

21. Térgeometria

I. Elméleti összefoglaló

Tételek:

A pont, az egyenes és a sík fogalmát nem definiáljuk, alapfogalomnak tekintjük.

Tételek kölcsönös helyzete

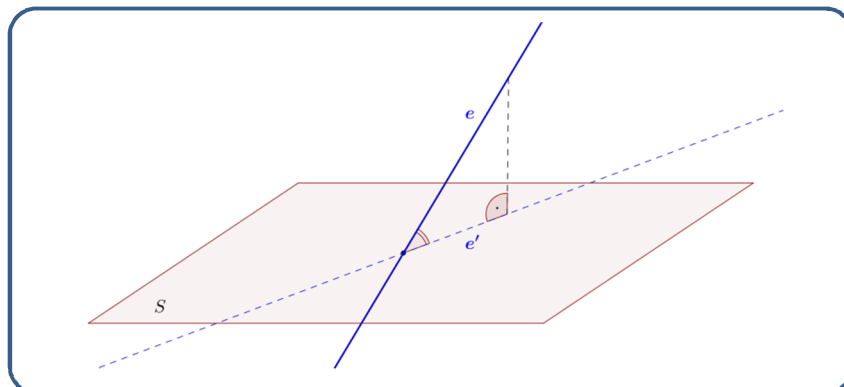
- Két egyenes metsző, ha egy közös pontjuk van.
- Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk.
- Két egyenes kitérő, ha nincsenek egy síkban.
- Egy egyenes illeszkedik egy síkra, ha minden pontja a síkon van.
- Egy egyenes metsz egy síkot, ha egy közös pontjuk van.
- Egy egyenes párhuzamos a síkkal, ha nincs közös pontjuk.
- Két sík metszi egymást, ha a két síknak van közös pontja. Ekkor a közös pontok egy egyenesre, a két sík metszévonalára illeszkednek.
- Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.

Síkra merőleges egyenes tétele:

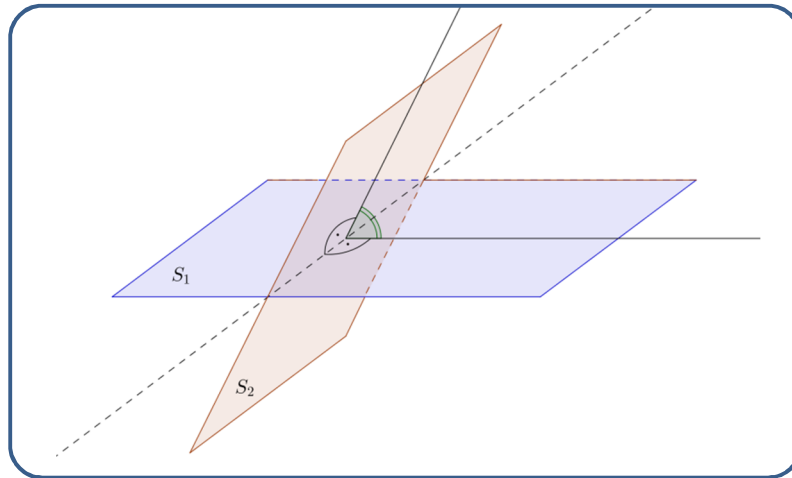
Ha egy egyenes merőleges egy sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor merőleges a sík minden egyenesére.

Tételek hajlásszöge

- Két metsző egyenes hajlásszöge a két egyenes által meghatározott két-két egyenlő szög közül a nem nagyobbik. Két párhuzamos egyenes szöge 0° .
- Két kitérő egyenes szögét a tér egy tetszőleges pontján át az egyenesekkel húzott párhuzamosok szögével határozzuk meg.
- Egy egyenes merőleges egy síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére. A **síkra merőleges egyenes tétele** alapján elegendő belátni, hogy az egyenes a sík két nem párhuzamos egyenesére merőleges.
- Ha egy egyenes metsz egy síkot, de nem merőleges rá, akkor az egyenest a síkra merőlegesen vetítve egy egyenest kapunk. Az egyenes és a sík hajlásszöge az egyenesnek a merőleges vetületével alkotott szöge.



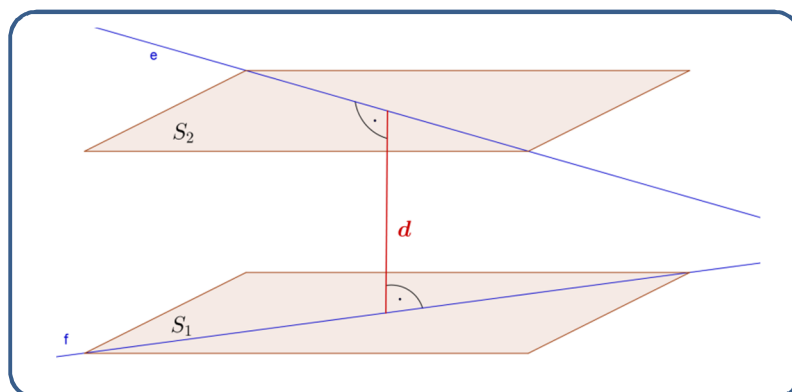
- Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor az egyenes és a sík szöge 0° .
- Két metsző sík hajlósszögének meghatározása: A két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontjában merőlegest állítunk a metszésvonalra mindkét síkban. Ennek a két egyenesnek a szögét nevezzük a két sík szögének.



- Párhuzamos síkok szöge 0° .

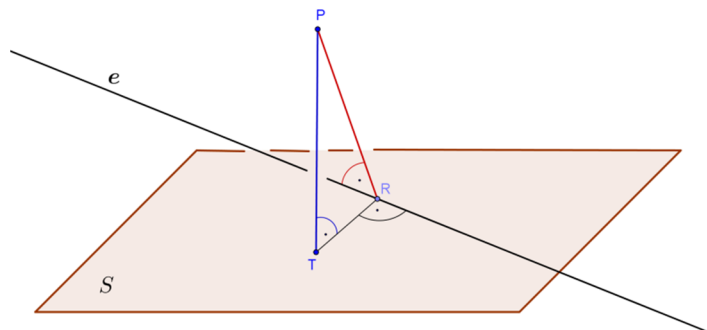
Tételek távolsága

- Két pont távolsága a pontokat összekötő szakasz hossza.
- Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza.
- Pont és sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza.
- Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes egyik pontjának a másik egyenestől mért távolsága.
- Párhuzamos egyenes és sík távolsága az egyenes egyik pontjának a síktól mért távolsága.
- Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík egyik pontjának a másik síktól mért távolsága.
- Két kitérő egyeneshez egyértelműen létezik két párhuzamos sík, amelyekre az egyik illetve a másik egyenes illeszkedik. A két kitérő egyenes távolsága ennek a két párhuzamos síknak a távolságával egyenlő. Megmutatható, hogy van olyan szakasz, amely összeköti a két kitérő egyenest és mindkettőre merőleges. Ezt a két kitérő egyenes normáltranszverzálisának nevezzük, ennek a hossza egyenlő a két egyenes távolságával.



Három egymásra merőleges egyenes tétele

Ha egy P pontból merőlegest állítunk a P pontot nem tartalmazó S síkra és a sík egy e egyenesére, akkor a két talppontot összekötő egyenes merőleges az e egyenesre.



Síkidomok vetületének területe

Az S síkban lévő sokszöget merőlegesen vetítjük az S_1 síkra. Ha a két sík által bezárt szög α , a sokszög területe T , akkor a vetület területe $T' = T \cdot \cos \alpha$.

Nevezetes pontthalmazok a térben:

- Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak egy gömbfelület.
- Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek egy adott egyenestől adott távolságra vannak egy hengerfelület.
- Két adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben a szakasz felezőmerőleges síkja.

Euler-féle poliédertétel

Ha egy konvex poliéder csúcsainak a számát c -vel, éleinek a számát e -vel, lapjainak a számát l -lel jelöljük, akkor

$$c + l = e + 2.$$

(Ez az összefüggés a poliéderek tágabb körére, az egyszerű poliéderekre is igaz. Egy poliédert egyszerűnek nevezünk, ha „gömbbé fújható fel.”)

Szabályos poliéderek

Szabályos poliédereknek nevezzük azokat a konvex poliédereket, amelyeknek élei egyenlők, élszögei egyenlők és lapszögei is egyenlők.

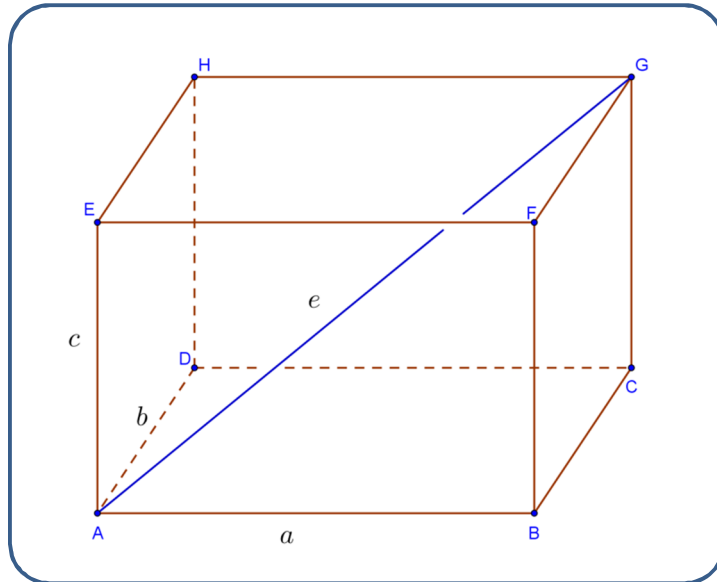
A definícióból következik, hogy a szabályos poliéderek lapjai szabályos sokszögek. Ötféle szabályos poliéder létezik: a szabályos tetraéder, a kocka, az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder.



Térbeli Pitagorasz-tétel

Ha egy téglatest egymásra páronként merőleges éleinek a hossza a, b, c , akkor az e testátló hosszára teljesül:

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



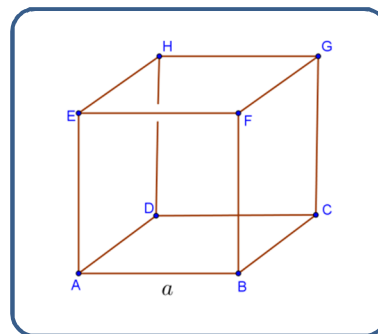
Testek felszíne, térfogata

A felszínt A -val, a térfogatot V -vel jelöljük.

- **kocka**

$$A = 6 \cdot a^2$$

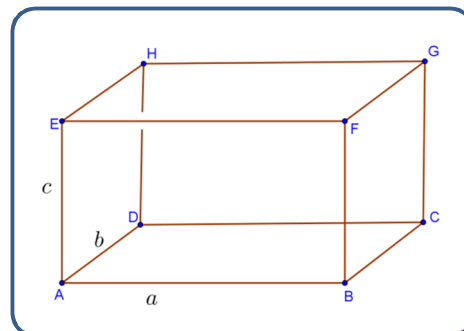
$$V = a^3$$



- **téglatest**

$$A = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$

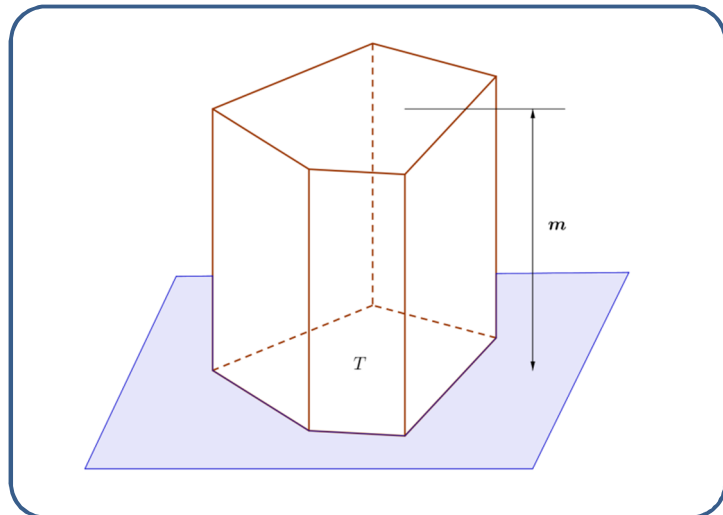


- **egyenes hasáb**

Az alaplapp területe T ,
az alaplapp kerülete k ,
a magasság m .

$$A = 2T + km$$

$$V = Tm$$

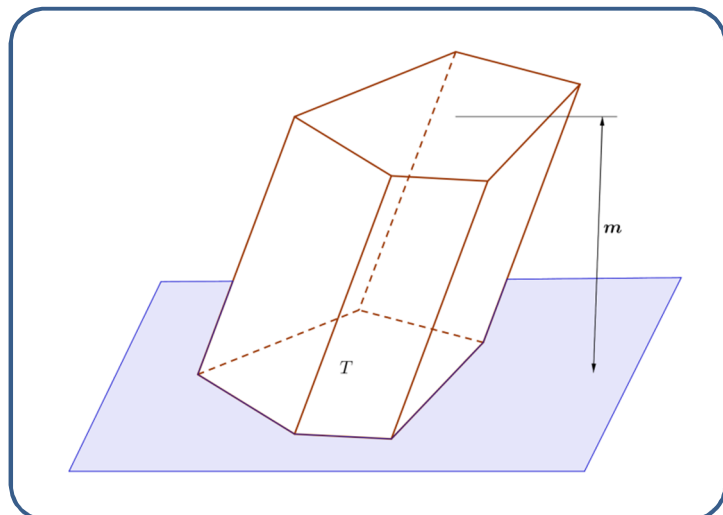


- **ferde hasáb**

Az alaplapp területe T ,
a magasság m ,
az oldallapok területének
összege, a palást P .

$$A = 2T + P$$

$$V = Tm$$

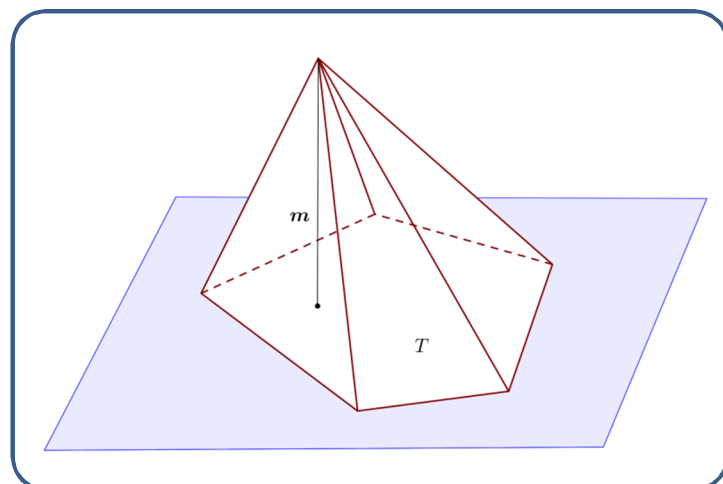


- **gúla**

Az alaplapp területe T ,
a magasság m ,
az oldallapok területének
összege, a palást P .

