

19. Területszámítás

I. Elméleti összefoglaló

Sokszög területe:

Minden sokszöghöz hozzárendelünk egy pozitív valós számot. A hozzárendelés az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- Az egység (oldalú) négyzet területe 1 (területegység);
- Egybevágó sokszögek területe egyenlő;
- Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, akkor e két sokszög területének az összege az eredeti sokszög területével egyenlő.

(Bizonyítható, hogy ez a hozzárendelés lehetséges és egyértelmű.)

Jelölése: T , t , illetve az ABC háromszög területe T_{ABC} vagy $T(ABC)$. (Ebben a fejezetben az utóbbi jelölést használjuk.)

Összefüggések:

- **Háromszög területe**

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

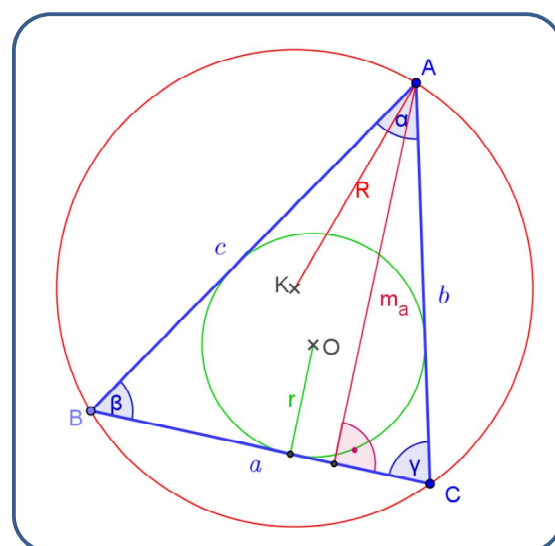
$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \text{ (trigonometrikus területképlet)}$$

$$T = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \alpha}$$

$$T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$T = r \cdot s, \text{ ahol } s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \text{ (Héron – képlet)}$$

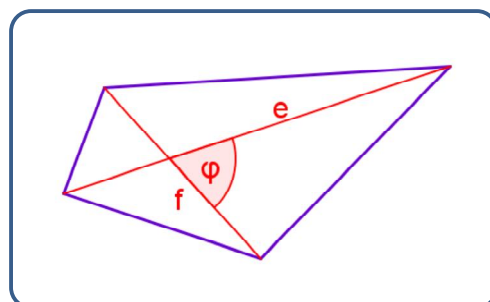


- **Négyszög területe:**

$$T = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2} \Rightarrow$$

deltoid (és rombusz):

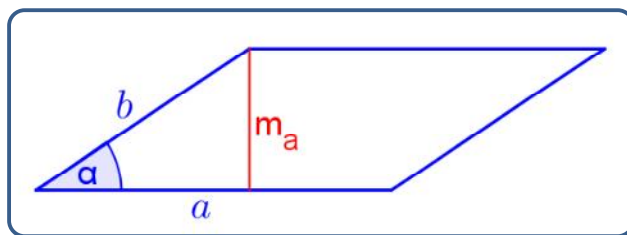
$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$



paralelogramma (rombusz):

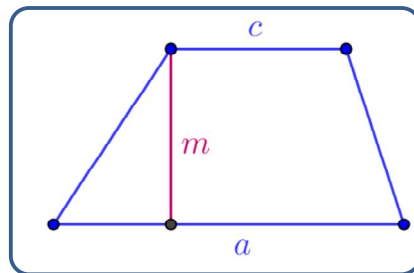
$$T = a \cdot m_a = a \cdot b \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

téglalap: $T = a \cdot b$,



trapéz:

$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m$$



érintősokszög:

$$T = \frac{K \cdot r}{2},$$

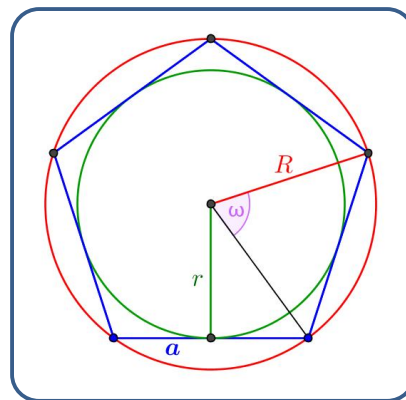
ahol K a sokszög kerülete, r a beírt kör sugara;

- n oldalú szabályos sokszög:**

$$T = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin \omega}{2} = n \cdot \frac{a \cdot r}{2},$$

ahol $\omega = \frac{360^\circ}{n}$,

R a körül írt kör, r a beírt kör sugara.



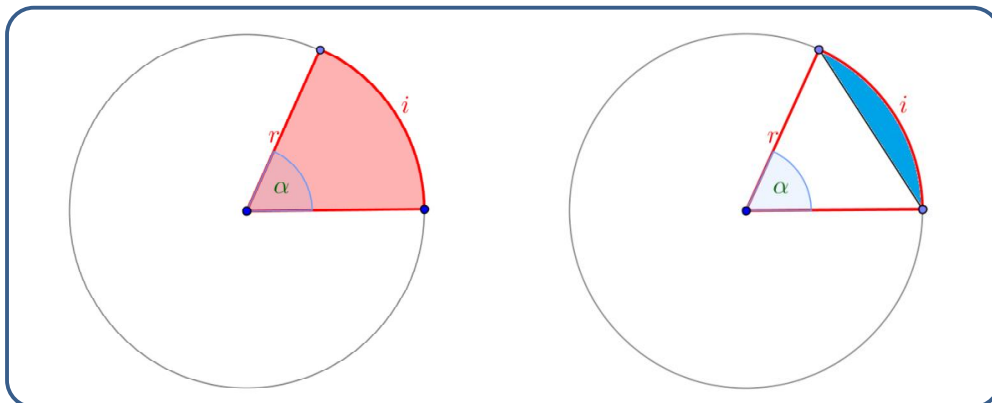
A kör és a kör részeinek területe

- Az r sugarú **kör** területe: $r^2 \cdot \pi$.
- Az r sugarú kör α középponti szögű **körcikkének** a területe:

$$T = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r^2 \cdot \hat{\alpha}}{2} = \frac{r \cdot i}{2},$$
 ahol α , illetve $\hat{\alpha}$ a középponti szög mértéke fokban, illetve radiánban, i a körív hossza.
- Az r sugarú kör α középponti szögű **körseletének** a területe:

$$T = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{r^2 \cdot \hat{\alpha}}{2} - \frac{r^2 \cdot \sin \hat{\alpha}}{2}.$$

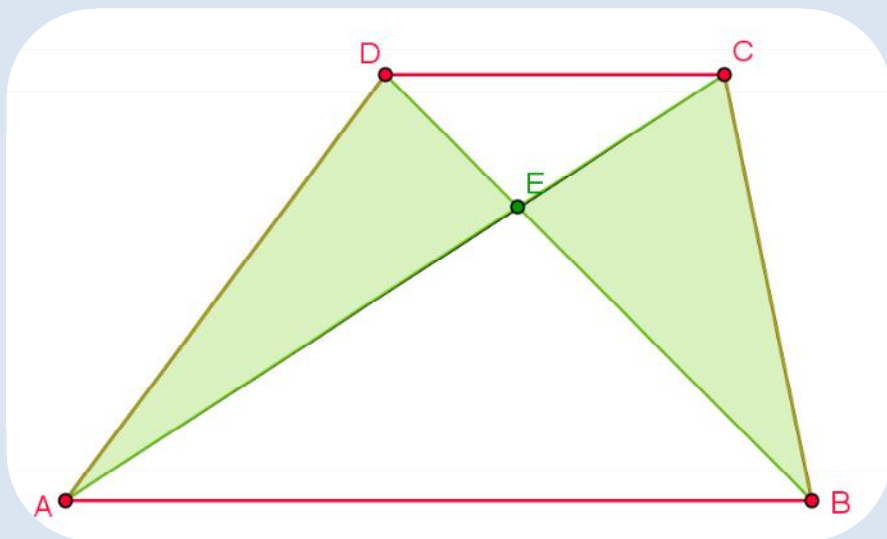
(A képlet akkor is jó eredményt ad, ha $\alpha > 180^\circ$.)



Tétel: Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő.

II. Kidolgozott feladatok

1. Egy trapézt két átlója négy háromszögre bontja. Igazoljuk, hogy a két színezett háromszög területe egyenlő.



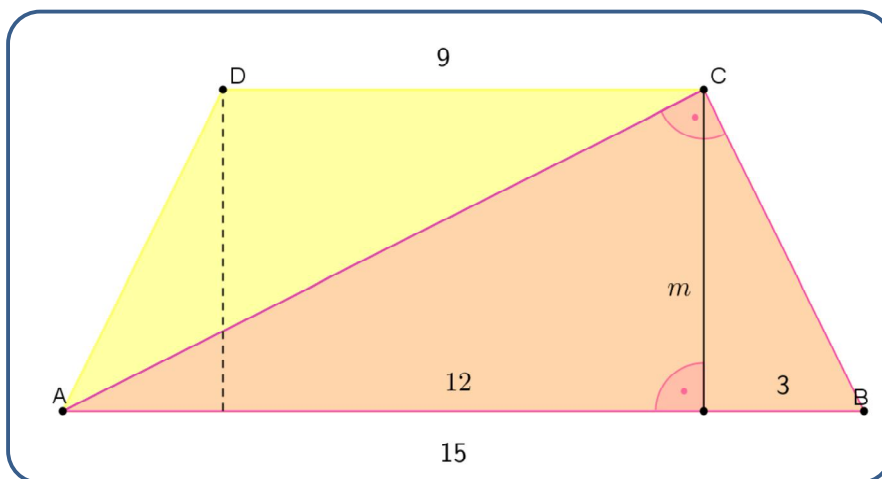
Megoldás:

ABD és ABC háromszögek területe egyenlő, mert AB oldaluk közös, és az ehhez tartozó magasságuk a párhuzamos CD és AB egyenesek távolsága.

$$T(AED) = T(ABD) - T(ABE) = T(ABC) - T(ABE) = T(BEC),$$

amit igazolni kellett.

2. Határozzuk meg a húrtrapéz területét, ha alapjai 9 cm és 15 cm, átlói pedig merőlegesek a szárakra!

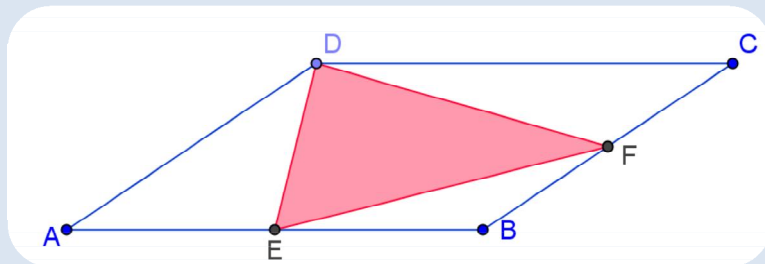


Megoldás:

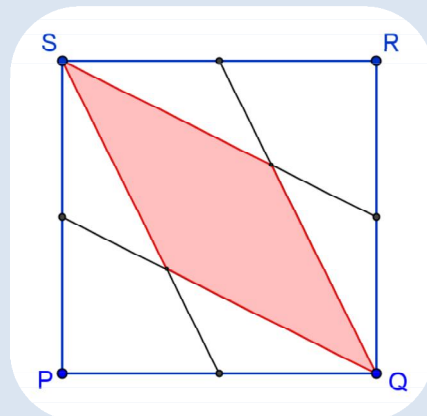
Az ABC derékszögű háromszögre alkalmazzuk a magasságtételt: $m = \sqrt{12 \cdot 3} = 6$. A trapéz területe: $\frac{15+9}{2} \cdot 6 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$.

3. Az ábrákon az $ABCD$ paralelogramma, illetve a $PQRS$ négyzet oldalfelező pontjait jelöltük meg. Határozzuk meg, hogy a színezett síkidom területe az eredeti négyszög területének hányad része!

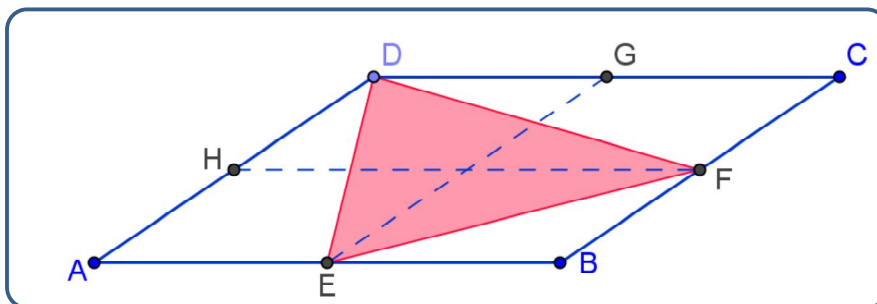
a)



b)

**Megoldás:**

a)



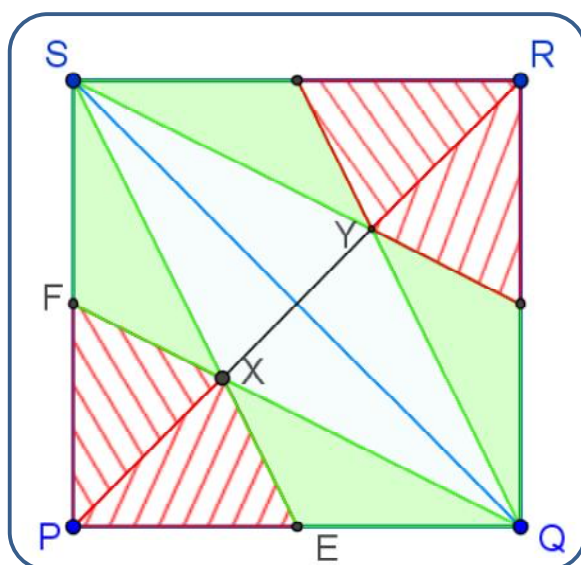
Az EFD háromszög t területét megkapjuk, ha az $ABCD$ paralelogramma T területéből kivonjuk az az EBF , az FCD és a DAE háromszögek területét. Húzzunk párhuzamosokat a paralelogramma oldalaival a felezőpontokon keresztül! Újabb paralelogrammákat kapunk. Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlója felezi a paralelogramma területét.

$$t = T - \frac{1}{8}T - \frac{1}{4}T - \frac{1}{4}T = \frac{3}{8}T.$$

Tehát az EFD háromszög területe, a paralelogramma területének $\frac{3}{8}$ része.

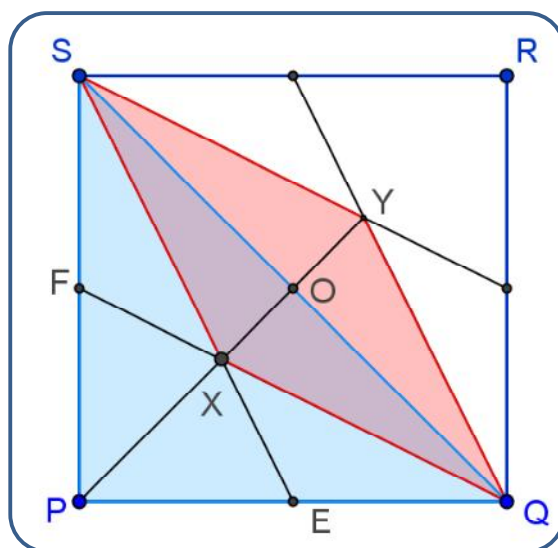
Megjegyzés: A trigonometrikus területképlet alkalmazásával is kiszámolhatjuk, hogy az EBF , az FCD és a DAC háromszögek területe hányad része a paralelogramma területének. (Például $T(EBF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \beta = \frac{1}{8}T$, ahol a paralelogramma B csúcsba futó oldalai a és b , a közbezárt szög pedig β .)

b) I. Megoldás:



Az ábra szimmetrikus a négyzet átlóira, ezért az azonosan jelölt háromszögek egybevágók, területük egyenlő. A négyzet területét az SQ átló felezi. A PQS háromszög területét felezi az SE súlyvonal, a PXS háromszöget pedig az XF súlyvonal. Jelöljük t -vel a PXF háromszög területét! A fentiek szerint $T(PES) = 3t$, $T(PQS) = 6t$, és a $PQRS$ négyzet területe $12t$. Így a $SXQY$ négyszög területe $12t - 8t = 4t$, a négyzet területének harmada.

