}{2} \cdot 27 = (a_1 + 13d) \cdot 27 = 990 \cdot 27 = 26730.$$

Megjegyzés:

Gyorsabban megkaphatjuk a válaszokat, ha észrevesszük, hogy a megadott tagok indexei a 14-re szimmetrikusak. Fejezzük ki az összes, a feladatban szereplő tagot a_{14} segítségével!

$$a_{14} - 10d + a_{14} - 3d + a_{14} + 3d + a_{14} + 10d = 3960$$

$$4a_{14} = 3960$$

$$a_{14} = 990.$$

$$S_{27} = \frac{a_{14} - 13d + a_{14} + 13d}{2} \cdot 27 = a_{14} \cdot 27 = 26730.$$

5. Egy számtani sorozat tízedik tagja 22, a századik tag 202. Hagyjuk el a sorozat minden olyan tagját, amelynek utolsó számjegye 2! Számítsuk ki a megmaradt sorozat első 200 tagjának összegét! (Felvételi feladat külföldi ösztöndíjra pályázók részére 1990.)

Megoldás:

Először meghatározzuk az adott sorozat differenciáját és első tagját.

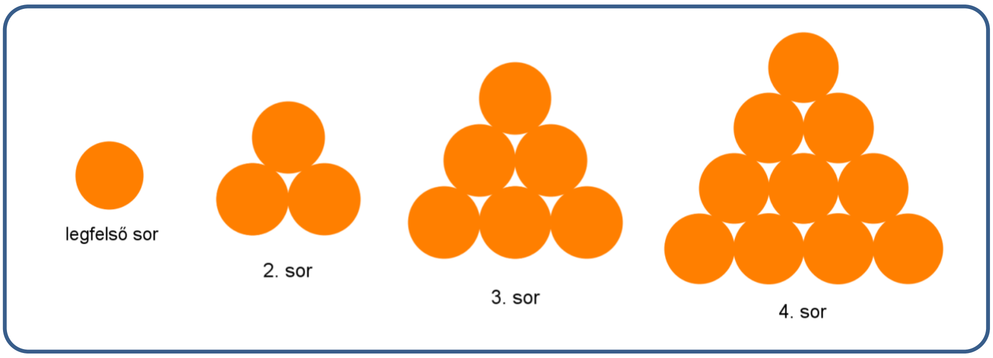
$$a_{100} = a_{10} + 90d \implies 202 - 22 = 90d \implies d = 2,$$

$$a_1 = 22 - 9d = 22 - 18 = 4.$$

A sorozat minden ötödik tagja végződik 2-re (12, 22, 32, 42,…). Tehát az eredeti sorozat minden ötödik tagját hagyjuk el. Az elhagyott számok egy olyan számtani sorozat tagjai, amelynek első tagja 12, differenciája 10. A keresett 200 szám összegét megkapjuk, ha az eredeti sorozat első $\left(\frac{5}{4} \cdot 200 =\right)$250 tagjának összegéből kivonjuk az elhagyott sorozat első 50 tagjának összegét.

$$S = \frac{2 \cdot 4 + 249 \cdot 2}{2} \cdot 250 - \frac{2 \cdot 12 + 49 \cdot 10}{2} \cdot 50 = 63250 - 12850 = 50400.$$

6. Egy szupermarketben azt a feladatot kapják a kereskedelmi tanulók, hogy a narancsokból rakjanak gúlát az alábbiak szerint: a legfelső sorban egy narancs, az alatta levőben 3 narancs, az ez alatti sorban 6 narancs legyen. Általában felülről számítva az *n*-edik sorba *n*-nel több narancs kerüljön, mint a fölötte levő sorba.



a) Ha húsz rétegből álló gúlát szeretnénk, akkor hány narancsot tegyenek a legalsó sorba?
b) Hány narancsból lehet egy ilyen gúlát megépíteni? Oldjuk meg általánosan is a feladatot!

c) A gúlához egy szabályos háromszög alakú keretet készítenek, hogy ne guruljanak szerteszét a narancsok. Milyen hosszú legyen annak a háromszögnek az oldala, amelyik a legalsó sorban levő narancsokat tartja össze, ha feltételezzük, hogy a narancsok 10 cm átmérőjűek?

d) Egy másik részlegen bonbonos dobozokból építettek 20 emeletes tornyot a tanulók. Legalulra 117 doboz került és emeletenként azonos számmal csökkent a beépítésre kerülő dobozok száma. Pakolás közben kiderült, hogy az alsó 10 sorhoz háromszor annyi dobozra volt szükség, mint a felső 10 sorhoz. Hány bonbonos doboz került a legfelső szintre? Összesen hány dobozt használtak fel a toronyhoz?

Megoldás:

a) A képzési szabály szerint

$$a_n = a_{n-1} + n;\ a_1 = 1$$

Írjuk fel ezt az összefüggést a sorozat első n tagjára!

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 3$$

$$a_4 = a_3 + 4$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + n - 1$$

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Adjuk össze a fenti *n* egyenletet!

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

Vonjuk ki a közös $(n-1)$ tag összegét!

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

így a legalsó réteg 210 narancsból áll.

b) Az $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n)$ sorozat első $n = 20$ tagjának az összegét kell meghatároznunk.

