

20. Integrálszámítás

I. Elméleti összefoglaló

Az előző fejezetben sokszögek és a kör részeinek területével foglalkoztunk. Ebben a fejezetben olyan korlátos síkidomok területét is meghatározzuk, amelyeket egyenes szakaszok és függvénygörbék zárnak közre. Az alkalmazott módszerek alkalmazási területe ennél lényegesen szélesebb. Erre is látunk példát: kiszámoljuk forgástestek térfogatát, valamint fizikai problémákat oldunk meg.

Legyen $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos és minden $x \in [a; b]$ esetén legyen $f(x) \geq 0$.

Keressük az $y = f(x)$ görbe, az x tengely, az $x = a$ és az $x = b$ egyenesek által bezárt (korlátos) síkidom területét.

Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot n részre; az osztópontok: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Mivel f zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, ezért (Weierstass tétele szerint) minden $[x_{i-1}; x_i]$ intervallumban van a függvénynek maximuma (M_i), illetve minimuma (m_i).

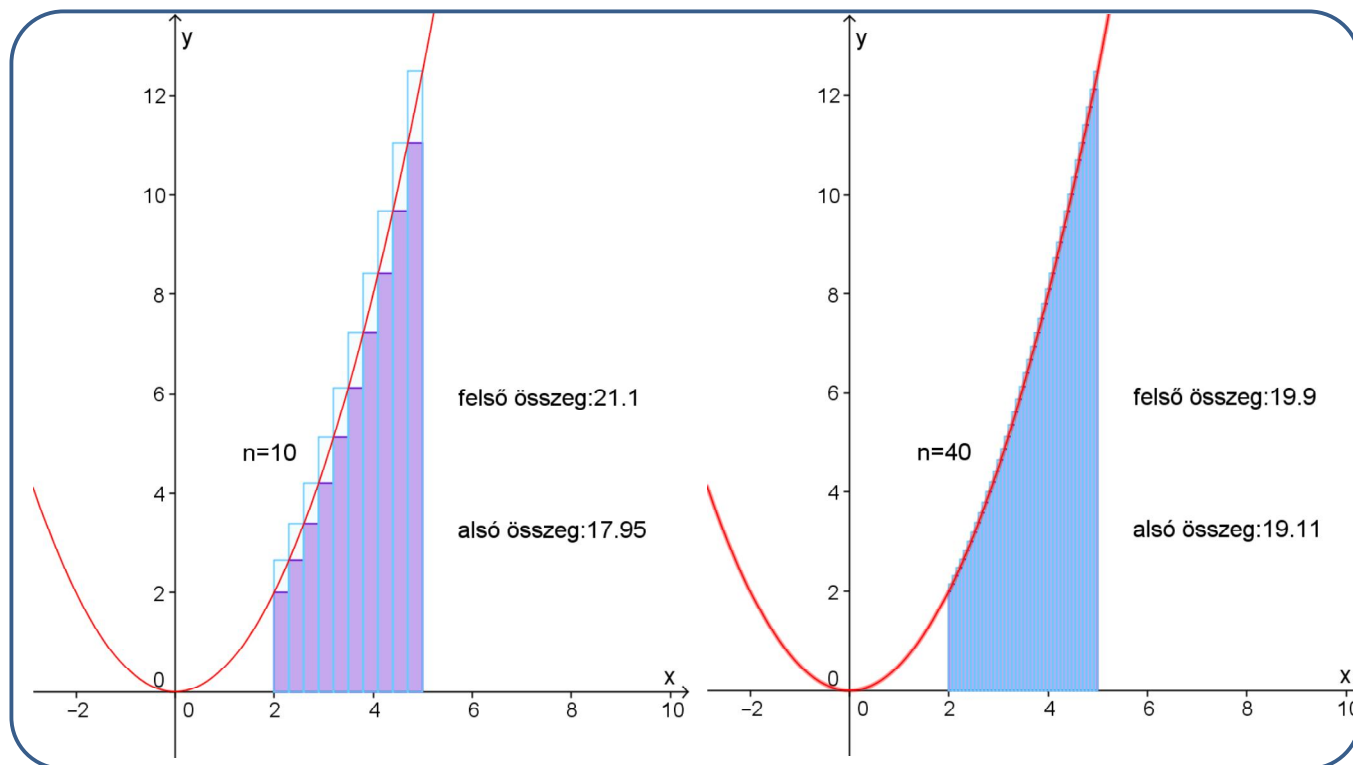
Képezzük a beírt téglalapok területösszegét, az úgy nevezett **alsó közelítő összeget**:

$$s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

és a körülírt téglalapok területösszegét, a **felső közelítő összeget**:

$$S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Mivel $m_i \leq M_i$ minden i -re, ezért $s_n \leq S_n$. (Az alábbi ábrákon az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $a = 2$, $b = 5$. Az $[a; b]$ intervallumot $n = 10$, illetve $n = 40$ egyenlő részre osztottuk.)



A síkidomba beírt és körülírt sokszögek területével közelítettük meg a síkidom területét. Ha csak egy olyan szám van, amely az összes beírt téglalap területösszegénél nagyobb vagy egyenlő és az összes

körülírt téglalap területösszegénél kisebb vagy egyenlő, akkor ezt a számot tekintjük a síkidom területének.

A határozott integrál

A $H \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos (nem üres) számhalmaz legkisebb felső korlátját, a számhalmaz **felső határának**, vagy **szuprémumának** nevezzük. Bizonyítható, hogy ez létezik.

A $H \subseteq \mathbb{R}$ alulról korlátos (nem üres) számhalmaz legnagyobb alsó korlátját, a számhalmaz **alsó határának**, vagy **infimumának** nevezzük. Bizonyítható, hogy ez létezik.

(Korlátos függvény felső, illetve alsó határa, értékkészletének felső, illetve alsó határa.)

Legyen f az $[a; b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvény. Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot n (nem feltétlenül egyenlő) részre az $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ pontokkal, ahol $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Ehhez a felosztáshoz tartozó alsó közelítő összegnek nevezzük az

$$s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

összeget, **felső közelítő**

összegnek pedig az $S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$

összeget, ahol m_i , illetve M_i az f függvény alsó, illetve felső határa az $[x_{i-1}; x_i]$ intervallumon.

Nyilván adott felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg nem nagyobb a felső közelítő összegnél: $s_n \leq S_n$.

Tétel:

Minden korlátos $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén bármely alsó közelítő összeg legfeljebb akkora, mint bármely felső közelítő összeg.

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett korlátos f függvényt integrálhatónak nevezzük, ha egyetlen olyan szám van, amely az f függvény egyetlen alsó közelítő összegénél sem kisebb és egyetlen felső közelítő összegénél sem nagyobb.

Ezt a számot az **f függvény $[a; b]$ intervallumon vett (Riemann-féle) határozott integráljának** nevezzük.

Jelölése: $\int_a^b f(x) dx$, illetve $\int_a^b f$. Kiolvasása: integrál a -tól b -ig $f(x) dx$, illetve integrál a -tól b -ig f .

Elnevezések: a és b az **integrál alsó és felső határa**.

Tétel:

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha tetszőleges ε pozitív számhoz van az $[a; b]$ intervallumnak olyan felosztása, amelyre $S_n - s_n < \varepsilon$.

Tétel:

Ha az f függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos, akkor ezen az intervallumon integrálható.

Tétel:

Ha az f függvény az $[a; b]$ intervallumon monoton, akkor ezen az intervallumon integrálható.

Megjegyzés:

Ha az $[a; b]$ intervallumon értelmezett f függvény folytonos és $f(x) \geq 0$, akkor $\int_a^b f(x)dx$ az x tengely $[a; b]$ intervalluma, az $x = a$, az $x = b$ egyenesek és az f grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét adja meg.

Ha az $[a; b]$ intervallumon értelmezett f függvény folytonos és $f(x) \leq 0$, akkor az x tengely $[a; b]$ intervalluma, az $x = a$, az $x = b$ egyenesek és az f grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területe: $-\int_a^b f(x)dx$.

A határozott integrál tulajdonságai:

- Ha az f függvény az $[a; b]$ intervallumon integrálható és $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- Ha az f függvény az $[a; b]$ intervallumon integrálható és c tetszőleges valós szám, akkor cf függvény is integrálható és

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

- Ha az f és a g függvény az $[a; b]$ intervallumon integrálható, akkor $f + g$ és $f - g$ függvények is integrálhatók és

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{és} \quad \int_a^b (f - g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

- Ha az f és a g függvény $[a; b]$ intervallumon integrálható és $f(x) \geq g(x)$ az $[a; b]$ intervallum minden x elemére, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

- Ha az f függvény az $[a; b]$ intervallumon integrálható és az $[a; b]$ intervallum minden x elemére $k \leq f(x) \leq K$, akkor van olyan m szám, amelyre

$$k \leq m \leq K \quad \text{és} \quad \int_a^b f(x)dx = m(b - a).$$

- Megállapodunk abban, hogy $\int_a^a f(x)dx = 0$, és $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Tudjuk, hogy az $[a; b]$ intervallumon értelmezett f folytonos függvény integrálható. Értelmezhető a következő függvény: $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}; F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Az F függvényt az f függvény (a ponthoz tartozó) **integrálfüggvényének** nevezzük.

A differenciálszámítás és az integrálás közötti kapcsolatra világít rá a következő tétel.

Tétel:

Ha f az $[a; b]$ -n értelmezett folytonos függvény, akkor az $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}; F(x) = \int_a^x f(x)dx$ integrálfüggvény is folytonos az $[a; b]$ -n, differenciálható $]a; b[$ -n és deriváltja $F'(x) = f(x)$.

A határozatlan integrál

Legyen az f függvény az $[a; b]$ intervallumon értelmezve. Ha létezik olyan F függvény, amely az $]a; b[$ intervallumon differenciálható és $]a; b[$ minden x elemére $F'(x) = f(x)$, akkor az F függvényt az **f függvény** $[a; b]$ intervallumhoz tartozó **primitív függvényének** nevezzük.

Tétel:

Ha az f függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos, akkor ezen az intervallumon van primitív függvénye.

Tétel:

Ha az F függvény az f függvény $[a; b]$ intervallumhoz tartozó primitív függvénye, akkor az f függvény összes primitív függvénye $F(x) + C$ alakú, ahol C tetszőleges valós szám.

Az f függvény primitív függvényeinek halmazát **f határozatlan integráljának** nevezzük és így jelöljük: $\int f(x)dx$ vagy $\int f$. Tehát ha $F'(x) = f(x)$, akkor $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Tétel (Newton–Leibniz-formula):

Ha az f függvény folytonos az $[a; b]$ intervallumon, és az F függvény az f függvény egyik primitív függvénye $[a; b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Néhány tanult függvény határozatlan integrálja:

- $\int k dx = kx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$
- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in \mathbb{R}^+)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \in]k\pi; (k+1)\pi[; k \in \mathbb{Z})$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \in \left] \frac{(2k-1)\pi}{2}; \frac{(2k+1)\pi}{2} \right[; k \in \mathbb{Z} \right)$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

A határozatlan integrál tulajdonságai:

- Ha az f függvénynek van határozatlan integrálja valamely I intervallumon, akkor kf függvénynek is van határozatlan integrálja I -n (ahol k tetszőleges valós szám), és $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.
- Ha f és g függvénynek van határozatlan integrálja valamely I intervallumon, akkor $f + g$ függvénynek is van határozatlan integrálja I -n, és $\int (f + g)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
- Az összetett függvények deriválási szabálya („láncszabály”) alapján:
Ha az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f \circ g$ függvény folytonos, valamint g függvény az $[a; b]$ intervallumon deriválható és az f függvény egyik primitív függvénye az F függvény, azaz $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

- speciálisan, ha $g(x) = ax + b$: $\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ (ha $a \neq 0$)
- speciálisan, ha $f(x) = x^n$: $\int g^n(x) \cdot g'(x)dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C$ (ha $n \neq -1$)
- speciálisan, ha $f(x) = x$: $\int g(x) \cdot g'(x)dx = \frac{g^2(x)}{2} + C$
- speciálisan, ha $f(x) = \frac{1}{x}$: $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$

Alkalmazások:

Folytonos függvénygörbe alatti terület:

Az $[a; b]$ intervallumon folytonos f függvény grafikonja, az x tengely, az $x = a$ és az $x = b$ egyenesek által közrezárt (korlátos) síkidom területét úgy határozzuk meg, hogy

- f zérushelyei segítségével az $[a; b]$ intervallumot részekre bontjuk,
- meghatározzuk az egyes részintervallumokon a függvény határozott integrálját,
- majd a kapott integrálok abszolút értékét összeadjuk.

Forgástestek térfogata:

Legyen f az $[a; b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Az f függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Munka

Ha egy pontszerű test, állandó $\mathbf{F}$ erő hatására elmozdul A pontból B pontba, és az elmozdulás vektora $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB}$, akkor az $\mathbf{F}$ erő $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos \varphi$ munkát végez, ahol az erő és az elmozdulás vektorának szöge φ . Ha $\varphi = 0^\circ$, azaz az erő és az elmozdulás iránya megegyezik, akkor a munka $W = F \cdot s$, ahol $F = |\mathbf{F}|$ és a test által megtett út s .