II. Megoldás:



A szimmetria miatt a színezett sokszög rombusz, területe az SXQ háromszög területének a kétszerese. Vegyük észre, hogy FQ és SE szakaszok a PQS háromszög súlyvonalai, X metszéspontjuk a háromszög súlypontja. SXQ háromszög területe a PQS háromszög területének harmada, mert SQ oldaluk közös, az ehhez tartozó magasságukra $XO = \frac{1}{3}PO$ áll fenn. Ezért a rombusz területe

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{T}{2} \right) = \frac{T}{3},$$

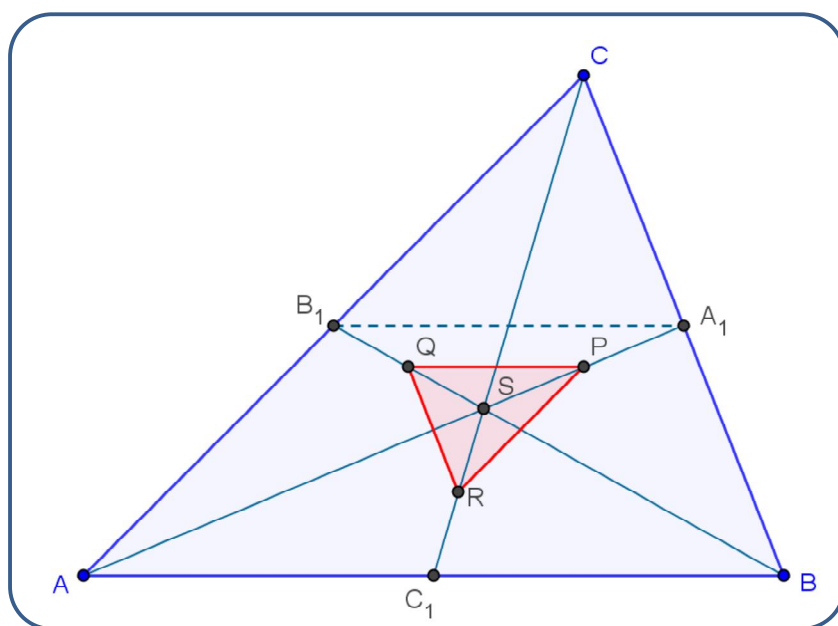
ahol T a $PQRS$ négyzet területe. Tehát a színezett terület a négyzet területének harmada.

Megjegyzés:

- A rombusz (és így a négyzet) területe, átlói szorzatának a fele. A rombusz SQ átlója a négyzet átlójával egybeesik, XY átlója a négyzet átlójának harmadával egyenlő. Ezért a rombusz területe a négyzet területének harmada.
- Az, hogy PX és ezzel együtt YR és XY a négyzet átlójának a harmada, a PXE és RXS háromszögek hasonlóságával is igazolható. Tehát anélkül, hogy felhasználnánk azt, hogy X a PQS háromszög súlypontja.

4. Jelölje az ABC háromszögben a súlypont és az oldalfelező pontok közötti szakaszok felezőpontjait P, Q , és R . Állapítsuk meg a PQR és az ABC háromszögek területének arányát!

Megoldás:

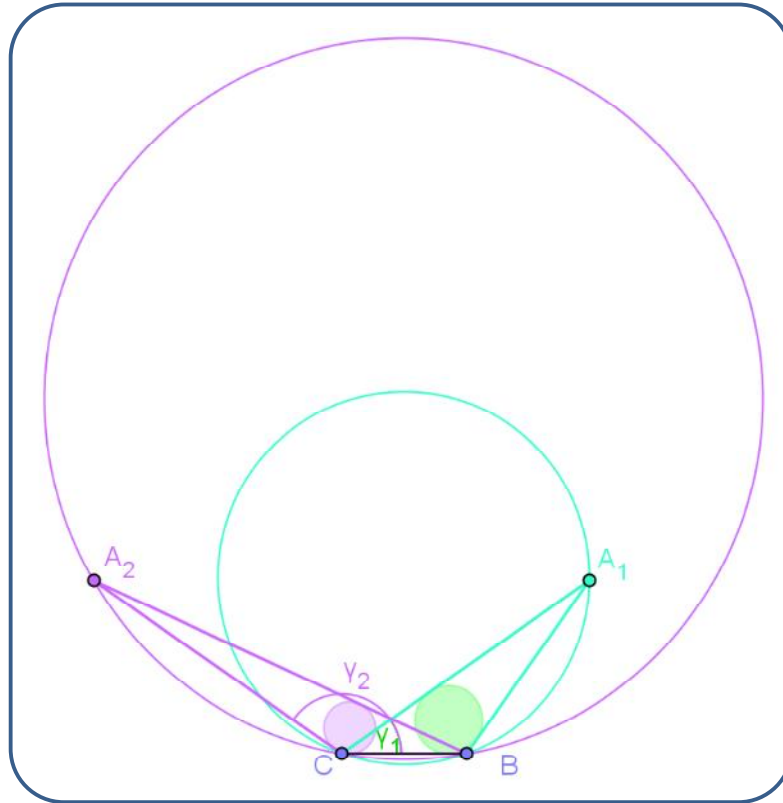


Az ábra jelöléseit használjuk. B_1A_1 az ABC háromszög közpvonala ezért $B_1A_1 \parallel AB$ és $B_1A_1 = \frac{1}{2}AB$. QP a B_1A_1S háromszög közpvonala, ezért $QP \parallel B_1A_1$ és $QP = \frac{1}{2}B_1A_1$. Így $QP \parallel AB$ és $QP = \frac{1}{4}AB$. Ehhez hasonlóan igazolható a PQR háromszög másik két oldaláról, hogy párhuzamos az ABC háromszög egy-egy oldalával, és a hossza annak a negyede. Ebből következik, hogy $PQR \sim ABC$, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{4}$. Hasonló sokszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért PQR a háromszög területe az ABC háromszög területének $\frac{1}{16}$ része.

Megjegyzés: A feltételekből következik, hogy az S középpontú $\left(-\frac{1}{4}\right)$ arányú hasonlóság az ABC háromszöget a PQR háromszögbe viszi.

5. Egy háromszög területe 136 cm^2 , két oldala, 14 cm illetve 34 cm . Adjuk meg a háromszög harmadik oldalát, beírt és köré írt körének sugarát!

Megoldás:



Legyen a két adott oldal a és b , a háromszög területe T . Alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet!

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2T}{a \cdot b} \approx 0,5714$$

Az adatok nem határozzák meg egyértelműen a háromszöget. $\gamma_1 \approx 34,85^\circ$, $\gamma_2 \approx 145,15^\circ$.

A háromszög harmadik oldalát koszinusztétellel lehet kiszámolni.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

az adatokkal: $c_1 \approx 23,89 \text{ cm}$, $c_2 \approx 46,19 \text{ cm}$.

A beírt kör sugarát a $T = s \cdot r$ képlet segítségével határozzuk meg. Az 1. háromszög félkerülete:

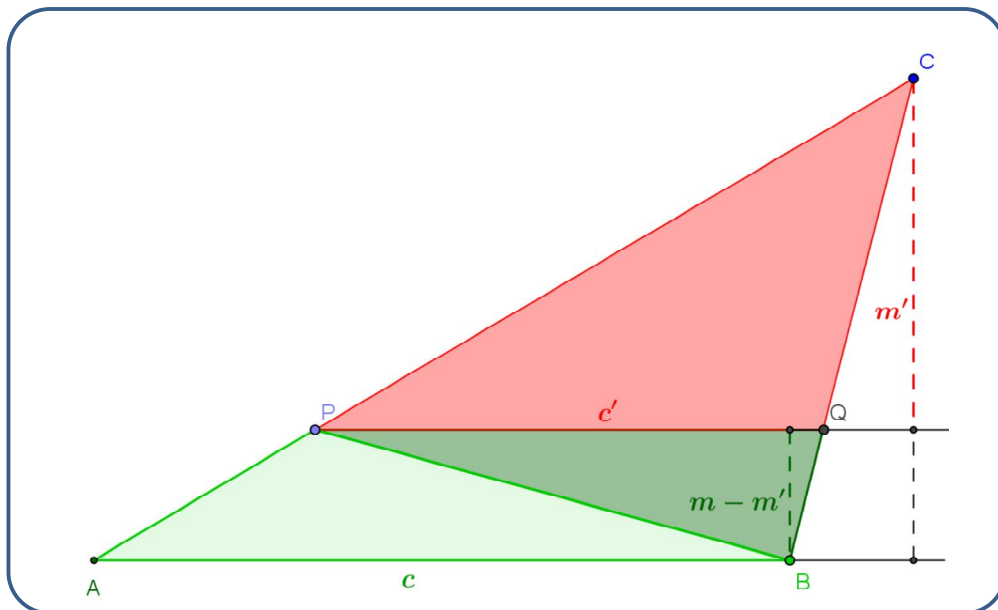
$s_1 \approx 35,945 \text{ cm}$, a beírt kör sugara: $r_1 = \frac{T}{s_1} \approx 3,78 \text{ cm}$, a 2. háromszögben $s_2 \approx 47,09 \text{ cm}$, a beírt

kör sugara: $r_2 \approx 2,89 \text{ cm}$. A köré írt kör sugarát az $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4T}$ összefüggésből számítjuk ki.

$R_1 \approx 20,90 \text{ cm}$, $R_2 \approx 40,42 \text{ cm}$.

6. Az ABC háromszög AC , illetve BC oldalára illeszkedő P , illetve Q pontokat összekötő szakasz párhuzamos AB -vel. Bizonyítsuk be, hogy a PBC háromszög területe mértani közepe az ABC és a PQC háromszögek területének!

Megoldás:



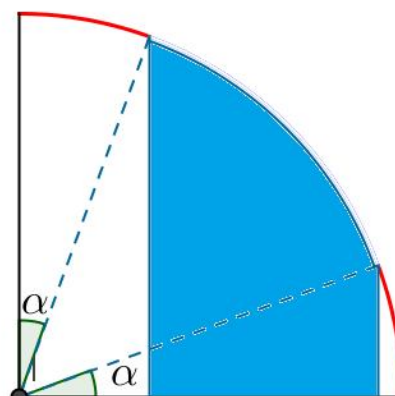
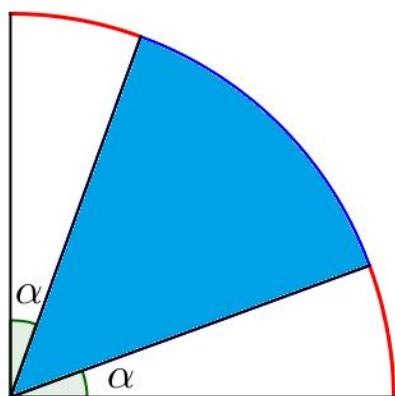
PQC háromszög hasonló ABC háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. A megfelelő szakaszok arányát jelöljük λ -val: $\lambda = \frac{c'}{c} = \frac{m'}{m}$. Fejezzük ki a háromszögek területét!

$$T(ABC) = \frac{c \cdot m}{2}, \quad T(PQC) = \frac{c' \cdot m'}{2} = \lambda^2 \cdot \frac{c \cdot m}{2},$$

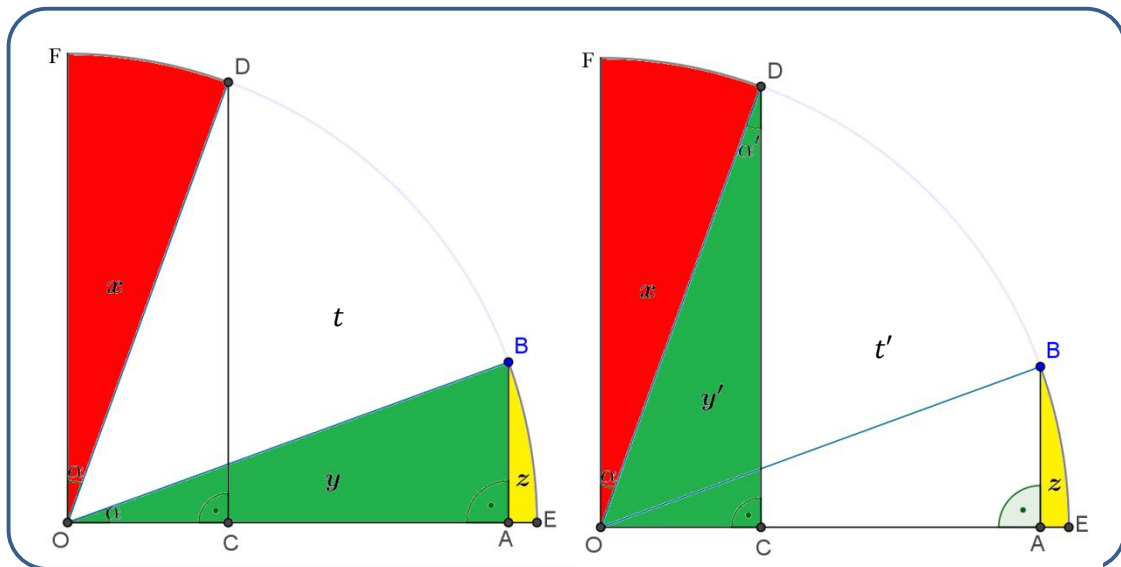
$$T(PBC) = T(PBQ) + T(QCP) = \frac{c' \cdot (m - m')}{2} + \frac{c' \cdot m'}{2} = \frac{c' \cdot m}{2} = \lambda \cdot \frac{c \cdot m}{2}$$

Az ABC és a PQC háromszögek területének mértani közepe: $\sqrt{\left(\frac{c \cdot m}{2}\right) \cdot \left(\lambda^2 \cdot \frac{c \cdot m}{2}\right)} = \lambda \cdot \frac{c \cdot m}{2} = T(PBC)$, amit igazolni kellett.

7. Bizonyítsuk be, hogy az egybevágó negyedkörökben a színezett síkidomok területe egyenlő!



Megoldás:



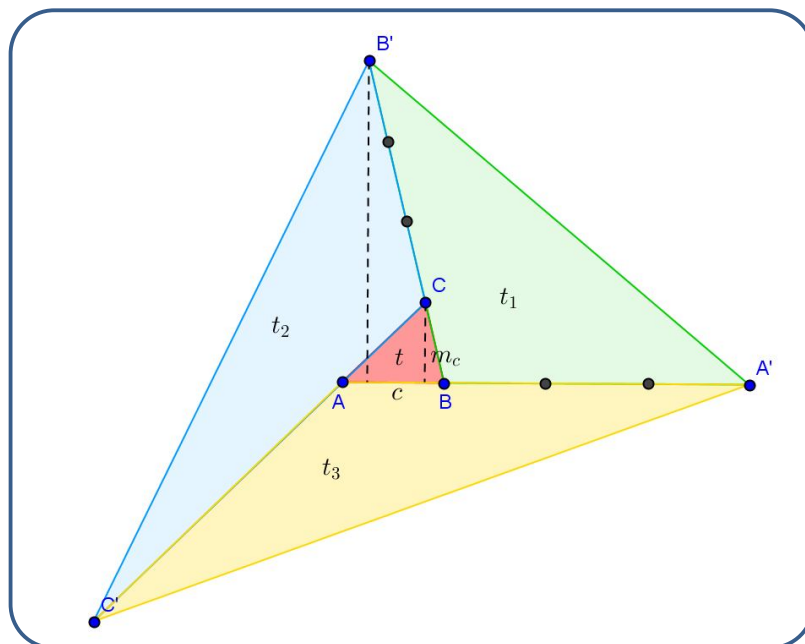
$FOD\angle = ODC\angle = \alpha$, mert váltószögek, ezért a két egyenlő átfogójú derékszögű háromszög egybevágó: $OAB\Delta \cong DCO\Delta$, így területük is egyenlő $y = y'$. Az EOC negyedkör területe

$$T = x + y + z + t = x + y' + z + t',$$

ezért az OBD körcikk területe és a $CABD$ síkidom területe egyenlő.