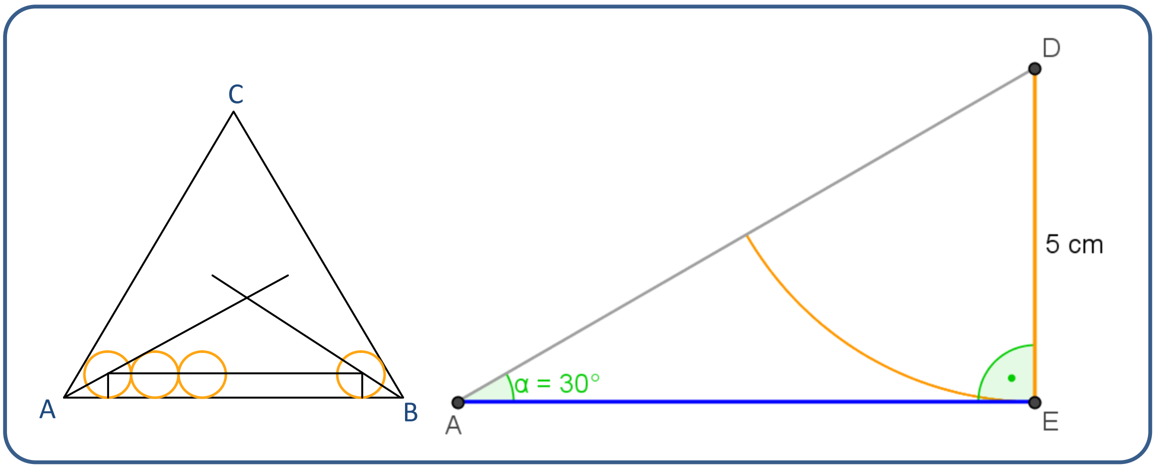
$$S_n = \frac{1}{2}(1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \cdots + n^2 + n) = \frac{1}{2}[(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) + (1 + 2 + \cdots n)]$$

Alkalmazzuk az első *n* pozitív egész szám és az első *n* pozitív egész szám négyzetének az összegképletét!

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1)}{2}\right) = \frac{n \cdot (n+1)}{12} \cdot (2n + 1 + 3) =$$
$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$$

A húsz réteghez 1540 narancsot kell beépíteni.

c) Olyan szabályos háromszög alakú keretet kell építeni, amelynek az oldalai mellett 20-20 narancs található.



A szabályos háromszög oldala

$$18 \cdot 10 + 2 \cdot \left(5 + 5 \cdot \sqrt{3}\right) = 190 + 10\sqrt{3} \approx 207{,}32(\text{cm}).$$

Tehát 208 cm oldalú szabályos háromszög alakú keretet kell készíteni.

d) A sorokban lévő dobozok száma egy számtani sorozat első 20 tagja. Számozzuk a sorokat felülről! A feltételek szerint

$$a_{20} = 117, \qquad S_{20} - S_{10} = 3 \cdot S_{10}.$$
$$S_{20} = 4 \cdot S_{10}\,.$$

Alkalmazzuk számtani sorozat első 20, illetve első 10 tagjának összegképletét, majd rendezzük az egyenletet

$$\frac{2a_1 + 19 \cdot d}{2} \cdot 20 = 4 \cdot \frac{2a_1 + 9 \cdot d}{2} \cdot 10$$

$$20a_1 + 190 \cdot d = 40a_1 + 180 \cdot d$$

$$d = 2a_1$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = 39a_1$$

$$117 = 39a_1$$

$$a_1 = 3$$

$$S_{20} = \frac{6 + 19 \cdot 6}{2} \cdot 20 = 1200.$$

(A felső 10 sorba $\frac{6+9\cdot 6}{2} \cdot 10 = 300$, az alsó 10 sorba 1200-300=900 doboz került.

Ezek aránya 1:3.)

Tehát a bonbonos építményhez 1200 dobozra volt szükség és a legfelső sorába 3 doboz került.

7. Egy számtani sorozat tagjai különböző pozitív egész számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy nem lehet a sorozatnak mindegyik tagja prímszám!
b) Bizonyítsuk be, hogy nem lehet a sorozatnak mindegyik tagja négyzetszám!

Megoldás:

a) Ha a sorozat egyik tagja p prímszám, akkor a $p,\ p+d,\ p+2d,\ p+3d, \dots$ pozitív egész számok közül $p+pd=p(1+d)$ már biztosan összetett szám, mert a feltétel szerint $d>0$, és így két 1-től különböző egész szám szorzatára bontható. (Tehát ha a pozitív egész tagú sorozat első tagja p prímszám, akkor a (p+1)-edik tagja biztosan nem prímszám, feltéve, hogy $d \neq 0$).

b) Tegyük fel, hogy a sorozat minden tagja négyzetszám! Legyen a sorozat n-edik tagja $a_n = k^2$! A következő tag $a_{n+1} = a_n + d$ nem lehet kisebb a következő négyzetszámnál, azaz

$$a_n + d \geq (k+1)^2,$$

$$k^2 + d \geq (k+1)^2.$$

Ebből $d \geq 2k+1$ adódik, ahol d a sorozatra jellemző állandó. Ez az állandó nem lehet nagyobb egy tetszőleges pozitív számnál.

(Ha például d=11, akkor k=6 esetén $a_n = 6^2$, a következő négyzetszám a 49, de

$$a_{n+1} = 36 + 11 = 47 < 49.)$$

Ellentmondásra jutottunk a feltétellel, tehát nem lehet sorozat minden tagja négyzetszám.

8. Egy erős fájdalomcsillapítót a betegeknek infúzióban adnak. A tele zsák térfogata 500 ml. Az infúzió csepegési sebességét úgy állítják be, hogy az első órában percenként 14 cseppet, minden további órában percenként fél cseppel kevesebbet kap a beteg. Egy csepp térfogata 0,05 ml, és az infúziós oldat 4 mg gyógyszert tartalmaz milliliterenként.
a) Hány milliliter infúzió csepeg le az első 5 órában?
b) Hány mg gyógyszert kap a beteg összesen az első 5 órában?
c) Melyik órában kap a beteg 96 mg gyógyszert?
d) Mikor kell lecserélni az infúziós ballont, mert kiürült?