A továbbiakban azzal az esettel foglalkozunk, amikor a test egyenes vonalú mozgást végez a ráható erő irányában. A pálya egyenesét feleltessük meg az x tengelynek. Legyen a testre ható erő a pálya tetszőleges x pontjában az $F(x)$ folytonos függvény. Ekkor az F erő által végzett munka, míg a test az $x = a$ pontból az $x = b$ pontba jut:

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

Mozgó tömegpont elmozdulás—idő függvényének meghatározása:

Egyenes vonalú pályán mozgó pont elmozdulás—idő függvényét $s(t)$, sebesség—idő függvényét $v(t)$, gyorsulás—idő függvényét $a(t)$ -vel jelöljük. Tudjuk, hogy a mozgásokat leíró függvények folytonosak és deriválhatók (értelmezési tartományukban): $s'(t) = v(t)$, valamint $v'(t) = a(t)$. Ez alapján a $v(t)$ függvény egyik primitív függvénye az $s(t)$ függvény. A konkrét függvény meghatározásához a sebesség—idő függvényen kívül ismerni kell, hogy egy adott időpontban hol van a tömegpont, például adott $s(0)$ értéke. (Hasonlóan kapható meg a sebesség—idő függvény, a gyorsulás—idő függvény és a sebesség egy adott pillanatbeli értékének ismeretében.)

Másként:

Ha a $v(t)$ sebesség—idő függvény folytonos, akkor a $[t_1; t_2]$ időintervallumban a test elmozdulása:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

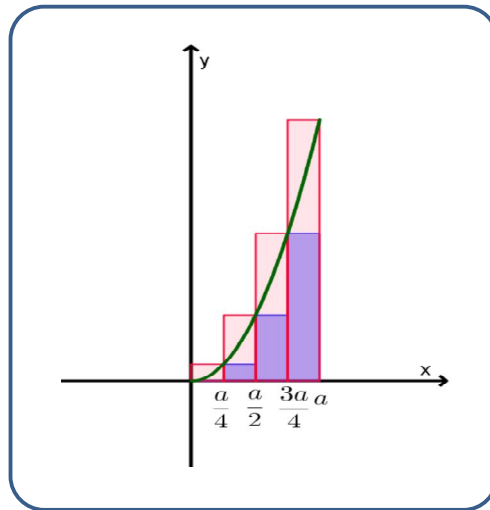
(A fentiek általánosíthatók nem egyenes vonalú mozgásokra.)

II. Kidolgozott feladatok

1. Számítsuk ki az $f: [0; a] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$ függvénynek
 - a) a $[0; a]$ intervallum 4 egyenlő részre osztásával kapott alsó és felső közelítő összegét;
 - b) a $[0; a]$ intervallum n egyenlő részre osztásával kapott alsó és felső közelítő összegét;
 - c) A b) feladat megoldását felhasználva adjuk meg a függvénygörbe alatti területet!

Megoldás:

a)

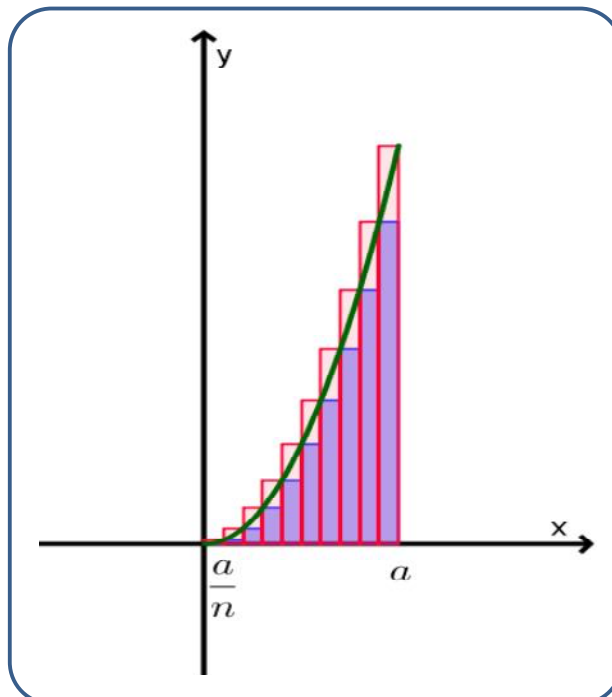


A beírt téglalapok x tengellyel párhuzamos oldala $\frac{a}{4}$, y tengellyel párhuzamos oldalai $\left(\frac{a}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2a}{4}\right)^2$, $\left(\frac{3a}{4}\right)^2$ egység hosszúak. Az alsó közelítő összeg, a beírt téglalapok területének összege:

$$s_n = \frac{a}{4} \cdot \left(\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{2a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \right) = \left(\frac{a}{4}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{64} \cdot a^3.$$

A körülírt téglalapok x tengellyel párhuzamos oldala $\frac{a}{4}$, y tengellyel párhuzamos oldalai $\left(\frac{a}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2a}{4}\right)^2$, $\left(\frac{3a}{4}\right)^2$ és a^2 egység hosszúak. A felső közelítő összeg, a körülírt téglalapok területének összege: $S_n = \frac{a}{4} \cdot \left(\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{2a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 \right) = \left(\frac{a}{4}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{30}{64} \cdot a^3.$

b)



Az alsó közelítő összeg:

$$s_n = \frac{a}{n} \cdot \left(\left(\frac{a}{n} \right)^2 + \left(\frac{2a}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right) = \left(\frac{a}{n} \right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2)$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = \frac{a^3}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right).$$

A felső közelítő összeg:

$$S_n = \frac{a}{n} \cdot \left(\left(\frac{a}{n} \right)^2 + \left(\frac{2a}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{na}{n} \right)^2 \right) = \left(\frac{a}{n} \right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{a^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n} \right).$$

c) Jelöljük a görbe alatti területet T -vel! (Az alábbiakból következik, hogy ez létezik.) Minden n -re $s_n < T < S_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{n} = 0$

Ezért tetszőleges ε pozitív számhoz van a $[0; a]$ intervallumnak olyan felosztása, amelyre $S_n - s_n < \varepsilon$. ($n > \frac{a^3}{\varepsilon}$ egyenlő részre osztás.)

A görbe alatti terület a beírt és köré írt téglalapok területösszegének közös határértéke:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^3}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{a^3}{3}$$

$$\left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^3}{6} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{a^3}{3} \right).$$

2. Adjuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int (x^3 - 5x + 6) dx$	b) $\int \sqrt[4]{x^5} dx$	c) $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$
d) $\int (4x - 1)^2 dx$	e) $\int \sqrt[3]{7x + 6} dx$	f) $\int (3x^7 + 4x^2) \cdot (21x^6 + 8x) dx$
g) $\int \sin x \cdot \cos x dx$	h) $\int \sin^5 x \cdot \sin 2x dx$	i) $\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 6} dx$

Megoldás:

$$a) \int (x^3 - 5x + 6) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \frac{x^2}{2} + 6x + C$$

$$b) \int \sqrt[4]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{4}} dx = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9} \cdot x^{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9} \sqrt[4]{x^9} + C$$

$$c) \int \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{8}{3}} - 4x^{\frac{5}{3}} + 7x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = \frac{3}{11} x^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{2} x^{\frac{8}{3}} + \frac{21}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$$

$$d) \int (4x - 1)^2 dx = \int (16x^2 - 8x + 1) dx = \frac{16}{3} x^3 - 4x^2 + x + C$$

$$\begin{aligned}\text{másként } \int (4x-1)^2 dx &= \frac{(4x-1)^3}{3 \cdot 4} + C' \\ &= \frac{64x^3 - 48x^2 + 12x - 1}{12} + C' = \frac{16}{3}x^3 - 4x^2 + x - \frac{1}{12} + C'\end{aligned}$$

$$e) \int \sqrt[3]{7x+6} dx = \int (7x+6)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{(7x+6)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \cdot 7} + C = \frac{3}{28} \sqrt[3]{(7x+6)^4} + C$$

$$f) \int (3x^7 + 4x^2) \cdot (21x^6 + 8x) dx = \frac{(3x^7 + 4x^2)^2}{2} + C$$

$$\text{Felhasználtuk, hogy } \int g(x) \cdot g'(x) dx = \frac{g^2(x)}{2} + C$$

$$g) \int \sin x \cdot \cos x dx = \int \sin x \cdot (\sin x)' dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$\text{másként: } \int \sin x \cdot \cos x dx = \int \frac{1}{2} \cdot \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C'$$

Megjegyzés: A két megoldás különbözőnek tűnik. Mivel

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \left(-\frac{1}{4} \cos 2x\right) = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4} = \frac{1}{4},$$

tehát konstans, mindkét függvény $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ primitív függvénye, így bármelyikkel meg lehet adni a határozatlan integrált.

$$h) \int \sin^5 x \cdot \cos x dx = 2 \cdot \int \sin^6 x \cdot \cos x dx = \frac{2}{7} \sin^7 x + C$$

$$i) \int \frac{2x-4}{x^2-4x+6} dx = \ln|x^2-4x+6| + C = \ln(x^2-4x+6) + C$$

3. Adjuk meg az $f(x) = 7x - 3$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek a grafikonja átmegy a $P(2;3)$ ponton!

Megoldás:

f primitív függvényei $F(x) = \int (7x-3) dx = \frac{7x^2}{2} - 3x + C$ alakúak. A feltétel szerint $F(2) = 3$, azaz $14 - 6 + C = 3$, $C = -5$. A keresett primitív függvény: $F(x) = \frac{7x^2}{2} - 3x - 5$.

4. A Newton–Leibniz-formula segítségével számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$a) \int_{-3}^2 (x - 2x^3) dx$$

$$b) \int_7^9 \frac{x^2 - 36}{2x - 12} dx$$

$$c) \int_1^4 \frac{2}{x^5} dx$$

$$d) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$$

Megoldás:

$$a) \int_{-3}^2 (x - 2x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^4}{4} \right]_{-3}^2 = [2 - 8 - (4,5 - 40,5)] = 30.$$

$$b) \int_7^9 \frac{x^2 - 36}{2x - 12} dx = \int_7^9 \frac{(x-6)(x+6)}{2(x-6)} dx = \frac{1}{2} \int_7^9 (x+6) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + 6x \right]_7^9 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{81}{2} + 54 - \left(\frac{49}{2} + 42 \right) \right] = 14.$$

$$c) \int_1^4 \frac{2}{x^5} dx = \left[2 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} \right]_1^4 = \left[\frac{x^{-4}}{-2} \right]_1^4 = -\frac{1}{512} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{255}{512} \approx 0,498.$$

$$d) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos \frac{\pi}{3} - \left(-\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0,207.$$

5. Legyen $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $x \in \mathbb{R}$.

Igazolja, hogy

$$\int_0^a f(x) dx = -a^3 + a.$$

(Emelt szintű érettségi feladat (első része) 2010. május.)

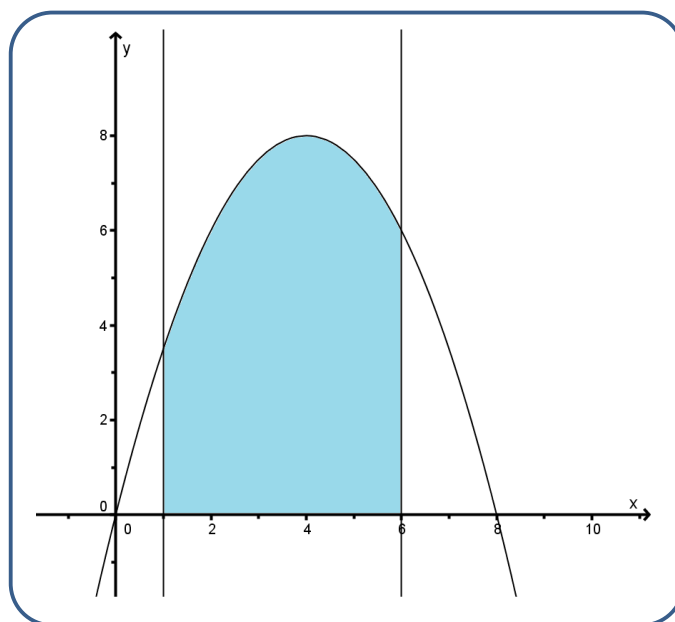
Megoldás:

$$\int_0^a -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a = \left[-\frac{4x^4}{4a} + \frac{3x^3}{3a} + \frac{2x^2}{2a} - ax \right]_0^a = -\frac{a^4}{a} + \frac{a^3}{a} + \frac{a^2}{a} - a^2 - 0 =$$

$$= -a^3 + a^2 + a - a^2 = -a^3 + a.$$

6. Határozzuk meg az $y = 4x - \frac{1}{2}x^2$ parabola alatti területet az $x = 1$ és $x = 6$ határok között!

Megoldás:



A függvény folytonos, és az $[1; 6]$ intervallumon pozitív értékeket vesz fel. A görbe alatti terület meghatározásához a Newton-Leibniz formulát alkalmazzuk:

$$T = \int_1^6 \left(4x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_1^6 = 72 - 36 - \left(2 - \frac{1}{6}\right) = 34\frac{1}{6} \approx 34,17 \text{ (területegység)}.$$

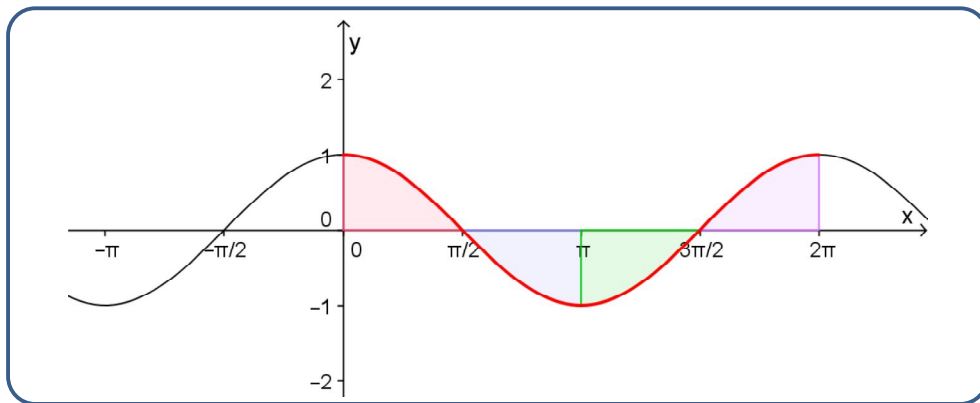
7. Számítsuk ki az $f(x) = \cos x$ függvénygörbe és az x tengely közötti területet az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2\pi$ határok között!