$$A = T + P$$

$$V = \frac{Tm}{3}$$

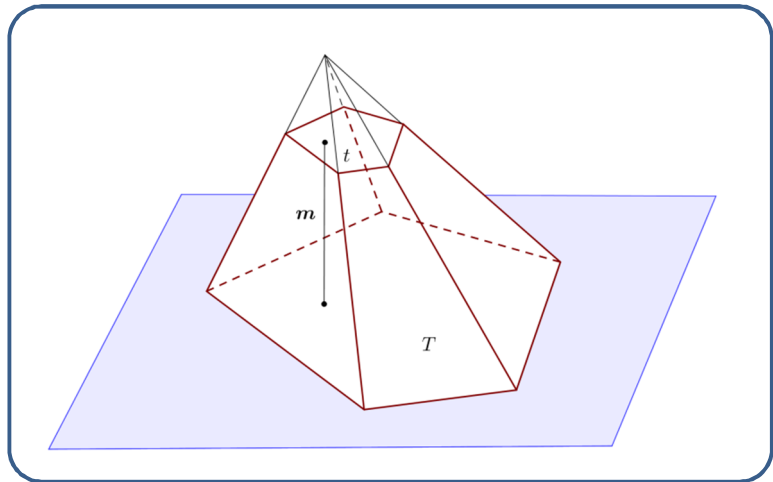


- csonkagúla**

Az alaplapp területe T ,
a fedőlap területe t ,
a magasság m ,
az oldallapok területének
összege, a palást P .

$$A = T + t + P$$

$$V = \frac{m(T + \sqrt{Tt} + t)}{3}$$

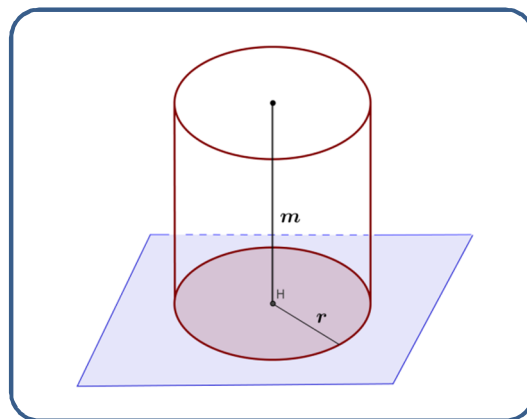


- egyenes körhenger**

Az alapkör sugara r ,
a magasság m .

$$A = 2\pi r(r + m)$$

$$V = r^2\pi m$$

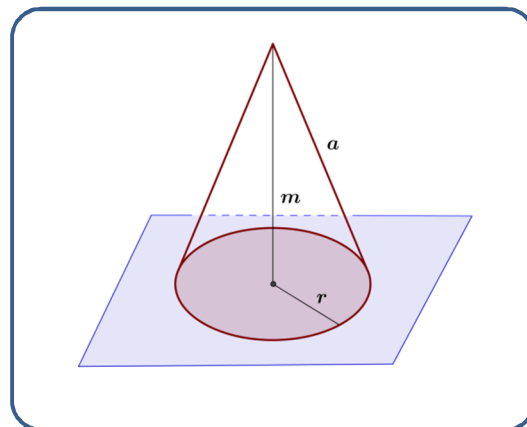


- egyenes kúp**

Az alapkör sugara r ,
a magasság m ,
az alkotó a .

$$A = \pi r(r + a)$$

$$V = \frac{\pi r^2 m}{3}$$

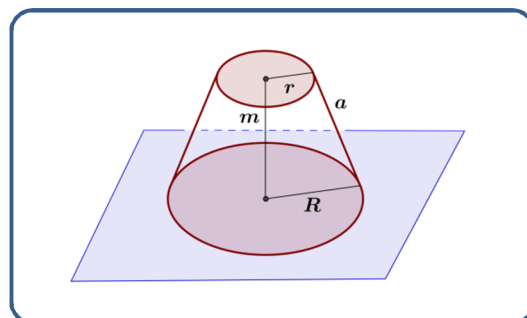


- csonkakúp**

Az alapkör sugara R ,
a fedőlap sugara r ,
az alkotó a , a magasság m .

$$A = \pi[R^2 + r^2 + a(R + r)]$$

$$V = \frac{\pi m}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

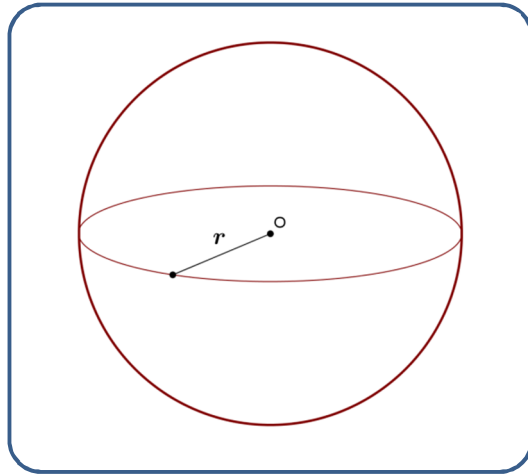


- gömb

Sugár: r .

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$



A térbeli geometriai transzformációkkal a 11. témakörben foglalkozunk. Ebben a témakörben az egybevágóság és a hasonlóság fogalmát, tulajdonságait használjuk fel:

Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi. Egybevágó alakzatok megfelelő szakaszai, szögei egyenlők.

Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi. Hasonló alakzatok megfelelő szögei egyenlők és a megfelelő szakaszok aránya egyenlő.

Tétel:

- Hasonló testek felszínének aránya egyenlő a hasonlóság arányának a négyzetével.
- Hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának a köbével.

II. Kidolgozott feladatok

1. Hány részre osztja a teret a kocka lapjainak hat síkja?

Megoldás:

A kocka belsejében van 1 térrész. A kocka minden lapjához csatlakozik egy tartomány, ilyenből 6 darab van. Az élekhez csatlakozó tartományok száma 12, a csúcsoknál pedig 8 darab térrész számolható meg. Tehát összesen 27 részre osztják a teret a kocka lapsíkjai.

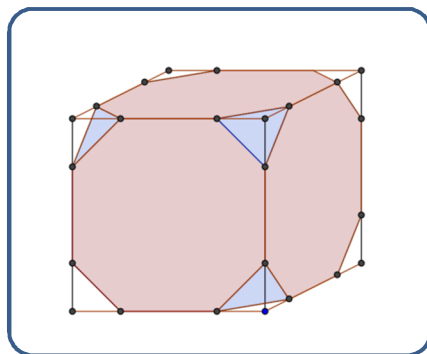
2. Egy konvex testet 8 háromszög és 6 nyolcszög határol. Hány éle és hány csúcsa van ennek a testnek?

Megoldás:

A 8 háromszögnek és a 6 nyolcszögnek összesen $8 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 72$ éle van. Minden élt két lapnál vettünk számításba, ezért az élek száma ennek fele, 36. Alkalmazhatjuk az Euler-féle poliédertételt ($c + l = e + 2$):

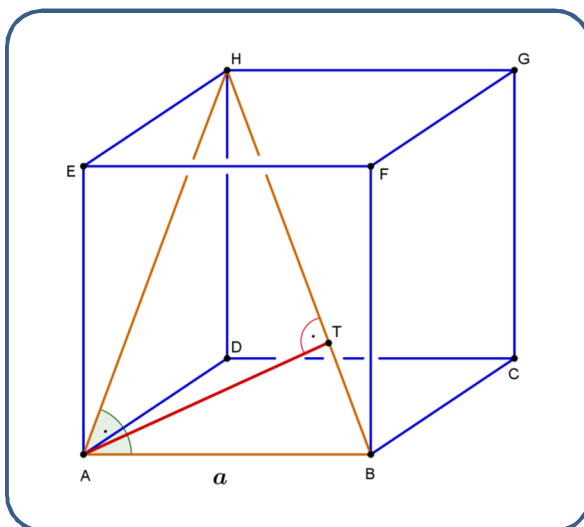
$$l = 14; e = 36 \Rightarrow c = 24.$$

Tehát a testnek 24 csúcsa van. Ilyen test valóban létezik, ha például egy kocka csúcsainál levágunk egy-egy kis tetraédert, akkor egy ilyen poliédert kapunk.



3. Határozzuk meg az a élű kocka csúcsainak a kocka egyik testátlójától való távolságát!

Megoldás:



A B és H csúcsok rajta vannak a BH testátlón, ezért ezeknek a pontoknak az átlótól mért távolsága 0. Az A pontot és a BH átlót befoglaljuk az ABH háromszögbe. Az A pont és a testátló távolsága a

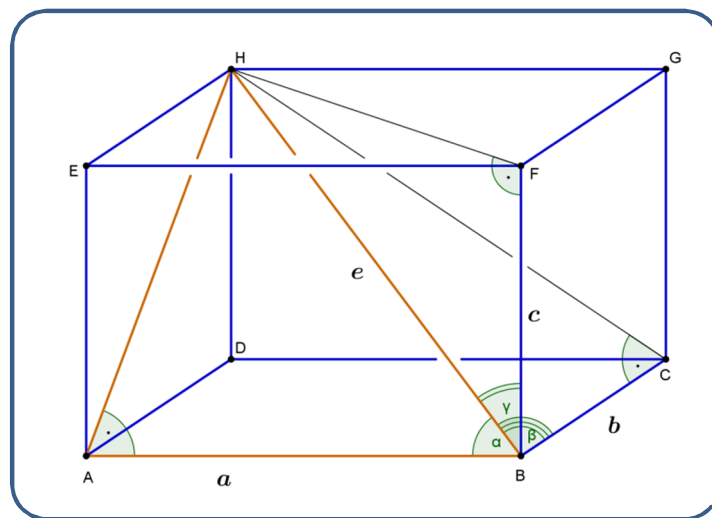
testátlóra merőleges AT szakasz hossza. AB merőleges az $ADHE$ oldalra, ezért merőleges az oldal síkjának minden egyenesére, ezért $\angle BAH = 90^\circ$. Az ABH derékszögű háromszög területét kétféle módon felírva ki tudjuk számítani az AT szakasz hosszát. Az a oldalú kocka lapátlója $AH = a\sqrt{2}$, a testátlója $BH = a\sqrt{3}$.

$$T(ABH) = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{AT \cdot a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AT = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

A kocka többi csúcsa ezzel egybevágó háromszögbe foglalható be, ezért azok is ilyen távolságra vannak a testátlótól.

4. Húzzuk meg egy téglatest egyik testátlóját. A testátló az élekkel α, β, γ szögeket zár be. Bizonyítsuk be, hogy $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$!

Megoldás:



Az α, β, γ szögeket az ábra szerint derékszögű háromszögekbe tudjuk foglalni és a szögfüggvényeket a megfelelő oldalakkal kifejezzük:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{a}{e}\right)^2 + \left(\frac{b}{e}\right)^2 + \left(\frac{c}{e}\right)^2.$$

Az így kapott kifejezést átalakítjuk és felhasználjuk a térbeli Pitagorasz-tételt

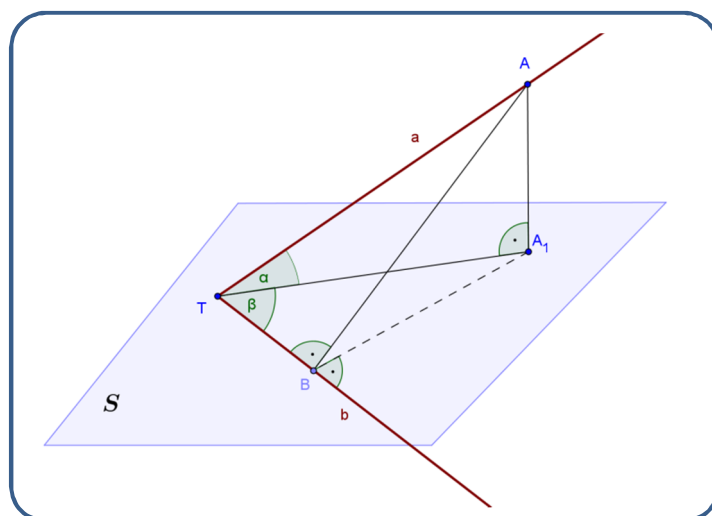
$$\left(\frac{a}{e}\right)^2 + \left(\frac{b}{e}\right)^2 + \left(\frac{c}{e}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{e^2} = \frac{e^2}{e^2} = 1.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

5. Az a egyenes az S síkkal 30° -os szöget zár be. Húzzunk az S síkban az a egyenes talppontján (az a egyenes és az S sík metszéspontján) át az a egyenes merőleges vetületével 60° -os szöget bezáró b egyenest. Határozzuk meg az a és b egyenesek szögét!

Megoldás:

Az a egyenes az S síkot a T pontban metszi. Az a egyenesen felveszünk egy A pontot és merőlegesen vetítjük az S síkra, a merőleges talppontja A_1 . Az A pontból merőlegest bocsátunk a b egyenesre, a merőleges talppontja a B pont. A három merőleges egyenes tétele alapján A_1B merőleges b -re. A feladat szerint $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$. Szögfüggvények használatával:



$$TA_1 = AT \cdot \cos 30^\circ = AT \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

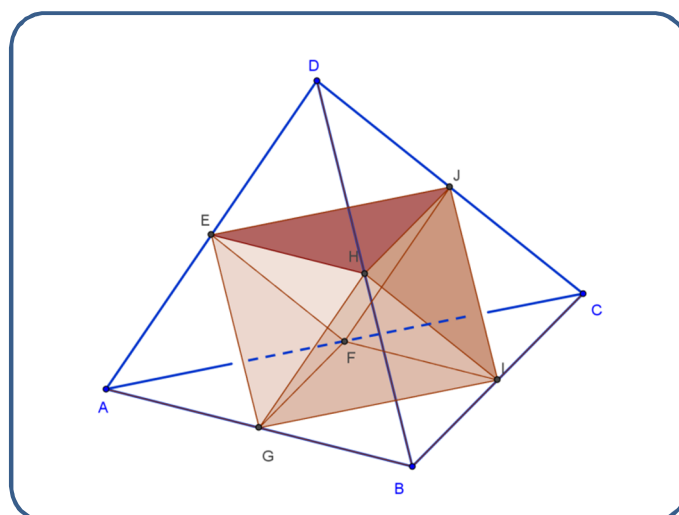
$$BT = TA_1 \cdot \cos 60^\circ = AT \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos(\angle ATB) = \frac{BT}{AT} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \angle ATB = 64,34^\circ,$$

így az a és b egyenesek szöge $64,34^\circ$.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos tetraéder élének felezőpontjai egy szabályos oktaéder csúcspontjai!

Megoldás:

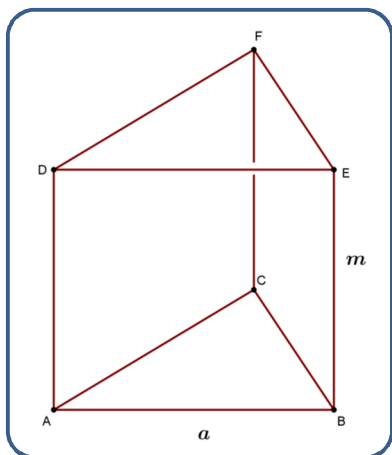


Az ABD háromszögben az EH szakasz középvonal, ezért hossza a tetraéder élének felével egyenlő. Ugyanez belátható a keletkezett test minden éléről. Így egy olyan test keletkezett, amelyet 8 darab szabályos háromszög határol, egy csúcspan négy ilyen háromszög csatlakozik. Ez a test valóban szabályos oktaéder.

Megjegyzés: Megmutatható, hogy a szabályos oktaéder élének felezőpontjai kockát alkotnak.