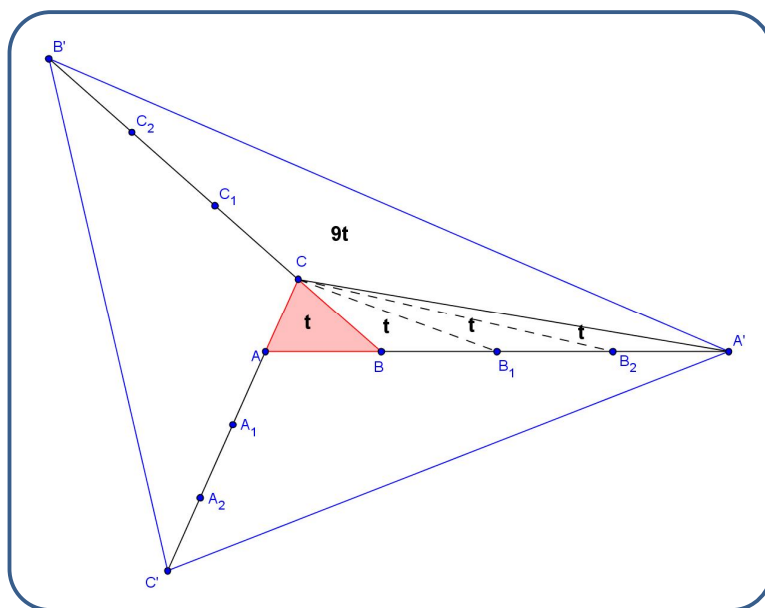
8. Az ABC háromszög AB oldalát B -n túl $3AB$ -vel, BC oldalát C -n túl $3BC$ -vel AC oldalát A -n túl $3AC$ -vel meghosszabbítjuk. Így kapjuk az A', B', C' pontokat. Hányszorosa az $A'B'C'$ háromszög területe az ABC háromszög területének?

I. Megoldás:



Tekintsük az ABC és a $BA'B'$ háromszöget! Rajzoljuk be az AB , illetve a BA' oldallakhoz tartozó magasságot! Ezek párhuzamosak, ezért alkalmazható a párhuzamos szelőszakaszok tétele. Eszerint a BA' oldalhoz tartozó magasság $4m_c$, és így a $BA'B'$ háromszög területe $t_1 = \frac{3c \cdot 4m_c}{2} = 12t$, ahol t az ABC háromszög területe. Hasonlóan mutatható meg, hogy a $CB'C'$ és az $AC'A'$ háromszögek területe szintén $12t$. Ezért az $A'B'C'$ háromszög területe $T = t + t_1 + t_2 + t_3 = 37t$ alapján, az ABC háromszög területének 37-szerese.

II. Megoldás:



A $BA'C$ háromszög és az ABC háromszög AB oldalegyeneshez tartozó magassága (C csúcsnak az AB egyenestől mért távolsága) egyenlő, ezért területük aránya BA' és AB oldalak arányával egyenlő, tehát $T(BA'C) = 3t$. Hasonló okból $B'CA'$ háromszög területe $3 \cdot 3t = 9t$, illetve $T(BA'B') = 12t$. Ugyanígy mutatható meg, hogy a $CB'C'$ és az $AC'A'$ háromszögek területe is $12t$. Ezért az $A'B'C'$ háromszög területe az ABC háromszög területének 37-szerese.

III. Megoldás:

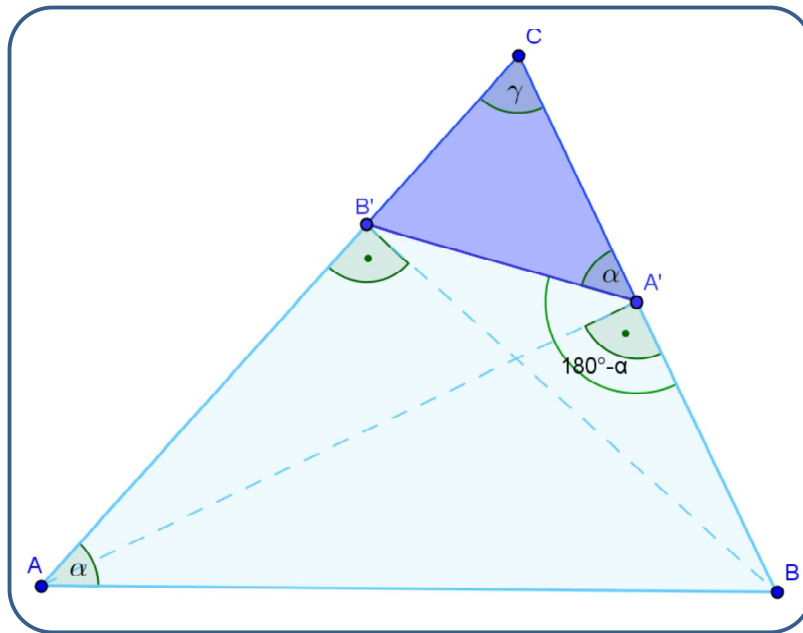
Kiszámolhatjuk a háromszögek területét a trigonometrikus területképlet segítségével is. Ha az ABC háromszög oldalait a, b, c , szögeit α, β, γ jelöli, akkor a hozzáírt háromszögek területe:

$$t_1 = \frac{3c \cdot 4a \cdot \sin(180^\circ - \beta)}{2} = 12 \cdot \frac{c \cdot a \cdot \sin \beta}{2} = 12t, \quad t_2 = \frac{3a \cdot 4b \cdot \sin(180^\circ - \gamma)}{2} = 12 \cdot \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = 12t, \quad \text{valamint}$$

$$t_3 = \frac{3b \cdot 4c \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{2} = 12 \cdot \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = 12t. \quad \text{Így az } A'B'C' \text{ háromszög területe az } ABC \text{ háromszög területének 37-szerese.}$$

9. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB = 10$ cm. Az A és B csúcsokból induló magasságvonalak A' , ill. B' pontban metszik a BC , ill. az AC oldalt. Az $A'B'C$ háromszög területe az ABC háromszög területének $\frac{1}{5}$ része. Mekkora $A'B'$ szakasz hossza?

Megoldás:



A' és B' magasságtalppontok, ezért illeszkednek AB szakasz Thalész-körére. Így $ABA'B'$ húrnégyszög, $\angle BA'B' = 180^\circ - \alpha$, tehát $\angle B'A'C = \alpha$. Ebből következik, hogy $ABC \sim A'B'C$, hiszen két szögük, α és γ , egyenlő. Hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, azaz $\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \lambda^2 = \frac{1}{5}$, ebből az $A'B'$ szakasz hossza $\frac{10}{\sqrt{5}} \text{ cm} = 2 \cdot \sqrt{5} \text{ cm} \approx 4,47 \text{ cm}$.

10. Egy háromszög három magassága 6 cm, 8 cm, 12 cm hosszú. Számítsuk ki a háromszög oldalainak hosszát és a háromszög területét!

Megoldás:

A háromszög területének kétszerese: $2T = a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c$, így

$$a = \frac{2T}{6} = \frac{4T}{12}$$

$$b = \frac{2T}{8} = \frac{3T}{12}$$

$$c = \frac{2T}{12}$$

$x = \frac{T}{12}$ ($x > 0$) jelölés bevezetésével, $a = 4x$, $b = 3x$, $c = 2x$; Írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen! A háromszög területe egyrészt a Héron-képlettel, $s = \frac{9}{2}x$ figyelembe vételével:

$$T = \sqrt{\frac{9}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{2}x \cdot \frac{5}{2}x} = \frac{3}{4}\sqrt{15} \cdot x^2,$$

másrészt $T = 12x$. A $\frac{3}{4}\sqrt{15} \cdot x^2 = 12x$ egyenlet pozitív gyöke:

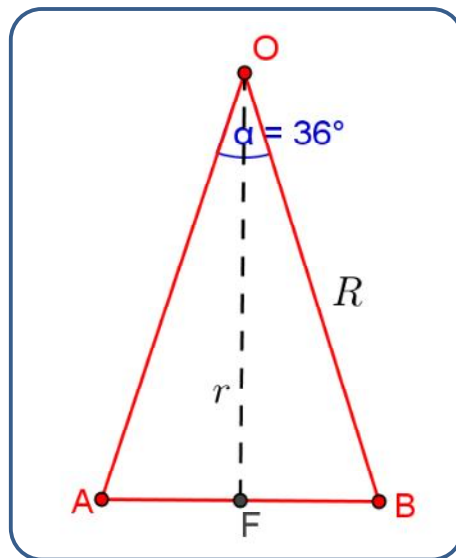
$$x = \frac{12}{\frac{3}{4} \cdot \sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}.$$

Ez alapján a háromszög oldalai: $a = 4x = \frac{64\sqrt{15}}{15} \text{ cm} \approx 16,52 \text{ cm}$, $b = 3x = \frac{16\sqrt{15}}{5} \text{ cm} \approx 12,39 \text{ cm}$,
 $c = 2x = \frac{32\sqrt{15}}{15} \text{ cm} \approx 8,26 \text{ cm}$, területe: $T = 12x = \frac{64\sqrt{15}}{5} \text{ cm}^2 \approx 49,57 \text{ cm}^2$.

11. Egy szabályos 10-szög területe 420 cm^2 . Mekkora az oldala, leghosszabb átlója és a beírt kör sugara?

Megoldás:

A szabályos tízszög 10 egybevágó egyenlőszárú háromszögre bontható. E háromszögek szárszöge 36° .



Az ABO háromszög területe: $42 = \frac{R^2 \cdot \sin 36^\circ}{2}$. Ebből a szabályos tízszög köré írt körének sugara

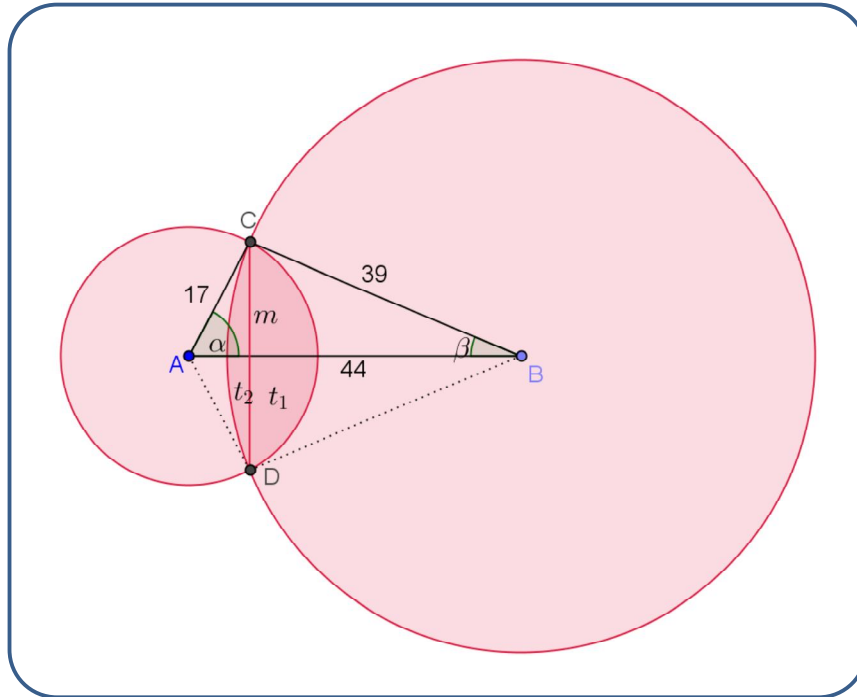
$$R^2 = \frac{84}{\sin 36^\circ} \approx 142,91 \Rightarrow R \approx 11,95 \text{ cm},$$

a leghosszabb átló ennek kétszerese: $23,9 \text{ cm}$.

A beírt kör sugara az ABO háromszög r magassága: $r = R \cdot \cos 18^\circ \approx 11,37 \text{ cm}$. A tízszög oldala $a = 2 \cdot R \cdot \sin 18^\circ \approx 7,39 \text{ cm}$.

12. Két metsző kör sugara 17 cm , illetve 39 cm , középpontjaik távolsága 44 cm . Határozzuk meg a két kör közös húrját, valamint annak a síkidomnak a területét, amelyet mindkét kör lefed!

Megoldás:



A két kör közös húrja az ábrán szereplő ABC háromszög AB oldalához tartozó magasság kétszerese. A háromszög három oldalának ismeretében kiszámítható a háromszög területe (például) a Héron-képlet segítségével: $T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$. Itt $s = 50$, $T = \sqrt{50 \cdot 33 \cdot 11 \cdot 6} = 330 \text{ (cm}^2\text{)}$. Másrészt a háromszög területe négyzetcentiméterben $T = \frac{44 \cdot m}{2} = 22 \cdot m$. Innen $m = 15 \text{ cm}$, a közös húr hossza 30 cm .

A közösen lefedett rész területe két körszelet területének az összege. Ehhez ismerni kell a megfelelő középponti szögeket, 2α -t és 2β -t, ahol α és β az ABC háromszög szögei.

$$\sin \alpha = \frac{m}{17} = \frac{15}{17} \Rightarrow \alpha \approx 61,93^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{m}{39} = \frac{15}{39} \Rightarrow \beta \approx 22,62^\circ$$

A fenti körszeletek területét megkapjuk, ha a 2α , illetve 2β középponti szögű körívek területéből kivonjuk a megfelelő egyenlő szárú háromszög területét.

$$t_1 = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 17^2 \cdot \pi - \frac{17^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} \approx 192,38$$

$$t_2 = \frac{2\beta}{360^\circ} \cdot 39^2 \cdot \pi - \frac{39^2 \cdot \sin 2\beta}{2} \approx 60,48$$

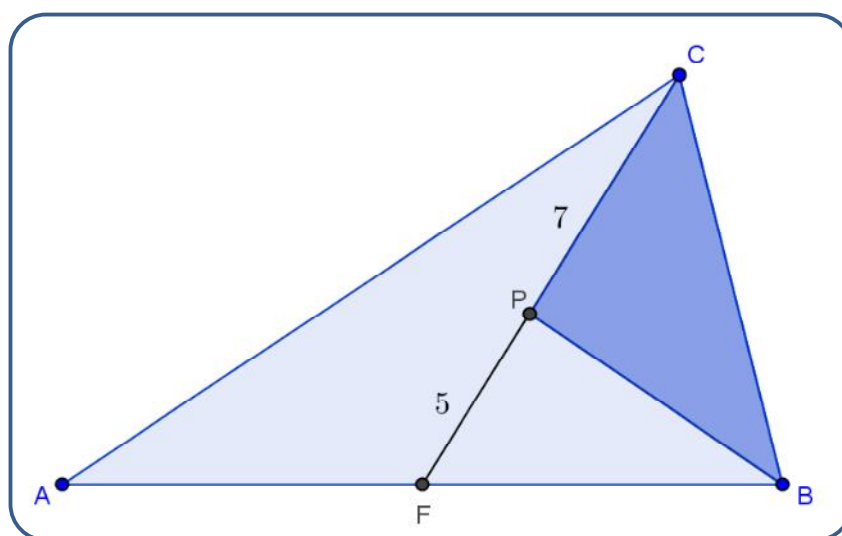
$$t_1 + t_2 \approx 252,86$$

Tehát a két körlap közös részének a területe $252,86 \text{ cm}^2$.

Megjegyzés: A szögek illetve a körök közös húrja meghatározható a koszinusztétel többszöri alkalmazásával is.