Megoldás:

Első ötletként kiszámítjuk a következő határozott integrál értékét:

$$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$$

Biztosan nem 0 a keresett terület. Mi az oka annak, hogy 0-t kaptunk? Vázoljuk fel a függvény grafikonját!



A függvény grafikonja a vizsgált intervallumban két helyen is metszi az x tengelyt. $\frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2}$ között a függvény negatív értékeket vesz fel, ezért

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx < 0.$$

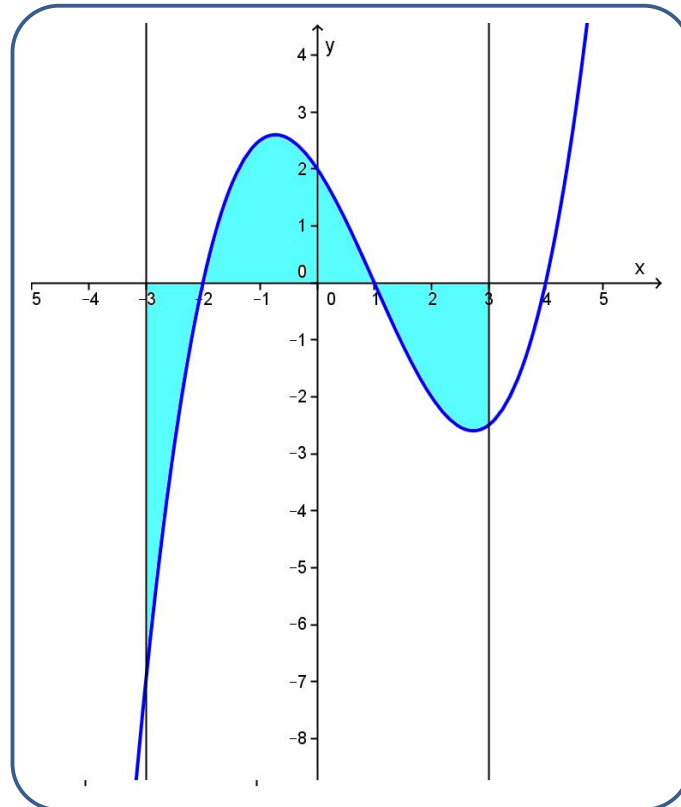
A keresett területet megkapjuk, ha külön-külön kiszámítjuk az integrál értékét 0 és $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2}$, valamint $\frac{3\pi}{2}$ és 2π között, majd a kapott értékek abszolút értékét összeadjuk. A jelen esetben felhasználhatjuk a grafikon tengelyes és középpontos szimmetriáját:

$$T = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 4 \cdot [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4.$$

8. Számítsuk ki az $f(x) = \frac{1}{4}(x-4) \cdot (x+2) \cdot (x-1)$ függvénygörbe és az x tengely közötti területet az $x_1 = -3$ és az $x_2 = 3$ határok között!

Megoldás:

Az adott függvény folytonos, grafikonja felvázolható.



A szorzatalakból kiolvasható, hogy a görbe az x tengelyt a -2 , az 1 és a 4 pontokban metszi. A keresett síkidom területe három síkidom területének összege. Az előjeleket is figyelembe véve:

$$T = \left| \int_{-3}^{-2} f(x) dx \right| + \int_{-2}^1 f(x) dx + \left| \int_1^3 f(x) dx \right|.$$

A határozatlan integrál előállításához megkeressük a függvény polinomalakját. A szorzás elvégzése után kapjuk: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$. A síkidomok területe:

$$T_1 = \left| \int_{-3}^{-2} f(x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4} + 2x \right]_{-3}^{-2} \right| = \left| 1 + 2 - 3 - 4 - \left(\frac{81}{16} + \frac{27}{4} - \frac{27}{4} - 6 \right) \right| = \frac{49}{16},$$

$$T_2 = \int_{-2}^1 f(x) dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4} + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2 - (1 + 2 - 3 - 4) = \frac{81}{16},$$

$$T_3 = \left| \int_1^3 f(x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4} + 2x \right]_1^3 \right| = \left| \frac{81}{16} - \frac{27}{4} - \frac{27}{4} + 6 - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2 \right) \right| = \frac{7}{2}.$$

A keresett terület: $T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{93}{8} = 11,625$ (területegység).

9. a) Mekkora területet fognak közre az $y = 2x^2 - 10x + 16$ és az $y = 3x^2 - 12x + 13$ egyenletű parabolák?
- b) Határozzuk meg az $f(x) = 2x^2 - 10x + 10$ és a $g(x) = 3x^2 - 12x + 7$ függvénygörbék által bezárt síkidom területét!

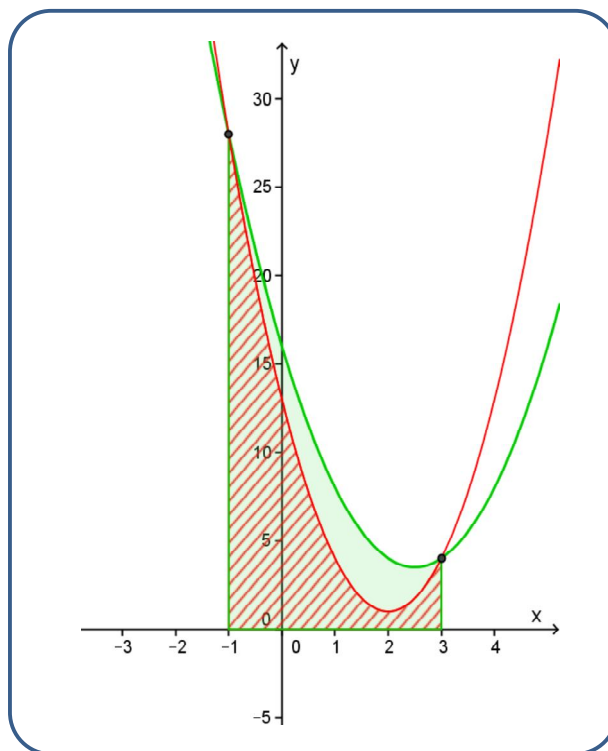
Megoldás:

- a) Ábrázoljuk a két parabolát egy koordináta-rendszerben. Ehhez teljes négyzetté egészítjük ki a másodfokú kifejezéseket:

$$2x^2 - 10x + 16 = 2(x^2 - 5x) + 16 = 2[(x - 2,5)^2 - 6,25] + 16 = 2(x - 2,5)^2 + 3,5;$$

$$3x^2 - 12x + 13 = 3(x^2 - 4x) + 13 = 3[(x - 2)^2 - 4] + 13 = 3(x - 2)^2 + 1.$$

A két parabola metszi egymást. A metszéspontok első koordinátái a $2x^2 - 10x + 16 = 3x^2 - 12x + 13$ egyenlet gyökei. Egy oldalra rendezünk, majd megoldjuk a kapott másodfokú egyenletet. Az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökei: -1 és 3 . A két görbe közötti területet megkapjuk, ha kiszámítjuk a két görbe alatti terület különbségét a $[-1; 3]$ intervallumon.



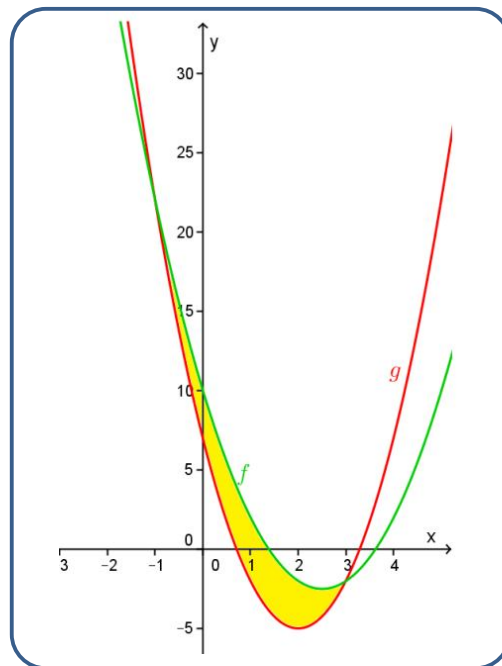
$$T_1 = \int_{-1}^3 (2x^2 - 10x + 16) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 16x \right]_{-1}^3 = 18 - 45 + 48 - \left(-\frac{2}{3} - 5 - 16 \right) = 42\frac{2}{3}$$

$$T_2 = \int_{-1}^3 (3x^2 - 12x + 13) dx = [x^3 - 6x^2 + 13x]_{-1}^3 = 27 - 54 + 39 - (-1 - 6 - 13) = 32.$$

Tehát a keresett terület: $10\frac{2}{3}$ területegység.

- b) Az előző feladat mintájára teljes négyzetté kiegészítés után ábrázoljuk a függvényeket:

$$2x^2 - 10x + 10 = 2(x - 2,5)^2 - 2,5 \text{ és } 3x^2 - 12x + 7 = 3(x - 2)^2 - 5.$$



Első ránézésre az előzőnél nehezebbnek tűnik a terület meghatározása, mert a két görbe metszi az x tengelyt. Vegyük észre, hogy a b) feladatban szereplő parabolák az a) feladatbeliekkel egybevágók, azok $(0; -6)$ vektorral való eltolásával kaphatók meg. Ebből következik, hogy az általuk bezárt síkidomok is egybevágók, területük egyenlő: $10 \frac{2}{3}$ (területegység).

Megjegyzés:

Ha két függvénygörbe által közrezárt síkidom területét kell meghatározni, előfordulhat, hogy a síkidom részben vagy egészben nem az x tengely felett helyezkedik el. Ebben az esetben mindig van olyan y tengellyel párhuzamos alkalmas vektor, amellyel eltolva a két függvénygörbét, azok a vizsgált intervallumban a x tengely fölött lesznek. Tegyük fel, hogy f és g folytonos függvények grafikonja közötti síkidom területét kell meghatározni. A grafikonok közös pontjának első koordinátáját az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásával kapjuk meg. Ezután már csak a legkisebb és legnagyobb gyök közötti intervallumban vizsgáljuk a függvényeket. Ismert, hogy zárt intervallumon folytonos függvénynek van minimuma (Weierstrass-tétel), ezért van olyan d szám amelyre minden $x \in D_f \cap D_g$ esetén $f^*(x) = f(x) + d \geq 0$ és $g^*(x) = g(x) + d \geq 0$ teljesül. Ha a görbék két szomszédos metszéspontjának első koordinátája a , és b , akkor a görbék e két pont közötti területét az alábbi kifejezés adja meg:

$$\left| \int_a^b f^*(x) dx - \int_a^b g^*(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f^*(x) - g^*(x)) dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|.$$

- Tehát először megoldjuk az $f(x) = g(x)$ egyenletet. Ha az egyenlet gyökei $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, akkor
- a szomszédos gyökök által megadott $n - 1$ intervallumon kiszámítjuk a két függvény különbségének határozott integrálját, majd ezek abszolút értékét összeadjuk.

A fentiek szerint nem kell megvizsgálni sem azt, hogy két metszéspont között melyik függvény vesz fel nagyobb értéket, sem azt, hogy a grafikonok az x tengelyhez képest hogy helyezkednek el, azaz nem feltétlenül kell ábrázolni a két függvényt.

10. Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = x^2 + 7$ parabola, a parabola 2 abszcisszájú P pontjára illeszkedő érintő és az y tengely bezár!