7. Egy szabályos háromszög alapú hasáb alapéle 12 cm. A palást területe az alaplap területének az ötszöröse. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

Megoldás:



Az alaplap egy 12 cm oldalú szabályos háromszög, ezért a területe $T = \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$. A palást három téglalapról áll, így a területe $P = 3 \cdot 12 \cdot m = 36 \cdot m$. A feladat szerint:

$$36 \cdot \sqrt{3} \cdot 5 = 36 \cdot m \Rightarrow m = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$

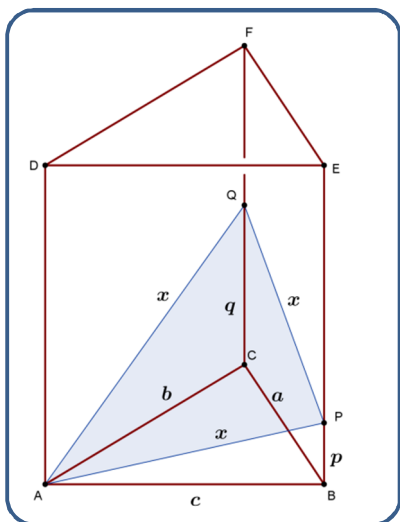
Ezekkel az adatokkal:

$$A = 2 \cdot 36\sqrt{3} + 36 \cdot 5\sqrt{3} = 192\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$V = 36 \cdot \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 540 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

8. Egy egyenes háromoldalú hasáb alapélei $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$. A hasábot úgy metsszük el egy síkkal, hogy a metszet egyenlő oldalú háromszög legyen. Mekkora ennek a szabályos háromszögnek az oldala?

Megoldás:



A metszet egyik csúcsa legyen a hasáb A csúcsa, a másik két csúcs B-től p , C-től q távolságra van. A szabályos háromszög ismeretlen oldalát x -szel jelöljük. A Pitagorasz-tétel alapján:

$$x^2 = c^2 + p^2 \quad (1)$$

$$x^2 = b^2 + q^2 \quad (2)$$

$$x^2 = a^2 + (q - p)^2 \quad (3)$$

Ebben az egyenletrendszerben x , p és q az ismeretlen.

A (3) egyenletet átrendezzük, (1)-et és (2)-t felhasználjuk:

$$x^2 = a^2 + q^2 - 2pq + p^2 = a^2 + x^2 - b^2 - 2pq + x^2 - c^2$$

$$2pq = x^2 + a^2 - b^2 - c^2$$

$$4p^2q^2 = 4(x^2 - c^2)(x^2 - b^2) = (x^2 + a^2 - b^2 - c^2)^2$$

Behelyettesítjük a, b, c értékét és rendezzük az egyenletet:

$$3x^4 - 100x^2 + 576 = 0.$$

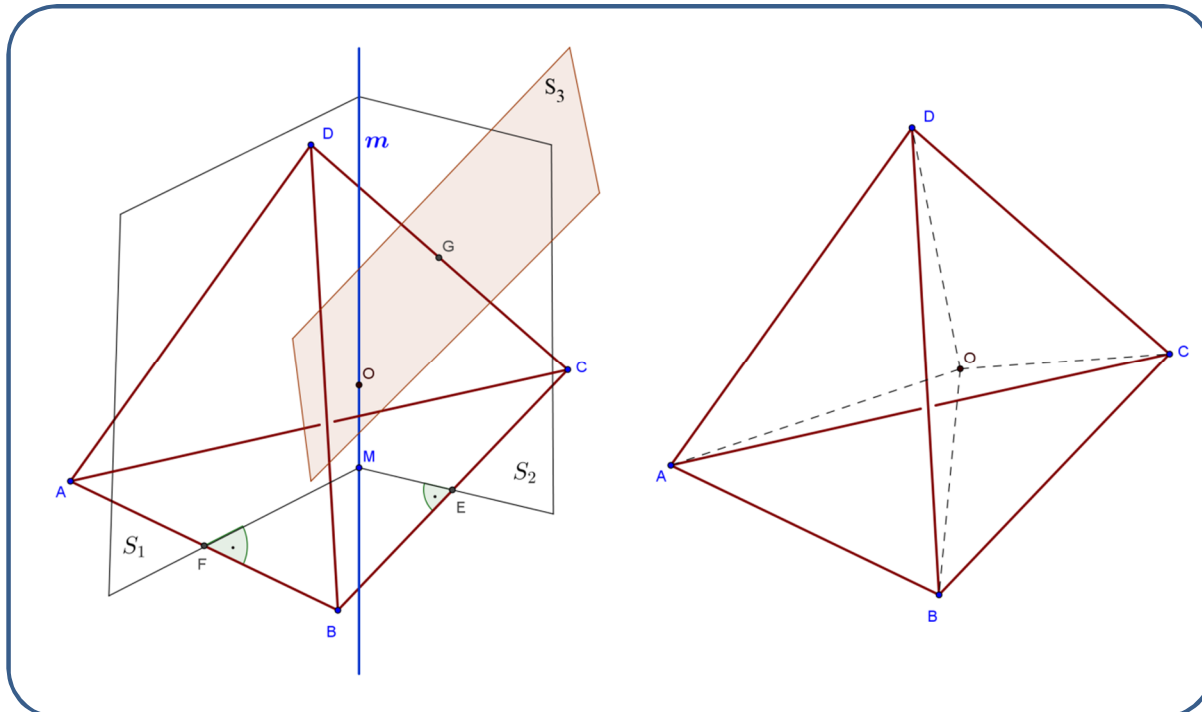
Az x^2 -ben másodfokú egyenletet megoldva:

$$x^2 = 25,93 \text{ vagy } 7,41.$$

Az x legalább 5, ezért $x = \sqrt{25,93} = 5,09$ (cm).

9. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder éleit merőlegesen felező síkok egy ponton mennek át, és ez a pont a tetraéder köré írható gömb középpontja!

Megoldás:



Az AB élt merőlegesen felezi az S_1 sík, a BC élt az S_2 sík. AB és BC nem párhuzamos, ezért S_1 és S_2 sem párhuzamos, tehát metszik egymást. A két sík metszévonal a m egyenes. Az S_1 sík minden pontja egyenlő távol van az A és B ponttól, az S_2 sík minden pontja pedig a B és C ponttól van egyenlő távol. Ezért az m egyenes minden pontja az A, B, C pontoktól egyenlő távol van. Legyen az S_3 sík a CD szakaszfelező merőleges síkja. Az m egyenes merőleges az ABC síkra, de S_3 nem, ezért az S_3 sík metszi az m egyenest. A közös pontot jelöljük O -val. $OC = OD$, mert O az S_3 sík egy pontja, $OA = OB = OC$, mert O rajta van az m egyenesen. Ezért az O pont egyenlő távol van a tetraéder mindegyik csúcsától. Ebből következik, hogy minden élt felező merőleges síkja tartalmazza ezt a pontot, tehát ezek a síkok egy ponton mennek át. Az O középpontú, OA sugarú gömb átmegy a többi csúcson is, így O a körülírt gömb középpontja.

10. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder valamely belső pontjának az oldalaktól mért távolságait összegezve a test magasságával egyenlő értéket kapunk!

Megoldás:

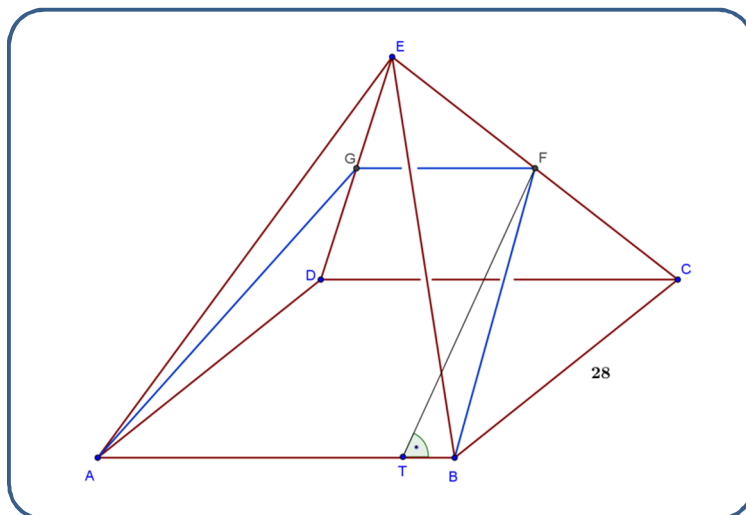
Legyen T a tetraéder egy lapjának területe, m a tetraéder magassága. Jelölje az adott P belső pont távolságát a tetraéder négy oldallapjától: x, y, z, v . Ha a P pontot összekötjük a tetraéder csúcsaival, akkor az eredeti tetraédert 4 kisebb tetraéderre bontjuk. Ezek térfogatának összege a szabályos tetraéder térfogatával egyenlő:

$$\frac{Tm}{3} = \frac{Tx}{3} + \frac{Ty}{3} + \frac{Tz}{3} + \frac{Tv}{3}$$

Ebből megkapjuk a feladat állítását: $m = x + y + z + v$.

11. Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alapja az $ABCD$ négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnek, G pedig a DE oldalélnek a felezőpontja. Az $ABFG$ négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle?
(Emelt szintű érettségi vizsga, 2008. október)

Megoldás:

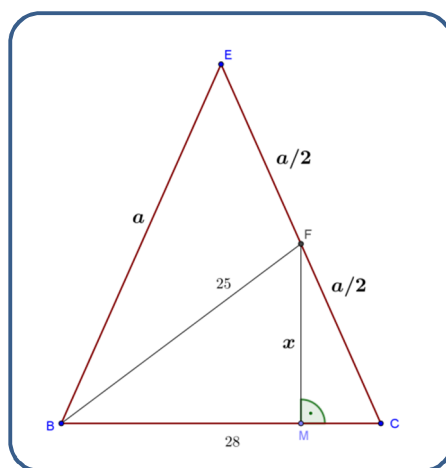


A DCE háromszögben GF középvonal, tehát $GF = 14$ és GF párhuzamos DC -vel, így AB -vel is. Ezek alapján az $ABFG$ négyszög trapéz, a két alap AB és GF , a magasság pedig az ábra szerinti FT szakasz. A trapéz területét kifejezve:

$$504 = \frac{28 + 14}{2} \cdot FT \Rightarrow FT = 24.$$

$ABFG$ szimmetrikus trapéz, ezért $BT = 7$. Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítjuk BF hosszát:

$$BF^2 = 24^2 + 7^2 \Rightarrow BF = 25.$$



A BCE háromszög egyenlő szárú, ezért az M pont a BC szakasz C -hez közelebbi negyedelő pontja. Így $BM = 21$ és $MC = 7$. Két Pitagorasz-tétel alapján:

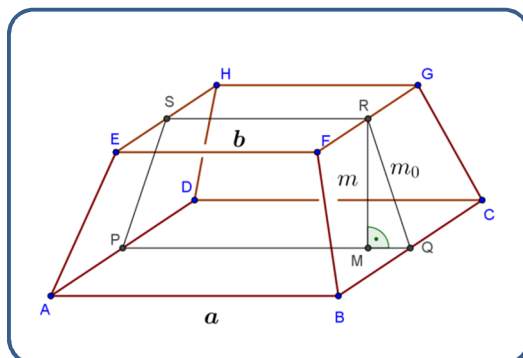
$$x^2 = 25^2 - 21^2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + 7^2 = 25^2 - 21^2 + 7^2 = 233$$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{233} \approx 15,26 \Rightarrow a = 2 \cdot \sqrt{233} \approx 30,52.$$

A gúla oldaléle 30,52 egység hosszú.

12. Szabályos csonkagúla alaplapjai a és b oldalú négyzetek. A négy oldallap területének összege megegyezik a két alaplap területének összegével. Számítsuk ki a csonkagúla magasságát!

Megoldás:



A feladat feltételei szerint:

$$a^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{(a+b)m_0}{2},$$

tehát

$$m_0 = \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)}.$$

Az ábra szerint vesszük a BC, FG, EH, AD élek felezőpontját. Ezek a pontok egy szimmetrikus trapéz határoznak meg, amelyben az RM szakasz egyben a csonkagúla magassága is.

$$MQ = \frac{a-b}{2}$$

Pitagorasz tétele alapján

$$m^2 = m_0^2 - MQ^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2(a+b)} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2,$$

$$m^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2 - ((a+b)(a-b))^2}{4(a+b)^2} = \frac{4a^2b^2}{4(a+b)^2} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

Így

$$m = \frac{ab}{a+b}.$$

13. Egy 20 cm és 30 cm oldalú téglalapot kétféleképpen csavarhatunk hengerré. Hogyan aránylik egymáshoz ennek a két hengernek a térfogata?

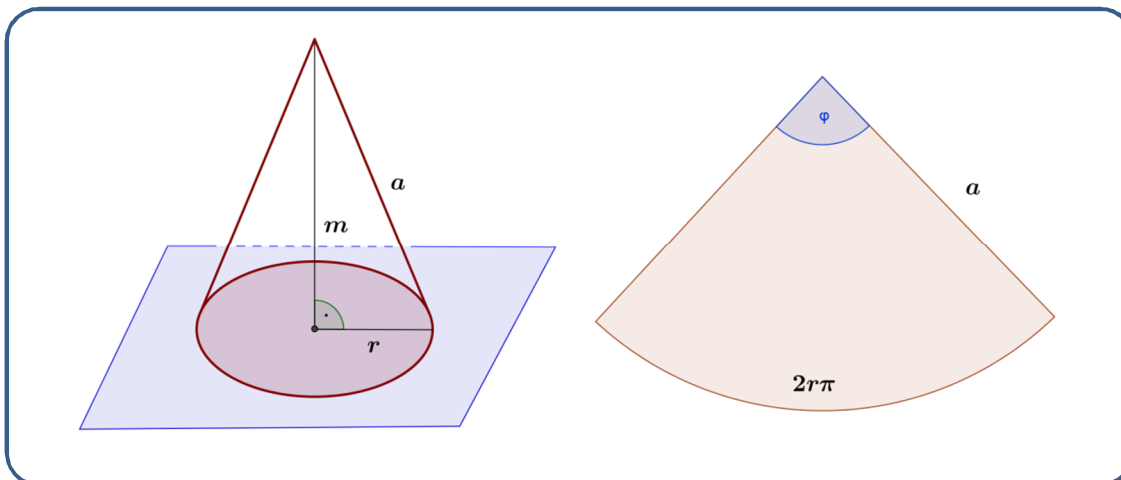
Megoldás:

Ha a téglalap oldalai a és b és az a oldalt tekerjük össze, akkor az a oldal a henger alapkörének a kerülete lesz, ezért az alapkör sugara $r = \frac{a}{2\pi}$, a magassága b . Ezekkel az adatokkal a henger térfogata $V_1 = \left(\frac{a}{2\pi} \right)^2 \pi \cdot b$. Ha a b oldalt tekerjük össze, akkor a térfogat $V_2 = \left(\frac{b}{2\pi} \right)^2 \pi \cdot a$. A térfogatok aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^2b}{b^2a} = \frac{a}{b} = \frac{2}{3}.$$

14. Mekkora a forgáskúp kiterített palástjának a szöge, ha az alkotója 13 cm, magassága 12 cm?

Megoldás:



Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítjuk az alaplap sugarát:

$$r = \sqrt{a^2 - m^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

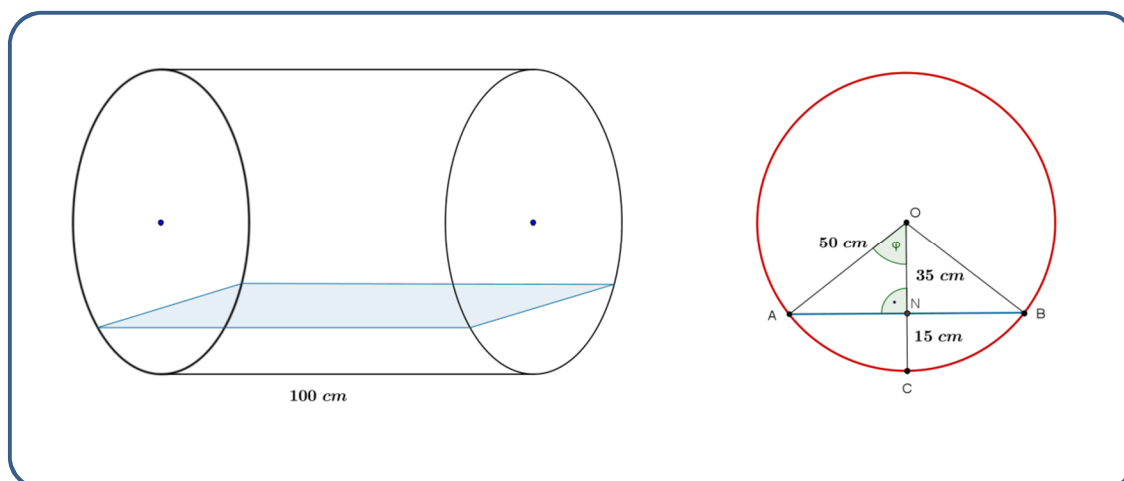
A kiterített palást olyan körcikk, amelynek a határoló köríve a kúp alapkörének kerülete, ezért:

$$2r\pi = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2a\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{r}{a} \cdot 360^\circ = \frac{5}{13} \cdot 360^\circ \approx 138,46^\circ.$$

A kiterített palást nyílásszöge $138,46^\circ$.