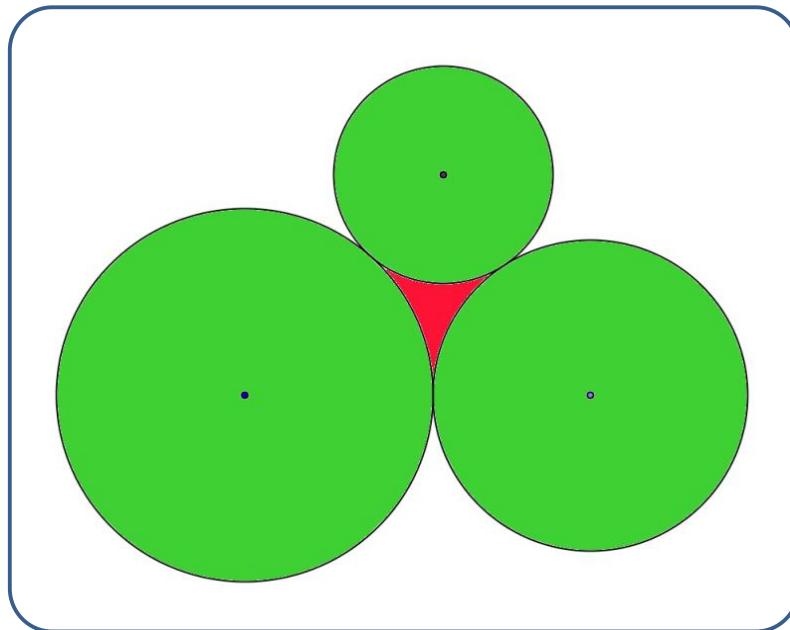
III. Ajánlott feladatok

1. Az a oldalú szabályos háromszöget tükrözzük a súlypontjára. Határozzuk meg az eredeti és a tükrözött háromszög közös részének területét!
2. Hogyan kell felvenni az ABC háromszög AB oldalán a D , AC oldalán az E pontot úgy, hogy az ADE , a DEB és az EBC háromszögek területe megegyezzen?
3. Egy derékszögű háromszög köré írt körének sugara 17 cm, beírt körének sugara 6 cm. Mekkora a háromszög oldalai és területe?
4. Az ABC háromszög AB oldalának B -hez közelebbi harmadolópontja H , a BC oldal B -hez közelebbi negyedelőpontja N_1 , C -hez közelebbi negyedelőpontja N_2 . A CA oldal felezőpontja F . Bizonyítsuk be, hogy az FHN_1 és az FHN_2 háromszögek területének összege az ABC háromszög területének a felével egyenlő!
5. Egy trapézt két átlója négy háromszögre bontja. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe T és t . Fejezzük ki ezek segítségével a trapéz területét! (A műszaki és természettudományi jellegű egyetemekre pályázók felvételi feladata; 1975)
6. Az ABC háromszög CF súlyvonalán vegyük fel azt a P pontot, amelyre $CP:PF = 7:5$. Adjuk meg a PBC és az ABC háromszögek területének arányát!



7. Egy konvex négyszög szemközti oldalainak középpontjait összekötve, az négy négyszögre bontható. Ha ezek közül háromnak a területe 8, 16, illetve 20 területegység, akkor mekkora a negyedik résznégyszög területe? (A tudományegyetemek természettudományi karaira, valamint a műszaki egyetemekre felvételizők feladata; 1995.)
8. Egy trapéz két párhuzamos oldalának hossza a és b ($a < b$); egy ezekkel az oldalakkal párhuzamosan húzott szakasz a trapézt két egyenlő területű részre osztja. Mekkora ennek a szakasznak a hossza? (Pótfelvételizők feladata; 1987)
9. Messe az ABC háromszög BC oldalával párhuzamos egyenes az AB oldalt a D , az AC oldalt az E pontban! Jelöljük M -mel a BC oldal tetszés szerinti pontját! Tudjuk, hogy az ABC háromszög területe T , az ADE háromszög területe pedig t . Mekkora az $ADME$ négyszög területe? (Pótfelvételizők feladata; 1986)

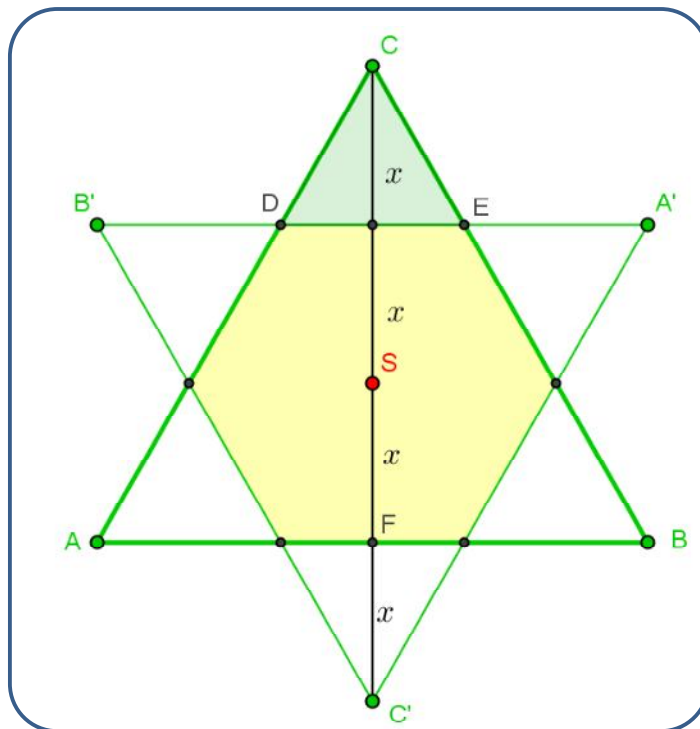
10. Az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja F . $AB = \sqrt{10}$ egység, $BC = \sqrt{30}$ egység és $AC = 4 \cdot BF$. Számítsuk ki az AC oldal hosszát és a háromszög területét!
11. Egy $\sqrt{13}$ egység sugarú körbe olyan konvex hatszöget írunk, amelynek három oldala $2a$, másik három oldala $5a$ egység hosszú. Számítsuk ki a hatszög területét!
12. Az $ABCD$ konvex négyszög alakú telek következő adatait mértük meg: $AB = 20$ m, $\angle ABC = 105^\circ$; $\angle ABD = 60^\circ$; $\angle DAB = 90^\circ$; $\angle CAB = 45^\circ$. Számítsuk ki a négyszög területét! (Budapesti Műszaki Egyetem felvételi próbadolgozat feladata; 1991.)
13. Egy kör $2r$ átmérője fölé egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk. Mekkora a háromszög körön kívül fekvő részének a területe?
14. Három öntöző berendezés az ábrán zölddel jelölt kör alakú területeket látja el vízzel. Határozzuk meg a körök közötti, pirossal jelölt terület nagyságát, ha a körök sugara 12 m, 10 m és 7 m!



Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Az a oldalú szabályos háromszöget tükrözzük a súlypontjára. Határozzuk meg az eredeti és a tükrözött háromszög közös részének területét!

Megoldás:

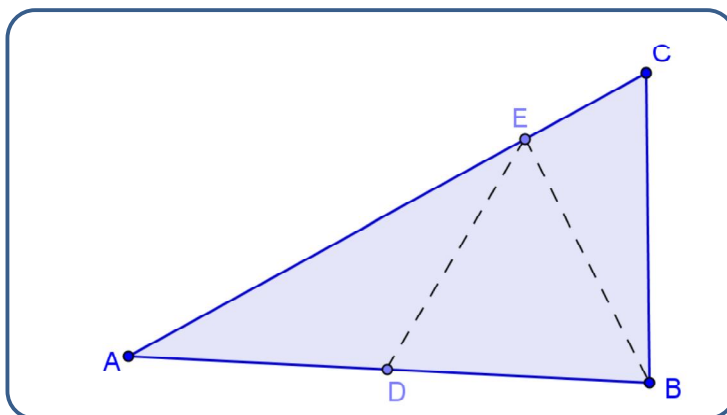


Az ábra jelöléseit használjuk. A tükrözés miatt $CS = C'S$, másrészt S a háromszög súlypontja, ezért $CS = 2SF = 2x$. Ezért $DECA \sim ABC$, a hasonlóság aránya $1:3$. Az ABC és $A'B'C'$ háromszög közös része egy $\frac{a}{3}$ oldalú szabályos hatszög. Ennek területe hat $\frac{a}{3}$ oldalú szabályos háromszög területének összege

$$T = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{6}.$$

2. Hogyan kell felvenni az ABC háromszög AB oldalán a D , AC oldalán az E pontot úgy, hogy az ADE , a DEB és az EBC háromszögek területe megegyezzen?

Megoldás:

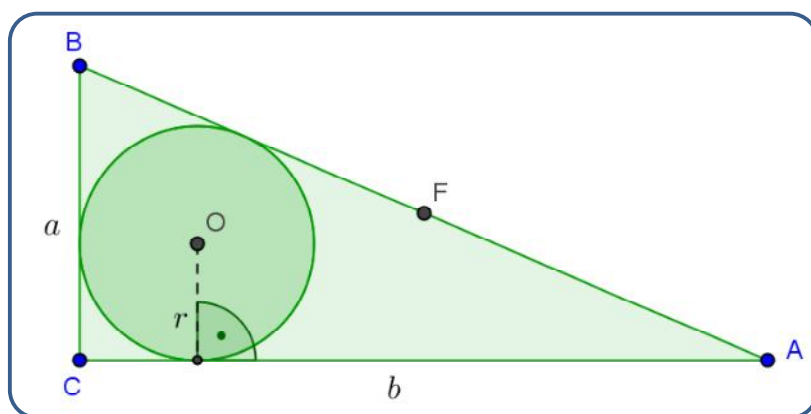


Az EBC és az ABC háromszög háromszögek EC , illetve AC oldalához tartozó magasságaik egybeesnek, ezért területük aránya EC és AC szakaszok arányával egyenlő. Mivel $T(EBC) = \frac{1}{3}T(ABC)$, ezért E az AC oldal C -hez közelebbi harmadolópontja.

A feltétel szerint $T(ADE) = T(DBE)$, és a két háromszög E csúcsból induló magassága megegyezik, ezért az ehhez tartozó oldalak is egyenlők: $AD = DB$. Tehát D az AB oldal felezőpontja.

3. Egy derékszögű háromszög köré írt körének sugara 17 cm, beírt körének sugara 6 cm. Mekkora a háromszög oldalai és területe?

Megoldás:



Thalész-tétel szerint a derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja, így az átfogó 34 cm hosszú. A háromszög területének kétszerese:

$$r \cdot (a + b + c) = a \cdot b \Rightarrow 6 \cdot (a + b + 34) = a \cdot b.$$

A Pitagorasz-tétel alapján

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1156.$$

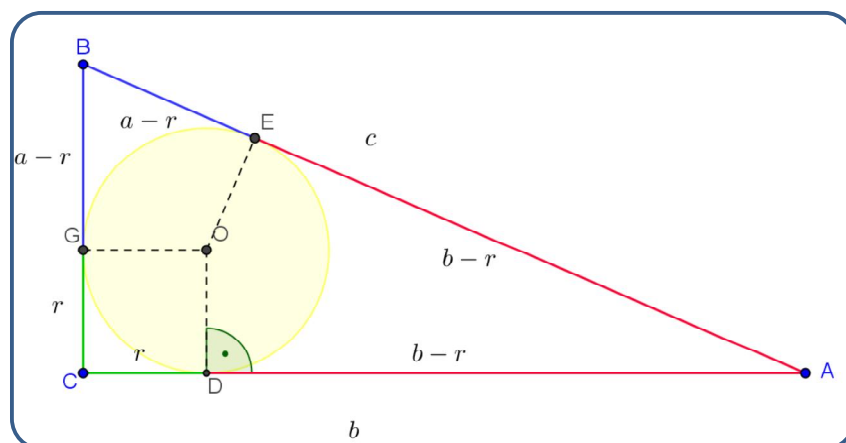
Alkalmazzuk az $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ azonosságot:

$$(a + b)^2 = 1156 + 12(a + b + 34)$$

Jelöljük $(a + b)$ -t x -szel! Az $x^2 - 12x - 1564 = 0$ egyenlet pozitív gyöke: $x = 46$. Visszahelyettesítve, az $\left. \begin{array}{l} a + b = 46 \\ a \cdot b = 480 \end{array} \right\}$ egyenletrendszert kapjuk. Innen $b = 46 - a$, $46a - a^2 = 480$

Az $a^2 - 46a + 480 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei: 30 és 16. A derékszögű háromszög befogói 16 cm és 30 cm, területe 240 cm^2 .

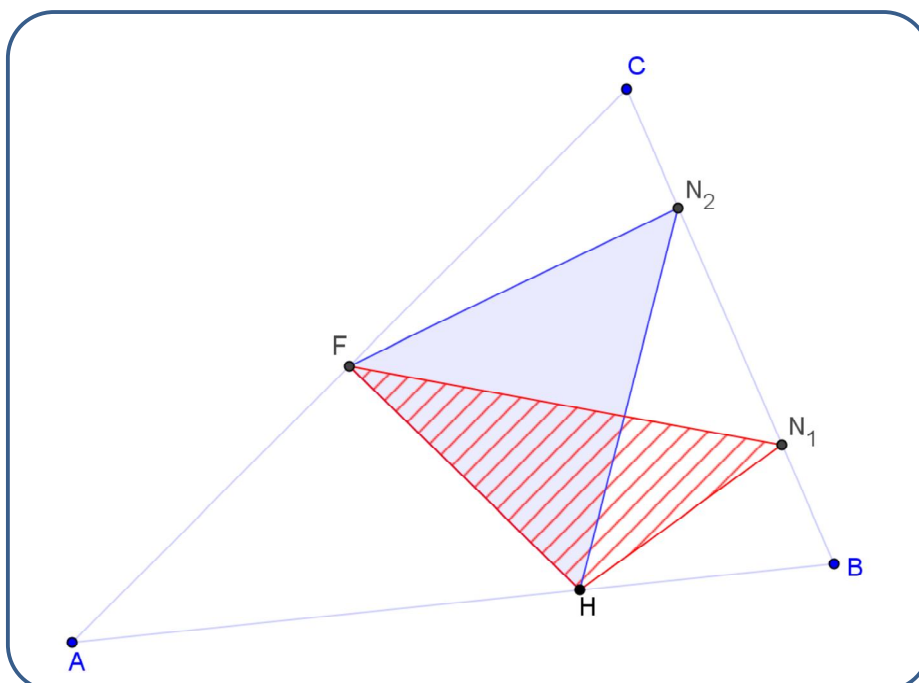
Megjegyzés:



Az $a + b = 46$ összefüggést a következő úton is megkapjuk: Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét figyelembe véve, az azonos színnel jelölt szakaszok egyenlő hosszúak. $CD = CG = r$, mert a $CDOG$ deltoid négyzet. Így az átfogó $c = (a - r) + (b - r)$, amiből az adatokkal $a + b = 46$ következik.

4. Az ABC háromszög AB oldalának B -hez közelebbi harmadolópontja H , a BC oldal B -hez közelebbi negyedelőpontja N_1 , C -hez közelebbi negyedelőpontja N_2 . A CA oldal felezőpontja F . Bizonyítsuk be, hogy az FHN_1 és az FHN_2 háromszögek területének összege az ABC háromszög területének a felével egyenlő!

Megoldás:



A megoldás során felhasználjuk, hogy ha két háromszög egyik szöge közös, akkor területük aránya a közös csúcsba futó oldalak szorzatának arányával egyenlő. Ez a trigonometrikus területképletnek egyszerű következménye. A HN_1F háromszög területét megkapjuk, ha az ABC háromszög

területéből kivonjuk az AHF , BHN_1 és az N_1CF háromszögek területét. Ugyanezzel a módszerrel jutunk a HN_2F háromszög területéhez.

$$T(HN_1F) = T(ABC) - T(AHF) - T(BHN_1) - T(N_1CF) = T - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot T - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} T - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot T =$$

$$= \frac{24 - 8 - 2 - 9}{24} \cdot T = \frac{5}{24} \cdot T.$$

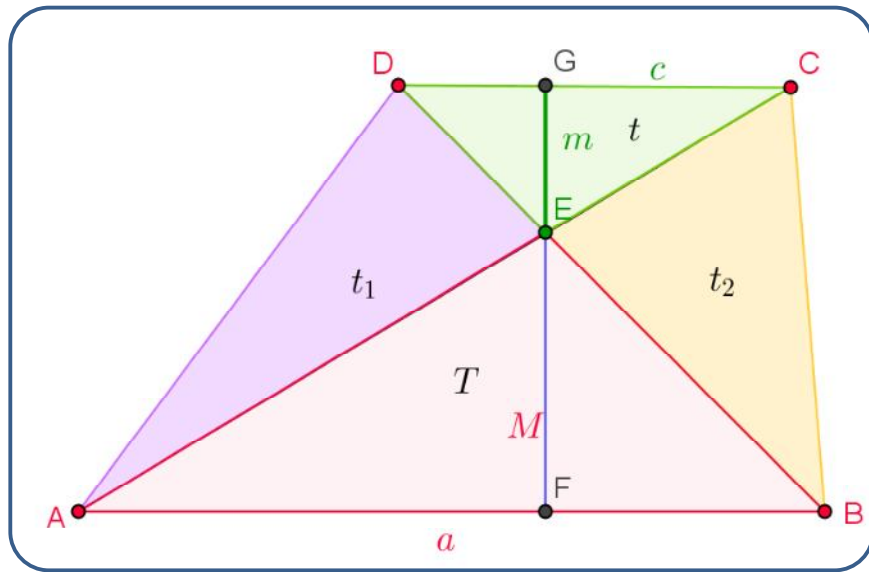
$$T(HN_2F) = T(ABC) - T(AHF) - T(HBN_2) - T(N_2CF) = T - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot T - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} T - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot T =$$

$$= \frac{24 - 8 - 6 - 3}{24} \cdot T = \frac{7}{24} \cdot T.$$

Így a két háromszög területének összege az ABC háromszög területének a fele $\left(\frac{5}{24} + \frac{7}{24} = \frac{1}{2}\right)$, amit igazolni kellett.