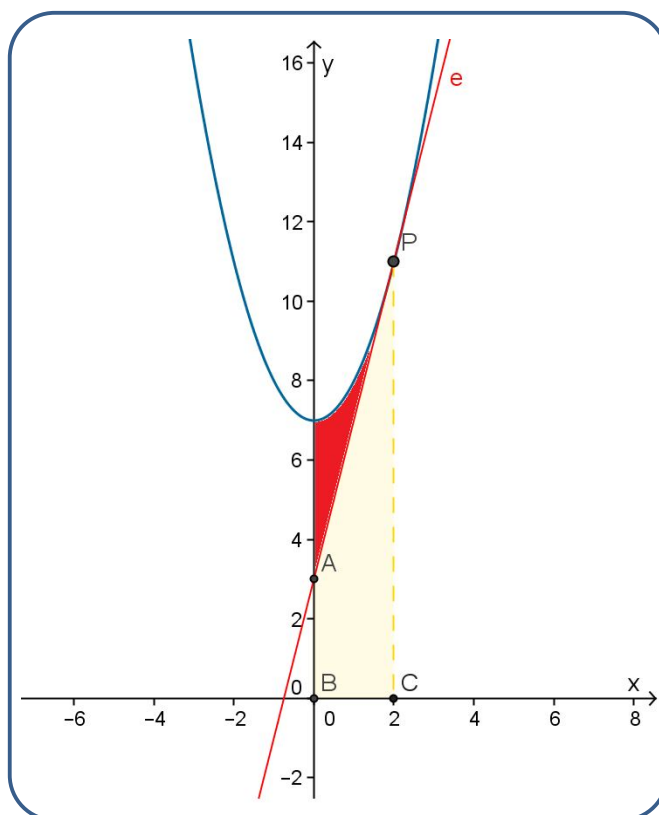
Megoldás:

A parabola P pontjának második koordinátája: 11. A P pontbeli érintő iránytangense az $f(x) = x^2 + 7$ függvény 2 helyen vett differenciálhányadosa. $f'(x) = 2x$, $f'(2) = 4$. Az érintő egyenlete: $y - 11 = 4(x - 2)$, azaz $y = 4x + 3$.

A kérdéses síkidom területét megkapjuk, ha az f függvény $[0; 2]$ intervallumon számított határozott integráljából kivonjuk az érintő alatti területet ugyanezen határok között. Ez utóbbi síkidom olyan derékszögű trapéz, amelynek párhuzamos oldalai 3 és 11 egység, magassága 2 egység, területe 14 területegység. A parabola alatti terület $x = 0$ és $x = 2$ között:

$$\int_0^2 (x^2 + 7) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 7x \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 14.$$

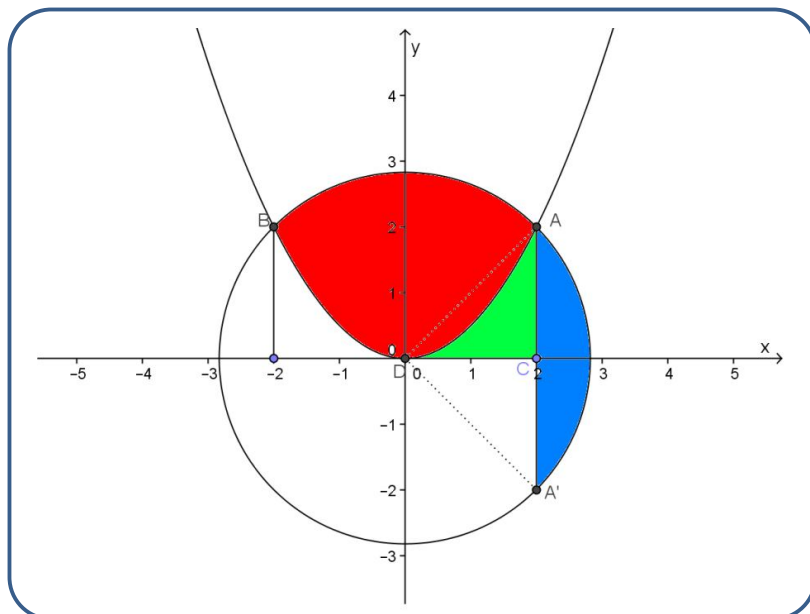
A parabola, a $(2; 11)$ pontbeli érintője és az y tengely által határolt síkidom területe $\frac{8}{3} \approx 2,67$ területegység.



11. Az $x^2 = 2y$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 \leq 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét!
(Emelt szintű érettségi 2010. október)

Megoldás:

A parabola tengelye az y tengely, tengelypontja az origó. A kör középpontja az origó, sugara $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ egység. A két görbe metszéspontjainak második koordinátája az $y^2 + 2y - 8 = 0$ egyenlet gyökei (-4 és 2) közül a pozitív, a 2 . A két metszéspont $A(2; 2)$ és $B(-2; 2)$.



A parabola és a kör által meghatározott síkidomok közül a pirossal színezett a konvex. Ennek területét megkapjuk, ha a $2\sqrt{2}$ sugarú félkör területéből kivonjuk a parabola alatti területet -2 és 2 határok között, valamint a szimmetriát felhasználva, az AA' húr által határolt kisebbik (kékkel színezett) körszelet területét.

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{2} x^2 dx = 2 \cdot \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^2 = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Az $\angle ADC = 45^\circ$, mivel $AC = DC = 2$, ezért $\angle ADA' = 90^\circ$, a körszelet területe:

$$\frac{8\pi}{4} - 4 = 2\pi - 4.$$

A két görbe által meghatározott konvex síkidom területe:

$$\frac{8\pi}{2} - \frac{8}{3} - (2\pi - 4) = 2\pi + \frac{4}{3} \approx 7,62 \text{ (területegység)}.$$

Megjegyzés:

A vizsgált síkidom területe úgy is megkapható, ha az ADB körcikk területéhez hozzáadjuk a parabola és az $y = x$ egyenesek által közrezárt parabolaszélet területének kétszeresét. A parabolaszélet területe a $[0; 2]$ intervallumon számított parabola alatti terület és az ADC derékszögű háromszög területének különbsége.

12. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja a $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (A és B) illeszkedik az $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenletű parabolára.

- Számítsa ki az A és a B pont koordinátáit!
- Mekkora területű részekre bontja az ABC háromszöget a parabola íve?

(Emelt szintű érettségi feladat (részlet) 2009. október)

Megoldás:

- a) A lefelé nyitott parabola szimmetrikus az y tengelyre, tengelypontja a $(0;1)$ pont. Az egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai a C csúctól $\sqrt{53}$ egység távolságra vannak, ezért illeszkednek a C középpontú $\sqrt{53}$ egység sugarú körre. A és B pont a kör és a parabola metszéspontjai:

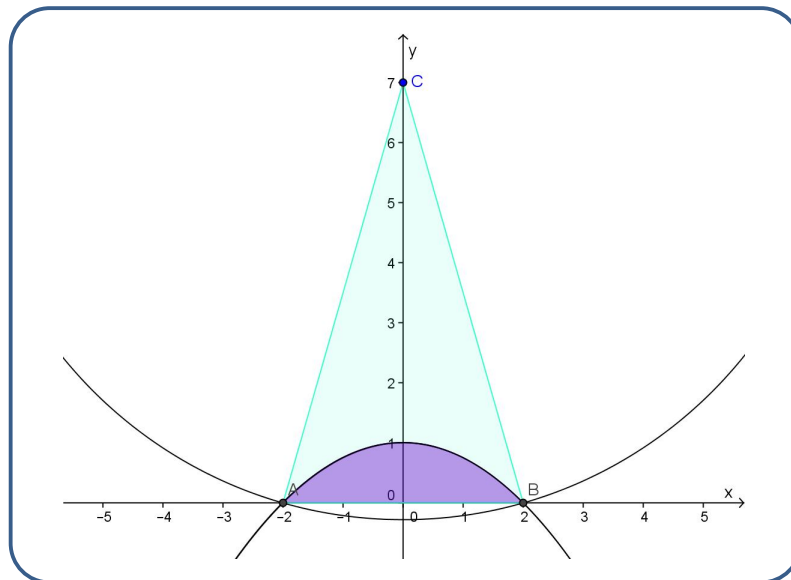
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + (y - 7)^2 = 53 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \end{array} \right\}$$

A második egyenletből kifejezzük x^2 -et és behelyettesítjük az első egyenletbe:

$$-4y + 4 + y^2 - 14y + 49 = 53$$

$$y^2 - 18y = 0.$$

A másodfokú egyenlet gyökei: 0 és 18. Ezek közül csak a 0 jó, mert a parabolának nincs olyan pontja, amelynek második koordinátája 1-nél nagyobb lenne. A metszéspontok első koordinátái az $0 = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenlet gyökei: -2 és 2 . Tehát a háromszög hiányzó csúcsai $A(-2; 0)$ és $B(2; 0)$.



- b) A parabola az x tengelyt az A és B pontokban metszi. A parabola és az x tengely által bezárt síkidom területe:

$$T_1 = \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{12} + x \right]_{-2}^2 = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{12} + x \right]_0^2 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 2 - 0 \right) = \frac{8}{3} \approx 2,67 \text{ (területegység).}$$

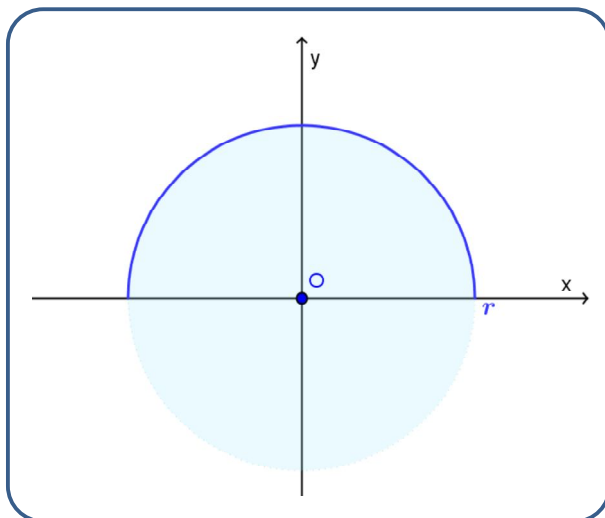
A másik síkidom területét megkapjuk, ha ezt a területet a háromszög területéből kivonjuk.

$$T_2 = \frac{4 \cdot 7}{2} - \frac{8}{3} = \frac{34}{3} \approx 11,33 \text{ (területegység).}$$

13. Igazoljuk az r sugarú gömb térfogatképletét az integrálszámítás segítségével!

Megoldás:

Gömböt kapunk, ha egy félkört megforgatunk az átmérője körül. Helyezzük el a félkört a koordináta-rendszer I. és II. síknegyedébe úgy, hogy középpontja az origó legyen.



Az origó középpontú r sugarú kör egyenletéből fejezzük ki y -t! (Most $y \geq 0$.)

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

A megfelelő függvény: $f: [-r; r] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. A gömb térfogata:

$$\begin{aligned} V_g &= \pi \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - 0 \right) = \frac{4}{3} r^3 \pi. \end{aligned}$$

14. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az $f(x) = 2x^2 + 4$ függvény görbéje, valamint az $A(-1; 6)$ és a $B(3; 22)$ pontokon átmenő egyenes által határolt síkidom x tengely körüli forgatásával nyerünk!