15. Egy vízszintesen fekvő forgáshenger alakú tartály átmérője és magassága is 1 m. A tartályban 15 cm magasan áll a víz. Milyen magasan lesz a hengerben a víz, ha a tartályt felállítjuk?

Megoldás:



A víz egy olyan hengerszerű testet alkot, amelynek az alapterülete egy körszelet. Az ábra szerinti φ szöget szögfüggvénnyel számoljuk ki:

$$\cos \varphi = \frac{35}{50} = 0,7 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45,57^\circ.$$

Az ACB ív által határolt körszelet területe:

$$T = \frac{2\varphi}{360^\circ} \cdot 50^2 \pi - \frac{50^2 \cdot \sin 2\varphi}{2} = 738,61 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A víz térfogata:

$$V = T \cdot m = 738,61 \cdot 100 = 73861 \text{ (cm}^3\text{)}$$

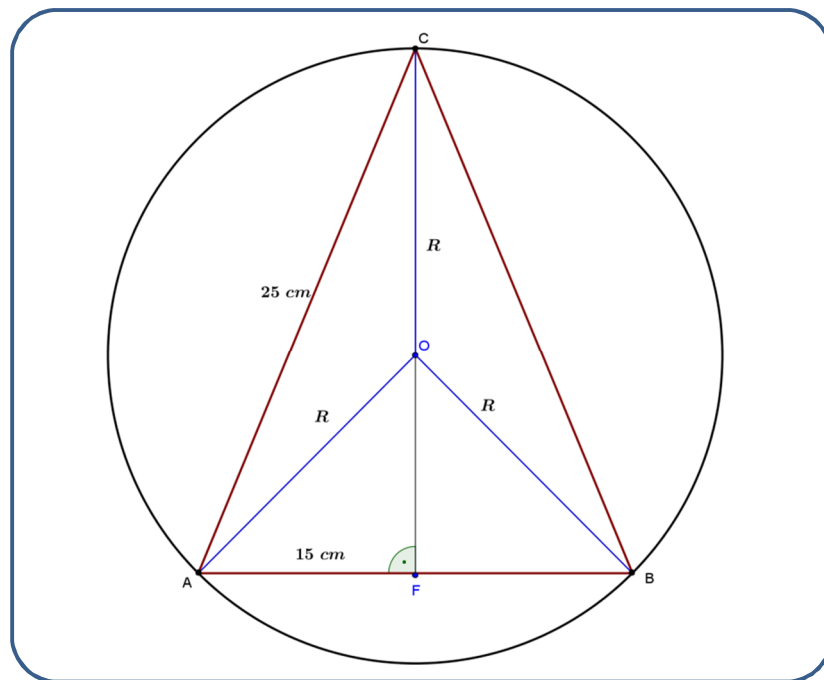
Ha felállítjuk a tartályt, akkor a víz egy olyan hengert alkot, amelynek alaplappja az 1m átmérőjű körlap. Ennek a hengernek a magassága:

$$\frac{V}{r^2 \pi} = \frac{73861}{50^2 \pi} = 9,40 \text{ (cm)}$$

A felállított tartályban 9,4 cm magas lesz a víz.

16. Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írható egy olyan egyenes körkúp, amelynek az alkotója 25 cm és alapkörének sugara 15 cm?

Megoldás:



Az ábrán a kúp tengelyére illesztett síkmetszet látható. A kúp magasságát Pitagorasz-tétel segítségével meghatározva $CF = 20 \text{ cm}$. A gömb sugarát R -rel jelölve az AFO derékszögű háromszög oldalai: $AO = R$, $OF = 20 - R$, $AF = 15$. Pitagorasz tétele alapján:

$$R^2 = (20 - R)^2 + 15^2$$

$$R^2 = 400 - 40R + R^2 + 225 \Rightarrow R = 15,625 \text{ cm.}$$

A gömb térfogata:

$$V = \frac{4R^3 \pi}{3} = 15979 \text{ cm}^3.$$

III. Ajánlott feladatok

1. Adott a térben 10 egyenes és rajtuk kívül 7 pont. Legfeljebb hány olyan sík van, amely pontosan egy adott egyenest és egy adott pontot tartalmaz?
2. Adott két metsző sík és egy rájuk nem illeszkedő pont. Állítsunk a pontból a síkokra merőleges egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy a merőlegesek talppontjait összekötő egyenes merőleges a két sík metszésvonalára!
3. Egy téglatest egyik csúcsából induló három élének összege 42 cm, testátlója 27 cm. Határozzuk meg a téglatest felszínét!
4. Mekkora a téglatest egy élének és egy hozzá képest kitérő testátlójának a távolsága, ha a téglatest éleinek hossza 12 cm, 8 cm, 5 cm!
5. Egy paralelepipedon oldalai egybevágó rombuszok. A rombuszok oldalai 12 cm hosszúak és szögük 60° . Számítsuk ki a paralelepipedon felszínét és térfogatát!
6. Egy gúlának az alaplaja szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú, egybevágó háromszögek, amelyeknek a területe az alaplap területének a $\frac{2}{3}$ -szorosa. Mekkora az oldallapoknak az alaplappal bezárt szöge?
7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor a súlypontja és a köré írt gömb középpontja egybeesik!
(OKTV 1967. 2.forduló)
8. Legyen egy tetraéderbe írt gömb sugara r , a tetraéder magasságai m_1, m_2, m_3, m_4 . Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$!
9. Egy 15 cm magas négyzet alapú csonkagúla alaplajának éle 25 cm. Az oldallapok 70° -os szöget zárnak be az alaplappal. Határozzuk meg a felszínét és a térfogatát!
10. Egy egyenes körhenger felszíne 32000 cm^2 , az alaplap sugarának és a magasságnak az aránya 5:12. Mekkora a henger térfogata?
11. Kocka alakú házunkra olyan, két egyenlőszárú háromszögből és két szimmetrikus trapézból álló háztetőt készítünk, melynek élei egyenlőek, és bármely két szomszédos lapja ugyanakkora szöget zár be egymással. Hányszorosa a háztető éle a kocka élének?
(KÖMAL 2010/3.szám; B.4261)
12. Egy egyenes körkúp kiterített palástjának a területe t . A kiterített palást középponti szöge 120° . Mekkora a kúp térfogata?
13. Egy gömb két párhuzamos, egymástól 6 cm távolságra lévő metszősíkja a gömböt 20 cm, illetve 25 cm sugarú körökben metszi. Mekkora a gömb sugara?
14. Egymást kívülről érintő két gömb sugara 5 cm és 8 cm. Vegyünk egy kúpot, amely mindkét gömböt érinti. Mekkora a kúp palástjának az a része, amelyik a két érintkező kör között van?
15. Egy tetraéder egy csúcsából kiinduló a, b, c élei páronként merőlegesek egymásra. Határozzuk meg a körülírt és a beírt gömb sugarát!

Az ajánlott feladatok megoldásai

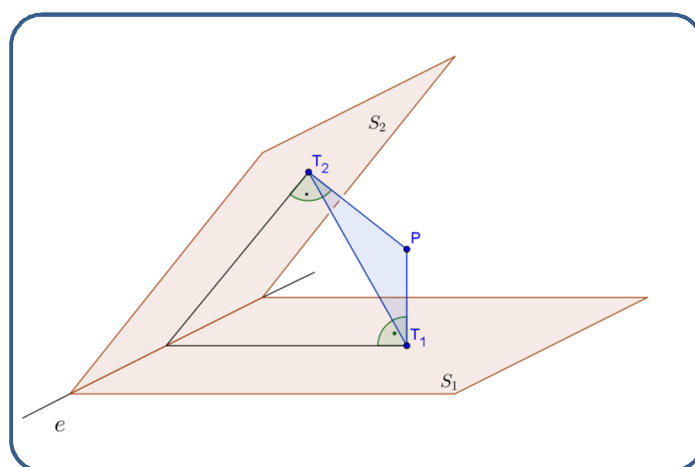
1. Adott a térben 10 egyenes és rajtuk kívül 7 pont. Legfeljebb hány olyan sík van, amely pontosan egy adott egyenest és egy adott pontot tartalmaz?

Megoldás:

Az egyenesek közül egyet 10-féle módon, a pontok közül egyet 7-féle módon választhatunk ki. Ez $10 \cdot 7 = 70$ választási lehetőség. Egy egyenesre és egy rá nem illeszkedő pontra egy sík illeszkedik. Ha ezek között van azonos sík, akkor ennél kevesebb síkot kapunk.

2. Adott két metsző sík és egy rájuk nem illeszkedő pont. Állítsunk a pontból a síkokra merőleges egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy a merőlegesek talppontjait összekötő egyenes merőleges a két sík metszészíkjára!

Megoldás:



Az S_1 és S_2 sík metszészíkjára az e egyenes. A P pontból a síkokra bocsátott merőlegesek talppontjai a T_1 és T_2 pontok. PT_1 merőleges az S_1 síkra, ezért a sík minden egyenesére is, így $PT_1 \perp e$. Hasonlóan $PT_2 \perp e$. Az e egyenes merőleges a PT_1T_2 sík két nem párhuzamos egyenesére, ezért a metszészíkjára a síkra merőleges egyenes tételének alapján merőleges a PT_1T_2 sík minden egyenesére. Ebből következik, hogy az e metszészíkjára merőleges T_1T_2 -re.

3. Egy téglatest egyik csúcsából induló három élének összege 42 cm, testátlója 27 cm. Határozzuk meg a téglatest felszínét!

Megoldás:

Ha a téglatest éleit a, b, c vel jelöljük, akkor $a + b + c = 42$. Ezt négyzetre emelve:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1764.$$

A térbeli Pitagorasz-tétel alapján:

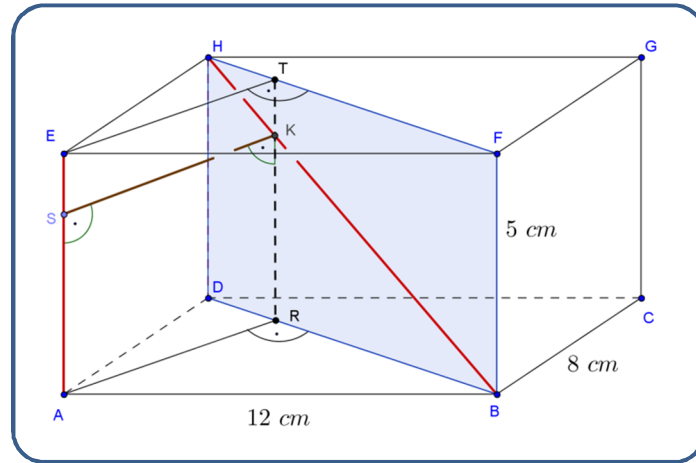
$$a^2 + b^2 + c^2 = 27^2 = 729.$$

Ezek alapján a téglatest felszíne:

$$A = 2ab + 2ac + 2bc = 1035(\text{cm}^2).$$

4. Mekkora a téglatest egy élének és egy hozzá képest kitérő testátlójának a távolsága, ha a téglatest élének hossza 12 cm, 8 cm, 5 cm!

Megoldás:



Az AE él és a BH átló kitérő, ezek távolságát határozzuk meg. $AE \parallel DH$, ezért a kitérő egyenesek távolsága egyenlő az AE él és a $BFHD$ átlósík távolságával. Ez a távolság az EFH háromszögben a HF oldalhoz tartozó magassággal adható meg, mert az $EFGH$ sík merőleges a $BFHD$ síkra. Az EFH háromszög területét kétféle módon kiszámítva megkapjuk ezt a távolságot.

$$HF = \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{208}. 2 \cdot T(EFH) = 12 \cdot 8 = \sqrt{208} \cdot ET, \text{ így:}$$

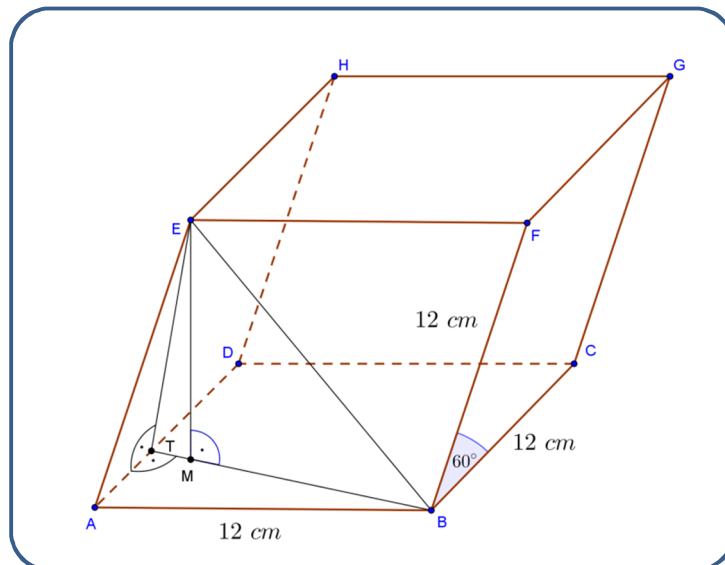
$$ET = \frac{12 \cdot 8}{\sqrt{208}} = \frac{96}{\sqrt{208}} \approx 6,66(cm).$$

Az ábráról leolvasható a normáltranzverzális (SK) meghatározásának módja is.

