

17. Szélsőérték-feladatok megoldása elemi úton

I. Elméleti összefoglaló

Függvény szélsőértéke

Definíció:

Az $f: A \rightarrow B$ függvénynek $x_0 \in A$ helyen (abszolút) **maximuma** van, ha minden $x \in A$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$. A függvény (abszolút) maximuma $f(x_0)$.

Az $f: A \rightarrow B$ függvénynek $x_0 \in A$ helyen (abszolút) **minimuma** van, ha minden $x \in A$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$. A függvény (abszolút) minimuma $f(x_0)$.

A címben szereplő 'elemi' megoldás azt jelenti, hogy a feladatok megoldása közben nem használjuk az analízis eszközeit.

A megoldás során felhasználható módszerek, ötletek:

1. a) Figyelembe vesszük a vizsgálandó függvények értelmezési tartományát, értékészletét és a függvény menetét.
- b) Zárt intervallumon értelmezett függvényeknél megvizsgáljuk az értelmezési tartomány végpontjaiban felvett függvényértékeket is.
- c) Egy függvény szélsőértékhelye és típusa nem változik, ha a függvényt megszorozzuk egy pozitív számmal.
- d) Egy pozitív értékeket felvevő függvénynek és a négyzetének szélsőérték helye és típusa azonos.

2. Másodfokú függvények

Ha a vizsgált kifejezés felírható egy x ismeretlen másodfokú függvényeként, ahol x tetszőleges valós szám, akkor $f(x) = a(x-u)^2 + v$ alakra hozás után megállapítható a függvény szélsőértéke.

A függvénynek minimuma van, ha $a > 0$, minimum értéke v , helye u ,

maximuma van, ha $a < 0$, maximum értéke v , helye u .

Ha f értelmezési tartománya nem a teljes valós számhalmaz, hanem például egy intervallum, akkor a szélsőérték vizsgálathoz célszerű ábrázolni a függvényt.

3. **Trigonometrikus függvények** Érdemes megvizsgálni, nem kapunk-e egyszerűbb kifejezést, ha trigonometrikus azonosságokat alkalmazunk.
4. Az f függvény értékkészlete azon p számok halmaza, amelyekre az $f(x) = p$ egyenletnek van megoldása az f függvény értelmezési tartományán. Ezzel a függvény szélsőértékének, illetve értékkészletének vizsgálatát, **paraméteres egyenlet** megoldására vezethetjük vissza.
5. Szélsőérték-feladatok gyakran megoldhatók a nevezetes közepek közti egyenlőtlenségek alkalmazásával is.

Definíciók:

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós számok

számtani (aritmetikai)közepe: $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$

mértani (geometriai) közepe: $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

harmonikus közepe: $H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

négyzetes (kvadratikus) közepe: $Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$

Tétel:

$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq Q(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ teljesül.

Következmény:

Ha n pozitív szám szorzata állandó, akkor az összegük akkor minimális, ha a számok egyenlők.

Ha n pozitív szám összege állandó, akkor a szorzatuk akkor maximális, ha a számok egyenlők.

6. Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség ($n = 3$ -ra)

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Az egyenlőtlenség a vektorok skaláris szorzatának definíciója, valamint a skaláris szorzat koordinátákkal való kifejezése alapján igazolható. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\mathbf{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2; b_3)$ vektorok párhuzamosak, azaz ha van olyan k szám, amelyre $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, b_3 = ka_3$ fennáll.

(Az egyenlőtlenség általános alakja:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

(n dimenziós vektorok skaláris szorzatával igazolható.)

II. Kidolgozott feladatok

1. Adott kerületű téglalapok közül melyiknek a területe maximális?

I. Megoldás:

A feladat szövege szerint a téglalapok kerülete $k = 2(a + b)$ adott. Ebből $b = \frac{k}{2} - a$.

Keressük a $t(a) = a \cdot \left(\frac{k}{2} - a\right)$; $0 < a < \frac{k}{2}$ függvény maximumát.

$$t(a) = -a^2 + \frac{k}{2}a = -\left(a - \frac{k}{4}\right)^2 + \left(\frac{k}{4}\right)^2;$$

maximum helye $a = \frac{k}{4}$ (itt értelmezve van a függvény; ekkor b is $\frac{k}{4}$),

a maximum értéke: $\frac{k^2}{16}$.

Tehát az adott kerületű téglalapok közül a négyzet kerülete a maximális.

II. Megoldás:

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést!

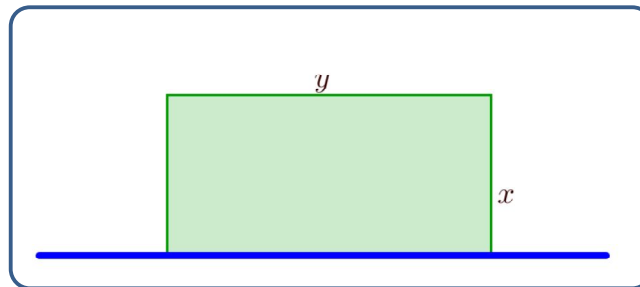
$$\frac{k}{4} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{t}, \text{ tehát } \sqrt{t} \leq \frac{k}{4} = \text{állandó}.$$

t maximális, ha $\sqrt{t}$ maximális. Ez akkor áll fenn, ha $a = b$, a téglalap egy a oldalú négyzet,

amelynek területe: $t_{\max} = a^2 = \left(\frac{k}{4}\right)^2 = \frac{k^2}{16}$.

2. Egy patak partján egy 3200 m² nagyságú, téglalap alakú kertet szeretnénk elkeríteni vízi szárnyasaink részére. Mekkora-nak válasszuk a téglalap méreteit, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség? (A patakparton nem állítunk kerítést.)

Megoldás:



Jelöljük a téglalap oldalait az ábra szerint x -szel, ill. y -nal! ($x > 0, y > 0$)

A téglalap területe $xy = 3200$, a kerítés hossza $k = 2x + y$.

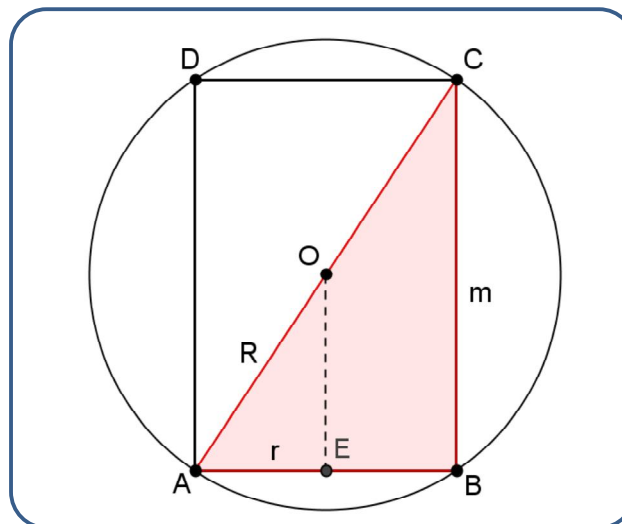
Alkalmazzuk $2x$ -re és y -ra a számtani és mértani közép közötti összefüggést!

$\frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2xy} = \sqrt{6400} = 80$. A kerítés minimális, ha egyenlőség áll fenn azaz, ha $2x = y$. Ezt visszahelyettesítve a területképletbe, $x = 40$ és $y = 80$ adódik. Tehát a minimális hosszúságú kerítést igénylő téglalap oldalai 40 m, ill. 80 m, és $k_{\min} = 160$ m.

3. Az R sugarú gömbbe írható körhengerek közül melyiknek a palástja a legnagyobb?

I. Megoldás:

Tekintsük a henger és a gömb közös tengelymetszetét!

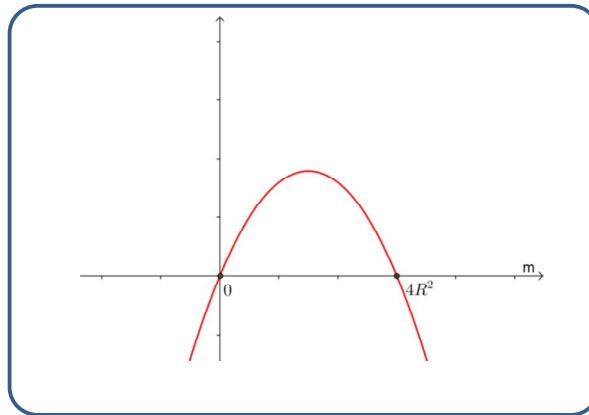


Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az ABC derékszögű háromszögre: $4r^2 + m^2 = 4R^2$ (1)

A henger palástja: $P = 2r\pi m$, ez pont akkor maximális, amikor a négyzete maximális.

Fejezzük ki az (1) összefüggésből $4r^2$ -et és helyettesítsük P^2 képletébe:

$$P^2 = 4r^2 \pi^2 m^2 = \pi^2 (4R^2 - m^2) m^2, \quad (0 < m < 2R).$$



A kapott függvény m^2 -ben másodfokú, melynek zérushelyei 0 és $4R^2$, szélsőértékét a zérushelyek számtani közepén veszi fel. Az m^2 -ben másodfokú tag előjele negatív, ezért a függvénynek maximuma van az $m^2 = 2R^2$ helyen.