Megoldás:

Behelyettesítéssel megállapíthatjuk, hogy a két pont illeszkedik a parabolára. Az adott másodfokú függvény konvex, ezért az AB szakasz az AB parabolaív felett van. A forgástest térfogatát megkapjuk, ha az AB szakasz x tengely körüli megforgatásával nyert csanakúp térfogatából kivonjuk a parabola, az x tengely, valamint az $x = -1$ és $x = 3$ egyenesek által közrezárt síkidom megforgatásával kapott test térfogatát. A csanakúp sugarai 6 és 22 egység, magassága 4 egység, ezért térfogata:

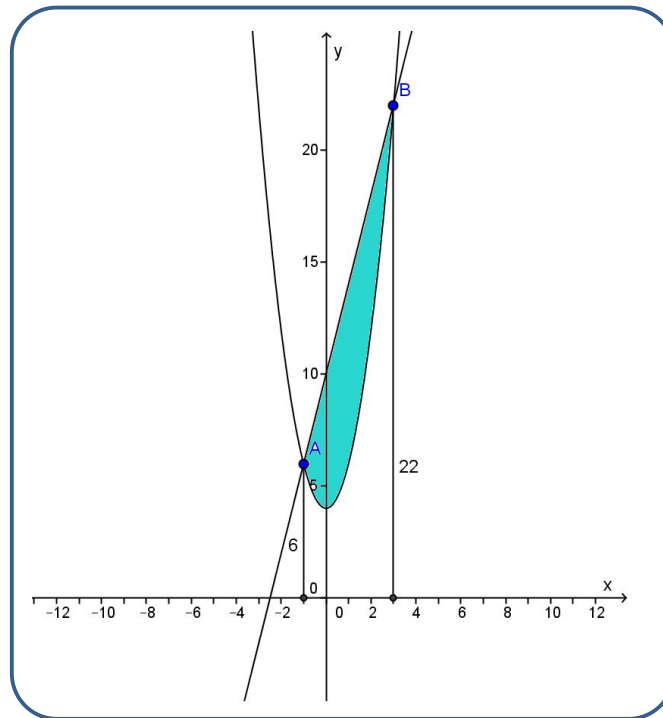
$$V_{cs} = \frac{4}{3} \pi (36 + 132 + 484) = \frac{2608}{3} \pi.$$

A parabola ívvel határolt síkidom x tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogata:

$$\begin{aligned}
 V_p &= \pi \int_{-1}^3 (2x^2 + 4)^2 dx = \pi \int_{-1}^3 (4x^4 + 16x^2 + 16) dx = \pi \left[\frac{4x^5}{5} + \frac{16x^3}{3} + 16x \right]_{-1}^3 \\
 &= \pi \left[\frac{972}{5} + 144 + 48 - \left(-\frac{4}{5} - \frac{16}{3} - 16 \right) \right] = \pi \left(208 + \frac{3008}{15} \right) = \frac{6128}{15} \pi.
 \end{aligned}$$

A keresett térfogat:

$$\frac{13040}{15} \pi - \frac{6128}{15} \pi = \frac{6912}{15} \pi = 460,8\pi \text{ (térfogategység)} \approx 1447,6 \text{ (térfogategység)}.$$



15. Egy tömegpont egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Gyorsulása $a = 4 \frac{m}{s^2}$, kezdősebessége $v_0 = 40 \frac{m}{s}$.

a) Írjuk fel a mozgás sebesség-idő függvényét!

b) Írjuk fel a mozgás út-idő függvényét, ha a test $t = 6s$ pillanatban a kezdőponttól 656 m távolságra van!

Megoldás:

a) A sebességfüggvény a gyorsulásfüggvény integrálja. A Newton–Leibniz-formula szerint:

$$\int_0^t a(t) dt = v(t) - v(0).$$

$$v(t) - v(0) = \int_0^t 4 dt = [4t]_0^t = 4t.$$

Innen $v(t) = v(0) + 4t = 40 + 4t \left(\frac{m}{s} \right)$.

b)

A megtett út $\int_0^t v(t) dt = s(t) - s(0)$, tehát

$$s(t) - s(0) = \int_0^t (40 + 4t) dt = [40t + 2t^2]_0^t = 40t + 2t^2, \quad \text{így } s(t) = s(0) + 40t + 2t^2.$$

Tudjuk, hogy $s(6) = s(0) + 240 + 72$, azaz $656 = s(0) + 312$, $s(0) = 344$.

Az út-idő függvény: $s(t) = 344 + 40t + 2t^2$ (m).

III. Ajánlott feladatok

1. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

$$a) \int \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 7}{2x^2} dx \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad b) \int (5 \cdot 3^x - \sqrt[3]{x}) dx \quad c) \int \cos(8 - 9x) dx$$

$$d) \int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}} dx \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad e) \int (2x^3 + 7)^4 \cdot 2x^2 dx \quad f) \int \sin^2 x dx$$

$$g) \int \frac{3 \cdot \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx \quad (x \in]0; \frac{\pi}{2}[) \quad h) \int \sin 6x \cdot \cos 2x dx \quad i) \int \sin^3 x dx$$

$$j) \int \operatorname{ctg}^2 x dx \quad (x \in]0; \pi[) \quad k) \int \operatorname{tg} x dx \quad (x \in]0; \frac{\pi}{2}[) \quad l) \int \frac{3 \sin 2x}{\sin^2 x + 10} dx$$

2. Írjuk fel az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x - 8$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek egyik zérushelye a -2 !
3. Számítsuk ki az $y = x^2 - 5x - 14$ parabola és az x tengely közötti területet az $x_1 = -1$ és az $x_2 = 8$ határok között!
4. Válasszuk meg a k számot úgy, hogy az $y = x^2 + 3x + 4k$ és az $y = kx^2 + 3x + 4$ egyenletű parabolák által közrefogott síkidom területe 16 egység legyen!
5. Adjuk meg a p^2 számot úgy, hogy az $y = p^2 - 25x^2$ és az $y = 1 - \frac{25x^2}{p^2}$ egyenletű parabolák közül az egyik négyszer akkora területű síkidomot fogjon közre az x tengellyel, mint a másik!
6. Számítsuk ki annak a korlátos, zárt síkidomnak a területét, amelyet az $f(x) = \sqrt{x-1}$, a $g(x) = \sqrt{2x-2}$ és a $h(x) = x-1$ függvények grafikonjai határolnak!
7. Az $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 12$ egyenletű parabola -2 abszcisszájú P pontjához tartozó érintő és az x tengely két síkidomot fog közre. Számítsuk ki mindkét síkidom területét!
8. a) Igazoljuk, hogy az $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 26$ és a $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 7x - 2$ valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonjára illeszkedik a $(4; -6)$ pont!
- b) Határozzuk meg azt a 4-nél kisebb p számot, amelyre az f és a g függvény grafikonja, valamint az $x = p$ egyenes 3,5 egység területű síkidomot határol!

9. Mekkora térfogatú forgástest keletkezik, ha az x tengely körül megforgatjuk az $y = \sin 2x$ görbe, valamint az $x = 0$, az $x = \pi$ és az $y = 0$ egyenesek által határolt síkidomot?
10. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amely az $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x}$ függvény grafikonja, az x tengely és a görbe $P(8;4)$ pontbeli érintője által határolt zárt síkidomnak az x tengely körüli forgatásakor keletkezik!
11. Egy pontszerű test harmonikus rezgőmozgást végez, sebességfüggvénye $v(t) = 0,05 \cdot \cos\left(6t + \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{m}{s}\right)$. A test a megfigyelés kezdetekor a nyugalmi állapotban haladt át, azaz $s(0) = 0$ (m). Határozzuk meg a kitérés-idő függvényt!
12. Egy rugó hossza megfeszítetlen állapotban 30 cm, a rugóállandó $D = 0,5 \frac{N}{m}$. Mennyi munkával lehet a rugót 35 cm-ről 40 cm-re nyújtani? (A rugalmas erő $F = -Dx$.)

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 7}{2x^2} dx \quad (x \in \mathbb{R}^+) & b) \int (5 \cdot 3^x - \sqrt[3]{x}) dx & c) \int \cos(8 - 9x) dx \\
 d) \int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}} dx \quad (x \in \mathbb{R}^+) & e) \int (2x^3 + 7)^4 \cdot 2x^2 dx & f) \int \sin^2 x dx \\
 g) \int \frac{3 \cdot \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx \quad (x \in]0; \frac{\pi}{2}[) & h) \int \sin 6x \cdot \cos 2x dx & i) \int \sin^3 x dx \\
 j) \int \operatorname{ctg}^2 x dx \quad (x \in]0; \pi[) & k) \int \operatorname{tg} x dx \quad (x \in]0; \frac{\pi}{2}[) & l) \int \frac{3 \sin 2x}{\sin^2 x + 10} dx
 \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{l}
 a) \int \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 7}{2x^2} dx = \int \left(2x - \frac{5}{2} + 3 \cdot x^{-1} - \frac{7}{2} \cdot x^{-2} \right) dx = \\
 \quad = x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \cdot \ln x + \frac{7}{2} \cdot x^{-1}. \\
 b) \int (5 \cdot 3^x - \sqrt[3]{x}) dx = \frac{5}{\ln 3} \cdot 3^x - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C. \\
 c) \int \cos(8 - 9x) dx = -\frac{1}{9} \sin(8 - 9x) + C. \\
 d) \int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{12}} \right) dx = \int x^{\frac{11}{12}} dx = \frac{12}{23} \cdot x^{\frac{23}{12}} + C = \frac{12}{23} \cdot \sqrt[12]{x^{23}} + C. \\
 e) \int (2x^3 + 7)^4 \cdot 2x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \int (2x^3 + 7)^4 \cdot 6x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2x^3 + 7)^5}{5} + C = \frac{(2x^3 + 7)^5}{15} + C. \\
 f) \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.
 \end{array}$$

$$g) \int \frac{3 \cdot \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = 3 \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = 3 \int (\cos x - \sin x) dx = 3(\sin x + \cos x) + C.$$

$$h) \int \sin 6x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 4x) dx = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 4x}{8} + C.$$

$$i) \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx = \\ = \int \sin x dx + \int \cos^2 x \cdot (-\sin x) dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$$j) \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

$$k) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{\cos' x}{\cos x} dx = -\ln \cos x + C.$$

$$l) \int \frac{3 \sin 2x}{\sin^2 x + 10} dx = 3 \int \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x + 10} dx = 3 \int \frac{(\sin^2 x + 10)'}{\sin^2 x + 10} dx = 3 \cdot \ln(\sin^2 x + 10) + C.$$

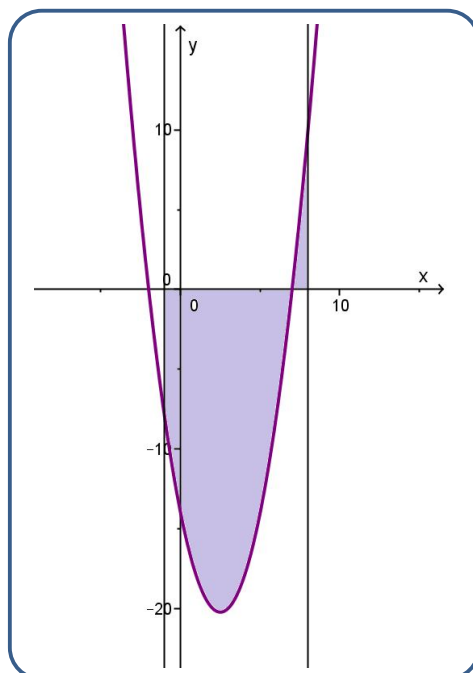
2. Írjuk fel az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x - 8$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek egyik zérushelye a -2 !

Megoldás:

Az f függvény primitív függvényét $F(x) = \int (7x - 8) dx = \frac{7}{2}x^2 - 8x + C$ alakban keressük. A feltétel szerint $F(-2) = 0$. Behelyettesítés után $14 + 16 + C = 0$, tehát $C = -30$. A keresett függvény $F(x) = \frac{7}{2}x^2 - 8x - 30$.

3. Számítsuk ki az $y = x^2 - 5x - 14$ parabola és az x tengely közötti területet az $x_1 = -1$ és az $x_2 = 8$ határok között!

Megoldás:



Először meghatározzuk a görbének az x tengellyel való metszéspontjait. Ehhez megoldjuk az $x^2 - 5x - 14 = 0$ egyenletet. Az egyenlet gyökei: -2 és 7 . A $[-1; 8]$ intervallumban a görbe az $x = 7$ pontban metszi az x tengelyt. A keresett terület két síkidom területének összege:

$$T = \left| \int_{-1}^7 (x^2 - 5x - 14) dx \right| + \int_7^8 (x^2 - 5x - 14) dx$$

$$\int_{-1}^7 (x^2 - 5x - 14) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 14x \right]_{-1}^7 = \frac{343}{3} - \frac{245}{2} - 98 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 14 \right) = -\frac{352}{3}$$

$$\int_7^8 (x^2 - 5x - 14) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 14x \right]_7^8 = \frac{512}{3} - 160 - 112 - \left(\frac{343}{3} - \frac{245}{2} - 98 \right) = \frac{29}{6}$$

$$T = \frac{352}{3} + \frac{29}{6} = \frac{733}{6} = 122\frac{1}{6} \text{ (területegység).}$$

4. Válasszuk meg a k számot úgy, hogy az $y = x^2 + 3x + 4k$ és az $y = kx^2 + 3x + 4$ egyenletű parabolák által közrefogott síkidom területe 16 egység legyen!

Megoldás:

Először meghatározzuk a két parabola metszéspontjait.

$$x^2 + 3x + 4k = kx^2 + 3x + 4$$

$$x^2(1 - k) - 4(1 - k) = 0$$

$$(1 - k)(x^2 - 4) = 0.$$

Ha $k = 1$, akkor a két parabola egybeesik. A feladat szempontjából a $k \neq 1$ eset érdekes. A metszéspontok első koordinátája -2 , illetve 2 . Visszahelyettesítéssel megkapjuk a második koordinátákat. A metszéspontok: $(-2; 4k - 2)$, $(2; 4k + 10)$. A két parabola által meghatározott síkidom területe:

$$T = \left| \int_{-2}^2 (x^2(1 - k) - 4(1 - k)) dx \right| = \left| (1 - k) \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 \right|$$

$$= \left| (1 - k) \cdot \left(\frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) \right) \right| = \frac{32}{3} \cdot |k - 1|.$$

A feltétel szerint $\frac{32}{3} \cdot |k - 1| = 16$, azaz $|k - 1| = \frac{3}{2}$. Innen $k = \frac{5}{2}$, illetve $k = -\frac{1}{2}$. (Ezekre teljesülnek a feltételek.)