Hasonló módon határozható meg a 12 *cm*-es él, illetve a 8 *cm*-es él távolsága a megfelelő testátlótól. $\left(\frac{40}{\sqrt{89}}\right)$ illetve $\left(\frac{60}{13}\right)$

5. Egy paralelepipedon oldalai egybevágó rombuszok. A rombuszok oldalai 12 cm hosszúak és a szögük 60° . Számítsuk ki a paralelepipedon felszínét és térfogatát!

Megoldás:



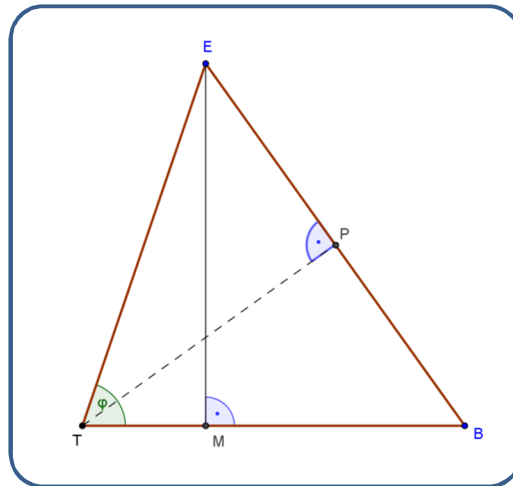
A paralelogramma felszíne 6 rombuszból áll, ezért

$$A = 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ = 432 \cdot \sqrt{3} \approx 748,25 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A térfogat kiszámításához meg kell határoznunk a paralelepipedon magasságát. Az E pontból merőlegest bocsátunk az $ABCD$ lapra, így megkapjuk a hasáb EM magasságát. Ha az E pontból merőlegest bocsátunk az AD -re, akkor a három merőleges tétele alapján TM is merőleges az AD élre. Az oldallapok egybevágó rombuszok, ezért az alaplapon a B csúsból induló magasság talppontja is a T pont lesz. Ezzel az EM magasságot befoglaltuk az ETB háromszögbe. Az ABE háromszög szabályos, az ATB és az ATE háromszögek pedig 60° -os derékszögű háromszögek, így

$$EB = 12 \text{ cm.}$$

$$ET = BT = AE \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ (cm).}$$



A TBP derékszögű háromszögből $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ebből $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

A TME háromszögből $EM = 6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi = 6\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \sqrt{6}$.

A hasáb térfogata:

$$V = 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{6} = 864\sqrt{2} \approx 1221,9 \text{ cm}^3.$$

6. Egy gúlának az alaplaja szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú, egybevágó háromszögek, amelyeknek a területe az alaplaj területének a $\frac{2}{3}$ -szorosa. Mekkora az oldallapoknak az alaplappal bezárt szöge?

Megoldás:

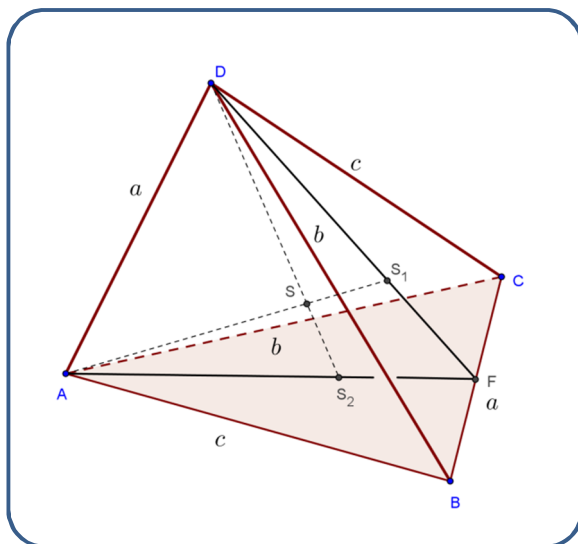
Ha az oldallapok az alaplappal φ szöget zárnak be, akkor az oldallapok vetületének területe az eredeti terület $\cos \varphi$ szerese lesz. A gúla csúcsának vetülete az alaplaj középpontjába esik. Az alaplaj területét jelöljük T -vel, ekkor a $\frac{2}{3}T$ terület vetülete $\frac{1}{3}T$ lesz, tehát $\cos \varphi = 0,5$; $\varphi = 60^\circ$.

Az oldallapok az alaplaj síkjával 60° -os szöget zárnak be.

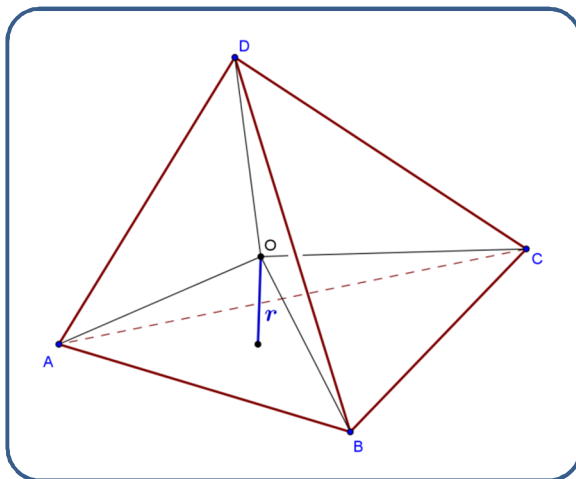
7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor a súlypontja és a köré írt gömb középpontja egybeesik!
(OKTV 1967. 2.forduló)

Megoldás:

A tetraéder lapjai csak úgy lehetnek egybevágók, ha a szemben lévő élek egyenlők. A súlypont a súlyvonalak metszéspontja. A BC oldal felezőpontja F . A BCD lap súlypontja S_1 , az ABC lap súlypontja S_2 , a tetraéder súlypontja az AS_1 és DS_2 súlyvonalak S metszéspontja. A tetraéder lapjai egybevágók, ezért a lapok megfelelő súlyvonalai is egyenlők: $AF = DF$, az AFD háromszög egyenlő szárú. A szimmetria miatt $AS = DS$. Tehát az S pont egyenlő távol van a tetraéder két csúcsától. Ugyanilyen módon látható be, hogy mindegyik csúcsától egyenlő távol van. Ezzel beláttuk, hogy az S pont egyben a tetraéder köré írt gömb középpontja is.



8. Legyen egy tetraéderbe írt gömb sugara r , a tetraéder magasságai m_1, m_2, m_3, m_4 . Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$!

Megoldás:

A tetraéder lapjainak területét jelöljük T_1, T_2, T_3, T_4 -gyel, az ezekhez tartozó magasságok m_1, m_2, m_3, m_4 . Ha a tetraéderbe írt gömb O középpontját összekötjük a csúcsokkal, akkor a tetraédert 4 kisebb tetraéderre bontjuk, amelyeknek az egyik magassága r . A tetraéder térfogata:

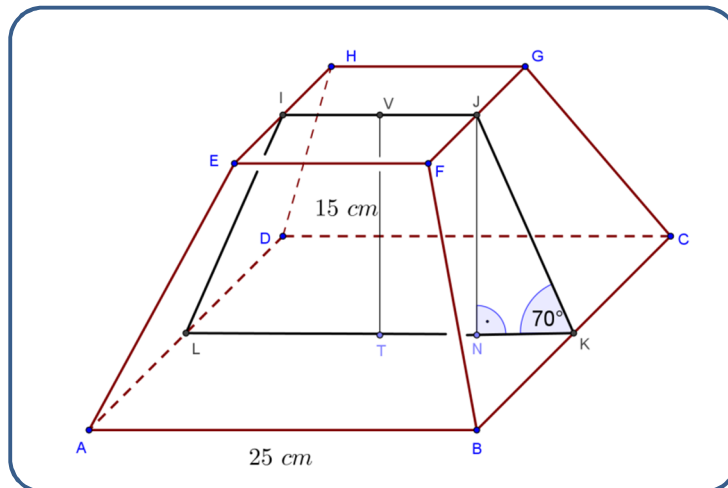
$$V = \frac{(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \cdot r}{3} = \frac{T_1 m_1}{3} = \frac{T_2 m_2}{3} = \frac{T_3 m_3}{3} = \frac{T_4 m_4}{3}.$$

Ebből átrendezve megkapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\frac{1}{r} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{3V} = \frac{T_1}{3V} + \frac{T_2}{3V} + \frac{T_3}{3V} + \frac{T_4}{3V} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}.$$

9. Egy 15 cm magas négyzet alapú csonkagúla alaplapjának éle 25 cm. Az oldallapok 70°-os szöget zárnak be az alaplappal. Határozzuk meg a felszínét és a térfogatát!

Megoldás:



A csonkagúlát az ábra szerint a tengelyén átmenő, élek felezőpontjára illeszkedő síkkal elmetsszük. A metszet az $LKJI$ szimmetrikus trapéz. $NK = 15 \cdot \cotg 70^\circ \approx 5,46 \text{ cm}$. Ezt felhasználva a fedőlap élének a hossza $EF = IJ = 25 - 2 \cdot NK = 14,08 \text{ cm}$. $JK = 15 : \sin 70^\circ \approx 15,96 \text{ cm}$ az oldallap magassága. Ezekkel az adatokkal számolva a felszín és a térfogat:

$$A = 25^2 + 14,08^2 + 4 \cdot \frac{(25 + 14,08) \cdot 15,96}{2} \approx 2070,68 \text{ cm}^2;$$

$$V = \frac{15}{3} (25^2 + 25 \cdot 14,08 + 14,08^2) \approx 5876,23 \text{ cm}^3.$$

10. Egy egyenes körhenger felszíne 32000 cm^2 , az alaplap sugarának és a magasságnak az aránya 5:12. Mekkora a henger térfogata?

Megoldás:

Jelöljük a henger alapkörének sugarát $r = 5x$ -el, a magasságát $m = 12x$ -el. A felszínt kifejezzük:

$$A = 2r^2 \cdot \pi + 2r\pi m = 50x^2\pi + 120x^2\pi = 170x^2\pi = 32000.$$

$$x = 7,74$$

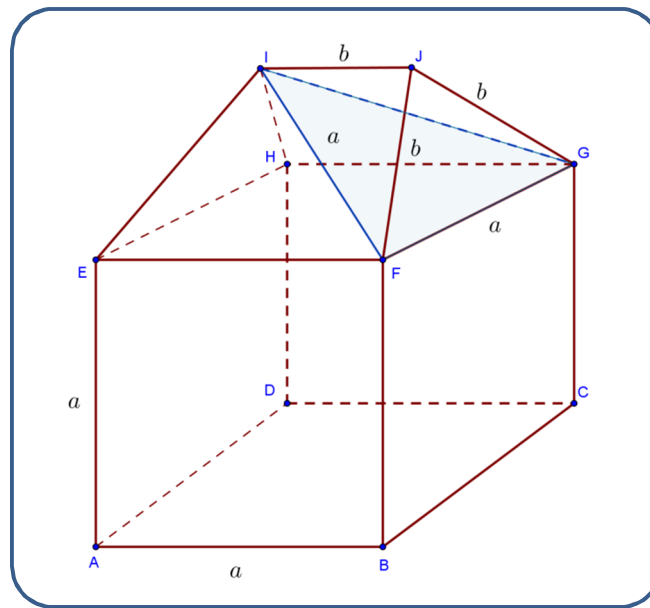
$$r = 38,7 \text{ cm} ; m = 92,88 \text{ cm}.$$

A henger térfogata:

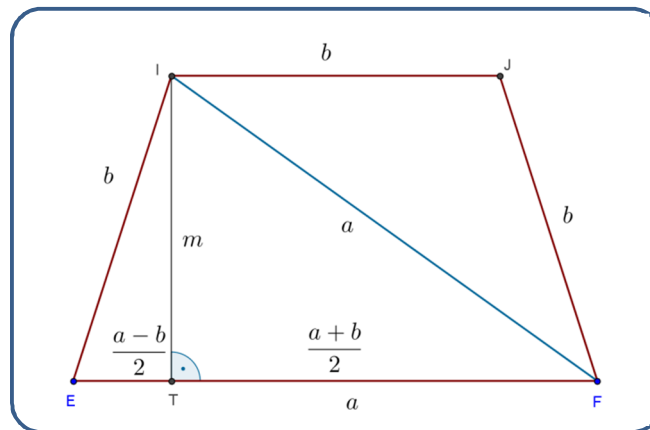
$$V = r^2\pi \cdot m = 437012 \text{ cm}^3.$$

11. Kocka alakú házunkra olyan, két egyenlőszárú háromszögből és két szimmetrikus trapézból álló háztetőt készítünk, melynek élei egyenlőek, és bármely két szomszédos lapja ugyanakkora szöget zár be egymással. Hányszorosa a háztető éle a kocka élének?
(KÖMAL 2010/3.szám; B.4261)

Megoldás:



A kocka élének hossza a , a tető éle b hosszúságú. A tető élei egyenlőek és a lapok azonos szöget zárnak be, ezért az $IFGJ$ tetraéder FGJ ; IFJ ; IGJ lapjai egybevágóak, tehát $IF = FG = GI = a$.



Az *EFJI* szimmetrikus trapézban berajzoljuk az *IT* magasságot. Ekkor $ET = \frac{a-b}{2}$ és $TF = \frac{a+b}{2}$. A magasságot Pitagorasz-tétel segítségével kétféle módon kifejezzük:

$$m^2 = b^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Átrendezve:

$$b^2 + ab - a^2 = 0$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} - 1 = 0$$

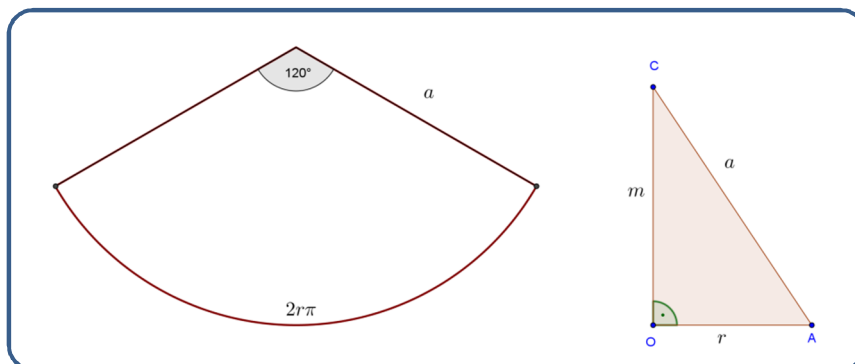
Ennek a másodfokú egyenletnek a pozitív gyöke:

$$\frac{b}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618.$$

Ez az arány éppen az aranymetszés aránya.

12. Egy egyenes körkúp kiterített palástjának a területe t . A kiterített palást középponti szöge 120° . Mekkora a kúp térfogata?