A maximális palástú henger magassága $m = \sqrt{2}R$, sugara $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$. Az R sugarú gömbbe írt maximális palástú henger palástja $P_{\max} = 2R^2\pi$.

II. Megoldás:

A henger palástja akkor maximális, amikor $2rm$ maximális. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést, valamint az (1) egyenlőséget:

$$2rm = \sqrt{4r^2 m^2} \leq \frac{4r^2 + m^2}{2} = 2R^2, \text{ ami állandó. A palást pontosan akkor maximális, ha } 4r^2 = m^2$$

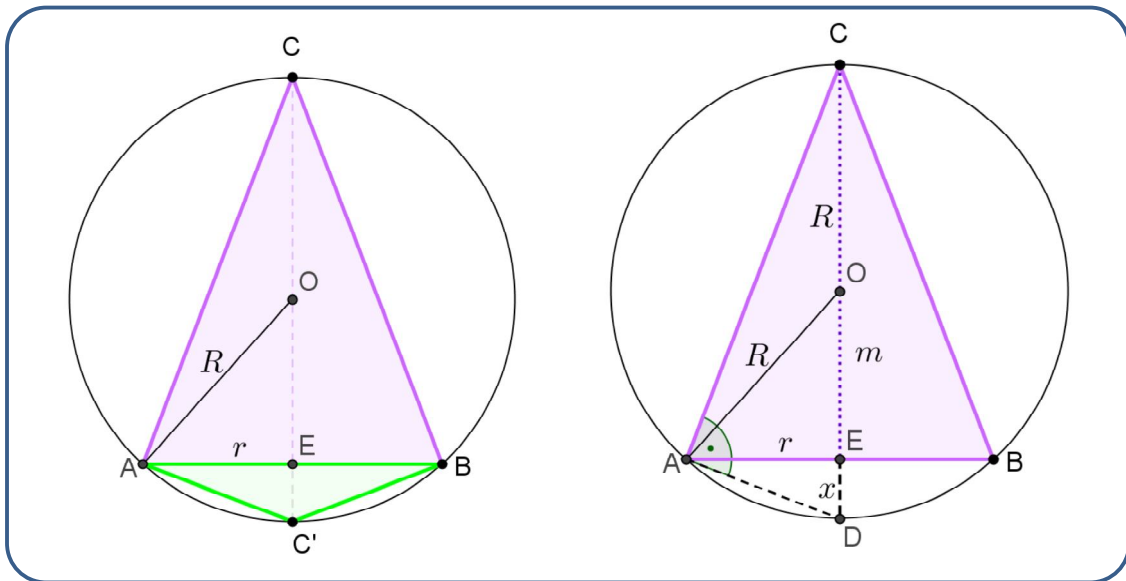
$$\text{azaz, ha } 2r = m. \text{ Így (1) szerint } 2m^2 = 4R^2, \quad m = \sqrt{2}R, \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2}R,$$

az R sugarú gömbbe írt maximális palástú henger palástja $P_{\max} = 2R^2\pi$.

4. Adott R sugarú gömbbe írt egyenes körkúpok közül melyiknek legnagyobb a térfogata?

Megoldás:

Adott R sugarú gömbbe írt r sugarú kúpok közül annak nagyobb a térfogata, amelyiknek a magassága a gömb sugaránál nem kisebb, ezért elég ezzel foglalkozni.



Tekintsük a gömb és beírt kúp közös tengelymetszetét! Thalész tétele szerint az ADC háromszög derékszögű, ezért alkalmazható rá a magasságtétel: $r^2 = m \cdot x = m \cdot (2R - m)$.

(Ugyanezt az összefüggést megkapjuk az AEO háromszögre felírt Pitagorasz-tételből is.)

A beírt kúp térfogata
$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{m^2 \cdot (2R - m) \cdot \pi}{3}.$$

A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazhatjuk az $m, m, (4R - 2m)$ pozitív számokra ($0 < m < 2R$).

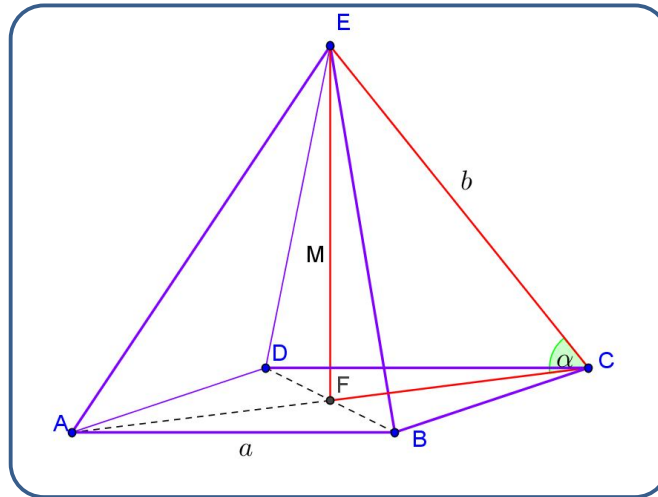
$$\frac{6V}{\pi} = m \cdot m \cdot (4R - 2m) \leq \left(\frac{4R}{3}\right)^3, \text{ ami állandó.}$$

A beírt kúp térfogata maximális, ha egyenlőség áll fenn, ami $m = 4R - 2m$ esetén teljesül.

A maximális térfogatú kúp magassága: $m = \frac{4}{3}R$, az alapkör sugara: $r = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$,

térfogata: $V = \frac{32R^3\pi}{81}.$

5. Adjuk meg az adott b oldalélű szabályos négyoldalú gúlák közül a maximális térfogatút!



I. Megoldás:

Ha a gúla oldaléle α szöget zár be az alapsíkkal, akkor magassága $M = b \cdot \sin \alpha$, alapéle $a = b\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$, térfogata: $V = \frac{2b^3}{3} \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$. Mivel b adott állandó, a következő függvény maximumát keressük: $f(\alpha) = \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$, ahol $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Ez ott maximális, ahol a négyzete:

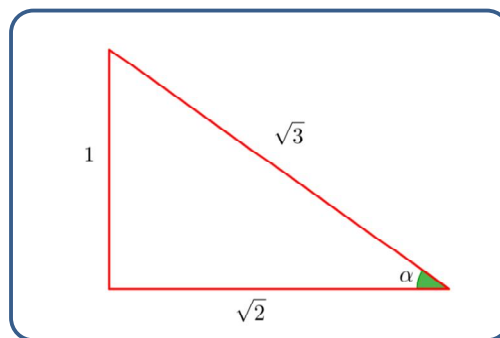
$$f^2(\alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \text{ maximális.}$$

A számtani és mértani közép közötti összefüggés akkor alkalmazható, ha a szorzatban szereplő (pozitív) tényezők összege állandó. Ez könnyen megvalósítható, ha az első tényezőt, s így a szorzatot 2-vel megszorozzuk.

$$2 \cdot f^2(\alpha) = (2 \sin^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$\sqrt[3]{2 \cdot f^2(\alpha)} \leq \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{3} = \frac{2}{3}.$$

$2 \cdot f^2(\alpha)$ akkor maximális, ha egyenlőség áll fenn. Ez pedig akkor teljesül, ha a tényezők egyenlők, azaz $2 \cdot \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$. Mivel α hegyesszög, ebből $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$,



$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, így a maximális térfogatú gúla alapéle $a = \frac{2}{\sqrt{3}} b$,

magassága $M = \frac{b}{\sqrt{3}}$, térfogata $V = \frac{4\sqrt{3}b^3}{27}$.

II. Megoldás: (Szögfüggvények nélkül)

Írjuk fel a piros háromszögre a Pitagorasz-tételt!

$$M^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 = \text{állandó}; V = \frac{1}{3}a^2M$$

V maximális, ha $9V^2$ maximális.

$$9V^2 = a^2 \cdot a^2 \cdot M^2$$

$a^2 + a^2 + M^2$ nem állandó, de $a^2 + a^2 + 4M^2 = 4b^2$ állandó; alkalmazható a számtani és mértani közép közötti összefüggés.

$$\sqrt[3]{36V^2} = \sqrt[3]{a^2 \cdot a^2 \cdot 4M^2} \leq \frac{4b^2}{3}.$$

Így $36V^2$, s ezzel V is akkor maximális, ha $a^2 = 4M^2$ azaz, ha $a = 2M$, amit visszahelyettesítve

$$M = \frac{b}{\sqrt{3}}, \text{ és } a = \frac{2b}{\sqrt{3}}, \text{ a maximális térfogatra pedig } V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}b^3}{27} \text{ adódik.}$$

6. Határozzuk meg a $\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét!

Megoldás:

A kifejezés a $[3; 7]$ intervallumon értelmezett.

A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}}{2} \leq \sqrt{\frac{x-3+7-x}{2}} = \sqrt{2}.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\sqrt{x-3} = \sqrt{7-x}$, azaz ha $x = 5$.