5. Adjuk meg a p^2 számot úgy, hogy az $y = p^2 - 25x^2$ és az $y = 1 - \frac{25x^2}{p^2}$ egyenletű parabolák közül az egyik négyszer akkora területű síkidomot fogjon közre az x tengellyel, mint a másik!

Megoldás:

A tört miatt $p \neq 0$. Feltehetjük, hogy p pozitív. A parabolák x tengellyel való metszéspontjai a

$p^2 - 25x^2 = 0$, illetve az $1 - \frac{25x^2}{p^2} = 0$ egyenlet gyökei. A két görbe azonos pontokban metszi az x tengelyt a $(-\frac{p}{5}; 0)$, valamint a $(\frac{p}{5}; 0)$ pontokban. Kiszámítjuk a parabolák és az x tengely által közrezárt síkidom területét. A síkidomok szimmetrikusak az y tengelyre.

$$T_1 = 2 \int_0^{\frac{p}{5}} (p^2 - 25x^2) dx = 2 \left[p^2 x - \frac{25x^3}{3} \right]_0^{\frac{p}{5}} = 2 \left(\frac{p^3}{5} - \frac{p^3}{15} \right) = \frac{4p^3}{15};$$

$$T_2 = 2 \int_0^{\frac{p}{5}} \left(1 - \frac{25x^2}{p^2} \right) dx = 2 \left[x - \frac{25x^3}{3p^2} \right]_0^{\frac{p}{5}} = 2 \left(\frac{p}{5} - \frac{p}{15} \right) = \frac{4p}{15}.$$

Két eset lehetséges: $T_1 = 4T_2$ esetén, $4p^3 = 16p$ ($p \neq 0$), $p^2 = 4$; $T_2 = 4T_1$ esetén, $4p = 16p^3$, amiből $p^2 = \frac{1}{4}$ adódik.

6. Számítsuk ki annak a korlátos, zárt síkidomnak a területét, amelyet az $f(x) = \sqrt{x-1}$, a $g(x) = \sqrt{2x-2}$ és a $h(x) = x-1$ függvények grafikonjai határolnak!

Megoldás:

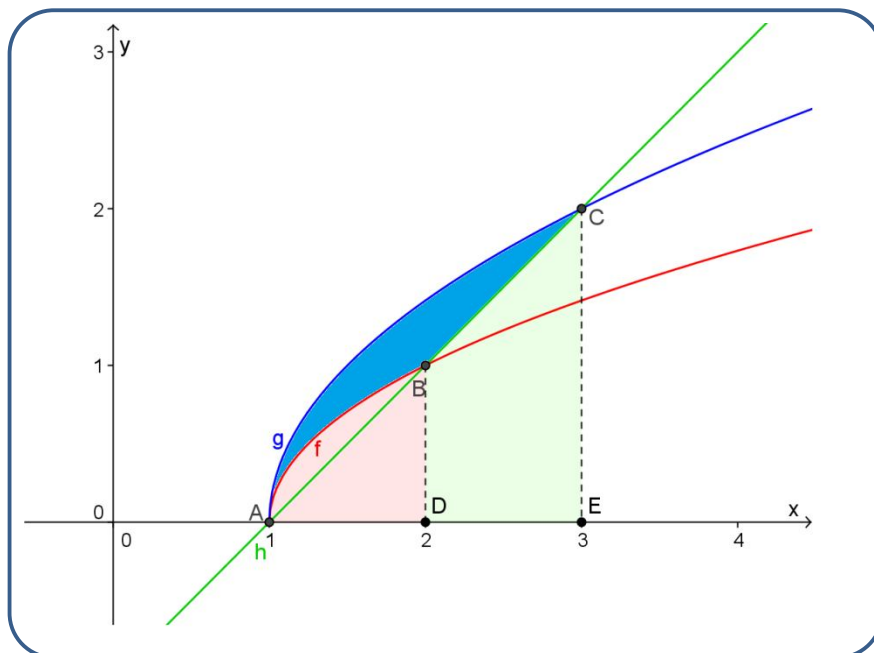
Meghatározzuk a görbék páronként vett metszéspontjait:

$$f(x) = g(x): \sqrt{x-1} = \sqrt{2}\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = 1;$$

$$f(x) = h(x): \sqrt{x-1} = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(1-\sqrt{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ vagy } x = 2;$$

$$g(x) = h(x): \sqrt{2x-2} = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{2}-\sqrt{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ vagy } x = 3.$$

Az ábra jelölései szerint az ABC síkidom területét keressük. Ezt megkapjuk, ha $\int_1^3 g(x)dx$ határozott integrál értékéből kivonjuk a $DECB$ trapéz területének és a $\int_1^2 f(x)dx$ határozott integrálnak az összegét.



$$\int_1^3 \sqrt{2x-2} dx = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x-1)^3} \right]_1^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sqrt{8} - 0) = \frac{8}{3};$$

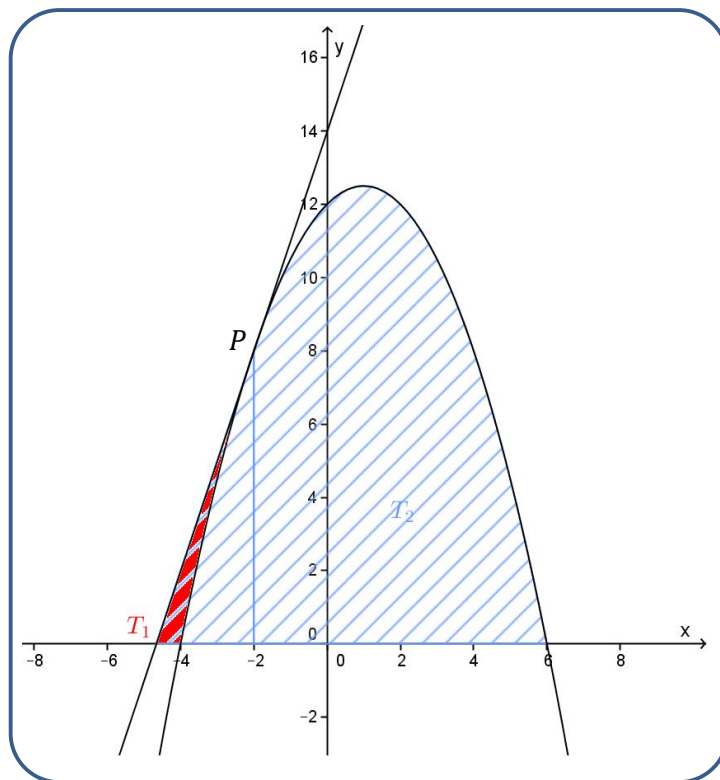
$$\int_1^2 \sqrt{x-1} dx = \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x-1)^3} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (1 - 0) = \frac{2}{3};$$

a trapéz területe: $\frac{3}{2}$. A vizsgált síkidom területe: $T = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ (területegység).

7. Az $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 12$ egyenletű parabola -2 abszcisszájú P pontjához tartozó érintő és az x tengely két síkidomot fog közre. Számítsuk ki mindkét síkidom területét!

Megoldás:

Az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 12$ függvény zérushelyei az $-\frac{1}{2}x^2 + x + 12 = 0$ egyenlet gyökei: -4 és 6 . P pont második koordinátája $f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 + 12 = 8$. A parabola P pontjához tartozó érintő meredeksége, a függvény -2 pontbeli deriváltja. $f'(x) = -x + 1$; $f'(-2) = 3$. A P pontbeli érintő egyenlete: $y - 8 = 3(x + 2)$; $y = 3x + 14$. Az érintő az x tengelyt a $-\frac{14}{3}$ pontban metszi.



Az ábrán pirossal jelölt síkidom területe egy derékszögű háromszög és egy parabolikus háromszög területének a különbsége. A háromszög befogói $-2 - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{8}{3}$ és 8 , területe $\frac{32}{3}$. A parabola alatti terület a másodfokú függvény határozott integrálja a -4 és 2 határok között:

$$\int_{-4}^{-2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 12\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 12x\right]_{-4}^{-2} = \frac{4}{3} + 2 - 24 - \left(\frac{32}{3} + 8 - 48\right) = \frac{26}{3}.$$

$$T_1 = \frac{32}{3} - \frac{26}{3} = 2 \text{ (területegység).}$$

A késsel jelölt síkidom területét megkapjuk, ha a parabola és az x tengely által bezárt területhez hozzáadjuk a T_1 területet.

$$\int_{-4}^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 12\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 12x\right]_{-4}^6 = -36 + 18 + 72 - \left(\frac{32}{3} + 8 - 48\right) = \frac{250}{3}.$$

$$T_2 = \frac{250}{3} + \frac{6}{3} = \frac{256}{3} \approx 85,33 \text{ (területegység).}$$

8. a) Igazoljuk, hogy az $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 26$ és a $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 7x - 2$ valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonjára illeszkedik a $(4; -6)$ pont!
- b) Határozzuk meg azt a 4-nél kisebb p számot, amelyre az f és a g függvény grafikonja, valamint az $x = p$ egyenes 3,5 egység területű síkidomot határol!

Megoldás:

- a) $f(4) = -64 + 32 + 26 = -6$, $g(4) = -64 + 32 + 28 - 2 = -6$.
- b) Vizsgáljuk meg hogy van-e a két függvény görbéjének más közös pontja! Ehhez megoldjuk az $f(x) = g(x)$ egyenletet. $-x^3 + 2x^2 + 26 = -x^3 + 2x^2 + 7x - 2$, ha $26 = 7x - 2$. Ebből $x = 4$. Tehát a két görbének egyetlen közös pontja a $(4; -6)$ pont. Az is megállapítható, hogy $x < 4$ esetén $f(x) > g(x)$. Így a síkidom területe:

$$\int_p^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_p^4 (-7x + 28) dx.$$

A feltétel szerint:

$$\begin{aligned} \left[-7\frac{x^2}{2} + 28x\right]_p^4 &= 3,5, \text{ azaz} \\ -56 + 112 + 7\frac{p^2}{2} - 28p &= 3,5 \\ 7p^2 - 56p + 105 &= 0, \\ p^2 - 8p + 15 &= 0. \end{aligned}$$

A másodfokú egyenlet két gyöke 3 és 5 közül a $p < 4$ feltételnek csak a 3 felel meg, tehát $p = 3$.

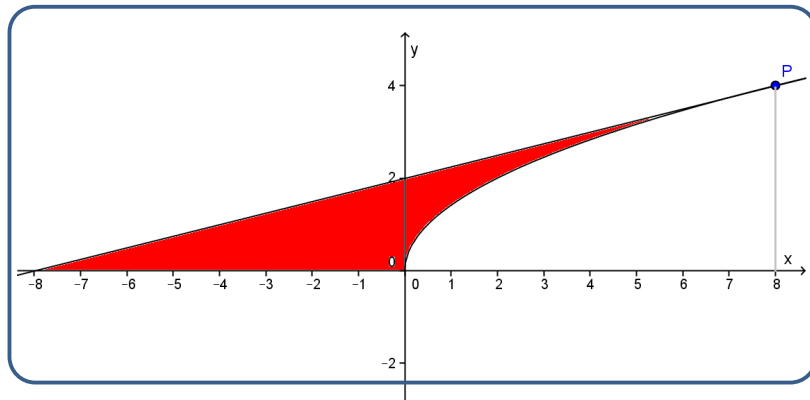
9. Mekkora térfogatú forgástest keletkezik, ha az x tengely körül megforgatjuk az $y = \sin 2x$ görbe, valamint az $x = 0$, az $x = \pi$, és az $y = 0$ egyenesek által határolt síkidomot?

Megoldás:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi (\sin^2 2x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} (\pi - 0 - 0) = \\ &= \frac{\pi^2}{2} \text{ (térfogategység).} \end{aligned}$$

10. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amely az $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x}$ függvény grafikonja, az x tengely és a görbe $P(8; 4)$ pontbeli érintője által határolt zárt síkidomnak az x tengely körüli forgatásakor keletkezik!

Megoldás:



Először meghatározzuk az érintő meredekségét. Ez a függvény deriváltjának a 8 helyen vett helyettesítési értéke. $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, $m = f'(8) = \frac{1}{4}$. Az érintő egyenlete: $y - 4 = \frac{1}{4}(x - 8)$, azaz $y = \frac{1}{4}x + 2$. Az érintő az x tengelyt a $(-8; 0)$ pontban metszi. Az érintő $(-8; 0)$ és $(8; 4)$ szakaszának x tengely körüli forgatásakor egy forgáskúpot ír le. A forgáskúp sugara 4 egység, magassága 16 egység, térfogata: $V_k = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot 16}{3} = \frac{256\pi}{3}$ (térfogategység). A parabola $(0; 0)$, $(8; 4)$ ívének x tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogata:

$$V_p = \pi \int_0^8 2x \, dx = \pi [x^2]_0^8 = 64\pi \text{ (térfogategység)}.$$

A vizsgált test térfogata: $V_k - V_p = \frac{256}{3}\pi - \frac{192}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi \approx 67,02$ (térfogategység).