5. Egy trapézt két átlója négy háromszögre bontja. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe T és t . Fejezzük ki ezek segítségével a trapéz területét!
(A műszaki és természettudományi jellegű egyetemekre pályázók felvételi feladata; 1975)

Megoldás:



$ABE\Delta \sim CDE\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők. ($\angle EAB = \angle CED$, mert csúcsszögek, $\angle EBA = \angle ECD$, mert váltószögek.) A hasonló háromszögek területének aránya megfelelő szakaszaik négyzetének arányával egyenlő: $\frac{t}{T} = \left(\frac{m}{M}\right)^2$. Ebből következik: $\frac{m}{M} = \sqrt{\frac{t}{T}}$. AED háromszög területe

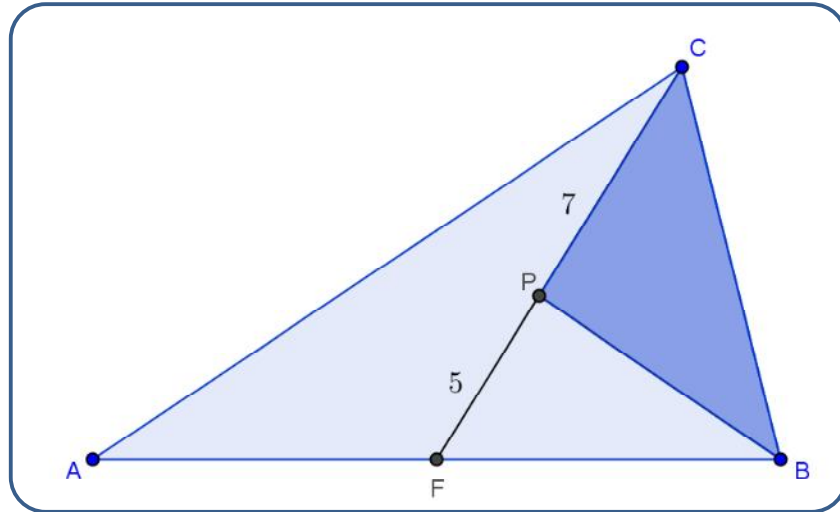
$$t_1 = T(ABD) - T(ABE) = \frac{a(M+m)}{2} - \frac{aM}{2} = \frac{am}{2}.$$

Az 1. kidolgozott feladat szerint $t_1 = t_2$. Másrészt $\frac{am}{2} = \frac{aM}{2} \cdot \frac{m}{M} = T \cdot \sqrt{\frac{t}{T}} = \sqrt{Tt}$. Így a trapéz területe: $T + t + 2\sqrt{Tt} = (\sqrt{T} + \sqrt{t})^2$.

Megjegyzés: A $t_1 = \sqrt{Tt}$ összefüggés a következőképpen is megmutatható: $t_1 = \frac{am}{2}$ -hez hasonlóan levezethető $t_2 = \frac{cm}{2}$. $t_1 = t_2$ alapján $am = cm$ és így

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{amcm}{4} = \frac{aM}{2} \cdot \frac{cm}{2} = T \cdot t \Rightarrow t_1 = t_2 = \sqrt{Tt}.$$

6. Az ABC háromszög CF súlyvonalán vegyük fel azt a P pontot, amelyre $CP:PF = 7:5$. Adjuk meg a PBC és az ABC háromszögek területének arányát!

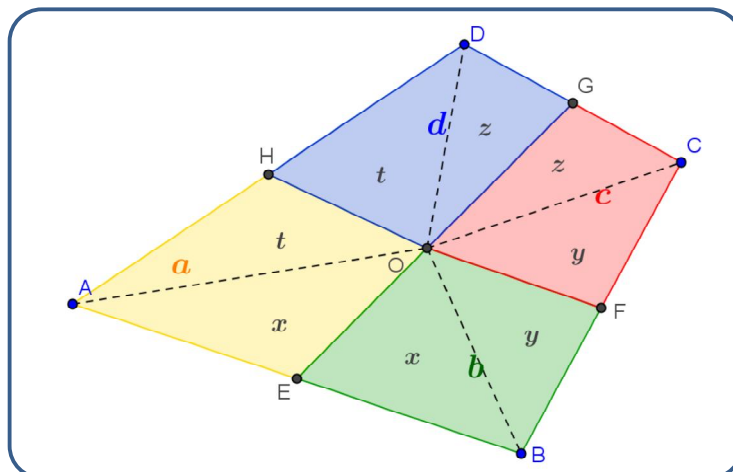


Megoldás:

Az FBP háromszög és a PBC háromszög B csúcsához tartozó magassága közös, ezért területük aránya a B csúccsal szemben fekvő oldalaik $PF:CP = 5:7$ arányával egyenlő. Tehát $T(FBP) = \frac{5}{7}t$, és $T(FBC) = \frac{12}{7}t$ ahol t a PBC háromszög területe. Az ABC háromszög CF súlyvonala a háromszöget két egyenlő területű háromszögre bontja. Így $T(ABC) = 2 \cdot T(FBC) = \frac{24}{7}t$, tehát a két háromszög területének kért aránya: $\frac{T(PBC)}{T(ABC)} = \frac{7}{24}$.

7. Egy konvex négyszög szemközti oldalainak középpontjait összekötve, az négy négyszögre bontható. Ha ezek közül háromnak a területe 8, 16, illetve 20 területegység, akkor mekkora a negyedik résznégyszög területe? (A tudományegyetemek természettudományi karaira, valamint a műszaki egyetemekre felvételizők feladata; 1995.)

Megoldás:



A középvonalak O metszéspontját kössük össze a csúcsokkal. Az AOB háromszögnek EO szakasz súlyvonala, mert E felezi AB -t. Az AEO és EBO háromszögek területe egyenlő, mert az egyenlő hosszúságú AE és EB oldalakhoz tartozó magasságuk egybeesik. Hasonlóan BOC , COD , DOA háromszögek területét felezi az FO , GO , HO szakaszok. Az ábra jelöléseit használva (a négyszögek területét a -val, b -vel, c -vel, illetve d -vel, a részháromszögek területét x , y , z , és t betűkkel jelölve), kapjuk: $a + c = t + x + y + z = b + d$, azaz a feladatban szereplő négyszögek közül a szemköztesek területének összege egyenlő. Három lehetőség van aszerint, hogy az ismeretlen területű négyszög a 8, a 16, vagy a 20 egység területű négyszöggel fekszik-e szemben.

$$1. \text{ eset: } T = 16 + 20 - 8 = 28$$

$$2. \text{ eset: } T = 8 + 20 - 16 = 12$$

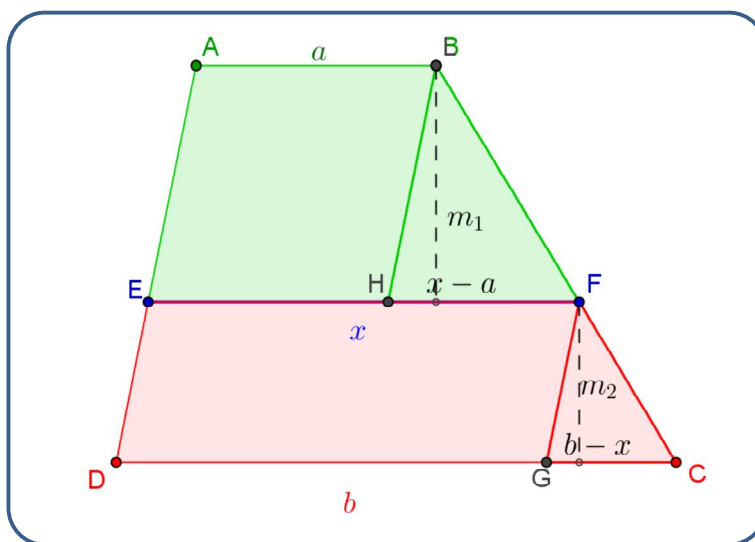
$$3. \text{ eset: } T = 8 + 16 - 20 = 4$$

Tehát a negyedik négyszög területe 28 területegység vagy 12 területegység vagy 4 területegység.

8. Egy trapéz két párhuzamos oldalának hossza a és b ($a < b$); egy ezekkel az oldalakkal párhuzamosan húzott szakasz a trapézt két egyenlő területű részre osztja. Mekkora ennek a szakasznak a hossza? (Pótfelvételizők feladata; 1987)

Megoldás:

EF a trapéz alapjaival párhuzamos, a trapéz területét felező szakasz. Hosszát jelöljük x -szel! Az



$EFBA$ és $DCFE$ trapézok magasságát m_1 -gyel, illetve m_2 -vel jelöljük. Húzzunk párhuzamost az AD szárral a B és az F pontokon keresztül! Ezek az EF , illetve a DC szakaszt H , illetve G pontokban metszik. A szögek egyenlősége miatt $GCF\Delta \sim HFB\Delta$. Megfelelő szakaszaik aránya egyenlő:

$$\frac{b-x}{x-a} = \frac{m_2}{m_1}.$$

A feltétel szerint $EFBA$ és $DCFE$ trapézok területe egyenlő, ezért

$$\frac{b+x}{2} \cdot m_2 = \frac{a+x}{2} \cdot m_1.$$

A két egyenletből kapjuk:

$$\frac{b-x}{x-a} = \frac{a+x}{b+x}.$$

$$b^2 - x^2 = x^2 - a^2, \text{ ahonnan}$$

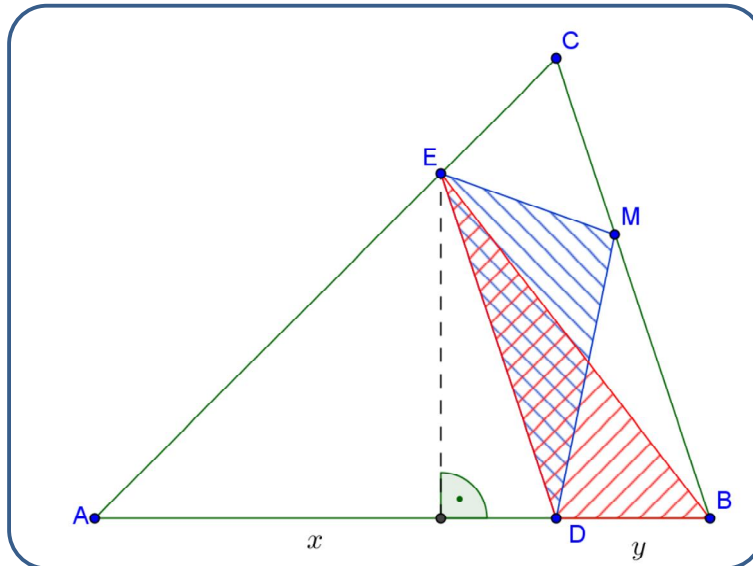
$$x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ és}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Tehát a trapéz területét felező, az alapokkal párhuzamos szakasz hossza az alapok hosszának négyzetes közepe.

9. Messe az ABC háromszög BC oldalával párhuzamos egyenes az AB oldalt a D , az AC oldalt az E pontban! Jelöljük M -mel a BC oldal tetszés szerinti pontját! Tudjuk, hogy az ABC háromszög területe T , az ADE háromszög területe pedig t . Mekkora az $ADME$ négyszög területe? (Pótfelvételizők feladata; 1986)

Megoldás:



$ED \parallel BC \Rightarrow T(EDM) = T(EDB)$, mert a két háromszög ED oldala és a hozzá tartozó magassága egyenlő. Jelöljük ezt a közös területet t' -vel. ADE és DBE háromszögek $AD = x$, illetve $DB = y$ oldalához tartozó magassága közös, ezért területük aránya a közös magassághoz tartozó oldalak arányával egyenlő:

$$\frac{t'}{t} = \frac{y}{x}. \quad (1)$$

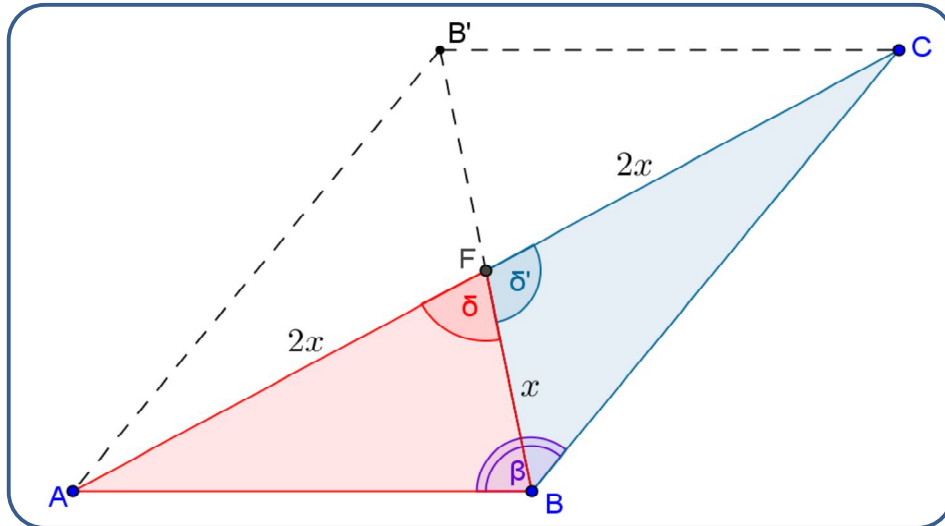
ABC és ADE háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyenlők. Területük aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő:

$$\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 = \frac{T}{t}.$$

Ebből $1 + \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{T}{t}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{T}{t}} - 1$. Az (1) összefüggést is figyelembe véve kapjuk: $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{T}{t}} - 1$, amiből t' kifejezhető: $t' = \sqrt{Tt} - t$. Így az $ADME$ négyszög területe $t + t' = \sqrt{Tt}$.

10. Az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja F . $AB = \sqrt{10}$ egység, $BC = \sqrt{30}$ egység és $AC = 4 \cdot BF$. Számítsuk ki az AC oldal hosszát és a háromszög területét!

Megoldás:



Ha $FB = x$, akkor $AF = FC = 2x$. Írjuk fel a koszinusztételt az ABF és a BFC háromszögek AB , illetve BC oldalára!

$$\begin{cases} 10 = 4x^2 + x^2 - 4x^2 \cdot \cos \delta \\ 30 = 4x^2 + x^2 - 4x^2 \cdot \cos \delta' \end{cases}$$

$\delta' = 180^\circ - \delta \Rightarrow \cos \delta' = -\cos \delta$, ezért a fenti két egyenlet összege: $40 = 10x^2$, ahonnan $x = 2$, $AC = 8$ egység. A területet meghatározhatjuk akár a Héron-képlettel, akár a háromszög egyik szögének meghatározása után, a trigonometrikus területképlettel. Ez utóbbi módszert választjuk. Felírjuk a β szögre a koszinusztételt:

$$64 = 10 + 30 - 2\sqrt{300} \cdot \cos \beta.$$

Innen $\cos \beta = -\frac{24}{20\sqrt{3}} = -\frac{6}{5\sqrt{3}}$. A $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ azonosság alapján

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25},$$

így ($\sin \beta > 0$ figyelembe vételével) $\sin \beta = \frac{\sqrt{13}}{5}$, a háromszög területe

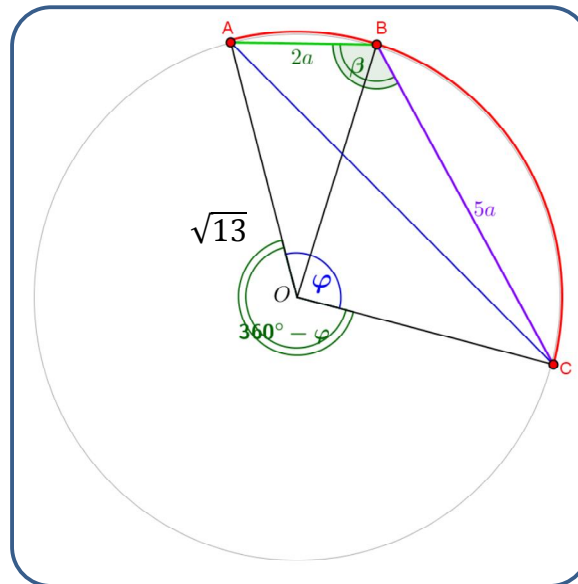
$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{30} \cdot \frac{\sqrt{13}}{5} = \sqrt{39} \text{ területegység.}$$

Megjegyzések:

- A terület pontos értékének meghatározásához $\sin \beta$ pontos értékére volt szükség, ezért β meghatározása nélkül, azonnal a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosságot alkalmaztuk.
- Az $x = 2$ egyenlőség koszinusztétel felírása nélkül is megkapható. Ehhez a következő tételt kell tudni: A paralelogramma átlóinak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő. (A tétel bizonyítása a 14. Vektorok fejezetben megtalálható.) Ha az ABC háromszöget F -re tükrözzük, az $ABCB'$ paralelogrammát kapjuk, amelyre alkalmazzuk a fenti tételt.