Megoldás:

a) A feladatban szereplő adatok három számtani sorozatot határoznak meg. (Jellemzőiket a táblázat tartalmazza.)

	cseppek száma	az oldat (ml)	hatóanyag (mg)
az első órában	$14 \cdot 60 = 840$	$840 \cdot 0{,}05 = 42$	$42 \cdot 4 = 168$
a második órában	$13{,}5 \cdot 60 = 810$	$810 \cdot 0{,}05 = 40{,}5$	$40{,}5 \cdot 4 = 162$
a sorozatra jellemző állandó	$D = -30$	$d = -1{,}5$	$d^* = -6$

Az első 5 órában összesen $S_5 = \left(\frac{2 \cdot 42 + 4 \cdot (-1{,}5)}{2} \cdot 5 = \right)$ 195 ml oldat csepeg le.

b) Az első 5 órában a beteg $195 \cdot 4\text{mg} = 780$ mg gyógyszert kap.

c) $a^*_n = a^*_1 + (n-1)d^* \Longrightarrow 96 = 168 + (n-1)(-6)$. Innen $n = 13$. Tehát az infúzió megindításától számított 13. órában kap a beteg 96 mg gyógyszert.

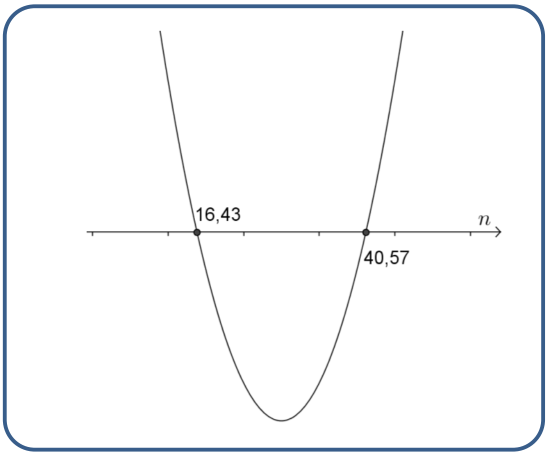
d) Keressük azt a legnagyobb *n* pozitív egész számot, amelyre $S_n \leq 500$.

$$\frac{2 \cdot 42 + (n-1)(-1{,}5)}{2} \cdot n \leq 500.$$

Rendezés után:

$$1{,}5n^2 - 85{,}5n + 1000 \geq 0$$

Az egyenlet gyökei: $n_{1,2} = \frac{85{,}5 \pm \sqrt{85{,}5^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 1000}}{3} = \begin{cases} 40{,}57 \\ 16{,}43 \end{cases}$



A 16. óra eltelte után ki kell cserélni az infúziós ballont, mert az a 17. óra folyamán kiürül.

9. Egy mértani sorozat első tagja 5. Az első *n* tag összege 605, az első *n* tag reciprokának összege $\frac{121}{405}$. Keressük a sorozat első *n* tagját!

Megoldás:

$$5(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = 605$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5q} + \frac{1}{5q^2} + \cdots + \frac{1}{5q^{n-1}} = \frac{121}{405}$$

Közös nevezőre hozás után kapjuk

$$\frac{q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} \ldots + 1}{5q^{n-1}} = \frac{121}{405}.$$

Az első egyenlet baloldalának ötöd része a tört számlálója.

$$\frac{121}{5q^{n-1}} = \frac{121}{405}.$$

Ebből q^{n-1}=81 adódik.

Alkalmazzuk a mértani sorozat első n tagjának összegképletét! ($q \neq 1$, mert q^{n-1}=81.)

$$5 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 605$$

$$q^n - 1 = 121(q - 1)$$

$$81q - 1 = 121q - 121$$

$$120 = 40q$$

$$q = 3$$

$$3^{n-1} = 3^4$$

$$n = 5.$$

A keresett öt szám 5, 15, 45, 135, 405. Ezekre teljesülnek a feladat feltételei, mert összegük: 5+15+45+135+405=605, reciprokuk összege: $\frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \frac{1}{135} + \frac{1}{405} = \frac{121}{405}$.

10. Három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Ha az első két szám változatlanul hagyása mellett, a harmadik számból elveszünk 80-at, akkor egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Ha ezek közül a középsőt 10-zel csökkentjük, akkor ismét egy mértani sorozat szomszédos tagjaihoz jutunk. Határozzuk meg az eredeti három számot!

Megoldás:

A mértani sorozat tagjai: $a;\ aq;\ aq^2$,

a számtani sorozat szomszédos tagjai: $a;\ aq;\ aq^2 - 80$,

az új mértani sorozat három egymást követő tagja: $a;\ aq - 10;\ aq^2 - 80$.

A középső tag a két szomszédos tag segítségével kifejezhető:

$$2aq = a + aq^2 - 80$$

$$(aq - 10)^2 = a(aq^2 - 80).$$

Rendezzük az egyenleteket!

$$a(q^2 - 2q + 1) = 80\ ,$$

$$a(q - 4) = 5.$$

A második egyenletet 16-tal szorozzuk. A jobboldalak egyenlőségéből a baloldalak egyenlőségére következik:

$$16a(q - 4) = a(q^2 - 2q + 1)$$

$a \neq 0$ számmal osztunk és rendezzük az egyenletet:

$$q^2 - 18q + 65 = 0$$

Ennek a gyökei: $q = 5$, illetve $q = 13$.

Ezeket visszahelyettesítve az $a(q - 4) = 5$ egyenletbe, megkapjuk a sorozatok első tagját:

$q = 5$ esetén $a = 5$, $q = 13$ esetén $a = \frac{5}{9}$.

Ellenőrzés:

	Az I. sorozat tagjai			a sorozat jellemzője	A II. sorozat tagjai			a sorozat jellemzője
mértani	5	25	125	$q = 5$	$\frac{5}{9}$	$\frac{65}{9}$	$\frac{845}{9}$	$q = 13$
számtani	5	25	45	$d = 20$	$\frac{5}{9}$	$\frac{65}{9}$	$\frac{125}{9}$	$d = \frac{20}{3}$
mértani	5	15	45	$q' = 3$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{25}{9}$	$\frac{125}{9}$	$q' = -5$

A keresett számok: 5, 25, 125, illetve $\frac{5}{9}$, $\frac{65}{9}$, $\frac{845}{9}$.