11. Egy pontszerű test harmonikus rezgőmozgást végez, sebességfüggvénye $v(t) = 0,05 \cos\left(6t + \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{m}{s}\right)$. A test a megfigyelés kezdetekor a nyugalmi állapotban haladt át, azaz $s(0) = 0$ (m). Határozzuk meg a kitérés-idő függvényt!

Megoldás:

$$s(t) = \int 0,05 \cos\left(6t + \frac{\pi}{6}\right) dt = \frac{5}{600} \cdot \sin\left(6t + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

Ide behelyettesítjük $s(0) = 0$ -t, $0 = \frac{1}{120} \cdot \sin\frac{\pi}{6} + C$. Ebből $C = -\frac{1}{240}$, és a kitérés-idő függvény:

$$s(t) = \frac{5}{600} \cdot \sin\left(6t + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{240} \text{ (m)}.$$

12. Egy rugó hossza megfeszítetlen állapotban 30 cm, a rugóállandó $D = 0,5 \frac{N}{m}$. Mennyi munkával lehet a rugót 35 cm-ről 40 cm-re nyújtani? (A rugalmas erő $F = -Dx$.)

Megoldás:

Ha a rugó hossza 35 cm, akkor az eredeti hosszához képest $x_1 = 5$ cm-rel, ha 40 cm, akkor $x_2 = 10$ cm-rel nyújtottuk meg. A mértékegységek figyelembe vételével ($x_1 = 0,05$ m, $x_2 = 0,1$ m) a megnyújtás közben végzett munka:

$$W = \int_{0,05}^{0,1} 0,5x \, dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_{0,05}^{0,1} = \frac{1}{4} (0,01 - 0,0025) = 0,001875.$$

tehát $1,875 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ munkával lehet a rugót 35cm-ről 40 cm-re nyújtani.

Megjegyzés: A munka az $F(x)$ erőfüggvény $x_1 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$, $x_2 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ határokkal számolt görbe alatti területével egyenlő.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Írja fel az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4x + 13$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek grafikonja illeszkedik a $(-3; -20)$ pontra!
2. Adja meg a következő függvények határozatlan integrálját az értelmezési tartományukon!

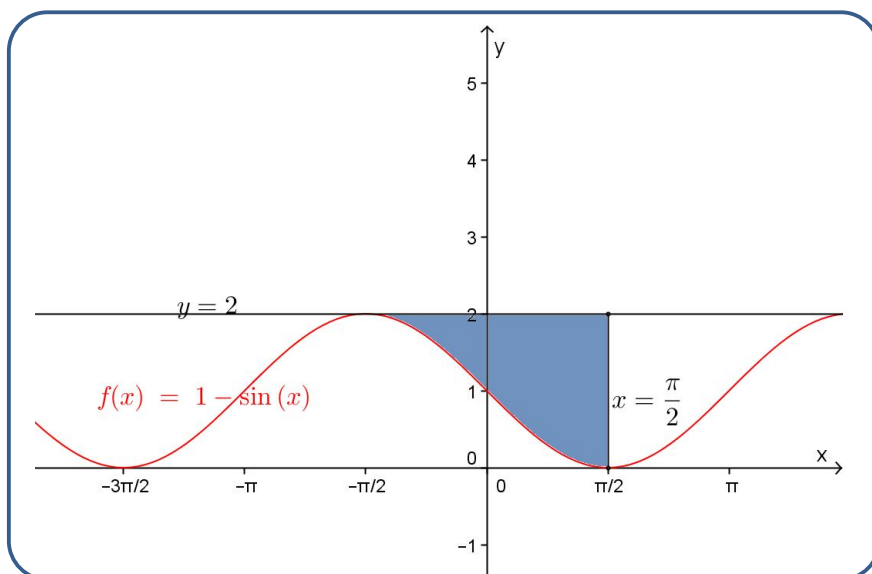
$$a) \ a(x) = 5x^4 - \frac{1}{2}x^{-5} + 2; \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad b) \ b(x) = \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^4}; \ x \in \mathbb{R}^+$$

$$c) \ c(x) = 5\cos^2 x + \frac{5}{\cos^2 x}; \ x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\quad d) \ d(x) = 3x \cdot \sin(x^2); \ x \in \mathbb{R}$$

3. Számítsa ki a p valós számot, ha

$$\int_0^p (2x^2 - x) dx = \int_1^p (2x^2 - 1) dx.$$

4. Számítsa ki annak, az ábrán színessel jelölt síkidomnak a területét, amelyet az $y = 1 - \sin x$ görbe, valamint az $y = 2$ és az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenletű egyenesek határolnak!



5. Mekkora területet vág le az $y = x^2 - 4$ egyenletű parabolából a $(-1; -3)$ ponton átmenő 2 iránytangensű egyenes?
6. Számítsa ki az $y = x^3$ és az $y = -2x^2 + 15x$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét!
7. Határozza meg annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet az $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ függvény grafikonja, az x tengely valamint az $y = 2x - 2$ egyenes határolnak!
8. Vezesse le az integrálszámítás segítségével a (forgás) csónakúp térfogatképletét!
9. Számítsa ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $y = \frac{1}{2}x^2$ egyenletű parabola, a parabola 8 ordinátájú pontjaira illeszkedő érintői és az x tengely által határolt síkrész, x tengely körüli forgatásakor kapunk!

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Írja fel az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4x + 13$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek grafikonja illeszkedik a $(-3; -20)$ pontra!

Megoldás:

A függvény primitív függvényei $F(x) = x^3 + 2x^2 + 13x + C$ alakúak. $F(-3) = -20$, így $-27 + 18 - 39 + C = -20$. Ebből $C = 28$, a primitív függvény $F(x) = x^3 + 2x^2 + 13x + 28$.

2. Adja meg a következő függvények határozatlan integrálját az értelmezési tartományukon!

$$a) a(x) = 5x^4 - \frac{1}{2}x^{-5} + 2; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad b) b(x) = \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^4}; \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$c) c(x) = 5\cos^2 x + \frac{5}{\cos^2 x}; \quad x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad d) d(x) = 3x \cdot \sin(x^2); \quad x \in \mathbb{R}$$

Megoldás:

$$a) \int \left(5x^4 - \frac{1}{2}x^{-5} + 2 \right) dx = x^5 + \frac{1}{8}x^{-4} + 2x + C$$

$$b) \int \left(\frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^4} \right) dx = \int \left(x^{-3} + 2x^{-\frac{11}{3}} \right) dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4\sqrt[3]{x^8}} + C$$

$$c) \int \left(5\cos^2 x + \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx = 5 \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + 5 \operatorname{tg} x + C = \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\sin 2x + 5 \operatorname{tg} x + C$$

$$d) \int (3x \cdot \sin(x^2)) dx = \frac{3}{2} \int \sin(x^2) \cdot 2x dx = -\frac{3}{2} \cos(x^2) + C$$

3. Számítsa ki a p valós számot, ha

$$\int_0^p (2x^2 - x) dx = \int_1^p (2x^2 - 1) dx.$$

Megoldás:

$$\int_0^p (2x^2 - x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^p = \frac{2p^3}{3} - \frac{p^2}{2},$$

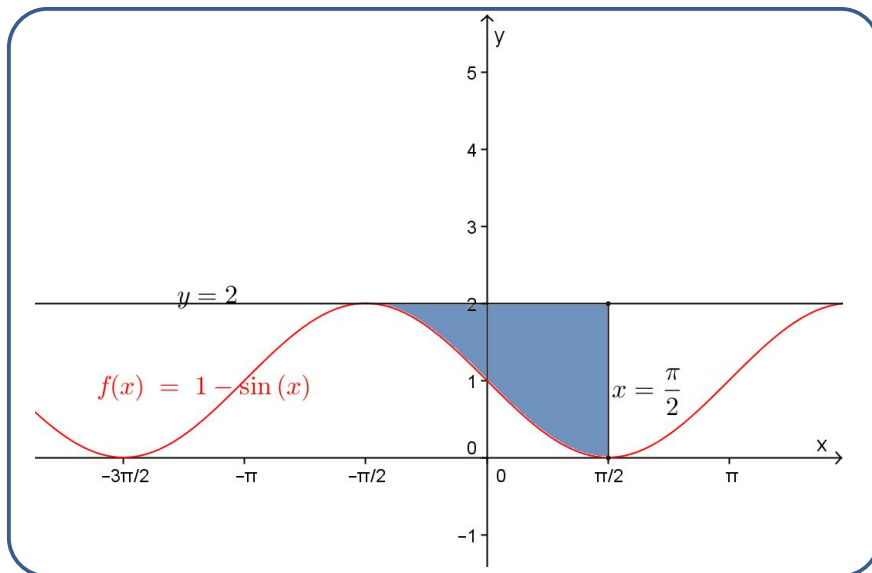
$$\int_1^p (2x^2 - 1) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - x \right]_1^p = \frac{2p^3}{3} - p - \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{2p^3}{3} - p + \frac{1}{3}.$$

Meghatározandó az a p valós szám, amelyre

$$\frac{2p^3}{3} - \frac{p^2}{2} = \frac{2p^3}{3} - p + \frac{1}{3}, \quad \text{azaz } 3p^2 - 6p + 2 = 0 \text{ fennáll.}$$

Az egyenlet gyökei $p = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $p = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Mindkét számra teljesül az egyenlőség.)

4. Számítsa ki annak, az ábrán színessel jelölt síkidomnak a területét, amelyet az $y = 1 - \sin x$ görbe, valamint az $y = 2$ és az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenletű egyenesek határolnak!



I. Megoldás:

A síkidom területét megkapjuk, ha a π egység és 2 egység oldalú téglalap területéből kivonjuk a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon számított görbe alatti területet.

$$T = 2\pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx = 2\pi - [x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - \left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0 \right) \right] = \pi.$$

Tehát a síkidom területe π területegység.

II. Megoldás:

A $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right), \left(\frac{\pi}{2}; 0\right), \left(\frac{\pi}{2}; 2\right), \left(-\frac{\pi}{2}; 2\right)$ csúcsú téglalap és a görbe is középpontosan szimmetrikus a $(0; 1)$ pontra, ezért a színessel jelölt síkidom területe a téglalap területének a fele, π területegység.

5. Mekkora területet vág le az $y = x^2 - 4$ egyenletű parabolából a $(-1; -3)$ ponton átmenő 2 iránytangensű egyenes?

Megoldás:

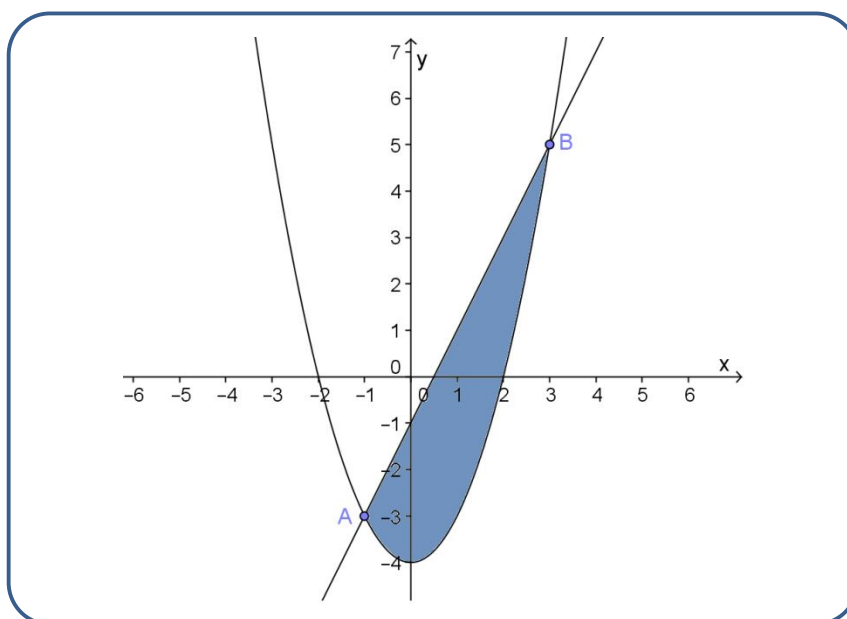
Az egyenes egyenlete: $y + 3 = 2(x + 1)$, azaz $y = 2x - 1$. Meghatározzuk az egyenes és a parabola metszéspontjait:

$$x^2 - 4 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 3.$$

A metszéspontok $A(-1; -3)$, $B(3; 5)$.