11. Egy $\sqrt{13}$ egység sugarú körbe olyan konvex hatszöget írunk, amelynek három oldala $2a$, másik három oldala $5a$ egység hosszú. Számítsuk ki a hatszög területét!

Megoldás:



A $2a$ és $5a$ oldalak között biztosan lesznek olyanok, amelyek egymás mellettiek. Az ábra egy ilyen részletet mutat. A kör középpontjából az AC húr $\varphi = 120^\circ$ -os szögben látszik. A középponti és kerületi szögek tétele alapján β a $360^\circ - \varphi = 240^\circ$ fele, tehát β is 120° . Az AOC és az ABC háromszögre felírt koszinusztétellel a meghatározható.

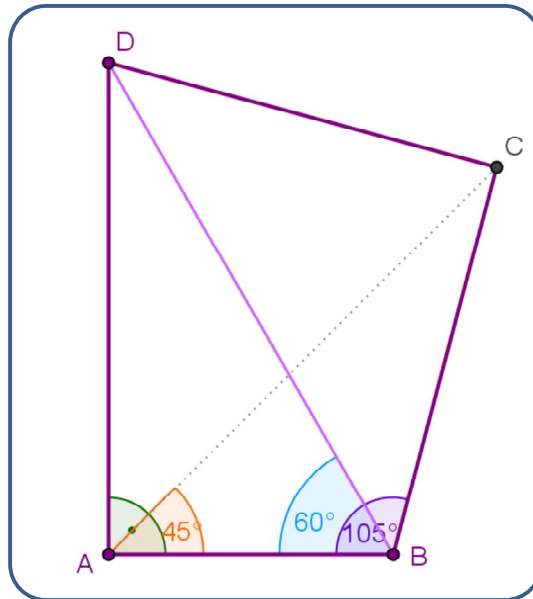
$$\left. \begin{aligned} AC^2 &= 13 + 13 - 2 \cdot 13 \cdot \cos 120^\circ \\ AC^2 &= 4a^2 + 25a^2 - 2 \cdot 10a^2 \cdot \cos 120^\circ \end{aligned} \right\}$$

Innen $39 = 39a^2$, tehát $a = 1$ egység. A hatszög területe az $OABC$ négyszög területének háromszorosa. A négyszög területe az OAC és az ABC háromszögek területének összege. A hatszög területe:

$$T = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{69\sqrt{3}}{4} \text{ területegység (29,88 területegység).}$$

12. Az $ABCD$ konvex négyszög alakú telek következő adatait mértük meg: $AB = 20$ m, $\angle ABC = 105^\circ$; $\angle ABD = 60^\circ$; $\angle DAB = 90^\circ$; $\angle CAB = 45^\circ$. Számítsuk ki a négyszög területét! (Budapesti Műszaki Egyetem felvételi próbadolgozat feladata; 1991.)

I. Megoldás:



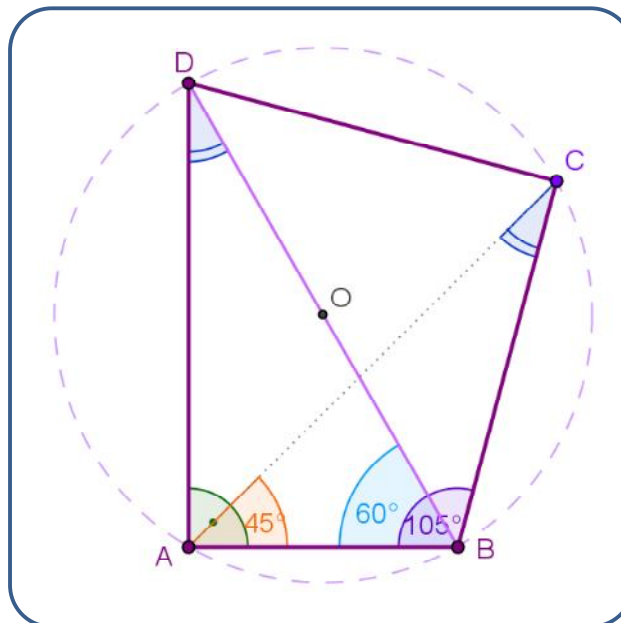
Az $ABCD$ négyszöget a BD átló két háromszögre bontja. Az ABD derékszögű háromszög befogói $AB = 20$ m, $AD = 20 \cdot \sqrt{3}$ m, átfogója $BD = 40$ m, területe $T_1 = 200 \cdot \sqrt{3}$ m². Az ABC háromszög BC oldala szinusz-tétel alkalmazásával kiszámítható. $\angle ACB = 30^\circ$, így

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow BC = 20\sqrt{2}.$$

$$\text{A } BCD \text{ háromszög területe: } T_2 = \frac{BD \cdot BC \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{40 \cdot 20\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 400 \text{ (m}^2\text{)}.$$

A telek területe: $T_1 + T_2 = 200(\sqrt{3} + 2)$ m² $\approx 746,4$ m².

II. Megoldás:

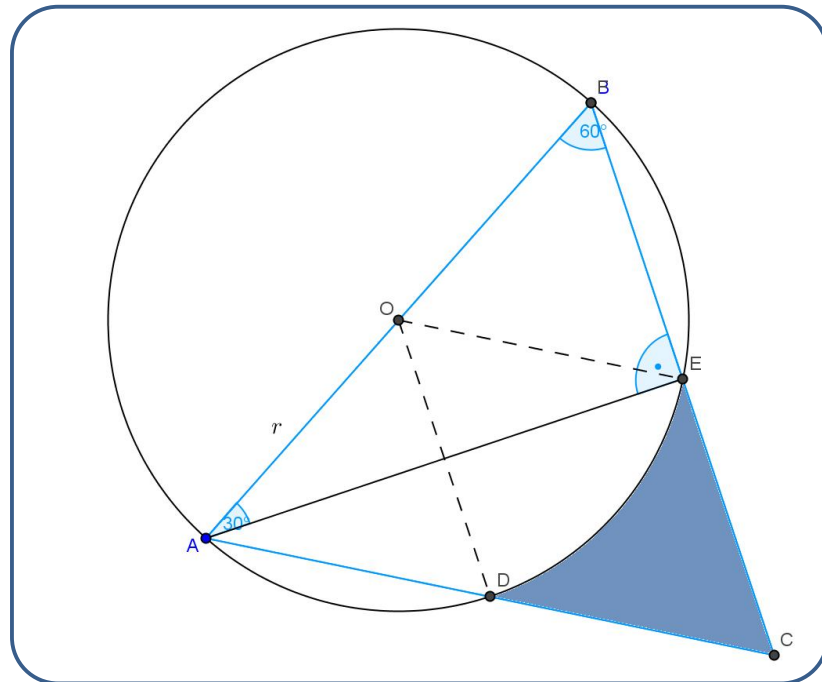


Az adott szögek alapján kiszámolható $\angle ADB = \angle ACB = 30^\circ$. A DAB derékszögű háromszög köré írható kör AB húrja a D és a C pontokból 30° -os szögben látszik, ezért C is rajta van a körön. Mivel a kör átmérője a BD szakasz, ezért Thalész-tétel szerint $\angle BCD = 90^\circ$. Az ABD derékszögű

háromszög befogói $AB = 20$ m, $AD = 20 \cdot \sqrt{3}$ m, átfogója $BD = 40$ m, területe $200 \cdot \sqrt{3}$ m². BCD derékszögű háromszög B -nél lévő hegyesszöge 45° , tehát ez a háromszög egyenlő szárú, befogói: $20\sqrt{2}$ m, területe: 400 m². A telek területe: $200(\sqrt{3} + 2)$ m² $\approx 746,4$ m².

13. Egy kör $2r$ átmérője fölé egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk. Mekkora a háromszög körön kívül fekvő részének a területe?

I. Megoldás:



A háromszög oldalainak a körrel való metszéspontjaiból az átmérő, Thalész tétele szerint derékszögben látszik. Az ADO , DEO és EBO háromszögek szabályosak. A színezett síkidom területét megkapjuk, ha az ABC szabályos háromszög területéből kivonjuk az ADO és az EBO szabályos háromszög területét, valamint a DOE 60° -os középponti szögű körcikk területét.

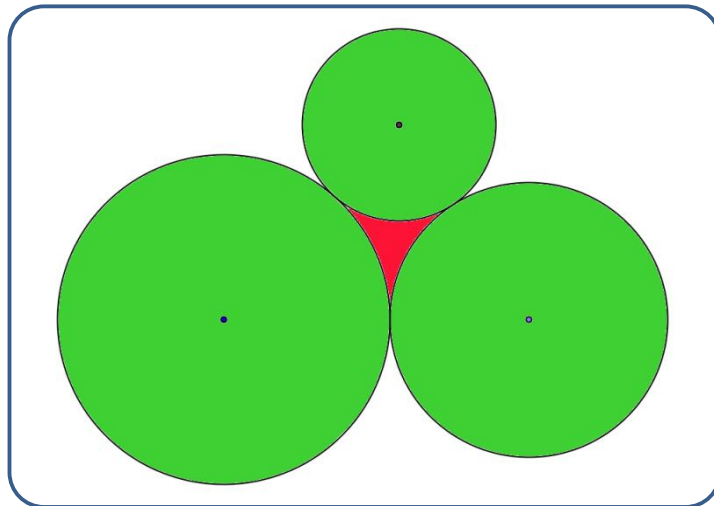
$$T = \frac{(2r)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{r^2 \pi}{6} = \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{r^2 \pi}{6} (\approx 0,34r^2)$$

II. Megoldás:

Thalész tétele szerint D és E pontokból az AB átmérő derékszögben látszik. Mivel az ABC háromszög szabályos, ezért a D és E pontok egyben oldalfelező pontok, és az $ODCE$ négyszög r oldalú rombusz. A vizsgált síkidom területét megkapjuk, ha az $ODCE$ rombusz területéből kivonjuk a DOE 60° -os körcikk területét. A rombusz két szabályos háromszöggé bontható ezért a síkidom területe:

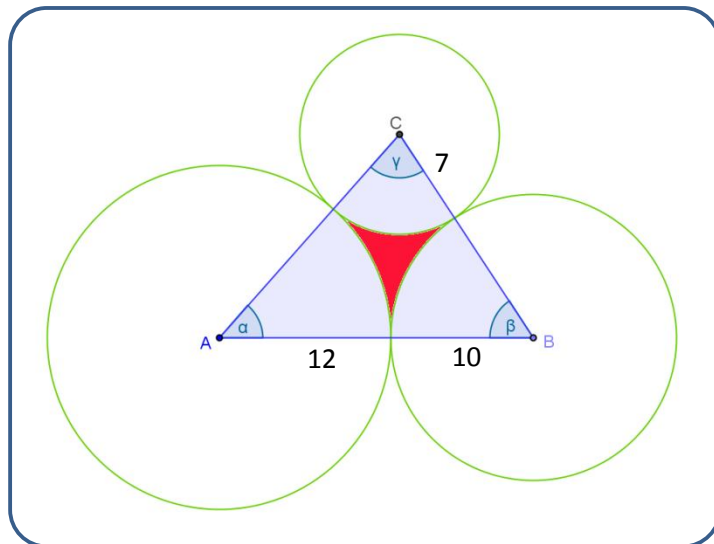
$$T = \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{r^2 \pi}{6} (\approx 0,34r^2).$$

14. Három öntöző berendezés az ábrán zölddel jelölt kör alakú területeket látja el vízzel. Határozzuk



meg a körök közötti, pirossal jelölt terület nagyságát, ha a körök sugara 12 m, 10 m és 7 m!

Megoldás:



Két egymást érintő kör középpontja és az érintési pont egy egyenesre illeszkedik. Ebből következik, hogy a körök középpontjai által meghatározott ABC háromszög oldalai, $a = 17$ m, $b = 19$ m és $c = 22$ m hosszúak. A pirossal jelölt síkidom területét megkapjuk, ha a háromszög területéből kivonjuk a három körcikk területét. A háromszög területe Héron-képlettel meghatározható.

$$s = 29, \quad T(ABC) = \sqrt{29 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 10} = \sqrt{24360} \approx 156,08.$$

A körcikk területének meghatározásához ki kell számolni a háromszög szögeit. Ehhez használhatjuk a koszinusztételt vagy a trigonometrikus területképletet. Ez utóbbival dolgozunk úgy, hogy a két kisebb szöget számoljuk ki először, mert ezek, lévén hegyesszögek, a képletből egyértelműen megadhatók.

$$T(ABC) = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2 \cdot T(ABC)}{b \cdot c} = 0,7468 \Rightarrow \alpha \approx 48,31^\circ,$$

$$T(ABC) = \frac{c \cdot a \cdot \sin \beta}{2} \Rightarrow \sin \beta = \frac{2 \cdot T(ABC)}{c \cdot a} = 0,8346 \Rightarrow \beta \approx 56,58^\circ$$

$$\text{és } \gamma = 180^\circ - 48,31^\circ - 56,58^\circ \approx 75,11^\circ.$$

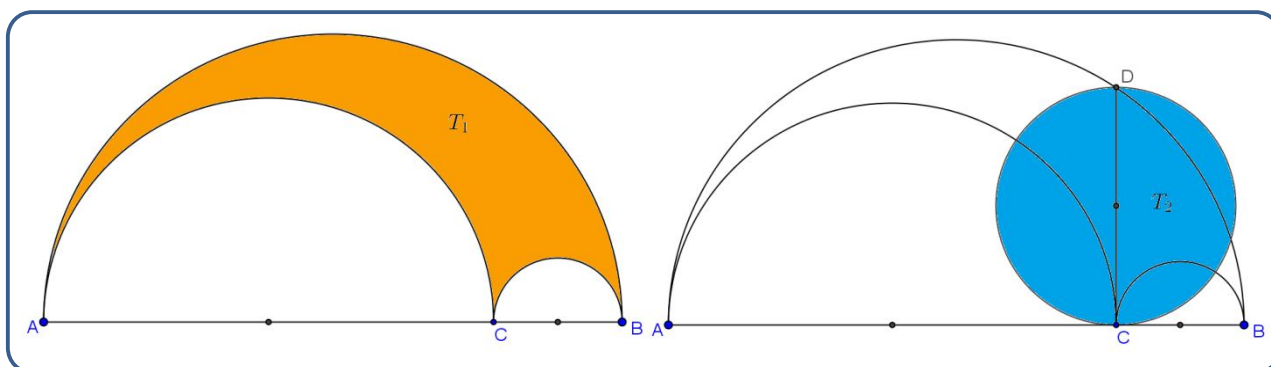
Ha a körcikkek területét t_a , t_b , t_c jelöli, akkor

$$t_a = 12^2 \pi \cdot \frac{48,31^\circ}{360^\circ} \approx 60,71, \quad t_b = 10^2 \pi \cdot \frac{56,58^\circ}{360^\circ} \approx 49,37, \quad t_c = 7^2 \pi \cdot \frac{75,11^\circ}{360^\circ} \approx 32,12.$$

A vizsgált síkidom területe $(156,08 - 60,71 - 49,37 - 32,12 =) 13,88 \text{ m}^2$.