Megoldás:



A feltételek szerint $t = r\pi a$ és $2r\pi = \frac{2a\pi}{3}$. Így $r = \frac{a}{3}$ és $t = \frac{a}{3}\pi a$, amiből a meghatározható:

$a = \sqrt{\frac{3t}{\pi}}$. A kúp tengelymetszetéből Pitagorasz-tétellel meghatározható a magasság:

$$m = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a,$$

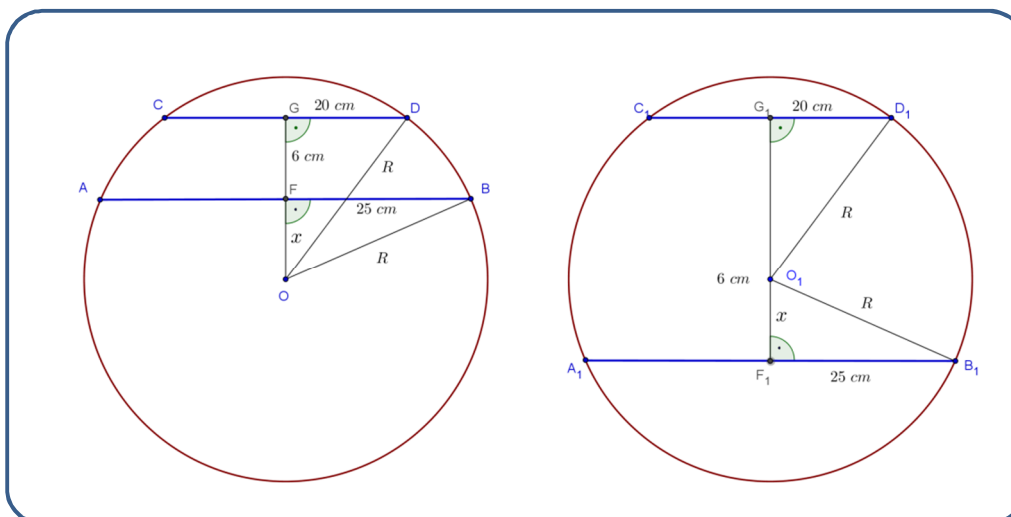
ennek felhasználásával a kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{\frac{a^2}{9} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} a \pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{81} a^3 \pi = \frac{2\sqrt{2}}{81} \cdot \frac{3t}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{3t}{\pi}} \cdot \pi = \frac{2t}{27} \cdot \sqrt{\frac{6t}{\pi}}.$$

13. Egy gömb két párhuzamos, egymástól 6 cm távolságra lévő metszősíkja a gömböt 20 cm, illetve 25 cm sugarú körökben metszi. Mekkora a gömb sugara?

Megoldás:

A gömböt elmetsszük egy, a középpontra illeszkedő, a metsztekörökre merőleges síkkal. Az ábrák ezt a síkmetszetet ábrázolják. Elvileg két eset lehetséges attól függően, hogy a gömb középpontja a metsző síkok közé esik vagy sem.



A 25 cm sugarú kör síkja legyen x távolságra a gömb középpontjától, a gömb sugarát pedig R -rel jelöljük.

Pitagorasz-tétel alapján (bal oldali ábra):

$$R^2 = x^2 + 25^2 = (x + 6)^2 + 20^2$$

$$x^2 + 625 = x^2 + 12x + 36 + 400 \Rightarrow x = 15,75 \Rightarrow R \approx 29,55.$$

A jobb oldali ábrán hasonlóan alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

$$R^2 = x^2 + 25^2 = (6 - x)^2 + 20^2$$

$$x^2 + 625 = 36 - 12x + x^2 + 400 \Rightarrow x = -15,75$$

Ekkor nem kapunk megfelelő gömböt.

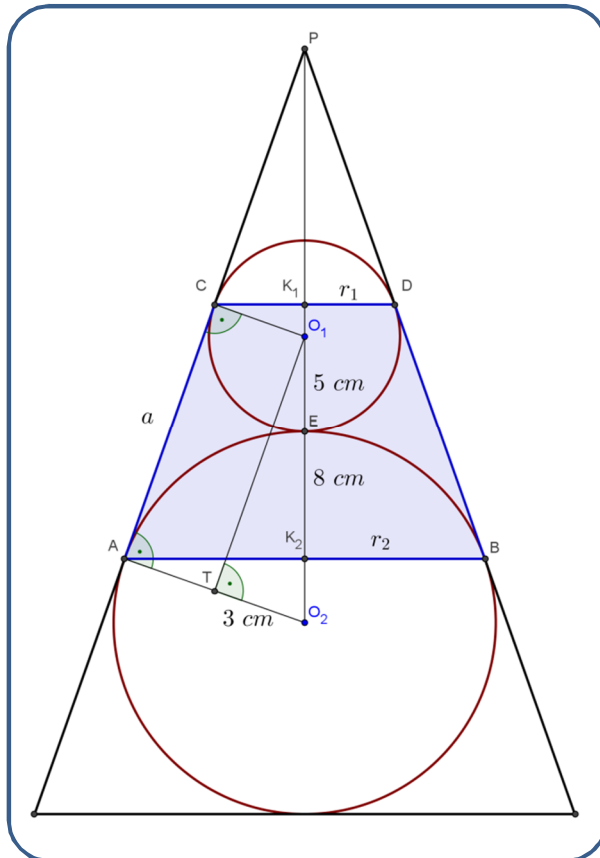
A keresett gömb sugara 29,55 cm.

Megjegyzés:

Megmutatható, hogy ha a metszősíkok távolsága 15 cm, akkor a gömb középpontja a 25 cm sugarú kör síkján van, ha 15 cm-nél nagyobb, akkor a gömb középpontja a két sík között van, ha pedig 15 cm-nél közelebb van a két sík, akkor a gömb középpontja a két sík által meghatározott tartományon kívülre esik.

14. Egymást kívülről érintő két gömb sugara 5 cm és 8 cm. Vegyünk egy kúpot, amely mindkét gömböt érinti. Mekkora a kúp palástjának az a része, amelyik a két érintkező kör között van?

Megoldás:



A kúp tengelyére illeszkedő síkkal síkmetszetet készítünk a kútból és a gömbökből. Egy csonkakúp palástjának a felszínét kell meghatároznunk. Az ábrán a fedőlap sugara a $K_1D = r_1$ szakasz; az alapkör sugara a $K_2B = r_2$ szakasz, az alkotó pedig az $AC = a$ szakasz.

Az AC szakasz hosszát a két kör közös érintő-szakaszaként az O_2TO_1 derékszögű háromszögből határozzuk meg:

$$a = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{160}.$$

$O_2TO_1\Delta \sim CK_1O_1\Delta \sim AK_2O_2\Delta$, mert derékszögűek és a hegyesszögeik merőleges szárú szögek illetve egyállású szögek. A megfelelő szakaszok aránya egyenlő:

$$\frac{r_1}{\sqrt{160}} = \frac{5}{13} \Rightarrow r_1 = \frac{5\sqrt{160}}{13};$$

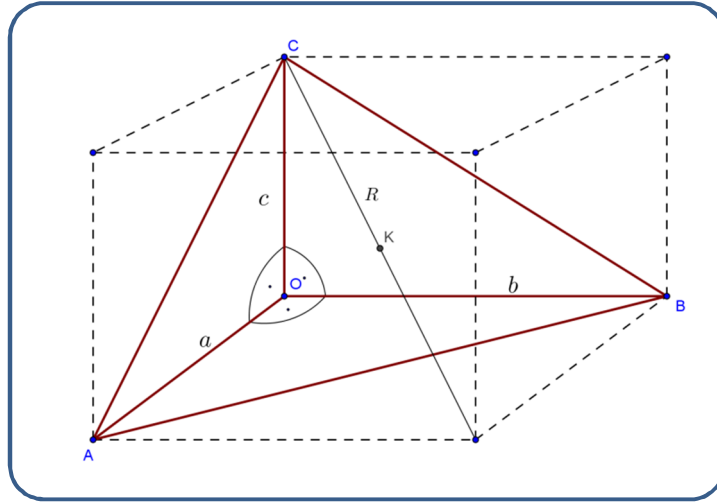
$$\frac{r_2}{\sqrt{160}} = \frac{8}{13} \Rightarrow r_2 = \frac{8\sqrt{160}}{13}.$$

Így a palást felszíne:

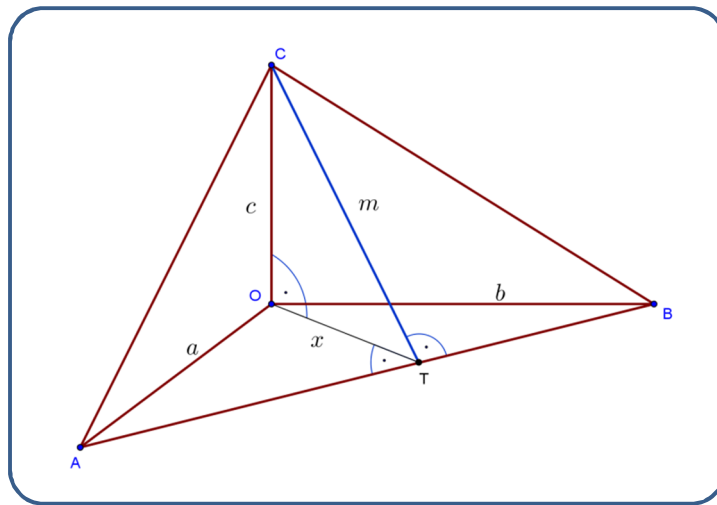
$$A = (r_1 + r_2)a\pi = 160\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

15. Egy tetraéder egy csúcsából kiinduló a, b, c élei páronként merőlegesek egymásra. Határozzuk meg a körülírt és a beírt gömb sugarát!

Megoldás:



Ez a tetraéder az ábra szerint beilleszthető egy olyan téglatestbe, amelynek egymásra merőleges élei a, b, c . A téglatest köré írható gömb átmegy a tetraéder minden csúcsán, ezért ez a gömb egyben a tetraéder köré írható gömb is, amelynek középpontja a téglatest testátlójának K felezőpontja. Így a gömb sugara a testátló fele, $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.



Ha a beírt gömb középpontját a csúcsokkal összekötjük, akkor a tetraédert négy kisebb tetraéderre bontjuk. Ezeknek a részeknek a tetraéder lapjaihoz tartozó magassága a beírt gömb r sugara (ld. a 8. ajánlott feladat ábráját). Ezért az $OABC$ tetraéder térfogatát ki tudjuk számolni kétféle módon:

$$V = \frac{\frac{ab}{2}c}{3} = \frac{abc}{6} = \frac{(T(OAB) + T(OBC) + T(COA) + T(ABC)) \cdot r}{3},$$

tehát

$$r = \frac{abc}{2} : (T(OAB) + T(OBC) + T(COA) + T(ABC)).$$

$$T(OAB) = \frac{ab}{2} ; \quad T(OBC) = \frac{bc}{2} ; \quad T(COA) = \frac{ac}{2}.$$

A C pontból az AB szakaszra bocsátott merőleges talppontja a T pont. Ekkor az OT is merőleges AB -re a három egymásra merőleges egyenes tétele alapján. Az x szakaszt az OAB háromszög területének kétféle felírásából kaphatjuk meg:

$$\frac{x \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{ab}{2} \Rightarrow x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Az ABC háromszög m magasságát Pitagorasz-tétellel határozzuk meg:

$$m = \sqrt{x^2 + c^2} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2}}.$$

Az ABC háromszög területe:

$$T(ABC) = \frac{m \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}{2}.$$

Ezeket a részleteket felhasználva a tetraéderbe írt gömb sugara:

$$\begin{aligned} r &= \frac{abc}{2} : \left(\frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}{2} \right) = \\ &= abc : \left(ab + bc + ac + \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \right). \end{aligned}$$

IV. Ellenőrző feladatok

1. Egy paralelepipedon két éle 20 cm és 16 cm, a közbezárt szögük 50° . A harmadik él 28 cm és a másik két él síkjával 70° -os szöget zár be. Mekkora a paralelepipedon térfogata?
2. Egy egyenes körkúp tengelymetszetének területe 600 cm^2 , az alkotók az alaplappal 50° -os szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?
3. Egy szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúla alapéle 12 cm, oldallapjai 60° -os szöget zárnak be az alaplappal síkjával.

a) Számítsa ki a gúla felszínét (cm^2 -ben) és térfogatát (cm^3 -ben)!

Válaszait egészre kerekítve adja meg!

A gúlát két részre osztjuk egy az alappal párhuzamos síkkal, amely a gúla magasságát a csúcstól távolabbi harmadoló pontban metszi.

b) Mekkora a keletkező gúla és csonkagúla térfogatának aránya?

Válaszát egész számok hányadosaként adja meg!

c) Számítsa ki a keletkező csonkagúla felszínét!

(Középszintű érettségi vizsga, 2012. október 16.)

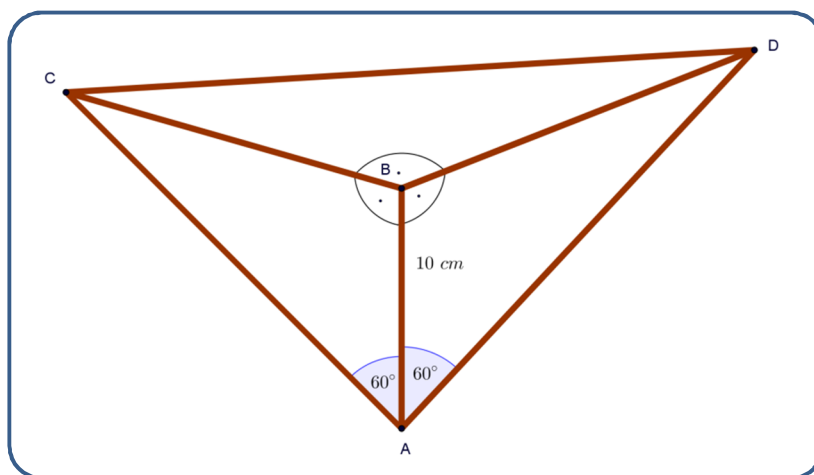
4. Három gömb átmérője egy derékszögű háromszög oldalai. Bizonyítsuk be, hogy a legnagyobb gömb felszíne egyenlő a másik két gömb felszínének összegével!

5. Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplappal egybevágó lapon az A' csúcsot az A -val, a B' csúcsot a B -vel, a C' csúcsot a C -vel, a D' csúcsot a D -vel kösse össze él. Tudjuk, hogy DAD' szög 45° -os, a BAB' szög 60° -os.

- Mekkora a $B'AD'$ szög koszinusza?
- Mekkora az $AB'A'D'$ tetraéder térfogata, ha a téglatest legrövidebb éle 10?
- Mekkora az $AA'D'$ és az $AB'D'$ síkok hajlásszöge?

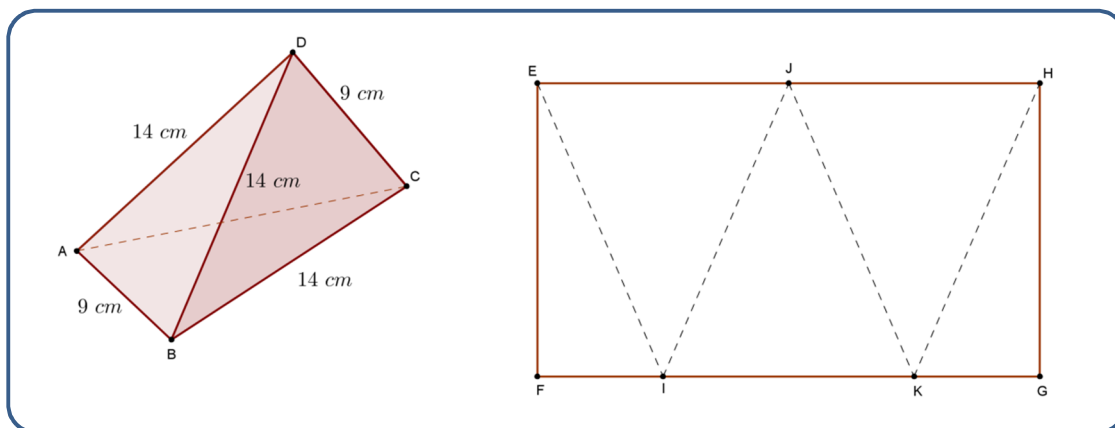
(Emelt szintű érettségi vizsga, 2006. május 9.)