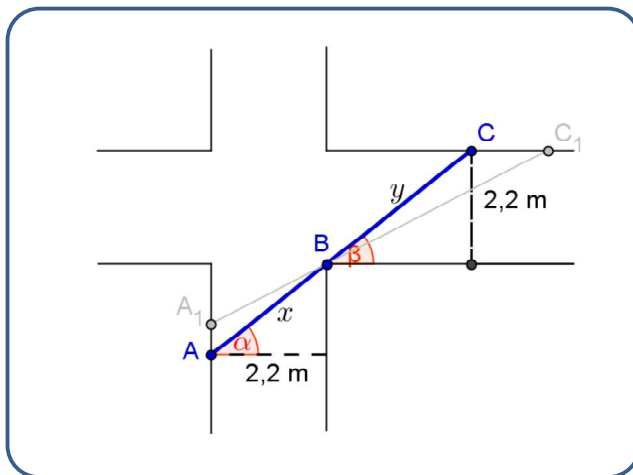
Az $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ nemnegatív értékeket felvevő függvény helyett vizsgálhatjuk a négyzetét: $f^2(x) = 4 + 2\sqrt{x-3}\sqrt{7-x} \geq 4$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = 3$ vagy $x = 7$.

Összefoglalva: A vizsgált kifejezés legnagyobb értéke $2\sqrt{2}$, ezt az $x = 5$ helyen veszi fel, legkisebb értéke 2, amit az $x = 3$ és az $x = 7$ helyeken vesz fel.

7. a) Egy iskolában két 2,2 m szélességű folyosó merőlegesen keresztezi egymást. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet vízszintes helyzetben - a létrát függőleges síkban tartva - az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?
 b)* Hogy módosul a válasz, ha a két folyosó szélessége 8 illetve 27 hosszúságegységű?

Megoldás:

a)



A rendelkezésre álló helyet akkor használjuk ki legjobban, ha a létra érinti a folyosó sarokélét, felülnézetben a létrát szemléltető AC (A_1C_1) szakaszra illeszkedik a B pont. Az $AC = x + y$ szakasz hosszának minimumát keressük (A létra nem lehet ennél hosszabb.)

$\alpha = \beta$ egyállású szögek segítségével kifejezhető x és y :

$$x = \frac{2,2}{\cos \alpha} \quad y = \frac{2,2}{\sin \alpha}$$

Alkalmazzuk a harmonikus és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget $\frac{1}{x} = \frac{\cos \alpha}{2,2}$ és $\frac{1}{y} = \frac{\sin \alpha}{2,2}$ pozitív számokra, és használjuk fel, hogy $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$\frac{2}{x+y} = \frac{2}{\frac{2,2}{\cos \alpha} + \frac{2,2}{\sin \alpha}} \leq \sqrt{\frac{\left(\frac{\cos \alpha}{2,2}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{2,2}\right)^2}{2}} = \frac{1}{2,2 \cdot \sqrt{2}}, \text{ ezért}$$

$$x + y \geq 4,4 \cdot \sqrt{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\cos \alpha = \sin \alpha$, azaz, ha $\alpha = 45^\circ$. (Tehát a legrövidebb hosszúság 45° -os szögnél jön létre.) A leghosszabb létra, amellyel ezen a folyosón be lehet fordulni (a létra vízszintes helyzetében) $4,4 \cdot \sqrt{2} \text{ m} \approx 6,2 \text{ m}$ hosszú.

- b) Ebben az esetben a két szakasz $x = \frac{8}{\cos \alpha}$, $y = \frac{27}{\sin \alpha}$. Ha ismét a fenti közepek közötti egyenlőtlenséget, valamint a $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ azonosságot szeretnénk alkalmazni, akkor x -et illetve y -t annyi egyenlő tagra kell bontani, hogy a négyzetes közép képletében szereplő $\cos^2 \alpha$ és $\sin^2 \alpha$ együttthatója megegyezzen.

$$\frac{8}{\cos \alpha} = \overbrace{\frac{1}{3 \cos \alpha} + \frac{1}{3 \cos \alpha} + \dots + \frac{1}{3 \cos \alpha}}^{24 \text{ tag}}$$

$$\frac{27}{\sin \alpha} = \overbrace{\frac{1}{2 \sin \alpha} + \frac{1}{2 \sin \alpha} + \dots + \frac{1}{2 \sin \alpha}}^{54 \text{ tag}}$$

Erre a 78 tagra alkalmazzuk a harmonikus és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} & \frac{\overbrace{\frac{1}{3 \cos \alpha} + \dots + \frac{1}{3 \cos \alpha}}^{24} + \overbrace{\frac{1}{2 \sin \alpha} + \dots + \frac{1}{2 \sin \alpha}}^{54}}{78} \leq \\ & \leq \sqrt{\frac{\overbrace{9 \cos^2 \alpha + \dots + 9 \cos^2 \alpha}^{24} + \overbrace{4 \sin^2 \alpha + \dots + 4 \sin^2 \alpha}^{54}}{78}} = \sqrt{\frac{216(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{78}} = \frac{6}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

$\frac{78}{\frac{8}{\cos \alpha} + \frac{27}{\sin \alpha}}$ kifejezés maximális, ha egyenlőség áll fenn. Ez akkor teljesül, ha $3 \cos \alpha = 2 \sin \alpha$, azaz, ha $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$, $\alpha \approx 56,31^\circ$.

$x+y = \frac{8}{\cos \alpha} + \frac{27}{\sin \alpha}$ minimális, ha $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$ ($\alpha \approx 56,31^\circ$).

A létra tehát nem lehet hosszabb $\left(\frac{78}{\frac{6}{\sqrt{13}}} = \right) 13 \cdot \sqrt{13}$ egységnél.

Megjegyzés: A feladat a fentihez hasonló módon oldható meg, ha a két egymásra merőleges folyosó szélességének aránya két egész szám hányadosának köbével egyenlő.

8. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}$, $x \in \mathbb{R}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét!

Megoldás:

Egy f függvény értékkészlete mindazon p valós számok halmaza, amelyekre az $f(x) = p$ egyenletnek van megoldása. Ha meghatározzuk a kifejezés értékkészletét, akkor annak legkisebb, ill. legnagyobb eleme (ha van) egyben a vizsgált kifejezés minimuma, ill. maximuma is. Ezzel a kifejezés szélsőértékének meghatározását visszavezetjük egy paraméteres egyenlet megoldására.

$$\frac{x+2}{x^2+3} = p \quad \Leftrightarrow \quad px^2 - x + 3p - 2 = 0$$

$p = 0$ esetén, $x = -2$

$p \neq 0$ esetén, a másodfokú egyenletnek akkor van valós megoldása, ha $D \geq 0$.

$$D = 1 - 4p(3p - 2) = -12p^2 + 8p + 1$$

$$-12p^2 + 8p + 1 \geq 0, \text{ ha } \frac{2 - \sqrt{7}}{6} \leq p \leq \frac{2 + \sqrt{7}}{6} \quad (p \neq 0)$$

Összegezve a két esetet, a kapott egyenletnek akkor van valós megoldása, ha

$$\frac{2 - \sqrt{7}}{6} \leq p \leq \frac{2 + \sqrt{7}}{6} \text{ fennáll.}$$

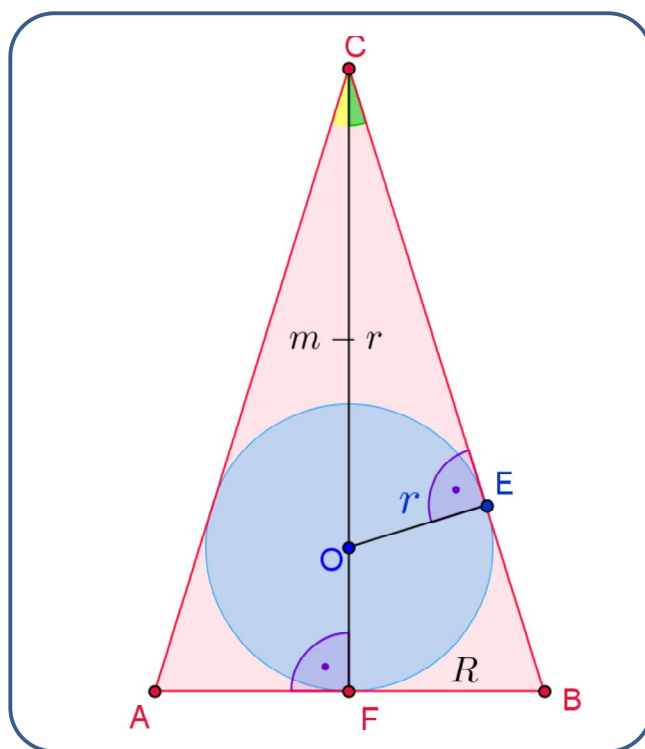
Így a vizsgált függvény legkisebb értéke $\frac{2 - \sqrt{7}}{6}$, legnagyobb értéke $\frac{2 + \sqrt{7}}{6}$.