A 9. kidolgozott feladathoz fűzött megjegyzést figyelembe véve, a vizsgált síkidom területe:

$$\begin{aligned} T &= \left| \int_{-1}^3 \{x^2 - 4 - (2x - 1)\} dx \right| = \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^3 \right| = \\ &= \left| 9 - 9 - 9 - \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) \right| = \frac{32}{3} \approx 10,67 \text{ (területegység)}. \end{aligned}$$

6. Számítsa ki az $y = x^3$ és az $y = -2x^2 + 15x$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét!

Megoldás:

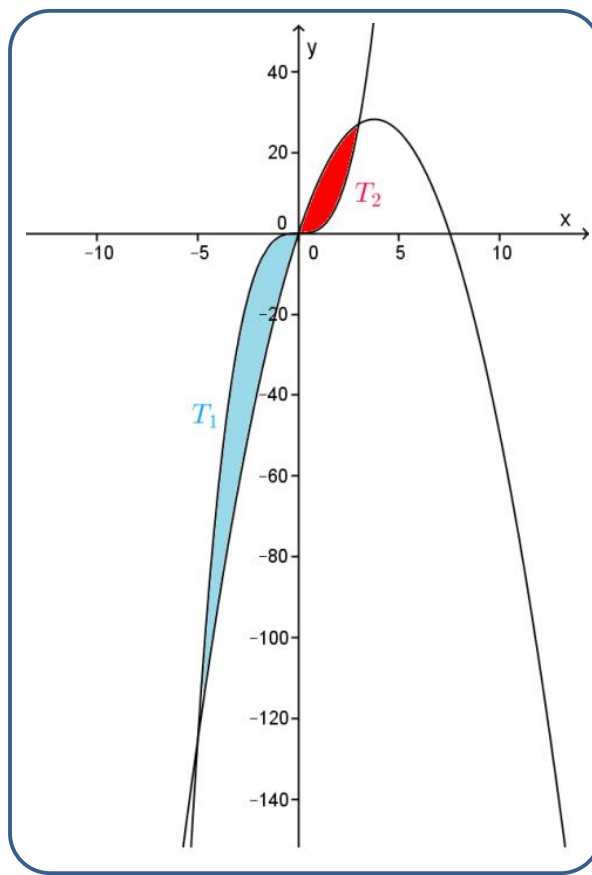
A két görbe metszéspontjait az $x^3 = -2x^2 + 15x$ egyenlet megoldásával határozzuk meg.

$$x^3 + 2x^2 - 15x = 0$$

$$x(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$x(x + 5)(x - 3) = 0$$

A metszéspontok első koordinátái az egyenlet gyökei: $-5, 0, 3$. (A metszéspontok $(-5; -125)$, $(0; 0)$, és $(3; 27)$.)



A görbék két síkidomot fognak közre. Területük:

$$T_1 = \left| \int_{-5}^0 (x^3 + 2x^2 - 15x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} \right]_{-5}^0 \right| = \left| 0 - \left(\frac{625}{4} - \frac{250}{3} - \frac{375}{2} \right) \right|$$

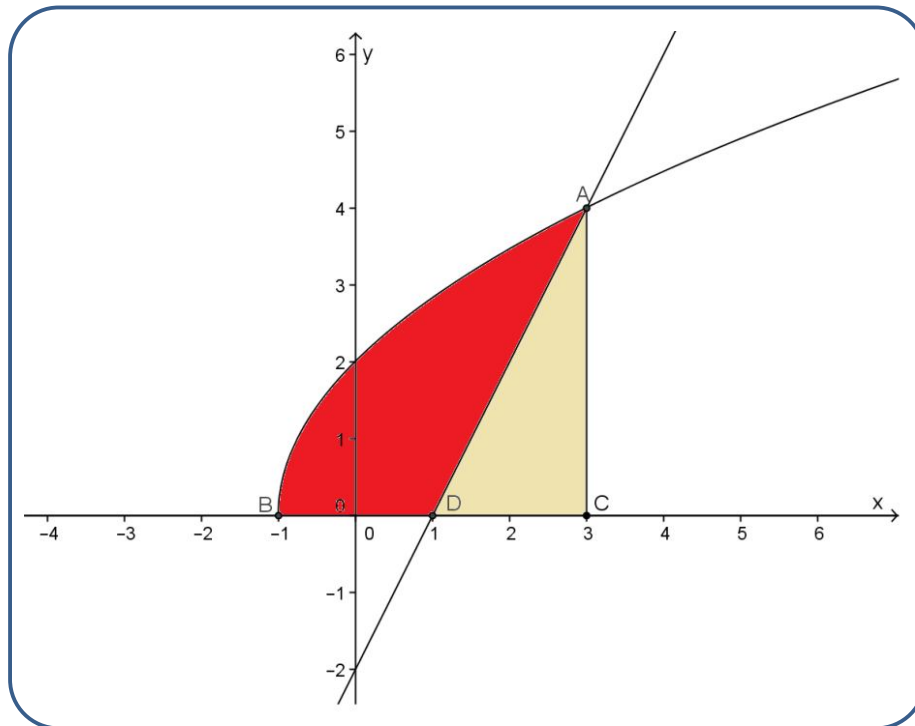
$$= 114 \frac{7}{12} = \frac{1375}{12}.$$

$$T_2 = \left| \int_0^3 (x^3 + 2x^2 - 15x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} \right]_0^3 \right| = \left| \frac{81}{4} + 18 - \frac{135}{2} - 0 \right| = 29,25.$$

A két görbe által közrefogott síkidom területe: $\frac{863}{6}$ területegység $\approx 143,83$ területegység.

7. Határozza meg annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet az $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ függvény grafikonja, az x tengely valamint az $y = 2x - 2$ egyenes határolnak!

Megoldás:



Az egyenes és a félpárola A metszéspontjának első koordinátája a $2\sqrt{x+1} = 2x - 2$ egyenlet gyöke. Mivel a baloldal nem vehet fel negatív értéket, ezért x legalább 1. Négyzetre emelés és rendezés után kapjuk:

$$\begin{aligned}x + 1 &= x^2 - 2x + 1, \\x^2 - 3x &= 0.\end{aligned}$$

A feltételt figyelembe véve csak $x = 3$ lehetséges. Az A pont második koordinátája 4.

$2\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Tehát az x tengelyt a parabola a -1 pontban, az egyenes a $+1$ pontban metszi. Az AB parabolaív, a BD szakasz, valamint a DA szakasz által meghatározott területet megkapjuk, ha a $[-1; 3]$ intervallumban kiszámítjuk az f függvény határozott integrálját, majd ebből kivonjuk a DCA derékszögű háromszög területét.

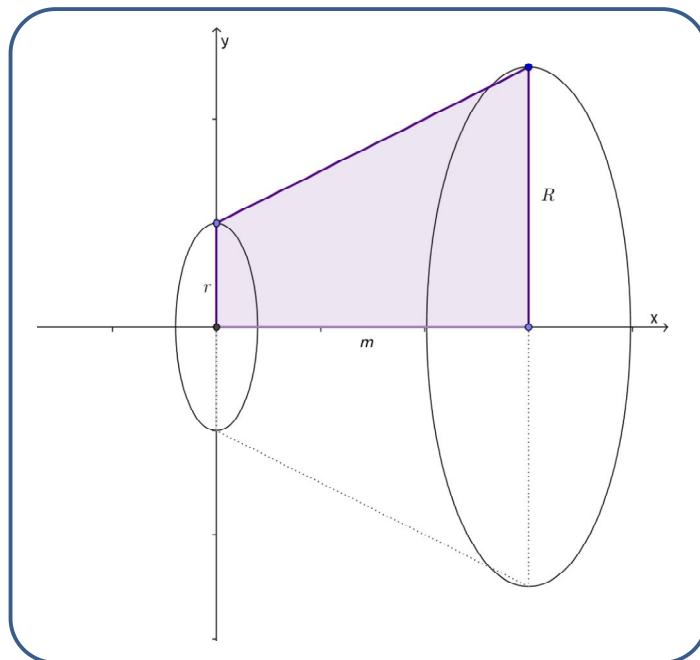
$$T = \int_{-1}^3 2\sqrt{x+1} dx - \frac{2 \cdot 4}{2} = \left[2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right]_{-1}^3 - 4 = \frac{4}{3} \cdot (8 - 0) - 4 = \frac{32}{3} - 4$$

A vizsgált síkidom területe $\frac{20}{3} (\approx 6,67)$ területegység.

8. Vezesse le az integrálszámítás segítségével a (forgás) csanakúp térfogatképletét!

Megoldás:

Helyezzük el a koordináta-rendszerben az m magasságú r és R alapú derékszögű trapézt az ábra szerint, majd forgassuk meg az x tengely körül! A trapéz (x tengelyre nem illeszkedő)



száregyenesének meredeksége $\frac{R-r}{m}$, egyenlete $y = \frac{R-r}{m}x + r$.

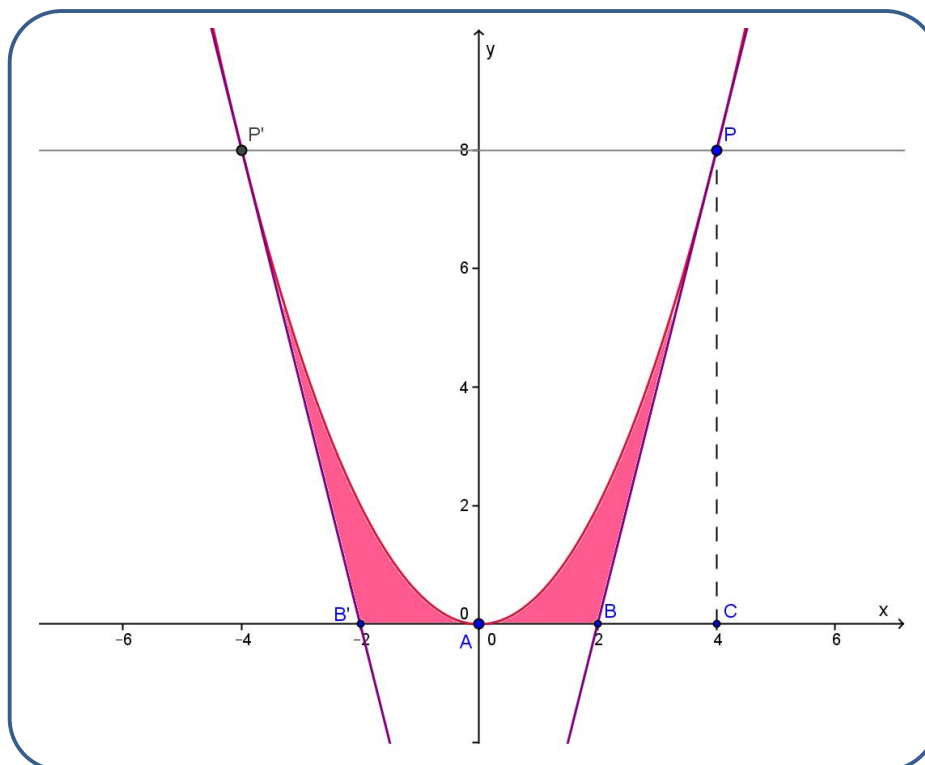
A csonkakúp térfogata:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^m \left(\frac{R-r}{m}x + r \right)^2 dx = \pi \int_0^m \left(\left(\frac{R-r}{m} \right)^2 x^2 + 2 \cdot \frac{R-r}{m} \cdot r \cdot x + r^2 \right) dx = \\ &= \pi \left[\left(\frac{R-r}{m} \right)^2 \frac{x^3}{3} + \frac{R-r}{m} r x^2 + r^2 x \right]_0^m = \frac{\pi}{3} [(R-r)^2 m + 3(R-r)rm + 3r^2 m] = \\ &= \frac{\pi}{3} m [R^2 - 2Rr + r^2 + 3Rr - 3r^2 + 3r^2] = \frac{\pi m}{3} [R^2 + Rr + r^2]. \end{aligned}$$

9. Számítsa ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $y = \frac{1}{2}x^2$ egyenletű parabola, a parabola 8 ordinátájú pontjaira illeszkedő érintői és az x tengely által határolt síkrész x tengely körüli forgatásakor kapunk!

Megoldás:

Az érintési pontok első koordinátái az $\frac{1}{2}x^2 = 8$ egyenlet gyökei 4 és -4 . A két érintési pont $P(4; 8)$ és $P'(-4; 8)$. Az ábra az y tengelyre szimmetrikus, ezért a forgástest térfogata az első síknegyedbeli síkidom forgatásával kapott test térfogatának kétszerese. A P pontbeli érintő iránytangense $m = f'(4) = 4$, (ahol $f(x) = \frac{1}{2}x^2$). Az érintő egyenlete: $y - 8 = 4(x - 4)$, azaz $y = 4x - 8$. Az érintő az x tengelyt a $(2; 0)$ pontban metszi.



A forgástest térfogatát megkapjuk, ha a $[0;4]$ intervallumhoz tartozó parabolaív alatti APC síkidom x tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogatából kivonjuk a BCP derékszögű háromszög megforgatásakor keletkező forgáskúp térfogatát.

$$V_p = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^4 x^4 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1024}{5} = \frac{256}{5}\pi;$$

$$V_k = \frac{64\pi \cdot 2}{3} = \frac{128}{3}\pi.$$

A két érintő, az x tengely és a $P'AP$ parabolaív által közrezárt síkidom forgatásával keletkező test térfogata:

$$V = 2(V_p - V_k) = \frac{256}{15}\pi (\approx 53,62) \text{ térfogategység.}$$