11. Róbert 2600$-t szeretne befektetni. A bank fix, évi 7%-os kamatlábat ígér.
   a) Hány dollár lesz Róbert számláján 4 év elteltével, ha a bank minden év leteltével tőkésít?
   b) Változatlan kamatláb mellett hány év alatt növekedne fel a befektetett összeg a kétszeresére?

Megoldás:

a) Az első év végén $2600 \cdot 1{,}07$; a második év végén $(2600 \cdot 1{,}07) \cdot 1{,}07 = 2600 \cdot 1{,}07^2$;

az n-edik év végén $2600 \cdot 1{,}07^n$ dollár lesz a bankban.

Itt $n = 4$, Róbert 4 év elteltével $2600 \cdot 1{,}07^4 \approx 3408$ dollárral rendelkezik.

b) $2600 \cdot 1{,}07^n = 2 \cdot 2600$

$$1{,}07^n = 2$$

Vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát, majd alkalmazzuk a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot!

$$n \cdot lg1{,}07 = lg2$$

Innen $n = \frac{lg2}{lg1{,}07} \approx 10{,}24$. Tehát a tizenegyedik év folyamán nő a befektetett összeg a kétszeresére (a befektetett összegtől függetlenül).

12. Karcsi bácsi tíz év múlva megy nyugdíjba. A nyugdíját ki szeretné egészíteni, ezért tíz éven keresztül minden év elején betesz a bankba 500000 forintot. Nyugdíjba vonulásától számított 20 éven keresztül minden hónap elején azonos összeget vesz fel. A bank e harminc éven keresztül végig évi 6%-os kamatlábbal számol. (p %-os éves kamatláb esetén a havi kamatláb $\frac{p}{12}$%)
Mekkora összeggel tudja kiegészíteni havi nyugdíját Karcsi bácsi, ha a 20. év végére elfogy a pénze?

Megoldás:

$t_0 = 500000$

	Az év végén a bankban levő pénz
1. év	$t_0 \cdot 1{,}06$
2. év	$t_0 \cdot 1{,}06 + t_0 \cdot 1{,}06^2$
3. év	$t_0 \cdot 1{,}06 + t_0 \cdot 1{,}06^2 + t_0 \cdot 1{,}06^3$
⋮	⋮
10. év	$t_0 \cdot 1{,}06 + t_0 \cdot 1{,}06^2 + t_0 \cdot 1{,}06^3 + \cdots + t_0 \cdot 1{,}06^{10}$

A mértani sorozat első tíz tagjának összege:

$$S = t_0 \cdot 1{,}06 + t_0 \cdot 1{,}06^2 + t_0 \cdot 1{,}06^3 + \cdots + t_0 \cdot 1{,}06^{10} = t_0 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{1{,}06 - 1} =$$

$$= 5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} = 6\,985\,821$$

Karcsi bácsi bankban lévő pénze a tízedik év végén $S = 6\,985\,821$ Ft.

Karcsi bácsi 240 hónapon keresztül azonos x forintot vesz fel a banktól. (A havi kamatláb 0,5%.)

	a hónap elején a bankban levő pénz
1. hó	$S - x$
2. hó	$(S - x) \cdot 1{,}005 - x$
3. hó	$S \cdot 1{,}005^2 - x \cdot 1{,}005^2 - x \cdot 1{,}005 - x$
⋮	⋮
240. hó	$S \cdot 1{,}005^{239} - x(1{,}005^{239} + 1{,}005^{238} + \cdots + 1)$

A feltétel szerint az utolsó kivétel után nem marad pénze a bankban.

$$S \cdot 1{,}005^{239} - x(1{,}005^{239} + 1{,}005^{238} + \cdots + 1) = 0$$

$$x \cdot \frac{1{,}005^{240} - 1}{0{,}005} = S \cdot 1{,}005^{239}$$

$$x = \frac{0{,}005}{1{,}005^{240} - 1} \cdot 6\,985\,821 \cdot 1{,}005^{239} \approx 49\,799{,}6$$

Tehát Karcsi bácsi havonta 47 799 forinttal növeli a nyugdíját.

13. Határozzuk meg az $a_n = \frac{5n^2+20}{n^2-100}$ $(n \neq 10)$ sorozat $\varepsilon = 0{,}01$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határértéke A=5!

Megoldás:

Keressük, mely n pozitív egész számokra teljesül az $\left|\frac{5n^2+20}{n^2-100} - 5\right| < 0{,}01$ egyenlőtlenség.

$$\frac{5n^2 + 20}{n^2 - 100} - 5 = \frac{5n^2 + 20 - 5n^2 + 500}{n^2 - 100} = \frac{520}{n^2 - 100}$$

alapján megoldandó

$$-0{,}01 < \frac{520}{n^2 - 100} < 0{,}01.$$

Ha $n > 10$, akkor a tört nevezője és a tört is pozitív. Ezért egyrészt elég a jobboldali egyenlőtlenséggel foglalkozni, másrészt ez ekvivalens a következővel:

$$52100 < n^2.$$

A sorozat tagjainak A=5-től való eltérése kisebb, mint 0,01, ha $n > \sqrt{52100} (\approx 228{,}25)$.

A 229. tagtól kezdve a sorozat minden tagja az 5, $\varepsilon = 0{,}01$ sugarú környezetébe esik.

14. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából! Adjuk meg a konvergens sorozatok határértékét!

$$a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{n+4}{n^2} \qquad b_n = \frac{3n^3 - 4n - 8}{2n^3 - n^2} \qquad c_n = \frac{1+2+3+\cdots n}{(5n-2)\cdot(n-3)} \qquad d_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$$

$$e_n = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right) \qquad f_n = \frac{\sqrt[5]{4n^5 - 9n + 3}}{\sqrt{n^2 + 6}} \qquad g_n = \frac{n}{\sqrt{n} - \sqrt{n+4}} \qquad h_n = \frac{7^{n+1} + (-1)^n}{7^n}$$

$$i_n = \frac{\sqrt[3]{8n^2 - 5n}}{n+2} \qquad j_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2013} \qquad k_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \qquad l_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$m_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad p_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \qquad q_n = \left(\frac{n+6}{n-1}\right)^n \qquad r_n = \left(\frac{2n+6}{2n+1}\right)^{2n}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 + (-1)^n \cdot \frac{n+4}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right)\right) = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 4n - 8}{2n^3 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}}{2 - \frac{1}{n}} = 1{,}5$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots n}{(5n-2)\cdot(n-3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{5n^2 - 17n + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}{5 - \frac{17}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4-n}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}\right) = 0 \cdot 2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{4n^5-9n+3}}{\sqrt{n^2+6}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[10]{\frac{(4n^5-9n+3)^2}{(n^2+6)^5}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[10]{\frac{16n^{10}-72n^6+\cdots}{n^{10}+30n^8+\cdots}} =$$

$$= \sqrt[10]{16} = \sqrt[5]{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+4}\right)}{n-n-4} = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}+(-1)^n}{7^n} = \lim_{n\to\infty} \left(7+\left(\frac{-1}{7}\right)^n\right) = 7$$

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^2-5n}}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{8n^2-5n}{(n+2)^3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{8n^2-5n}{n^3+6n^2+12n+8}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{n}\cdot\frac{8-\frac{5}{n}}{1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{8}{n^3}}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} j_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2013} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{2013} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\frac{1}{3}}{n}\right)^n = \sqrt[3]{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = e\cdot e^{-1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[2\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)\right]^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^n = 0\cdot e^2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+6}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{7}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{7}{n-1}\right)\right) = e^7$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+6}{2n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{5}{2n+1}\right)^{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+6}\right] = e^5$$

15. Az x valós paraméter mely értékei mellett lesz konvergens az $(a_n) = \left((x-4)(x-2)\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$sorozat?

Megoldás:

A (q^n) sorozat konvergens, ha $-1 < q \leq +1$. Tehát a következő egyenlőtlenségrendszert kell megoldani:

$$-1 < (x-4)(x-2) \leq 1.$$

$$-1 < x^2 - 6x + 8 \leq 1.$$

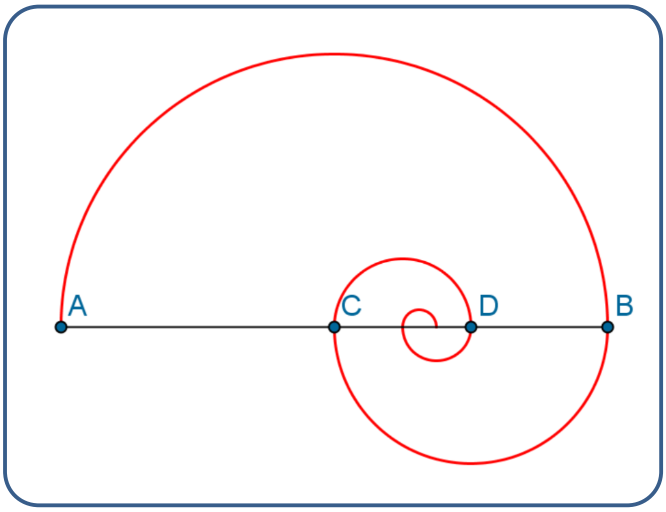
I. $x^2 - 6x + 9 > 0$, ha $(x-3)^2 > 0$, azaz, ha $x \neq 3$

II. $x^2 - 6x + 7 \leq 0$

Az $x^2 - 6x + 7 = 0$ egyenlet megoldásai: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$. Az egyenlőtlenség fennáll, ha $3 - \sqrt{2} \leq x \leq 3 + \sqrt{2}$.

A sorozat konvergens, ha $x \in \left[3-\sqrt{2}; 3\right[\cup \left]3;\ 3+\sqrt{2}\right]$.

16. Az ábrán félkörök rajzolásával egy csigavonal rajzát kezdtük el. Mindegyik körív sugara fele az előzőnek. Az AB szakasz hossza 20 cm.



a) Milyen hosszú az n-edik félkörív?
b) Milyen hosszú az első 10 félkörívből álló csigavonal?
c) Hány félkörívből álló csigavonal hossza körülbelül 60 cm?
d) Hány félkörívből álló csigavonal hossza 100 cm?
e) Milyen hosszú lesz a csigavonal, ha az ábra rajzolását nem hagyjuk abba?

Megoldás:

a) A körívek sugarai az $r_1 = 10; q = \frac{1}{2}$ mértani sorozat egymást követő tagjai. Az r sugarú félkörív hossza $r \cdot \pi$, ezért az n-edik félkörív hossza

$$i_n = \frac{10}{2^{n-1}} \cdot \pi.$$

b) A félkörívek hosszai is mértani sorozatot alkotnak; $i_1 = 10\pi,\ q = \frac{1}{2}$. Az első 10 tag összege:

$$S_{10} = 10\pi \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2}} = 20\pi \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \approx 62{,}77.$$

Az első 10 félkörből álló csigavonal hossza ≈ 62,77cm.

c) Megoldandó a

$$20\pi \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 60$$

egyenlet. $\left(\frac{1}{2}\right)^n$-re rendezzük:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{3}{\pi}.$$

Az egyenlet két oldalán álló pozitív számok logaritmusa is egyenlő.