(A függvény szélsőértékhelyeit megkapjuk, ha megoldjuk a másodfokú egyenletet p legnagyobb és legkisebb értékére. Ezekre a másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0, az egyenlet gyökei: $x_{1,2} = \frac{1}{2p}$. A függvény minimumhelye: $\frac{1}{2 \cdot \frac{2 - \sqrt{7}}{6}} = -2 - \sqrt{7}$, maximumhelye: $\frac{1}{2 \cdot \frac{2 + \sqrt{7}}{6}} = -2 + \sqrt{7}$.)

9. Adott r sugarú gömb köré írható forgáskúpok közül melyiknek legkisebb a térfogata?

Megoldás:

Tekintsük a kúp és a gömb közös tengelymetszetét!



Az AFC és OEC derékszögű háromszögek hasonlóak, mert $\angle AFC = \angle ECB$, megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$\frac{r}{m-r} = \frac{R}{\sqrt{m^2 - R^2}} \quad (m > 2r).$$

A nevezőkkel szorzás és négyzetre emelés után kapjuk:

$$r^2 m^2 + r^2 R^2 = m^2 R^2 - 2mrR^2 + r^2 R^2.$$

Ebből
$$R^2 = \frac{r^2 m}{m - 2r}.$$

Ezt behelyettesítjük a kúp térfogatképletébe:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot R^2 \cdot m = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \frac{m^2}{m - 2r}. \quad (*)$$

Az első két tényező konstans, elég a harmadik tényezőt vizsgálni.

Végezzük el a következő átalakítást:

$$\frac{m^2}{m - 2r} = \frac{m^2 - 4r^2 + 4r^2}{m - 2r} = m + 2r + \frac{4r^2}{m - 2r} = (m - 2r) + \frac{4r^2}{m - 2r} + 4r.$$

Az összeg harmadik tagja konstans. $(m - 2r) \cdot \frac{4r^2}{m - 2r} = 4r^2 = \text{állandó}.$

Ezért a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazható.

A vizsgált összeg minimális, ha $(m - 2r) = \frac{4r^2}{m - 2r}$, azaz, ha $m = 4r$, $R = \sqrt{2} \cdot r$.

Az r sugarú gömb köré írható minimális térfogatú kúp térfogata $V = \frac{8}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$.

A (*) egyenletől **másként**:

Vizsgáljuk, hogy az $\frac{m^2}{m - 2r}$ milyen értékeket vehet fel.

Adjuk meg, hogy az $\frac{m^2}{m - 2r} = p$ paraméteres egyenletnek, mely p számokra van megoldása, feltéve, hogy $m > 2r$.

Az egyenlet ekvivalens az $m^2 - pm + 2pr = 0$ egyenlettel. Ennek akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. $D = p^2 - 8pr$. A feltétel szerint $p > 0$, így $p \geq 8r$. Ezzel megkaptuk a $\frac{m^2}{m - 2r}$ kifejezés minimumát, ami $8r$.

Így az r sugarú gömb köré írható minimális térfogatú kúp térfogata $V = \frac{8}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$.

10. Határozzuk meg a következő függvény értékkészletét, ha $x \in \mathbb{R}$!

$$f(x) = 5 \sin x + 12 \cos x$$

Megoldás:

$f(x) = 13 \left(\frac{5}{13} \sin x + \frac{12}{13} \cos x \right) = 13 \sin(x + \alpha)$, ahol $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, és $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, ez fennáll, ha $\alpha \approx 67,38^\circ$.

Mivel $-1 \leq \sin \phi \leq 1$ minden ϕ -re, ezért $-13 \leq f(x) \leq 13$.

(Az f függvény a -13 , illetve a 13 értékeket felveszi, például a $3\frac{\pi}{2} - \alpha$, illetve a $\frac{\pi}{2} - \alpha$ helyeken; valamint a közbenső értékeket is, mert folytonos.)

A vizsgált függvény értékkészlete $[-13; 13]$.

11. a) Adjuk meg a $\log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x)^2$ kifejezés H értelmezési tartományát!

b) Határozzuk meg a H halmazon értelmezett $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x)^2$ függvény szélsőértékeit! / Felvételi 2001. május /

Megoldás:

a) A kifejezés azokra az x valós számokra értelmezett, amelyekre:

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x > 0 \Leftrightarrow \sin 2x > -1.$$

Ebből $\sin 2x \neq -1$, azaz $x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$; $H = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$

b) A fentiek szerint az értelmezési tartomány x elemeire $0 < 1 + \sin 2x \leq 2$. (**)

Felhasználva, hogy az 1-nél kisebb alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken,

$$\log_{\frac{1}{2}}(1 + \sin 2x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1.$$

A megadott függvénynek minimumértéke a -1 , amit $\sin 2x = 1$ alapján, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$) helyeken vesz fel.

A függvénynek nincs maximuma, mert az $1 + \sin 2x$ kifejezés tetszőlegesen kis pozitív szám lehet, ha $\sin 2x$ megközelíti a -1 -et. Egy ilyen szám $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusát tetszőlegesen nagy pozitív értéket vehet fel.

Másként:

Adjuk meg, hogy a p paraméter mely értékei esetén van megoldása az alábbi egyenletnek

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x)^2 = p.$$

Definíció szerint $(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^p$.

A (**) egyenlőtlenség alapján $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^p \leq 2$, amiből $2^p \geq \frac{1}{2} = 2^{-1}$,

és a 2 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedése alapján $p \geq -1$, az f függvény minimuma -1 .

(Mivel $1 + \sin 2x$ 0-tól való távolsága tetszőlegesen kicsi lehet, ezért $\left(\frac{1}{2}\right)^p$ tetszőlegesen nagy értéket felvehet, így az f függvény felülről nem korlátos, nincs maximuma.)

12. Határozzuk meg az alábbi függvény szélsőértékeit!

$$f: [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6}$$

/ Felvételi 2000. május /

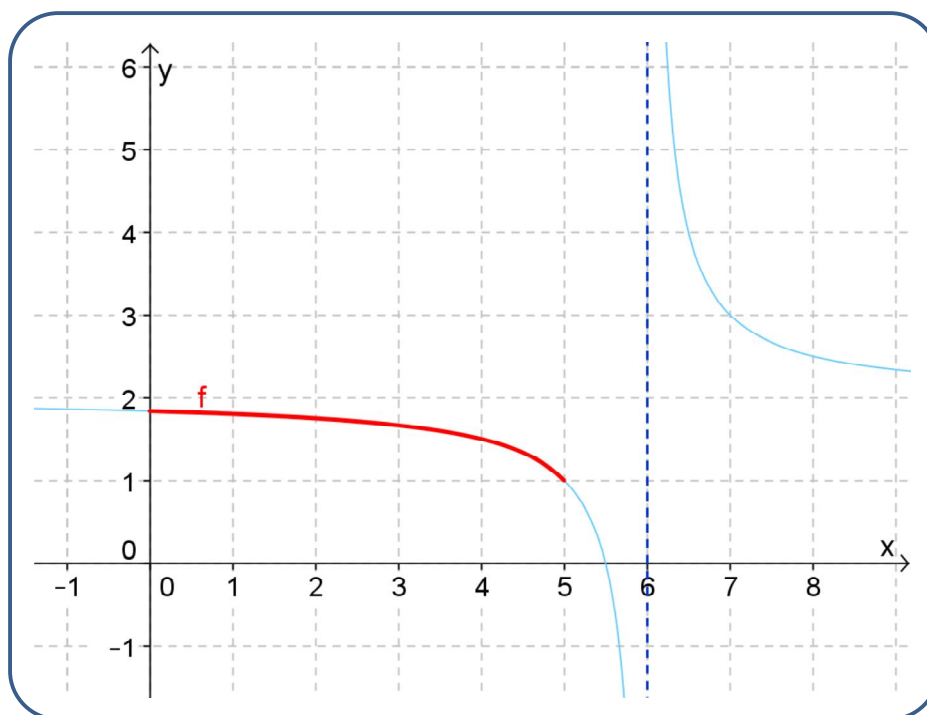
I. Megoldás:

$$2x^2 - 9x - 11 = 2(x^2 - 5x - 6) + x + 1 \text{ átalakítás alapján}$$

$$f(x) = 2 + \frac{x+1}{(x-6)(x+1)} = 2 + \frac{1}{x-6}.$$

(A megadott értelmezési tartomány minden elemére fennáll az egyenlőség.)

Ábrázoljuk a függvényt!



Mivel $x \mapsto \frac{1}{x-6}$ szigorúan monoton csökken az adott intervallumban, ezért f -re is ez teljesül.

f függvény maximuma $f(0) = \frac{11}{6}$, minimuma $f(5) = 1$.

II. Megoldás

Határozzuk meg milyen p paraméter esetén van megoldása a következő egyenletnek

$$\frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6} = p \text{ a } [0; 5] \text{ intervallumon!}$$

A feltétel szerint $x \neq -1$ és $x \neq 6$, ezért egyenletünk a vizsgált intervallumon ekvivalens a következővel:

$$2x^2 - 9x - 11 = p(x^2 - 5x - 6).$$

A kijelölt szorzást elvégezve és rendezve kapjuk:

$$(p - 2)x^2 + (9 - 5p)x + 11 - 6p = 0.$$

$p = 2$ esetén a $-x - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldása $x = -1$, ami nincs az értelmezési tartományban, ezért $p \neq 2$.