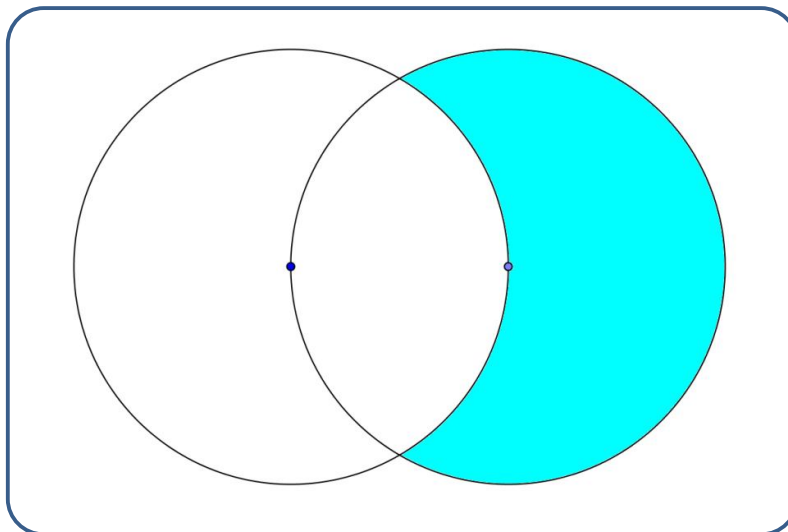
IV. Ellenőrző feladatok

1. Egy trapéz alapjai 15 cm és 36 cm. Hányszorosa a trapéz területe a kiegészítő háromszög területének?
2. Egy hegyesszögű háromszög magasságpontja M . Az ABM , MBC , AMC háromszögek súlypontjai rendre T , U , V . Határozza meg a TUV és az ABC háromszögek területének az arányát!
3. Az ABC háromszög AA_1 , BB_1 , CC_1 súlyvonalainak metszéspontja S .
 - a) Hányadrésze az FSC_1 háromszög területe az ABC háromszög területének, ha F az AS szakasz felezőpontja?
 - b) Hányadrésze a súlyvonalakból szerkeszthető háromszög területe az eredeti háromszög területének?
4. Bizonyítsa be, hogy az ábrákon színessel jelölt területek egyenlők! (A két ábrán szereplő AB , AC és CB átmérőjű félkörök egybevágók.)



5. Az ABC háromszög AB oldalát D , BC oldalát E pontban metszi az AC átmérőjű kör. Számítsa ki a háromszög területét, ha tudja, hogy $CE = 1$ egység, $BE = 4$ egység és $AD = 4BD$!
6. Határozza meg a 10 cm átmérőjű
 - a) körbe írt szabályos tizenötszög területét;
 - b) kör köré írt szabályos tizenötszög területét!
7. Egy konvex négyszög oldalai rendre 14 m, 23 m, 18 m, és 15 m. Az első két oldal által bezárt szög $63,5^\circ$. Számolja ki a négyszög területét!
8. Egy hegyesszögű háromszög szögei α, β, γ , területe T . Számítsa ki annak a háromszögnek a területét, amelynek csúcsai a háromszög magasságainak talppontjai!

9. Két 6 egység sugarú kör úgy metszi egymást, hogy mind a kettő középpontja a másik kör kerületén van. Határozza meg a színezett síkidom területét!

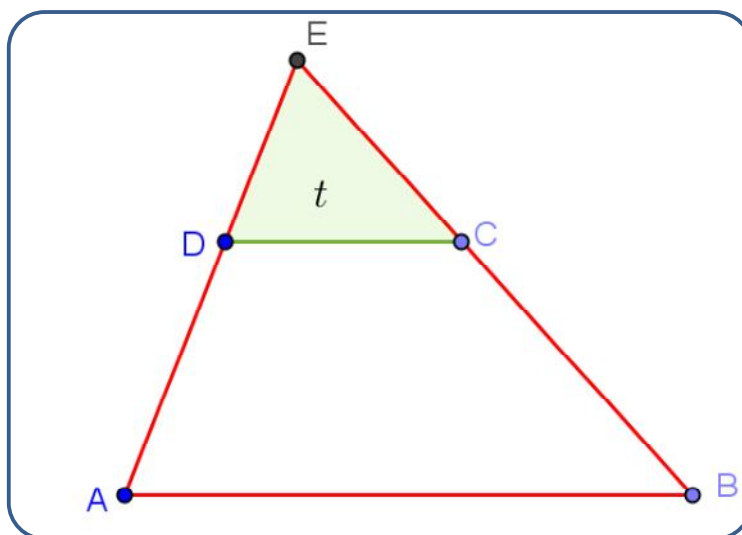


10. Az ABC derékszögű háromszögben az AB átfogó hossza 18 cm, a B csúsnál levő szög 30° . A háromszög köré írható körnek és a B középpontú BC sugarú körnek a metszéspontja C és D . Számítsa ki a két kör AD , illetve CD rövidebb íve és az AC szakasz által határolt síkidom területét!

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Egy trapéz alapjai 15 cm és 36 cm. Hányszorosa a trapéz területe a kiegészítő háromszög területének?

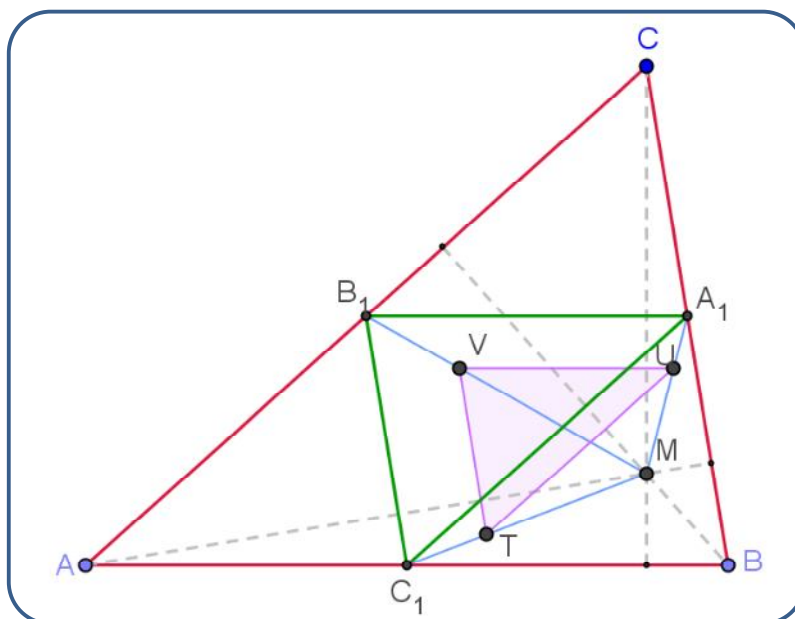
Megoldás:



Az ABE és DCE háromszögek hasonlóak, mivel szögeik páronként egyenlő. A hasonlóság aránya, megfelelő oldalaik arányával egyenlő: $\frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2,4$. Területük aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért $\frac{T(ABE)}{T(DCE)} = 5,76$, azaz $T(ABE) = 5,76t$. A trapéz területe: $T(ABCD) = 5,76t - t = 4,76t$, tehát a trapéz területe a kiegészítő háromszög területének 4,76-szorosa.

2. Egy hegyesszögű háromszög magasságpontja M . Az ABM , MBC , AMC háromszögek súlypontjai rendre T , U , V . Határozza meg a TUV és az ABC háromszögek területének az arányát!

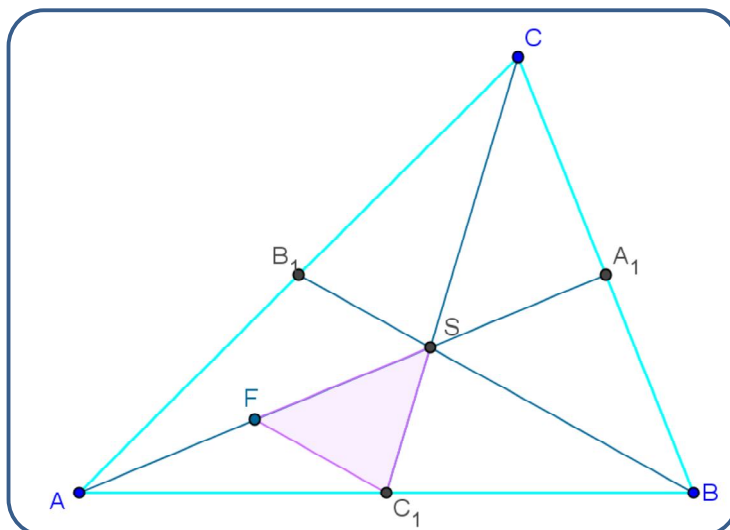
Megoldás:



U a BCM háromszög súlypontja, ezért U az MA_1 szakasz A_1 -hez közelebbi harmadolópontja. Hasonlóképpen V és T pontok az MB_1 , illetve az MC_1 szakasz B_1 -hez, illetve a C_1 -hez közelebbi harmadolópontja. Ezért az M középpontú $\frac{2}{3}$ arányú hasonlóság az $A_1B_1C_1$ háromszöget az UVT háromszögbe viszi át, tehát $UVT\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$. Másrészt $A_1B_1C_1\Delta \sim ABC\Delta$, hiszen előbbi oldalai az ABC háromszög középvonalai. Ezekből $UVT\Delta \sim ABC\Delta$ következik, a hasonlóság aránya, $VT = \frac{2}{3} B_1C_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{a}{3}$ alapján, 1:3. Területük aránya: $\frac{T(UVT)}{T(ABC)} = \frac{1}{9}$.

3. Az ABC háromszög AA_1 , BB_1 , CC_1 súlyvonalainak metszéspontja S .
- Hányadrésze az FSC_1 háromszög területe az ABC háromszög területének, ha F az AS szakasz felezőpontja?
 - Hányadrésze a súlyvonalakból szerkeszthető háromszög területe az eredeti háromszög területének?

Megoldás:



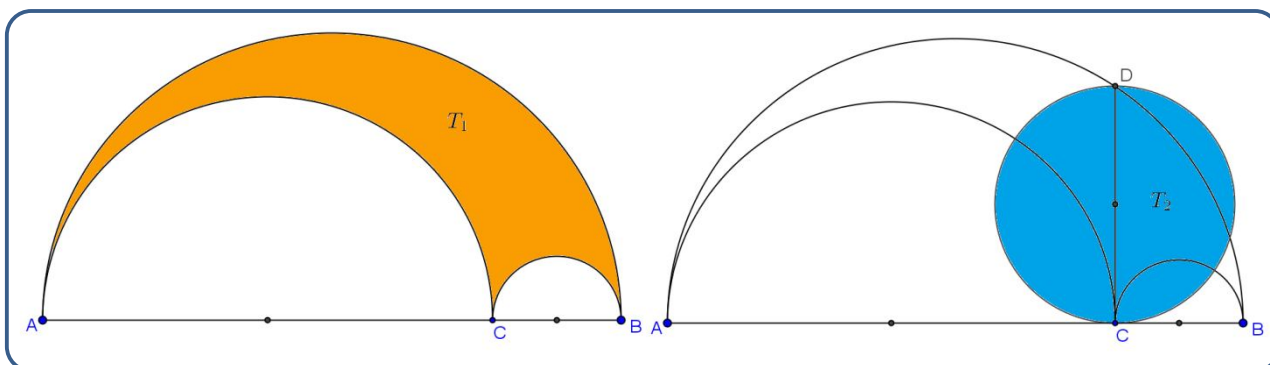
- a) A súlyvonal felezi a háromszög területét, mert a két részháromszög egy-egy oldala a felezés miatt egyenlő, az ezekhez tartozó magasság pedig egybeesik. (Például itt $AC_1 = C_1B$, az ezekhez tartozó magasság, a C pontnak az AB egyenestől való távolsága.) Az AC_1S háromszög területe az AC_1C háromszög területének harmada, mert $C_1S = \frac{1}{3}C_1C$, hiszen S a súlyvonal csúctól távolabbi harmadolópontja, illetve a két háromszög közös oldalegyeneshez tartozó magassága azonos. C_1F az AC_1S háromszög súlyvonala, ezért felezi a háromszög területét. Tehát:

$$T(FSC_1) = \frac{1}{2} \cdot T(AC_1S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot T(AC_1C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot T(ABC) = \frac{1}{12} \cdot T(ABC),$$

azaz FSC_1 háromszög területe az eredeti háromszög területének tizenketted része.

Megjegyzés: Tetszőleges ABC háromszögből kiindulva, a fenti leírás szerint kapott FSC_1 háromszög oldalai az eredeti háromszög súlyvonalainak egyharmadai. Ebből következik, hogy bármely háromszög súlyvonalaiból szerkeszthető háromszög.

- b) Az a) megoldás megjegyzéséből következik, hogy a súlyvonalakból szerkeszthető háromszög, és ez az FSC_1 háromszöghöz hasonló. A hasonlóság aránya 3:1. Ezért a súlyvonalakból szerkesztett háromszög területe az FSC_1 háromszög területének 9-szerese, az ABC háromszög területének $\frac{3}{4}$ része.
4. Bizonyítsa be, hogy az ábrakon színessel jelölt területek egyenlők! (A két ábrán szereplő AB , AC és CB átmérőjű félkörök egybevágók.)

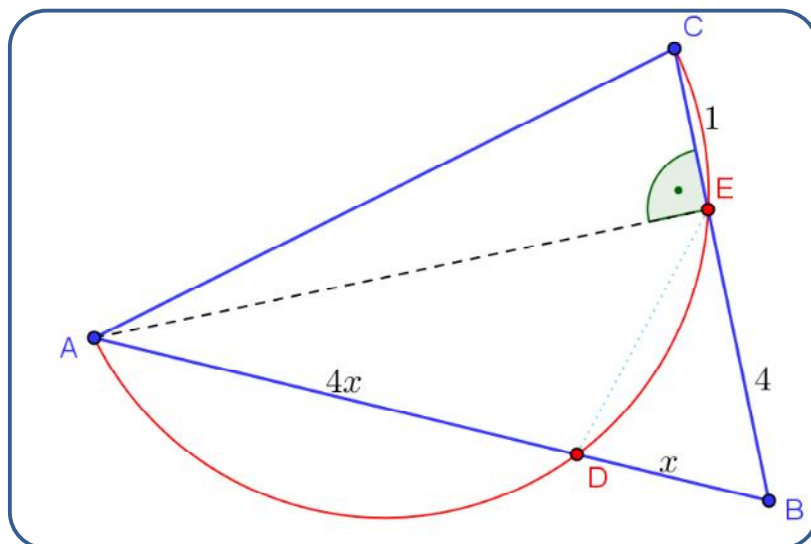


Megoldás:

Jelöljük az AC átmérőjű kör sugarát x -szel, a CB átmérőjű kör sugarát y -nal! A sárgával színezett síkidom területe: $T_1 = \frac{(x+y)^2\pi - x^2\pi - y^2\pi}{2} = xy\pi$. Thalész tétele szerint $\angle ADB = 90^\circ$. Az ADB derékszögű háromszögre alkalmazzuk a magasságtételt: $DC^2 = 2x \cdot 2y = 4xy$. A DC átmérőjű kör területe: $T_2 = \left(\frac{DC}{2}\right)^2 \cdot \pi = xy\pi$. Tehát $T_1 = T_2$.

5. Az ABC háromszög AB oldalát D , BC oldalát E pontban metszi az AC átmérőjű kör. Számítsa ki a háromszög területét, ha tudja, hogy $CE = 1$ egység, $BE = 4$ egység és $AD = 4BD$!

Megoldás:



A szelőszakaszok tétele szerint, az ábra jelöléseit használva, kapjuk: $x \cdot 5x = 4 \cdot 5$. Innen $x = 2$. Thalész tétele szerint $\angle AEC = 90^\circ$, ezért az AEB háromszög derékszögű, alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt: $AE^2 = 10^2 - 4^2 = 84$, az ABC háromszög BC oldalhoz tartozó magassága $2\sqrt{21}$, a háromszög területe $T = \frac{5 \cdot 2\sqrt{21}}{2} = 5\sqrt{21}$ területegység.