$$lg\left(\frac{1}{2}\right)^n = lg\left(1 - \frac{3}{\pi}\right).$$

Ebből

$$n \cdot lg\frac{1}{2} = lg\left(1 - \frac{3}{\pi}\right),$$

$$n = \frac{lg\left(1 - \frac{3}{\pi}\right)}{lg\frac{1}{2}} \approx 4{,}47.$$

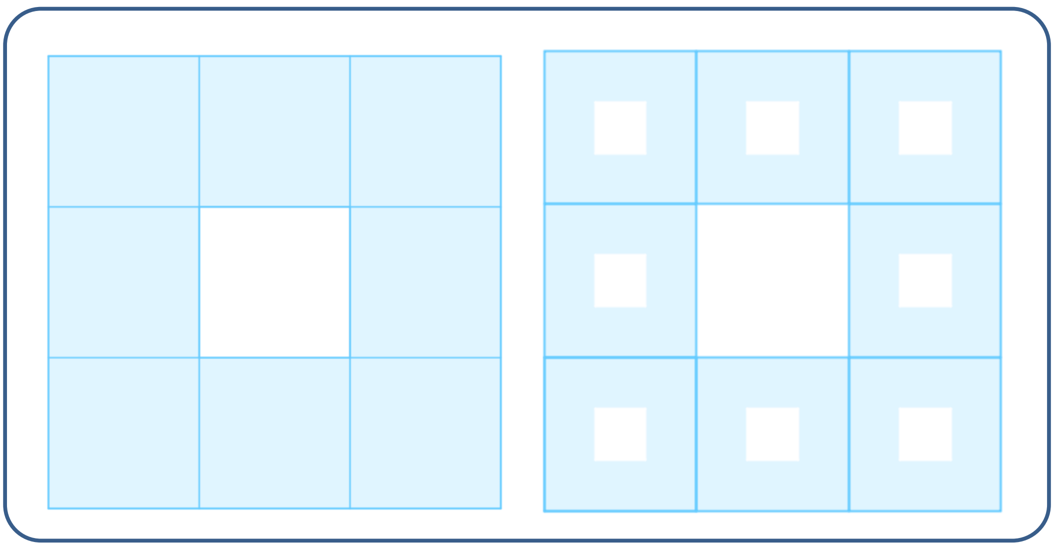
Tehát körülbelül 4 és fél körívből álló csigavonal hossza 60 cm.

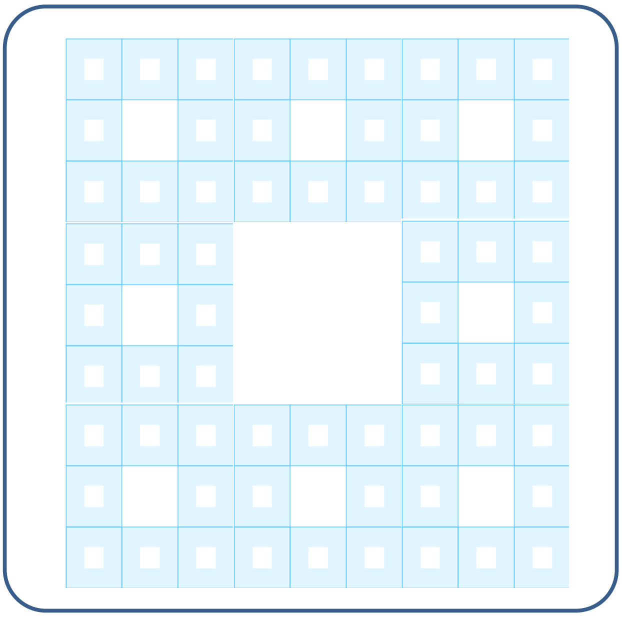
d) n félkörívből álló csigavonal hossza $20\pi \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 20\pi < 100$, ezért a feladatban adott eljárással nem készíthető 100 cm hosszú csigavonal.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[20\pi \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right] = 20\pi(\approx 62{,}83)$.

Ha $n \to \infty$, akkor a csigavonal hossza 20π -hez tart.

17. Tekintsünk egy egységoldalú négyzetet! Osszuk fel az oldalakkal párhuzamos egyenesek segítségével kilenc egybevágó négyzetre, majd hagyjuk el a középső négyzetet. A megmaradt nyolc négyzettel ismételjük meg az eljárást. Adjuk meg az n-edik lépés után keletkező síkidom kerületét (a határoló szakaszok hosszának összegét) és területét!





Megoldás:

Minden lépésben a meglévő terület $\frac{1}{9}$ részét hagyjuk el, így a terület $\frac{8}{9}$ része marad.

Tehát az n-edik lépés után keletkező síkidom területe: $T_n = \frac{8}{9} T_{n-1} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$.

Az egymást követő lépésekben kivágásra kerülő négyzetek oldalai: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3^3}$, ..., számuk: $1, 8, 8^2, \ldots$

Az első lépés után keletkezett síkidom kerülete $K_1 = 4 + 4 \cdot \frac{1}{3}$.

A második lépés után $K_2 = 4 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{9}$, a következő lépésben

$$K_3 = 4 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot 8^2 \cdot \frac{1}{3^3} = 4 + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2\right).$$

Az n-edik lépés után a síkidom kerülete: $K_n = 4 + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right)$.