6. Egy 8 cm átmérőjű hengeres edényben 12 cm magasan áll a víz. Egy bedobott golyó a víz felszínét 1 cm-rel emeli. Mekkora a golyó sugara?
7. Az ábrán látható módon a rövidebb, 10 cm hosszú befogójuk mentén egymáshoz rögzítettünk két egyforma ($30^\circ - 60^\circ$ fokos) derékszögű vonalzót, majd az alakzat tetejére tettünk egy egyenlő szárú derékszögűt is. Elférne-e az így kapott tetraéder belsejében egy 3,2 cm sugarú teniszlabda?



(KÖMAL 2012/3. szám; C.1119)

8. Mekkora szöget zár be a kocka két különböző irányú élére illeszkedő átlóssíkja?
9. Egy nem szabályos tetraéder alakú dobozt az ábrán látható téglalaphból hajtogatunk a szaggatott vonalak mentén. Hány négyzetcentiméter papírból készül a doboz? A méreteit az ábráról leolvashatjuk, az összeragasztáskor fedésbe kerülő résztől eltekintünk. Mekkora a doboz térfogata?



10. Egy egyenes hengert a tengelyével párhuzamos síkkal elmeteszünk. A síkmetszet területe 96, a tengelytől való távolsága 3, a hengerpalást területe 120π . Mekkora a henger sugara és magassága? (Írásbeli érettségi-felvételi dolgozat; 1996. május 21.)
11. Egy egyenes körkúpba írjon be egy félgömböt úgy, hogy az körlapjával illeszkedjék a kúp alapkörének síkjára, gömbfelülete pedig érintse a kúp palástját! A kúp felszíne úgy aránylik a félgömb görbe felületének a felszínéhez, mint 18:5. Határozza meg a kúp nyílásszögét! (Írásbeli érettségi-felvételi dolgozat; 1998. május 26.)
12. Egy centiméterben mérve egész élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát! (Emelt szintű érettségi vizsga, 2005. október 25.)

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Egy paralelepipedon két éle 20 cm és 16 cm, a közbezárt szögük 50° . A harmadik él 28 cm és a másik két él síkjával 70° -os szöget zár be. Mekkora a paralelepipedon térfogata?

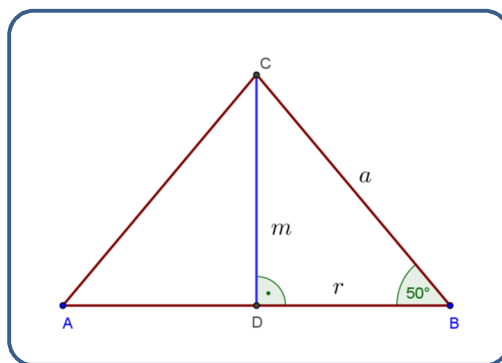
Megoldás:

A hasáb alaplappjának területe $T = 20 \cdot 16 \cdot \sin 50^\circ = 245,13 \text{ (cm}^2\text{)}$. A magasságot a harmadik él segítségével határozzuk meg: $m = 28 \cdot \sin 70^\circ = 26,31 \text{ (cm)}$. A paralelogramma térfogata:

$$V = T \cdot m = 6449,37 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2. Egy egyenes körkúp tengelymetszetének területe 600 cm^2 , az alkotók az alaplappal 50° -os szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

Megoldás:



A tengelymetszet területe $T = rm = r \cdot r \cdot \tan 50^\circ = 600$. Így $r = 22,44 \text{ cm}$; $m = 26,74 \text{ cm}$. a kúp alkotója $a = r : \cos 50^\circ = 34,91 \text{ cm}$. A kúp felszíne

$$A = r^2\pi + ar\pi = 22,44^2\pi + 34,91 \cdot 22,44\pi \approx 4043 \text{ (cm}^2\text{)},$$

a térfogata

$$V = \frac{r^2\pi m}{3} = \frac{22,44^2\pi \cdot 26,74}{3} \approx 14100 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

3. Egy szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúla alapéle 12 cm, oldallapjai 60° -os szöget zárnak be az alaplappal.

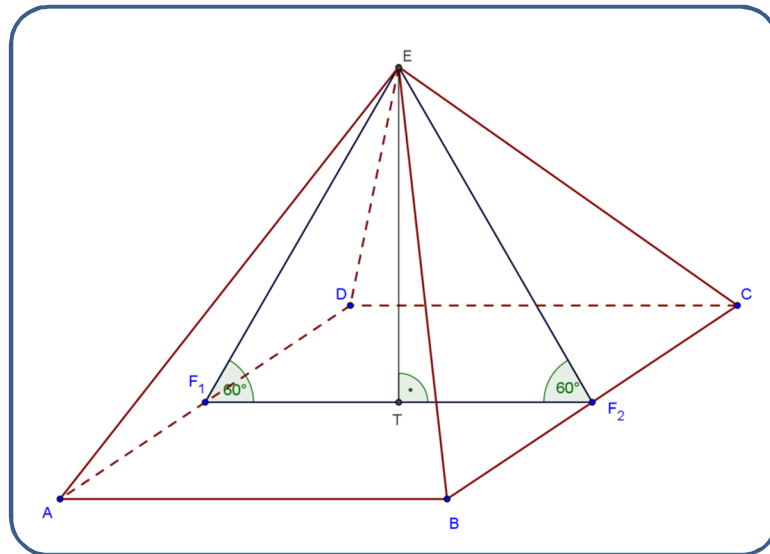
- a) Számítsa ki a gúla felszínét (cm^2 -ben) és térfogatát (cm^3 -ben)!
Válaszait egészre kerekítve adja meg!

A gúlát két részre osztjuk egy az alappal párhuzamos síkkal, amely a gúla magasságát a csúctól távolabbi harmadoló pontban metszi.

- b) Mekkora a keletkező gúla és csonkagúla térfogatának aránya?
Válaszát egész számok hányadosaként adja meg!
- c) Számítsa ki a keletkező csonkagúla felszínét!

(Középszintű érettségi vizsga, 2012. október 16.)

Megoldás:



a)

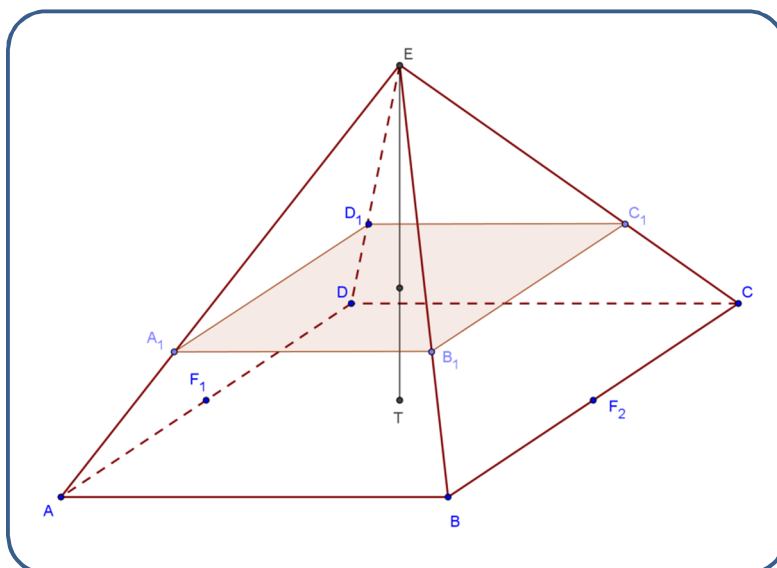
A gúlát a szimmetriasíkjával elvágjuk, az ábrán látható az oldallapoknak és az alaplappnak a hajlásszöge. Ez a síkmetszet egy szabályos háromszög, ezért a gúla oldallapjainak magassága 12 cm . A gúla felszíne:

$$A = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} = 432 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A gúla magassága az F_1F_2E szabályos háromszög magassága: $ET = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. A gúla térfogata:

$$V = \frac{12^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} \approx 499 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b)



A gúlát egy csonkagúlára és egy az eredetihez hasonló gúlára vágjuk szét. A hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$. Hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának a köbével:

$$\frac{V_{levágott}}{V_{eredeti}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

Így a csonkagúla és az eredeti gúla térfogatának az aránya 19: 27.

c)

A hasonlóság tulajdonságai alapján a $A_1B_1 = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ (cm), ez a csonkagúla fedőlapjának éle. Egy oldallapjának magassága $12:3 = 4$ (cm). A csonkagúla felszíne ezekkel az adatokkal:

$$A = 12^2 + 8^2 + 4 \cdot \frac{(12 + 8) \cdot 4}{2} = 368 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

4. Három gömb átmérője egy derékszögű háromszög oldalai. Bizonyítsuk be, hogy a legnagyobb gömb felszíne egyenlő a másik két gömb felszínének összegével!

Megoldás:

Jelöljük a gömbök sugarait r_1 ; r_2 ; r_3 -mal, a felszínüket A_1 ; A_2 ; A_3 -mal; r_3 legyen a legnagyobb gömb sugara. A feladat szerint a Pitagorasz-tétel alapján:

$$(2r_1)^2 + (2r_2)^2 = (2r_3)^2 \quad \Rightarrow \quad 4r_1^2\pi + 4r_2^2\pi = 4r_3^2\pi.$$

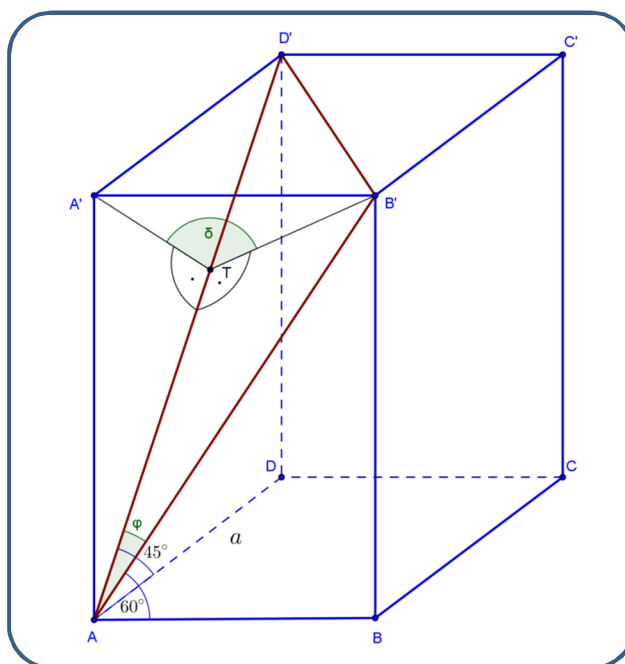
Ez éppen azt jelenti, hogy $A_1 + A_2 = A_3$.

5. Az $ABCA'D'B'C'D'$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplappal egybevágó lapon az A' csúcsot az A -val, a B' csúcsot a B -vel, a C' csúcsot a C -vel, a D' csúcsot a D -vel kösse össze él. Tudjuk, hogy DAD' szög 45° -os, a BAB' szög 60° -os.

- Mekkora a $B'AD'$ szög koszinusza?
- Mekkora az $AB'A'D'$ tetraéder térfogata, ha a téglatest legrövidebb éle 10?
- Mekkora az $AA'D'$ és az $AB'D'$ síkok hajlásszöge?

(Emelt szintű érettségi vizsga, 2006. május 9.)

Megoldás:



a)

A téglatest AD élét a -val jelöljük. Az ADD' háromszög egyenlő szárú derékszögű, ezért $DD' = a$ és $AD' = a\sqrt{2}$. Az $ADD'A'$ négyszög négyzet, azért $AD = AA' = BB' = a$. Az ABB' derékszögű háromszögben az A csúcsnál 60° van, ezért $AB = \frac{a}{\sqrt{3}}; AB' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. AB' és $B'D'$ szakaszok egybevágó téglalapok átlói, tehát egyenlőek, így a B' pontból az AD' -re bocsátott merőleges felezi az AD' szakaszt. A $B'AT$ derékszögű háromszögből a $B'AD'$ szög koszinusza:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,6124.$$

b)

A téglatest legrövidebb éle az $AB = \frac{a}{\sqrt{3}} = 10$, így $a = 10\sqrt{3}$. Az $AB'A'D'$ tetraéder alapjának tekintsük az $AB'A'$ lapot, akkor az ehhez tartozó magasság az $A'D'$ él.

Így a tetraéder térfogata:

$$V = \frac{a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot a}{6} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18} = \frac{(10\sqrt{3})^3 \sqrt{3}}{18} = 500 \text{ (térfogategység)}.$$

c)

Két sík hajlásszögét úgy kapjuk meg, ha a metszésvonal egy pontjában mindkét síkban merőlegest állítunk a metszésvonalra. Az $AA'D'$ és $AB'D'$ háromszögek egyenlő szárúak, ezért az alaphoz tartozó magasságuk talppontja az AD' szakasz T felezőpontja, így a két sík hajlásszöge az $A'TB'$. $A'T$ az $AD'A'$ egyenlő szárú háromszög átfogóhoz tartozó magassága, ezért $A'T = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. $A'B'$ merőleges az $ADD'A'$ síkra, ezért annak minden egyenesére, így $B'A'T \angle = 90^\circ$. A keresett δ szög ezek alapján meghatározható:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A'B'}{A'T} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8165 \Rightarrow \delta \approx 39,23^\circ.$$

6. Egy 8 cm átmérőjű hengeres edényben 12 cm magasan áll a víz. Egy bedobott golyó a víz felszínét 1 cm-rel emeli. Mekkora a golyó sugara?

Megoldás:

A golyó térfogata megegyezik egy 8 cm átmérőjű, 1 cm magas henger térfogatával. Ha a golyó sugara r , akkor

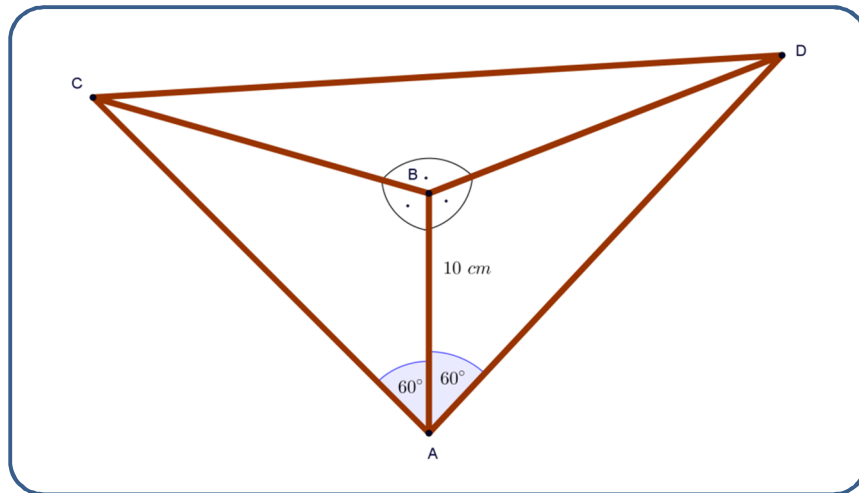
$$\frac{4r^3\pi}{3} = 4^2\pi \cdot 1,$$

így a gömb sugara $\sqrt[3]{12} \approx 2,29$ (cm).