$p \neq 2$ esetén akkor van a másodfokú egyenletnek valós gyöke, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

$$D = (9 - 5p)^2 - 4(p - 2)(11 - 6p) = 49p^2 - 182p + 169 = (7p - 13)^2,$$

tehát a $D \geq 0$ minden p paraméterre teljesül. (Minden $p \neq 2$ valós szám esetén van megoldása a másodfokú egyenletnek.)

Vegyük figyelembe, hogy olyan p valós számokat keresünk, amelyekre az egyenlet gyökei a $[0; 5]$ intervallumba esnek!

Ehhez határozzuk meg a másodfokú egyenlet gyökeit!

A megoldóképletből $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{6p - 11}{p - 2}$ adódik.

Mivel -1 nincs a megadott intervallumban, ezért olyan p számokat keresünk, amelyekre

$$0 \leq \frac{6p - 11}{p - 2} \leq 5 \text{ fennáll.}$$

$$\frac{6p - 11}{p - 2} = 6 + \frac{1}{p - 2}, \quad \text{így} \quad 0 \leq 6 + \frac{1}{p - 2} \leq 5 \quad (\text{innen látszik, hogy } p < 2).$$

$$-6 \leq \frac{1}{p - 2} \leq -1;$$

$$-\frac{1}{6} \geq p - 2 \geq -1$$

Felhasználva, hogy az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény a negatív számok halmazán szigorúan monoton csökken,

$$1 \leq p \leq \frac{11}{6} \text{ adódik.}$$

(Megjegyzés: Ennél a feladatnál ez az utóbbi megoldás több buktatóval járt, és hosszadalmasabb is volt.)

13. Legyenek a , b és c $(-\frac{1}{2})$ -nél nagyobb számok és $a+b+c=1$.

Adjuk meg a $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$ kifejezés maximumát!

Megoldás:

Tekintsük az $\mathbf{x}(1; 1; 1)$ és az $\mathbf{y}(\sqrt{2a+1}; \sqrt{2b+1}; \sqrt{2c+1})$ vektorokat. Ezek skaláris szorzata éppen a megadott kifejezés.

Másrészt a skaláris szorzat definíciója és a cosinus függvény értékkészlete alapján:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cdot \cos \varphi \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|.$$

A két vektor abszolútértéke: $|\mathbf{x}| = \sqrt{3}$, illetve $|\mathbf{y}| = \sqrt{2a+1+2b+1+2c+1} = \sqrt{5}$.

Így a vizsgált összeg maximális értéke $\sqrt{15}$, amit akkor vesz fel, ha a két vektor egyirányú

($\cos \varphi = 1$, $\varphi = 0^\circ$), ami pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c = \frac{1}{3}$.

14. Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával, hogy az

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton nő:

Megoldás:

Bizonyítandó, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

A bal oldalon álló szorzatot 1-gyel szorozva, alkalmazhatjuk az $n+1$ szám számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenséget :

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} < \frac{1 + n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Ennek $n+1$ -edik hatványa a bizonyítandó egyenlőtlenség.

(Egyenlőség nem áll fenn, mert a tényezők nem (mind) egyenlők.)

III. Ajánlott feladatok:

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely negatív számnak és reciprokának összege legfeljebb $(-2)!$
2. Az A, B és C városok egymástól való távolsága $AB=600$ km, $BC=800$ km, $AC=800$ km. A-ból B-be és B-ből C-be egy időben indul egy-egy repülőgép. A gépek ugyanakkora sebességgel, azonos magasságban, egyenes vonalban kitérő nélkül repülnek. Hány km-es út megtétele után lesz a repülők közötti távolság a legkisebb? / Felvételi 2000. máj./
3. Adjuk meg az $f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x$ függvény szélsőértékeit!
4. Adott területű téglalapok közül melyiknek a kerülete minimális?
5. Határozzuk meg az ab szorzat maximumát, ha $a > 0$, $b > 0$ és $5a + 7b = 1$!
6. Határozzuk meg az $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ kifejezés minimumát, ha a , b és c pozitív számokat jelölnek!
7. Oldjuk meg a 12-es (kidolgozott) feladatot a nevezetes közepek felhasználásával!
Legyenek a , b és c $\left(-\frac{1}{2}\right)$ -nél nagyobb számok és $a+b+c=1$.
Határozzuk meg a $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$ kifejezés maximumát!
8. Azok közül a téglatestek közül, amelyek térfogata a felszínük kétszerese, melyiknek legkisebb a térfogata? /OKTV 2000./
9. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8$, feltéve, hogy $x > 1$, $y > 1$! (OKTV 1992-93)
10. Határozzuk meg az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x^2} + x$ függvény minimumát!
11. Egy 30 cm oldalú négyzet négy sarkából vágjunk le 4 egybevágó négyzetet úgy, hogy a lap négy szélének felhajtatásával a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjuk. Adjuk meg ennek a térfogatát!
12. Adott felszínű fedetlen hengerek közül határozzuk meg a legnagyobb térfogatút!

13. Egy húrtrapéz keresztmetszetű vályú rövidebbik alapja és szárai a dm hosszúak. Határozzuk meg ezek közül annak a trapéznek a szögeit, amelynek a területe a legnagyobb!

14. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$; $x \in \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeit!

15. Határozzuk meg a $\frac{3x^2 + 18x + 23}{x^2 + 6x + 10}$ kifejezés minimumát!

16. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékét!

$$f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$$

17. Határozzuk meg a következő kifejezés minimumát, ha $\sin x \neq 0$ és $\cos x \neq 0$

$$K = \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2$$

18. Mutassuk meg, hogy a $K = \sqrt{5x - 4 - x^2} \cdot |\log_2 y| + \frac{|\log_2 2|}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}$ kifejezés értéke nagyobb $\sqrt[4]{24}$ -nél!

/ Felvételi 1996. május/

19. Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával, hogy az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \text{ sorozat felülről korlátos!}$$

Megjegyzés:

Ebből és a 14. kidolgozott feladatból következik, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ sorozat konvergens.

A sorozat határértékét e -vel jelöljük Euler svájci matematikusról. $e \approx 2,71828$)

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely negatív számnak és reciprokának összege legfeljebb (-2) .

Megoldás:

Legyen $a < 0$ valós szám. Az állítás: $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

Legyen $b = -a > 0$. Alkalmazzuk b -re és $\frac{1}{b}$ -re a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

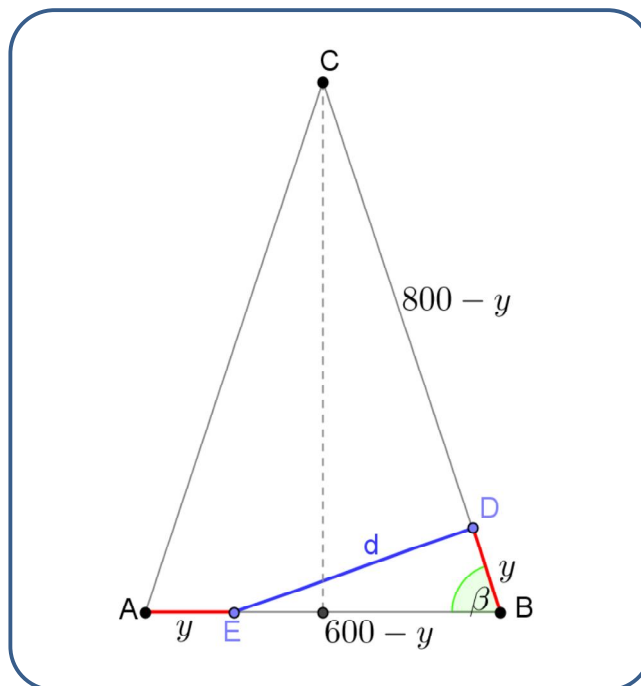
$$b + \frac{1}{b} \geq 2 \cdot \sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} = 2.$$

Visszahelyettesítve b helyére $(-a)$ -t, a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $b = 1$, azaz $a = -1$.

(Megjegyzés: Ha ekvivalens átalakításokkal egy igaz állítást kapunk, akkor ez az eredeti állításra is teljesül. Ha az $a + \frac{1}{a} \leq -2$ egyenlőtlenséget az $a < 0$ számmal szorozzuk, majd rendezzük, akkor az $a^2 + 2a + 1 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami minden a számra fennáll.)