A mértani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$K_n = 4 + \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1}{\frac{5}{3}} = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1\right)\right).$$

Megjegyzés:

A területek T_n sorozata szigorúan monoton csökken, határértéke

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0,$$

ugyanakkor a kerületek sorozata szigorúan monoton nő, határértéke

$$\lim_{n\to\infty} 4\cdot\left(1+\frac{1}{5}\cdot\left(\left(\frac{8}{3}\right)^n-1\right)\right)=+\infty.$$

IV. Ellenőrző feladatok

1. Egy sorozat hetedik tagja 6, tizenegyedik tagja 96. Adja meg a sorozat 15. és 30. tagját, valamint az első 15 tag összegét, ha
   a) a sorozat számtani;
   b) a sorozat mértani!
2. Egy sorozat első és második tagja 2, valamint a további tagokat az $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$, $(n\in\mathbb{Z}^+)$ képlet határozza meg. Adja meg a sorozat 2013. tagját és az első 2013 tag összegét!
3. Egy mértani sorozat első négy tagjának az összege 520, az 5., 6., 7. és 8. tag összege 42120. Határozza meg a sorozat első nyolc tagját!
4. Egy mértani sorozat első tagja $\frac{1}{5}$. Az első négy tag összege eggyel nagyobb, mint a sorozat hányadosa. Adja meg a sorozat hányadosát!
5. Egy rágcsáló kolónia 3000 létszáma havonta 8%-kal nő. Mikor éri el az állatok száma a kritikus 10000 darabot?
6. Adja meg a következő sorozatok határértékét!

   a) $a_n=\dfrac{3n^3-5n^2+\pi\cdot n}{7n^4+3n^3-\sqrt{3}n+1}$ b) $b_n=\dfrac{9n^5+3n^3-7n^2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot n^5-8n^4+5n}$

   c) $c_n=\sqrt{n^2-6n}-n$ d) $d_n=\dfrac{3^{n+2}}{5^n+3\cdot 2^n}$

7. Az $a_n=\frac{2n-5}{5n-17}$ sorozat határértéke $\frac{2}{5}$! Határozza meg az $\varepsilon=\frac{1}{20}$-hoz tartozó küszöbszámot!
8. Írja fel két egész szám hányadosaként a $2,\dot{4}5\dot{6}$ tizedes törtet!
9. A p paraméter mely értékei mellett lesz konvergens az $(a_n)=\left(\frac{p+5}{2p-3}\right)^n$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$sorozat?
10. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. Mi következhet ebből az $(a_n\cdot b_n)$ sorozatra? Írjon példákat!

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Egy sorozat hetedik tagja 6, tizenegyedik tagja 96. Adja meg a sorozat 15. és 30. tagját, valamint az első 15 tag összegét, ha
   a) a sorozat számtani;
   b) a sorozat mértani!

Megoldás:

a) Az $a_{11} = a_7 + 4d$ összefüggésbe helyettesítve az adatokat, $96 = 6 + 4d$, ahonnan d=22,5.
$a_{15} = a_7 + 8d = 186$, $a_{30} = a_7 + 23d = 523{,}5$.

$a_1 = a_7 - 6d = -129$,

$S_{15} = \frac{-129+186}{2} \cdot 15 = 427{,}5$.

b) Az $a_{11} = a_7 \cdot q^4$ összefüggésbe helyettesítve az adatokat, $96 = 6 \cdot q^4$, ahonnan $q = 2$, illetve $q = -2$ adódik. Tehát két, a feladat feltételeinek megfelelő sorozat van. Mindkét esetben

$a_{15} = a_7 \cdot q^8 = 6 \cdot 256 = 1536$, valamint $a_1 = \frac{a_7}{q^6} = \frac{3}{32}$.

$q = 2$ esetén $\quad a_{30} = a_7 \cdot q^{23} = 6 \cdot 2^{23} = 3 \cdot 2^{24}$,

$$S_{15} = \frac{3}{32} \cdot \frac{2^{15} - 1}{1} = 3071{,}90625;$$

$q = -2$ esetén $\quad a_{30} = a_7 \cdot q^{23} = 6 \cdot (-2)^{23} = -3 \cdot 2^{24}$,

$$S_{15} = \frac{3}{32} \cdot \frac{(-2)^{15} - 1}{-3} = \frac{2^{15} + 1}{32} = 1024{,}03125.$$

2. Egy sorozat első és második tagja 2, valamint a további tagokat az $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$ képlet határozza meg. Adja meg a sorozat 2013. tagját és az első 2013 tag összegét!

Megoldás:

A harmadik tag: $a_3 = 6 - 4 = 2$, és ezzel együtt (a képzési szabály szerint) a sorozat összes tagja, így 2013. tagja is 2. Az első 2013 tag összege: $2013 \cdot 2 = 4026$.

3. Egy mértani sorozat első négy tagjának az összege 520, az 5., 6., 7. és 8. tag összege 42120. Határozza meg a sorozat első nyolc tagját!

Megoldás:

A feltétel szerint

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 520$$
$$a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 + a_1 \cdot q^6 + a_1 \cdot q^7 = 42120$$

A második egyenlet baloldala az első egyenlet baloldalának $q^4 -$ szerese.

Ezért $520 \cdot q^4 = 42120$, amiből $q^4 = 81$, azaz $q = \pm 3$.

$q = 3$ esetén $a_1 \cdot (1 + 3 + 9 + 27) = 520$, amiből $a_1 = 13$,

$q = -3$ esetén $a_1 \cdot (1 - 3 + 9 - 27) = 520$, amiből $a_1 = -26$ adódik.

A sorozatok első 8 tagja:

I. 13, 39 ,117, 351, 1053, 3159, 9477, 28431;

II. -26, 78, -234, 702, -2106, 6318, -18954, 56862.

A két sorozatra a feladat feltételei teljesülnek.

4. Egy mértani sorozat első tagja $\frac{1}{5}$. Az első négy tag összege eggyel nagyobb, mint a sorozat hányadosa. Adja meg a sorozat hányadosát!

Megoldás:

A feltétel szerint $\frac{1}{5}(1+q+q^2+q^3)=q+1$.

A baloldal szorzattá alakítható: $\frac{1}{5}(1+q)(1+q^2)=1+q$

Szorozzuk meg az egyenletet 5-tel, rendezzük a baloldalra és alakítsuk szorzattá!

$$(1+q)(1+q^2-5)=0$$

Az egyenletnek három megoldása van: $q=-1$, $q=2$ és $q=-2$.

Három sorozat felel meg a feltételeknek.