7. Az ábrán látható módon a rövidebb, 10 cm hosszú befogójuk mentén egymáshoz rögzítettünk két egyforma (30 – 60 fokos) derékszögű vonalzót, majd az alakzat tetejére tettünk egy egyenlő szárú derékszögűt is. Elférne-e az így kapott tetraéder belsejében egy 3,2 cm sugarú teniszlabda?

(KÖMAL 2012/3. szám; C.1119)

Megoldás:



A 8. ajánlott feladat alapján tudjuk, hogy ha a tetraéder térfogata V , felszíne A , beírt gömbjének sugara r , akkor $V = \frac{A \cdot r}{3}$, tehát $r = \frac{3V}{A}$.

Felhasználva, hogy az ABC és ABD háromszög egy 20 cm oldalú szabályos háromszög fele:

$$AC = AD = 20 \text{ cm}; BC = BD = 10\sqrt{3}.$$

A BCD háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $CD = 10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{6}$.

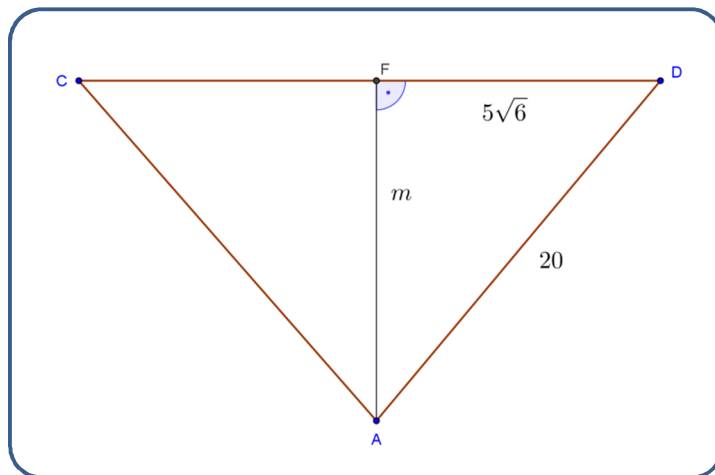
A tetraéder alapjának tekintsük az BCD háromszöget és így számoljuk ki a térfogatát:

$$V = \frac{\frac{10\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{2} \cdot 10}{3} = 500 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A felszínhez az oldallapok területét számoljuk ki.

$$T(ABC) = T(ABD) = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}; T(BCD) = \frac{10\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Az ACD háromszög oldalainak hossza $10 \cdot \sqrt{6} \text{ cm}$; 20 cm ; 20 cm .



A CD oldalhoz tartozó magasságot Pitagorasz-tétellel számoljuk ki:

$$m = \sqrt{20^2 - (5\sqrt{6})^2} = \sqrt{250}.$$

$$T(ACD) = \frac{10\sqrt{6} \cdot \sqrt{250}}{2} = 50\sqrt{15} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A tetraéder felszíne:

$$A = 100\sqrt{3} + 150 + 50\sqrt{15} \approx 516,85 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

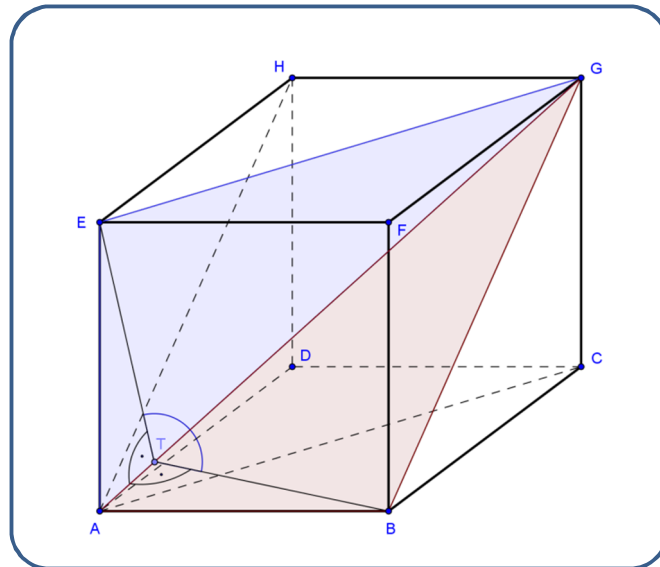
A beírt gömb sugara:

$$r = \frac{3V}{A} = \frac{1500}{516,85} \approx 2,9 \text{ cm}.$$

Így a tetraéderbe nem fér be a teniszlabda.

8. Mekkora szöget zár be a kocka két különböző irányú élére illeszkedő átlóssíkja?

Megoldás:



Az $ABGH$ és $ACGE$ átlóssíkok metszésvonala AG . $ABG\Delta \cong AGE\Delta$, mert oldalai egyenlőek. Ezért, ha a B és E pontokból merőlegest bocsátunk az AG átlóra, akkor a merőlegesek talppontja azonos lesz, ez a T pont. A két átlóssík szöge a $BTE\angle$. Ennek a meghatározásához kiszámítjuk a $BTE\Delta$ oldalait. Ha a kocka éle a , akkor $BG = \sqrt{2}a$, $AG = \sqrt{3}a$. Az $ABG\Delta$ -ben a B csúcsnál derékszög van. Ha a derékszögű háromszög területét felírjuk kétféle módon, megkapjuk az AG -hez tartozó magasságot: $\frac{BT \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot a \sqrt{2}}{2} \Rightarrow BT = \frac{a \cdot a \sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a$. Hasonlóan $ET = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a$ is teljesül.

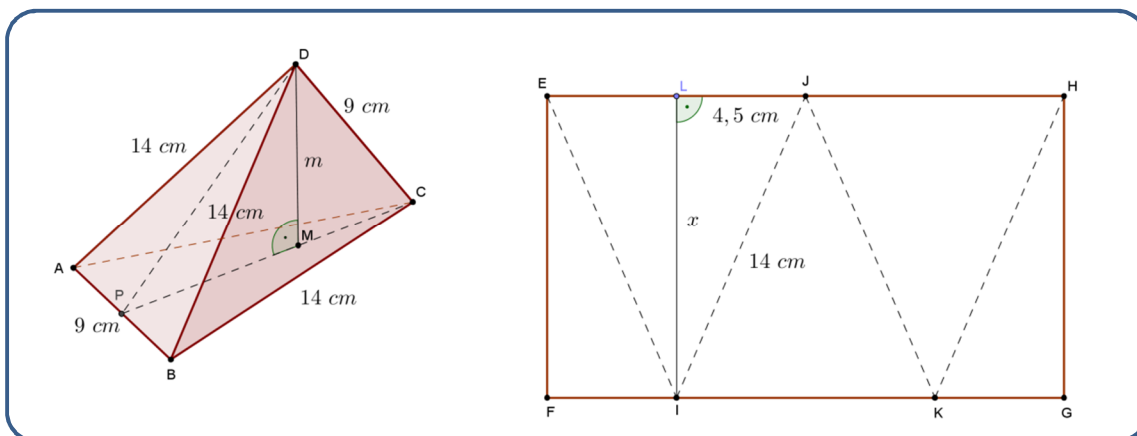
$EB = \sqrt{2}a$. A $BTE\Delta$ -ben a BE oldalra felírva a koszinusztételt, ki tudjuk számítani a keresett szöveget:

$$\cos ETB\angle = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a\right)^2 - (\sqrt{2}a)^2}{2 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a\right)^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow ETB\angle = 120^\circ.$$

A két átlóssík szöge 120° .

9. Egy nem szabályos tetraéder alakú dobozt az ábrán látható téglalapról hajtogatunk a szaggatott vonalak mentén. Hány négyzetcentiméter papírból készül a doboz? A méreteit az ábráról leolvashatjuk, az összeragasztáskor fedésbe kerülő résztől eltekintünk. Mekkora a doboz térfogata?

Megoldás:



Az oldallap magasságát Pitagorasz-tétellel határozzuk meg: $x = \sqrt{14^2 - 4,5^2} = 13,26 \text{ (cm)}$. A tetraéder négy egybevágó lapja kiterítve a fenti téglalapot alkotja, ezért a felszín:

$$A = 2 \cdot 9 \cdot 13,26 = 238,68 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A tetraéder magasságát a szimmetria síkon rajzoljuk be. Ez a sík az AB él P felezőpontján és a CD élen halad át. $PC = PD = x = 13,26 \text{ cm}$. A PCD háromszög területét kétféle módon felírjuk és ebből meghatározzuk a tetraéder m magasságát. Heron-képlettel számolva:

$$T = \sqrt{17,76 \cdot (17,76 - 13,26) \cdot (17,76 - 13,26) \cdot (17,76 - 9)} = 56,13 \text{ (cm}^2\text{)}$$

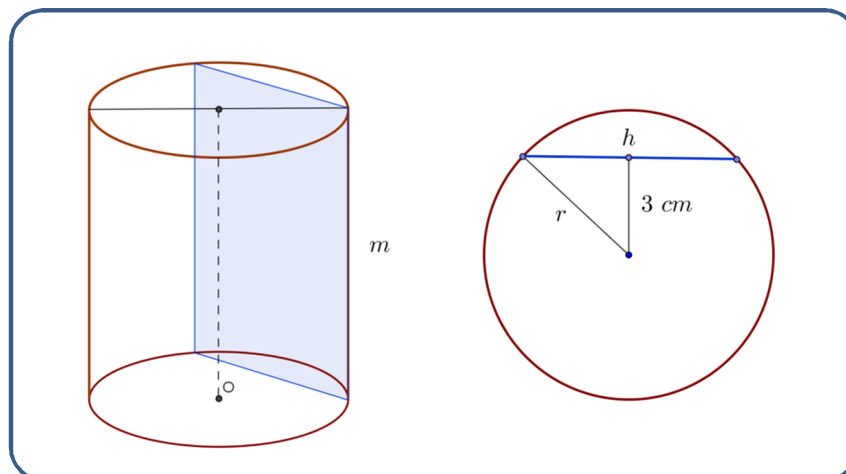
$$T = \frac{13,26 \cdot m}{2} \Rightarrow m = 8,47 \text{ (cm)}.$$

A tetraéder térfogata:

$$V = \frac{\frac{9 \cdot 13,26}{2} \cdot 8,47}{3} = 168,46 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

10. Egy egyenes hengert a tengelyével párhuzamos síkkal elmetszünk. A síkmetszet területe 96, a tengelytől való távolsága 3, a hengerpalást területe 120π . Mekkora a henger sugara és magassága? (Írásbeli érettségi-felvételi dolgozat; 1996. május 21.)

Megoldás:



A tengellyel párhuzamos síkmetszet olyan téglalap, amelynek az egyik oldala a henger m magassága, másik oldala pedig az alapkör h húrja. A feltételek szerint:

$$2r\pi m = 120\pi \Rightarrow rm = 60$$

$$h \cdot m = 96$$

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 - 9.$$

Az első két egyenletből h -t kifejezzük és a harmadik egyenletbe behelyettesítjük:

$$h = \frac{96}{60}r = 1,6r$$

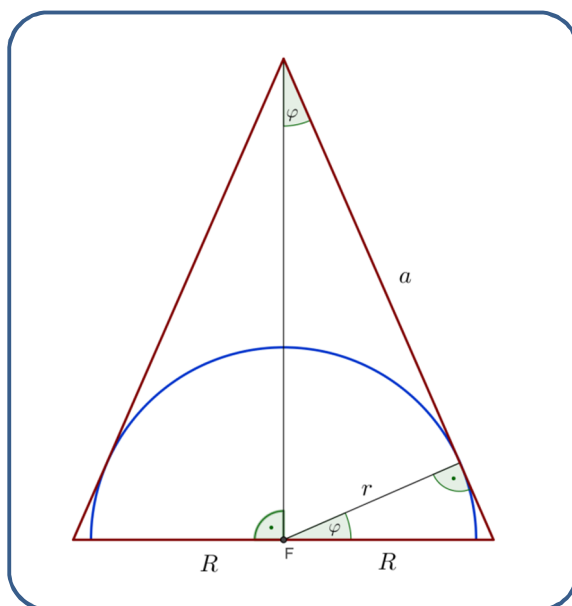
$$0,8^2 r^2 = r^2 - 9 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow m = 12.$$

A henger sugara 5 egység, a magassága 12 egység.

11. Egy egyenes körkúpba írjon be egy félgömböt úgy, hogy az körlapjával illeszkedjék a kúp alapkörének síkjára, gömbfelülete pedig érintse a kúp palástját! A kúp felszíne úgy aránylik a félgömb görbe felületének a felszínéhez, mint 18:5. Határozza meg a kúp nyílásszögét!

(Írásbeli érettségi-felvételi dolgozat; 1998. május 26.)

Megoldás:



A kúp alapkörének sugara R , alkotója a , a fél nyílásszöge φ , a gömb sugara r . Ha a kúp tengelyére illesztett síkkal a testeket elmetsszük, akkor a fenti ábrát kapjuk. Az alkotó a kör egy érintője, így az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. Derékszögű háromszögekből:

$$a = \frac{R}{\sin \varphi} ; \quad r = R \cos \varphi$$

A felszínek aránya:

$$\frac{R(a + R)\pi}{2r^2\pi} = \frac{R\left(\frac{R}{\sin \varphi} + R\right)}{2R^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1 + \sin \varphi}{2 \sin \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{18}{5}.$$

A $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ azonosságot felhasználva, rendezve az egyenletet:

$$\frac{1 + \sin \varphi}{2 \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi)} = \frac{1 + \sin \varphi}{2 \sin \varphi (1 - \sin \varphi)(1 + \sin \varphi)} = \frac{18}{5}$$

Innen egyszerűsítés és a nevezővel való szorzás után:

$$36 \sin^2 \varphi - 36 \sin \varphi + 5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásából:

$$\sin \varphi = \frac{5}{6} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 56,44^\circ \quad \text{vagy} \quad \varphi = 9,59^\circ.$$

A kúp nyílásszöge $112,88^\circ$ vagy $19,18^\circ$.

12. Egy centiméterben mérve egész élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát!

(Emelt szintű érettségi vizsga, 2005. október 25.)

Megoldás:

Az eredeti kocka élhossza n , a 99. nem egységkocka élhossza k , n és k pozitív egész szám. A feltételek szerint

$$98 = n^3 - k^3 = (n - k)(n^2 + nk + k^2).$$

A 98-at két egész szám szorzatára bontjuk. A két tényező közül a kisebb felel meg $(n - k)$ -nak. Az alábbi esetek lehetségesek:

$$\text{I.} \quad n - k = 1 \quad \text{és} \quad n^2 + nk + k^2 = 98.$$

$$n = k + 1 \quad \Rightarrow \quad 3k^2 + 3k - 97 = 0.$$

Ennek az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében.

$$\text{II.} \quad n - k = 2 \quad \text{és} \quad n^2 + nk + k^2 = 49.$$

$$n = k + 2 \quad \Rightarrow \quad 3k^2 + 6k - 45 = 0.$$

Innen $k = 3; n = 5$.

$$\text{III.} \quad n - k = 7 \quad \text{és} \quad n^2 + nk + k^2 = 14.$$

$$n = k + 7 \quad \Rightarrow \quad 3k^2 + 21k + 35 = 0.$$

Nincs megoldás a pozitív egész számok között.

Az eredeti kocka élhosszúsága 5 cm , a térfogata 125 cm^3 .