2. Az A, B és C városok egymástól való távolsága $AB = 600$ km, $BC = 800$ km, $AC = 800$ km. A-ból B-be és B-ből C-be egy időben indul egy-egy repülőgép. A gépek ugyanakkora sebességgel, azonos magasságban, egyenes vonalban kitérő nélkül repülnek. Hány km-es út megtétele után lesz a repülők közötti távolság a legkisebb? / Felvételi 2000. máj./

Megoldás:



Tegyük fel, hogy a gépek y km-t repültek. A két gép közötti d távolság négyzete az EBD háromszögre felírt koszinusztétellel kiszámolható:

$$d^2 = y^2 + (600 - y)^2 - 2y(600 - y)\frac{3}{8}, \text{ mivel } \cos \beta = \frac{3}{8}.$$

Ebből rendezés után a két gép távolságának négyzetére a következő másodfokú függvényt kapjuk:

$$f(y) = \frac{11}{4}y^2 - 1650y + 360\,000, \text{ ahol } 0 < y < 600.$$

Teljes négyzetté kiegészítés után leolvasható az f függvény szélsőértékhelye és értéke.

$$f(y) = \frac{11}{4}(y - 300)^2 + 112500.$$

f minimumhelye $y = 300$.

A két gép közti távolság 300 km megtételekor minimális. Ekkor a távolságuk $\sqrt{112500} \text{ km} \approx 335,4 \text{ km}$.

3. Adjuk meg az $f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás:

Végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x$$

Alkalmazzuk a következő azonosságot:

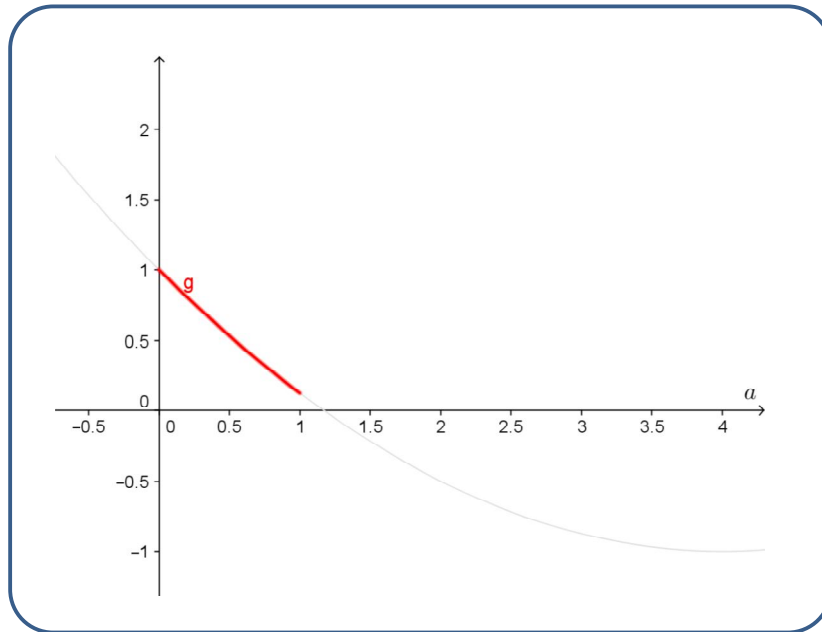
$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

$$\begin{aligned} \text{Így} \quad f(x) &= (1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x)^2 - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x = \\ &= 1 + 4\sin^4 x \cdot \cos^4 x - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x = \\ &= 1 + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8}\sin^4 2x - \sin^2 2x + 1 \end{aligned}$$

Jelöljük $\sin^2 2x$ -et a -val és vizsgáljuk az alábbi másodfokú függvényt:

$$g(a) = \frac{1}{8}a^2 - a + 1; \quad (0 \leq a \leq 1).$$

Teljes négyzetté kiegészítéssel $g(a) = \frac{1}{8}(a - 4)^2 - 1$ adódik.



Ez a függvény (a $[0; 1]$ intervallumon) szigorúan monoton csökken, maximuma $g(0) = 1$, minimuma $g(1) = \frac{1}{8}$.

Az f függvény maximumhelyét a $\sin^2 2x = 0$, minimumhelyét a $\sin^2 2x = 1$ egyenletek megoldásai adják.

Az f függvény maximumhelyei: $n \cdot \frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$, értéke: 1,

minimumhelyei: $\frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$, értéke: $\frac{1}{8}$.

4. Adott területű téglalapok közül melyiknek a kerülete minimális?

Útmutató:

$t = ab$ adott.

Az 1. kidolgozott feladat II. megoldásában felírt $\frac{k}{4} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{t}$ összefüggésből azt kapjuk, hogy az adott területű téglalapok közül a négyzet kerülete a legkisebb: $k_{\min} = 4\sqrt{t}$.

Megjegyzés:

Felmerülhet, hogy ha a fent említett feladatban sikerült másodfokú függvény szélsőértékének meghatározásával megoldani a feladatot, akkor talán ez a probléma is megoldható így.

Itt azonban a $k(a) = 2a + 2\frac{t}{a}$, $0 < a$ függvény szélsőértéke adja a megoldást. Ez pedig nem másodfokú függvény.

5. Határozzuk meg az ab szorzat maximumát, ha $a > 0$, $b > 0$ és $5a + 7b = 1$!

Útmutató:

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti összefüggést az $5a$ és $7b$ számokra!

Az ab kifejezés maximális, ha $a = \frac{1}{10}$ és $b = \frac{1}{14}$, a maximum értéke: $\frac{1}{140}$.

6. Határozzuk meg az $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ kifejezés minimumát, ha a , b és c pozitív számokat jelölnek!

Útmutató:

Szorozzuk össze az $(a; b)$, $(b; c)$ és $(c; a)$ számpárookra felírt számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségeket!

A kifejezés minimuma 8, amit $a = b = c$ esetén vesz fel.

7. Legyenek a , b és c $\left(-\frac{1}{2}\right)$ -nél nagyobb számok és $a+b+c = 1$.

Határozzuk meg $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$ kifejezés maximumát!

Megoldás:

Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget!

$$\frac{\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}}{3} \leq \sqrt{\frac{2a+1 + 2b+1 + 2c+1}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Ezt 3-mal szorozva kapjuk: $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}$.

A kifejezés maximuma $\sqrt{15}$ és ezt $a = b = c = \frac{1}{3}$ esetén veszi fel.

8. Azok közül a téglatestek közül, amelyek térfogata a felszínük kétszerese, melyiknek legkisebb a térfogata? /OKTV 2000./

Megoldás:

A feltétel szerint $V = abc = 4(ab + bc + ca)$.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az ab, bc, ca szorzatokra!

$\frac{V}{12} = \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt[3]{V^2}$, ahol egyenlőség akkor áll fenn, ha a három szorzat egyenlő, azaz, ha $a = b = c$.

Tehát $\frac{V}{12} \geq \sqrt[3]{V^2} \Leftrightarrow \frac{V^3}{12^3} \geq V^2$, amiből $V \geq 12^3$ adódik.

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c$, ezért a feltételnek megfelelő téglalapok közül a 12 egység élű kockának legkisebb a térfogata.

9. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8$, feltéve, hogy $x > 1, y > 1$! (OKTV 1992-93)

Megoldás:

Vezessük be a következő jelöléseket: $a = x - 1, b = y - 1$. Bizonyítandó:

$$\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \geq 8.$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az $\frac{(a+1)^2}{b}$ és $\frac{(b+1)^2}{a}$ pozitív számokra.

$$\frac{\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{(a+1)^2 \cdot (b+1)^2}{ab}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2a + 1}{a} \cdot \frac{b^2 + 2b + 1}{b}} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a} + 2\right) \cdot \left(b + \frac{1}{b} + 2\right)}$$

A $z > 0$ számra $z + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt{z \cdot \frac{1}{z}} = 2$ alapján, a jobb oldalon álló szorzat értéke legalább $\sqrt{(2+2) \cdot (2+2)} = 4$, így a vizsgált kifejezés értéke legalább 8.

Ezt az értéket $a = b = 1$ esetén veszi fel.

(Ekkor minden „ $\geq$ ” helyett „ $=$ ” áll.)

Az eredeti egyenlőtlenség minden $x, y > 1$ -nél nagyobb számra teljesül.

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} = 8, \text{ ha } x = y = 2.$$

10. Határozzuk meg az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x^2} + x$ függvény minimumát!

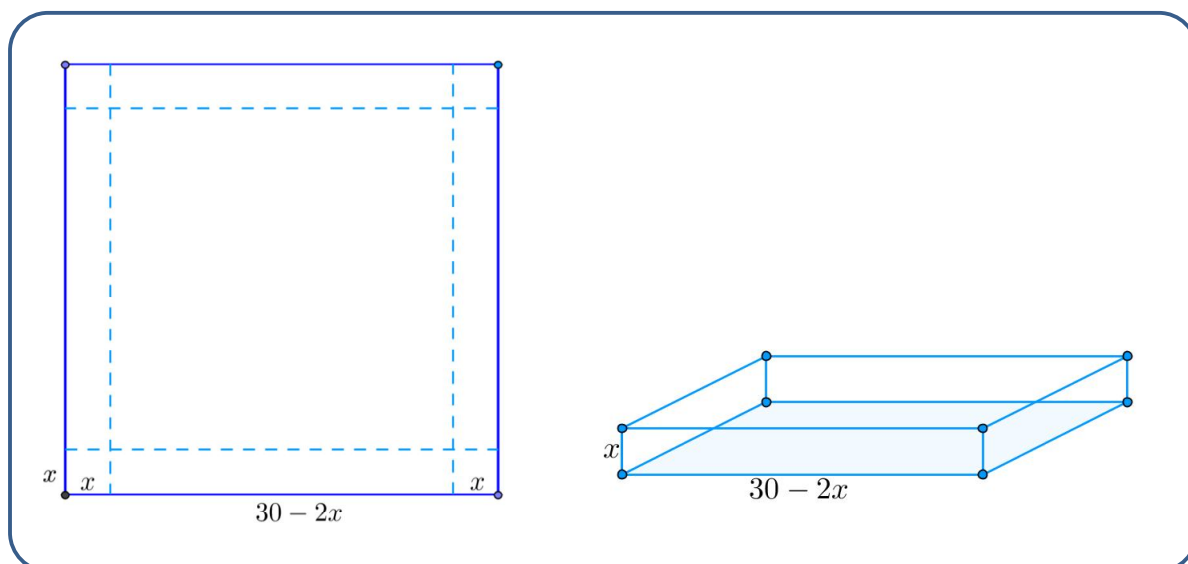
Útmutató:

Alkalmazzuk a $\frac{4}{x^2}$, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2}$ pozitív számokra a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget.