Megjegyzés:

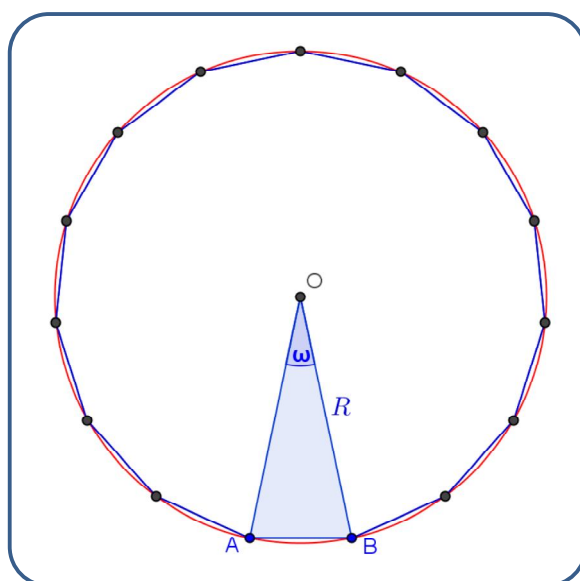
AE és CD az ABC háromszög magasságvonalai. A 10. kidolgozott feladat megoldásában igazoltuk, hogy $DBE \sim CBA$. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{DB}{CB} = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{4}{5x} \Rightarrow x = 2$$

6. Határozza meg a 10 cm átmérőjű
- körbe írt szabályos tizenötszög területét;
 - kör köré írt szabályos tizenötszög területét!

Megoldás:

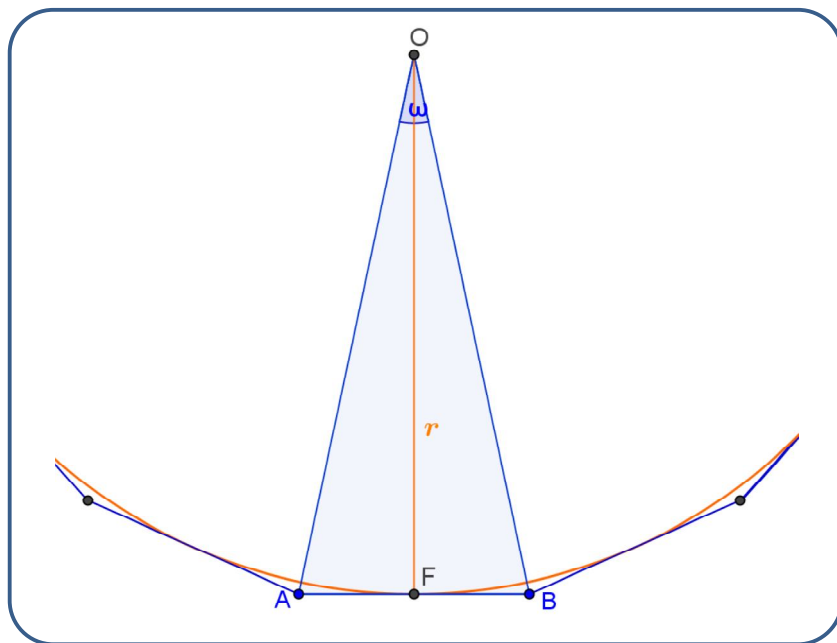
a)



A 10 cm átmérőjű körbe írt szabályos tizenötszög 15 egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontható. Ezek szára 5 cm, szárszöge $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$. Ezért a sokszög területe:

$$T \left(= 15 \cdot \frac{5^2 \cdot \sin 24^\circ}{2} \right) \approx 76,26 \text{ cm}^2.$$

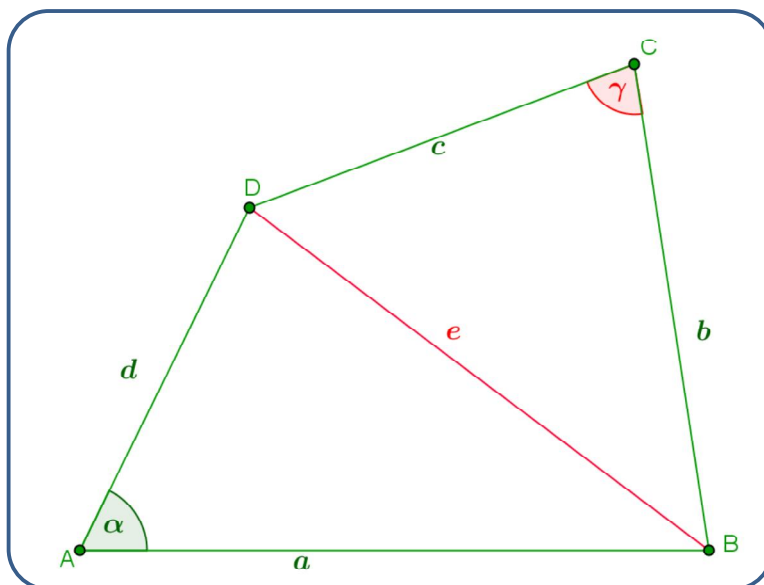
b)



Az $r = 5$ cm sugarú kör köré írt szabályos tizenötszög 15 olyan egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyek alaphoz tartozó magassága 5 cm, szárainak a szöge 24° . A sokszög oldala $a = 10 \cdot \operatorname{tg} 12^\circ$, területe: $T = 15 \cdot \frac{a \cdot r}{2} \approx 79,71 \text{ cm}^2$.

7. Egy konvex négyszög oldalai rendre 14 m, 23 m, 18 m, és 15 m. Az első két oldal által bezárt szög $63,5^\circ$. Számolja ki a négyszög területét!

Megoldás:



Az $ABCD$ konvex négyszöget BD átlója két háromszögre bontja. Ezek területének összege a négyszög területe. Az ABD háromszög területe:

$$T_1 = \frac{a \cdot d \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{23 \cdot 14 \cdot \sin 63,5^\circ}{2} \approx 144,08(\text{m}^2).$$

A BCD háromszög területének meghatározásához először kiszámítjuk a BD átló hosszát a koszinusztétel alkalmazásával. $e^2 = 14^2 + 23^2 - 2 \cdot 14 \cdot 23 \cdot \cos 63,5^\circ \approx 437,65$; $e \approx 20,92$ m.

Kiszámítjuk a négyszög γ szögét, majd alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet. γ -t megkapjuk, ha felírjuk a BCD háromszög e oldalára a koszinusztételt.

$$437,65 = 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cdot \cos \gamma, \text{ ahonnan}$$

$$\cos \gamma = \frac{111,35}{540}, \quad \gamma \approx 78,10^\circ.$$

A BCD háromszög területe:

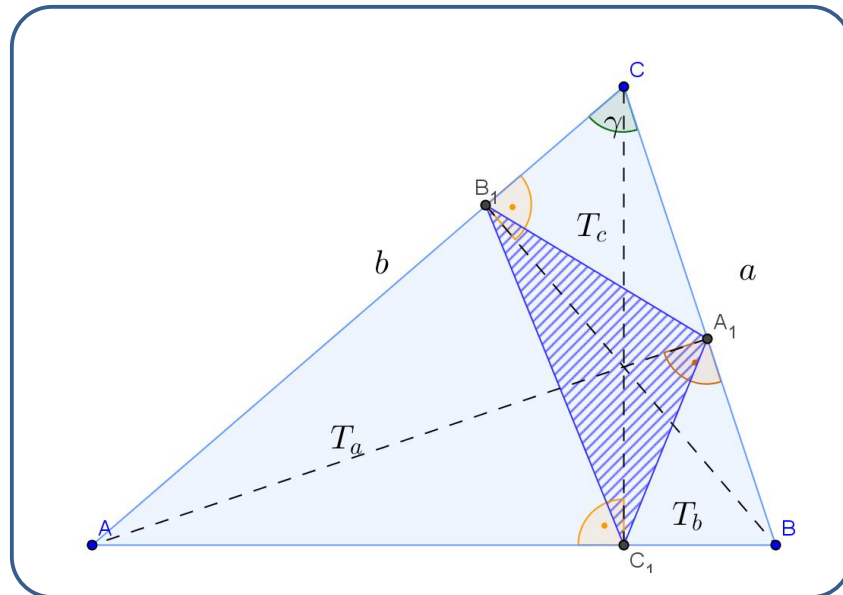
$$T_2 = \frac{18 \cdot 15 \cdot \sin 78,10^\circ}{2} \approx 132,10(\text{m}^2).$$

Így a négyszög területe: $276,18 \text{ m}^2$.

Megjegyzés:

- A megoldás során kihasználtuk azt a feltételt, hogy a négyszög konvex.
 - BCD háromszög területét, az e átló meghatározása után, a Héron-képlet segítségével is kiszámíthatjuk.
8. Egy hegyesszögű háromszög szögei α, β, γ , területe T . Számítsa ki annak a háromszögnek a területét, amelynek csúcsai a háromszög magasságainak talppontjai!

Megoldás:



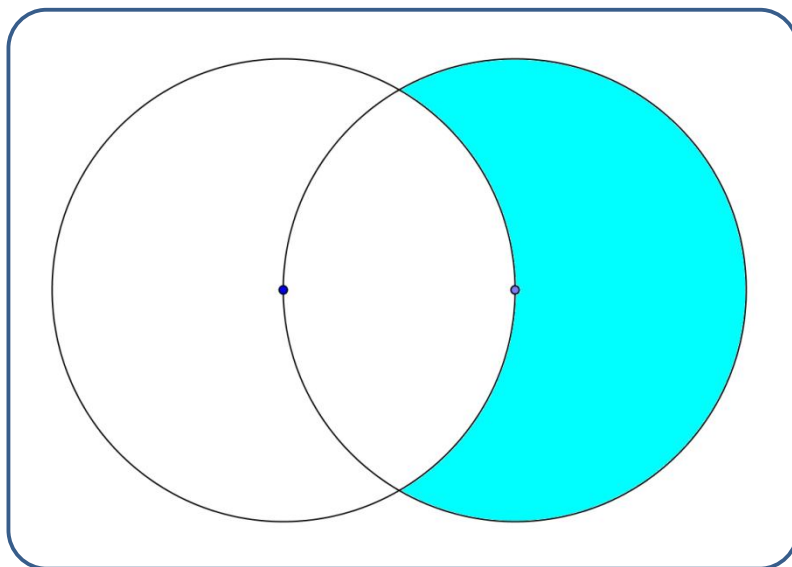
A talpponti háromszög t területét megkapjuk, ha az ABC háromszög területéből kivonjuk a csúcsoknál lévő háromszögek T_a , T_b , illetve T_c területét.

$$T_c = \frac{1}{2} \cdot CB_1 \cdot CA_1 \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cos \gamma \cdot b \cdot \cos \gamma \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \cos^2 \gamma \cdot \sin \gamma = T \cdot \cos^2 \gamma.$$

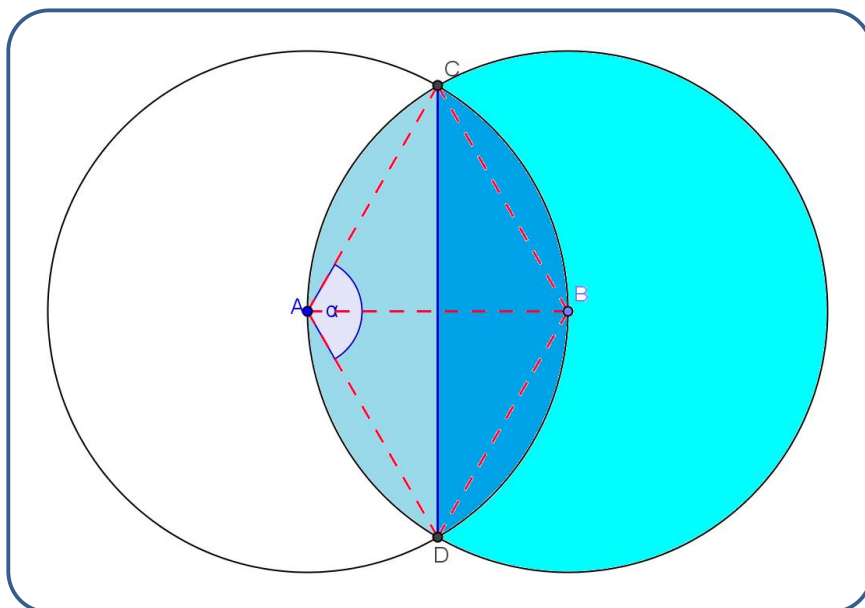
Hasonlóan a másik két háromszög területe: $T_a = T \cdot \cos^2 \alpha$, $T_b = T \cdot \cos^2 \beta$.

Tehát $t = T(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma)$.

9. Két 6 egység sugarú kör úgy metszi egymást, hogy mind a kettő középpontja a másik kör kerületén van. Határozza meg a színezett síkidom területét!



Megoldás:



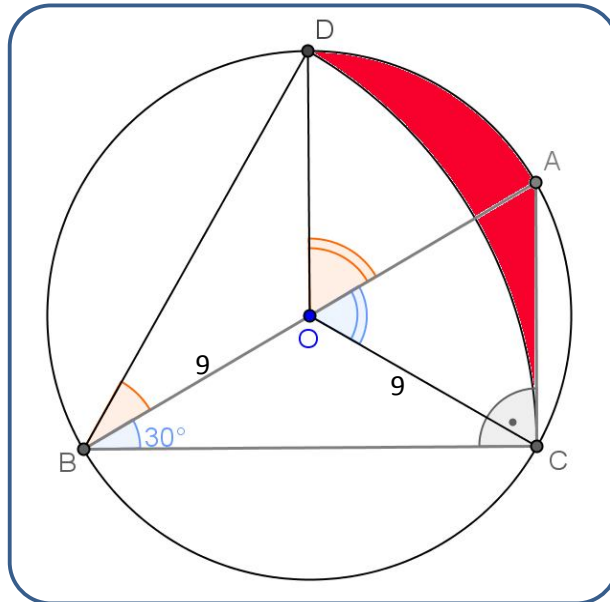
A feltétel szerint ABC és ABD háromszögek szabályosak, így $\alpha = 120^\circ$. A vizsgált síkidom területét megkapjuk, ha a 6 egység sugarú kör területéből kivonjuk a két 120° -os körszelet területét. A DBC körszelet területe, a DAC 120° -os körcikk és a DAC egyenlő szárú háromszög területének a különbsége. Ennek a háromszögnek a területe az ABC szabályos háromszög területével egyenlő. (Ez, a szimmetriát felhasználva, átdarabolással igazolható.) Tehát a DBC , és a vele egybevágó DAC körszelet területe: $\frac{6^2\pi}{3} - \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 12\pi - 9\sqrt{3}$. A keresett terület:

$$T = 6^2\pi - 2 \cdot (12\pi - 9\sqrt{3}) = 12\pi + 18\sqrt{3} \approx 68,88 \text{ területegység.}$$

Megjegyzés: A kérdéses síkidom területét úgy is meg lehet kapni, ha a kör területéből kivonjuk a két szabályos háromszög, valamint a 4 darab 60° -os körszelet területét.

10. Az ABC derékszögű háromszögben az AB átfogó hossza 18 cm, a B csúsnál levő szög 30° . A háromszög köré írható körnek és a B középpontú BC sugarú körnek a metszéspontja C és D . Számítsa ki a két kör AD , illetve CD rövidebb íve és az AC szakasz által határolt síkidom területét!

Megoldás:



A szimmetria miatt a BCD háromszög szabályos, $OB\hat{D} = 30^\circ$. A háromszög oldala $r\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. A középponti és kerületi szögek tétele alapján $CO\hat{A} = AO\hat{D} = 60^\circ$. A színezett síkidom területét megkapjuk, ha az OCA , OBC , $OB\hat{D}$ háromszögek és az AOD körcikk területének összegéből kivonjuk a CBD 60° -os körcikk területét. (Az említett háromszögek területe egyenlő, ami átdarabolással vagy az $\frac{r^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{r^2 \cdot \sin 120^\circ}{2}$ azonossággal igazolható.)

$$T = 3 \cdot \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{r^2 \pi}{6} - \frac{(r\sqrt{3})^2 \pi}{6} = 3 \cdot \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{r^2 \pi}{3} = \frac{243\sqrt{3}}{4} - 27\pi \approx 20,40 \text{ (cm}^2\text{)}.$$