	$q=-1$	$q=2$	$q=-2$
A sorozat első négy tagja	$\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5},-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{4}{5},-\frac{8}{5}$
Az első négy tag összege	$0=-1+1$	$3=2+1$	$-1=-2+1$

5. Egy rágcsáló kolónia 3000 létszáma havonta 8%-kal nő. Mikor éri el az állatok száma a kritikus 10000 darabot?

Megoldás:

Az állatok havonkénti létszáma mértani sorozatot alkot:

$$q=1{,}08;\ \ a_0=3000;$$

n év múlva az egyedszám $a_n=a_0\cdot q^n=10000$

$$10000=3000\cdot 1{,}08^n.$$

$$\frac{10}{3}=1{,}08^n.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, vehetjük mindkét oldal logaritmusát.

$$lg\frac{10}{3}=lg1{,}08^n.$$

Innen azonosság alkalmazása után.

$$lg\frac{10}{3}=n\cdot lg1{,}08$$

$$n=\frac{lg\frac{10}{3}}{lg1{,}08}\approx 15{,}64$$

A 16. hónap folyamán éri el a rágcsálók száma a 10000-et.

6. Adja meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \dfrac{3n^3 - 5n^2 + \pi \cdot n}{7n^4 + 3n^3 - \sqrt{3}n + 1}$ b) $b_n = \dfrac{9n^5 + 3n^3 - 7n^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot n^5 - 8n^4 + 5n}$

c) $c_n = \sqrt{n^2 - 6n} - n$ d) $d_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n + 3 \cdot 2^n}$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + \pi \cdot n}{7n^4 + 3n^3 - \sqrt{3}n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{7n^4} \cdot \frac{1 - \frac{5}{3n} + \frac{\pi}{3n^2}}{1 + \frac{3}{7n} - \frac{\sqrt{3}}{7n^3} + \frac{1}{7n^4}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^5 + 3n^3 - 7n^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}n^5 - 8n^4 + 5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^5}{\sqrt{3}n^5} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3n^2} - \frac{7}{9n^3} + \frac{\sqrt{2}}{9n^5}}{1 - \frac{8}{\sqrt{3}n} + \frac{5}{\sqrt{3}n^4}} = 3\sqrt{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - 6n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 6n - n^2}{\sqrt{n^2 - 6n} + n} = \lim_{n\to\infty} \left[-6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{6}{n}} + 1}\right)\right] = -3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n + 3 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \frac{9}{1 + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 0$$

7. Az $a_n = \frac{2n-5}{5n-17}$ sorozat határértéke $\frac{2}{5}$! Határozza meg az $\varepsilon = \frac{1}{20}$-hoz tartozó küszöbszámot!

Megoldás:

Megoldandó az alábbi egyenlőtlenség:

$$\left|\frac{2n-5}{5n-17} - \frac{2}{5}\right| < \frac{1}{20}.$$

$$\frac{2n-5}{5n-17} - \frac{2}{5} = \frac{10n - 25 - 10n + 34}{5(5n-17)} = \frac{9}{5(5n-17)}$$

$$-\frac{1}{20} < \frac{9}{5(5n-17)} < \frac{1}{20}$$

Ha n legalább 4, akkor ez ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$180 < 25n - 85$$

$$n > \frac{265}{25} = 10{,}6.$$

Az $\varepsilon = \frac{1}{20}$-hoz tartozó küszöbszám: $N = 10$.

8. Írja fel két egész szám hányadosaként a $2,\dot{4}5\dot{6}$ tizedes törtet!

Megoldás:

$$2,\dot{4}5\dot{6} = 2 + \frac{456}{10^3} + \frac{456}{10^6} + \frac{456}{10^9} + \cdots = 2 + \frac{\frac{456}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 2 + \frac{456}{999} = 2 + \frac{152}{333} = \frac{818}{333}.$$

9. A p paraméter mely értékei mellett lesz konvergens az $(a_n) = \left(\frac{p+5}{2p-3}\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$sorozat?

Megoldás:

A (q^n) sorozat konvergens, ha $-1 < q \leq +1$. Tehát a következő egyenlőtlenségrendszert kell megoldani:

$$-1 < \frac{p+5}{2p-3} \leq 1.$$

I. Ha $2p - 3 > 0$, azaz, ha $p > \frac{3}{2}$, akkor

$$-2p + 3 < p + 5 \leq 2p - 3.$$

Innen $-\frac{2}{3} < p$, valamint $8 \leq p$. A feltételt is figyelembe véve $8 \leq p$.

II. Ha $2p - 3 < 0$, azaz, ha $p < \frac{3}{2}$, akkor

$$-2p + 3 > p + 5 \geq 2p - 3.$$

Innen $p < -\frac{2}{3}$, valamint $p \leq 8$. A feltételt is figyelembe véve $p < -\frac{2}{3}$.

A sorozat konvergens, ha $p \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup [8; +\infty[$.

10. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Mi következhet ebből az $(a_n \cdot b_n)$ sorozatra? Írjon példákat!

Megoldás:

Lehet, hogy az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat konvergens. Például:

a) $a_n = 5n,\ b_n = \frac{1}{n}$ esetén $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 5$

b) $a_n = n,\ b_n = \frac{1}{n^2}$ esetén $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$

Az alábbi esetekben az $(a_n \cdot b_n)$ sorozatnak nincs határértéke. A c) és d) esetekben tágabb értelemben vett határérték létezik.

c) $a_n = n^2,\ b_n = \frac{1}{n}$ esetén $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$

d) $a_n = n^2,\ b_n = -\frac{1}{n}$ esetén $(a_n \cdot b_n) = -n,\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$

e) $a_n = n^2,\ b_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ esetén $(a_n \cdot b_n) = (-1)^n$ korlátos, de nem konvergens.

f) $a_n = n^2,\ b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ esetén $(a_n \cdot b_n) = (-1)^n \cdot n$ nem korlátos, nem konvergens.