A függvény minimum értéke: 3, helye: 2.

11. Egy 30 cm oldalú négyzet négy sarkából vágjunk le négy egybevágó négyzetet úgy, hogy a lap négy szélének felhajításával a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjuk. Adjuk meg ennek a térfogatát!

Megoldás:



Az ábra jelöléseit használva a doboz térfogata:

$$V = (30 - 2x)^2 \cdot x; \quad 0 < x < 15$$

$$4V = (30 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot 4x$$

Mivel $30 - 2x + 30 - 2x + 4x = 60 = \text{konstans}$, ezért alkalmazható a számtani és mértani közép közötti összefüggés:

$$\sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{(30 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot 4x} \leq \frac{60}{3} = 20$$

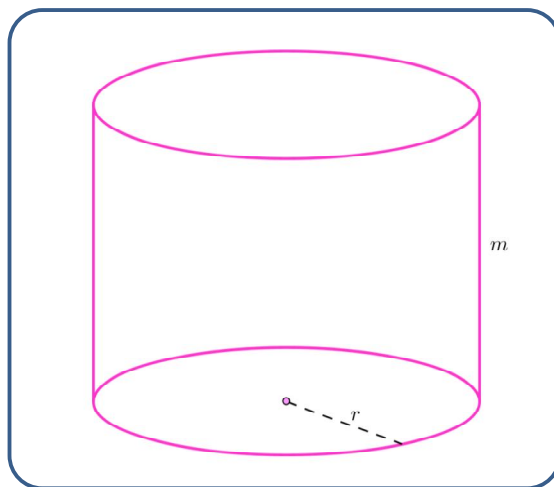
$4V$ maximális, ha $30 - 2x = 4x$, azaz, ha $x = 5$.

A doboz maximális térfogatú, ha 5×5 cm²-es négyzeteket vágunk le, és

$$V_{\max} = 20 \cdot 20 \cdot 5 \text{ cm}^3 = 2000 \text{ cm}^3.$$

12. Adott felszínű fedetlen hengerek közül határozza meg a legnagyobb térfogatút!

Megoldás:



$$A = r^2\pi + 2rm\pi = \pi(r^2 + 2rm) \text{ adott,}$$

$$V = r^2\pi m$$

Elég r^2m maximumát meghatározni. Ez pontosan akkor lesz maximális, amikor a négyzete r^4m^2 maximális.

Ha a számtani és mértani közép közötti összefüggést szeretnénk alkalmazni, akkor arra kell törekedni, hogy a tényezők összege állandó legyen.

Itt $r^4 + m^2$ nem állandó, de a szorzat következő átalakításával: $r^2 \cdot rm \cdot rm$ már a tényezők összege konstans lesz: $r^2 + rm + rm = \frac{A}{\pi}$.

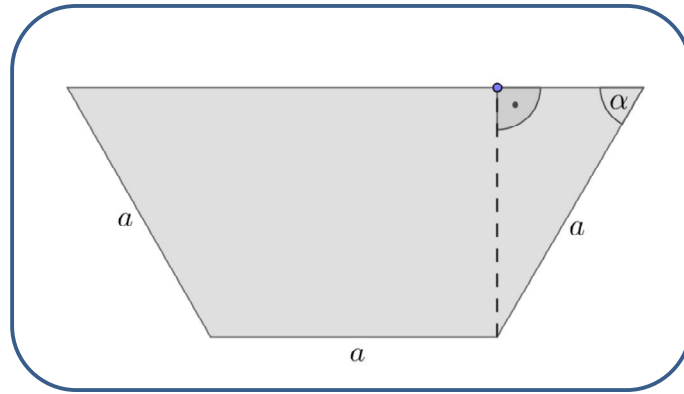
A számtani és mértani közép közti összefüggés szerint:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{r^2 \cdot rm \cdot rm} \leq \frac{r^2 + rm + rm}{3} = \frac{A}{3\pi} = \text{állandó.}$$

A felül nyitott henger térfogata maximális, ha egyenlőség áll fenn. Ez akkor teljesül, ha $r^2 = rm$, azaz $r = m \left(= \sqrt{\frac{A}{3\pi}} \right)$, a henger magassága az alapkör sugarával egyenlő.

13. Egy húrtrapéz keresztmetszetű vályú rövidebbik alapja és szárai a egység hosszúak. Határozza meg ezek közül annak a trapéznek a szögeit, amelynek a területe a legnagyobb!

Megoldás:



Az α hegyesszögű trapéz magassága $a \cdot \sin \alpha$, hosszabbik alapja $a + 2a \cdot \cos \alpha$, területe $a^2 \cdot \sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)$. Elég a $\sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)$ szorzat négyzetének a maximumát meghatározni. Alkalmazzuk a $\sin^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$ összefüggést, majd a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $(1 + \cos \alpha)$, $(1 + \cos \alpha)$, $(1 + \cos \alpha)$, $(3 - 3 \cos \alpha)$ kifejezésekre.

$$\sqrt[4]{(1 + \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot (3 - 3 \cos \alpha)} \leq \frac{6}{4}$$

A trapéz területe maximális, ha $1 + \cos \alpha = 3 - 3 \cos \alpha$, amiből $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$ adódik, a trapéz szögei 60° , 60° , 120° , 120° .

14. Határozza meg az $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$; $x \in \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás:

Egy f függvény értékkészlete mindazon valós számok halmaza, amelyre az $f(x) = p$ egyenletnek van megoldása.

Vizsgáljuk meg milyen p valós számokra van megoldása az $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = p$ egyenletnek.

A nevezővel ($\neq 0$) szorozva, és rendezve kapjuk: $(p - 1)x^2 - x + p - 1 = 0$.

Ha $p = 1$, akkor $x = p - 1 = 0$, van megoldása az egyenletnek;

Ha $p \neq 1$, akkor egyenletünk másodfokú, amelynek pontosan akkor van valós gyöke, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Megoldandó az $1 - 4(p - 1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenség.

Innen $4p^2 - 8p + 3 \leq 0$.

A $4p^2 - 8p + 3 = 0$ egyenlet gyökei: $\frac{1}{2}$, és $\frac{3}{2}$. A feltételt is figyelembe véve a másodfokú egyenletnek akkor van valós gyöke, ha $p \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$.

Összegezve:

Az eredeti egyenletnek akkor van megoldása (a valós számok halmazában), ha $p \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Ebből következik, hogy a vizsgált függvény minimuma $\frac{1}{2}$, maximuma $\frac{3}{2}$.

(A függvény minimumhelye $x = -1$, maximumhelye $x = 1$.)

15. Határozza meg a $\frac{3x^2 + 18x + 23}{x^2 + 6x + 10}$ kifejezés minimumát!

Útmutató: Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekre a $\frac{3x^2 + 18x + 23}{x^2 + 6x + 10} = p$ egyenletnek van valós megoldása!

$-4 \leq p < 3$; a kifejezés minimuma -4 .

16. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékeit!

$$f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$$

I. Megoldás:

Alkalmazzuk az addíciós tételket:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2 + \sin 2x + \cos 2x = \\ &= 2 + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \right) = 2 + \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $-1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$, kapjuk $2 - \sqrt{2} \leq f(x) \leq 2 + \sqrt{2}$,

tehát a függvény minimuma $2 - \sqrt{2}$, maximuma pedig $2 + \sqrt{2}$.

(A függvény minimumhelyei a $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ egyenlet gyökei: $\frac{5\pi}{8} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$, maximumhelyei a $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ egyenlet gyökei: $\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.)

II. Megoldás:

Határozzuk meg azokat a p paramétereket, amelyekre az alábbi egyenletnek van megoldása!

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = p !$$

$p = p \cos^2 x + p \sin^2 x$ felhasználásával kapjuk:

$$(1-p) \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + (3-p) \cos^2 x = 0 .$$

$p = 1$ esetén az egyenlet $2 \cos x (\sin x + \cos x) = 0$ alakra hozható, amelynek megoldásai a $\cos x = 0$ és a $\tan x = -1$ egyenlet gyökei. Ezért $p = 1$ eleme a függvény értékkészletének.

$p \neq 1$ esetén $\cos x = 0$ nem megoldás, (mert ez esetben $\sin x = 0$ is fennállna, ami lehetetlen a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság miatt,) így $\cos^2 x$ -szel oszthatunk és egyenletünk a következő lesz:

$$(1-p) \cdot \tan^2 x + 2 \cdot \tan x + 3 - p = 0 .$$

Ez a feltétel szerint $(\tan x)$ -ben másodfokú, s akkor van megoldása, ha $D = 4 - 4(1-p)(3-p) \geq 0$.

A p -re kapott másodfokú egyenlőtlenség megoldása a $[2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$ intervallum.

Mivel a fenti intervallumnak $p=1$ eleme, ezért ez egyben a függvény értékkészlete, és így a függvény minimuma $2 - \sqrt{2}$, maximuma pedig $2 + \sqrt{2}$.

17. Határozzuk meg a következő kifejezés minimumát, ha $\sin x \neq 0$ és $\cos x \neq 0$

$$\mathbf{K} = \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 !$$

Megoldás: Az első ötlet az lehetne, hogy alkalmazzuk a tetszőleges pozitív a számra vonatkozó

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ egyenlőtlenséget: } \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 \geq 2^2 + 2^2 = 8 .$$

Kérdés, hogy $\mathbf{K}$ -nak minimuma-e a 8, vagyis van-e olyan x valós szám, amelyre a kifejezés értéke 8. Egyenlőség akkor állna fenn, ha $\sin^2 x = \cos^2 x = 1$, ami nem lehetséges. Ezért bár a vizsgált kifejezés értéke legalább 8, nem 8 a minimuma.

Ennek oka az, hogy nem vettünk figyelembe egy fontos feltételt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Alkalmazzuk a négyzetes és a számtani közép közötti összefüggést

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}, \text{ ahol } a = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}, \text{ és } b = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} ! \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{K}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sin^2 2x} \geq \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$\uparrow$ (1) $\uparrow$ (2)

A (2) egyenlőtlenséget a $0 < \sin^2 2x \leq 1$ egyenlőtlenségből kaptuk.

Négyzetre emelés után $K \geq \frac{25}{2}$ adódik.

A $\frac{25}{2}$ akkor minimuma a kifejezésnek, ha van olyan x valós szám, amelyre egyenlőség áll fenn.

A (2) egyenlőtlenség akkor válik egyenlőséggé, ha $\sin^2 2x = 1$, azaz ha $\sin 2x = \pm 1$,

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Ebben az esetben (1)-nél is egyenlőség áll fenn, ugyanis ezekre az

x -ekre $\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5}{2}$ s így ezekre az x valós számokra

$$K = 2 \left(\frac{1}{2} + 2 \right)^2 = 12,5.$$

Tehát a K kifejezés minimuma 12,5.

18. Mutassuk meg, hogy a $K = \sqrt{5x - 4 - x^2} \cdot |\log_2 y| + \frac{|\log_y 2|}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}$ kifejezés értéke nagyobb $\sqrt[4]{24}$ -nél!

Megoldás:

Állapítsuk meg, hogy a kifejezés a változók mely értékeire értelmezett!

x : Meghatározzuk a $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$ és a $-x^2 + 4x - 3 > 0$ egyenlőtlenségek közös megoldásait. $1 < x < 3$;

y : $y > 0$; $y \neq 1$ (ezekre $|\log_2 y| > 0$ és $|\log_y 2| > 0$).

Mivel a fenti halmazon mindkét tag pozitív értékű, alkalmazható a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség:

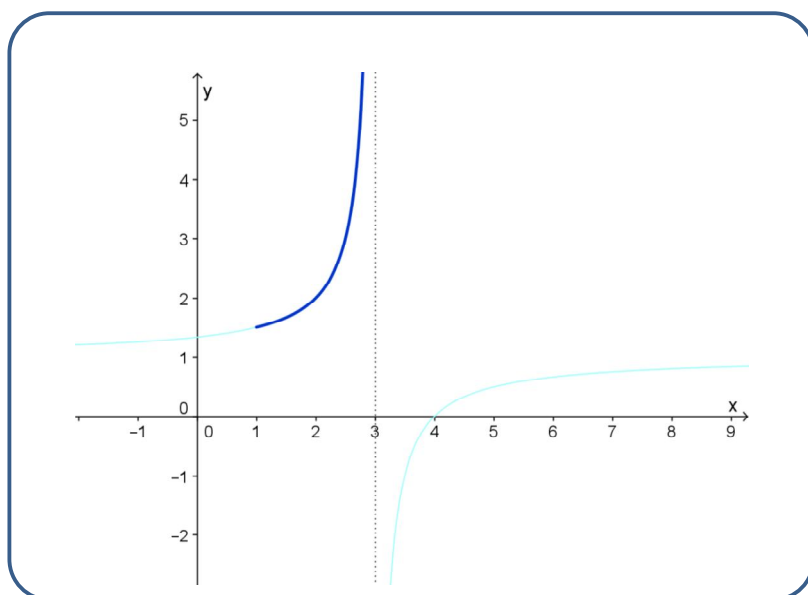
$$K = \sqrt{5x - 4 - x^2} \cdot |\log_2 y| + \frac{|\log_y 2|}{\sqrt{4x-3-x^2}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{5x-4-x^2}{4x-3-x^2}}}.$$

(Figyelembe vettük az $|\log_y 2| = \left| \frac{1}{\log_2 y} \right|$ azonosságot.)

A számláló és nevező szorzattá alakításával kapjuk:

$$K \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{(x-4) \cdot (1-x)}{(x-3) \cdot (1-x)}}} = 2 \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x-3}}.$$

Vizsgáljuk az $f(x) = 1 - \frac{1}{x-3}$; $x \in]1; 3[$ függvényt.



Az f függvény szigorúan monoton nő,

$x > 1$ miatt $1 - \frac{1}{x-3} > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, így $K > 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[4]{24}$, amit bizonyítani akartunk.

19. Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával, hogy az

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat felülről korlátos!

Útmutató:

Igazoljuk, hogy a sorozat egyik felső korlátja a 4. Ehhez a fenti n tényező szorzatot szorozzuk $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$ -del, majd alkalmazzuk az így kapott $n+2$ számra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

IV. Ellenőrző feladatok:

1. Mekkora az a oldalú szabályos háromszögbe írt maximális területű téglalap oldalai?
2. Adjuk meg az $x \mapsto 5 \cdot \operatorname{tg} x + 20 \cdot \operatorname{ctg} x$ függvény értékkészletét!
3. Határozza meg az $f:]0; 4] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x(6 - x)^2$ függvény maximumát!
4. Van-e maximális, ill. minimális térfogatú a 3 dm alkotójú forgáskúpok között? Ha van, mekkora a sugara, a magassága és a térfogata?
5. Az $54\pi \text{ cm}^2$ felszínű hengerek közül melyiknek a térfogata maximális? Adja meg a maximális térfogatú henger sugarát, magasságát és térfogatát!
6. Adott forgáskúpba írható forgáshengerek közül melyiknek legnagyobb a térfogata?
7. Állapítsuk meg az $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$ függvény szélsőértékeit.

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Mekkora az a oldalú szabályos háromszögbe írt maximális területű téglalap oldalai?

Megoldás: $\frac{a}{2}, a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

2. Adjuk meg az $x \mapsto 5 \cdot \operatorname{tg} x + 20 \cdot \operatorname{ctg} x$ függvény értékkészletét!

Megoldás: $]-\infty; -20] \cup [20; \infty[$

3. Határozza meg az $f:]0; 4] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x(6 - x)^2$ függvény maximumát!

Megoldás: A maximum értéke 32, helye :2.

4. Van-e maximális, ill. minimális térfogatú a 3dm alkotójú forgáskúpok között? Ha van, mekkora a sugara, a magassága és a térfogata?

Megoldás: Minimális nincs, a maximális térfogatú forgáskúp magassága $\sqrt{3}$ dm, sugara $\sqrt{6}$ dm,

térfogata $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ dm}^3$.

5. Az $54\pi \text{ cm}^2$ felszínű hengerek közül melyiknek a térfogata maximális? Adja meg a maximális térfogatú henger sugarát, magasságát és térfogatát!

Megoldás: A maximális térfogatú henger sugara 3 cm, magassága 6cm, térfogata $54\pi \text{ cm}^3$.

6. Adott forgáskúpba írható forgáshengerek közül melyiknek legnagyobb a térfogata?

Megoldás: Az R sugarú, M magasságú kúpba írható maximális térfogatú henger alapkörének sugara: $r = \frac{2R}{3}$, magassága: $m = \frac{1}{3}M$, $V_{\max} = \frac{4}{27}R^2 \cdot \pi \cdot M$.

7. Állapítsuk meg az $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$ függvény szélsőértékeit.

Megoldás: Minimuma: 1, maximuma: 3