23. Kombinatorika, gráfok

I. Elméleti összefoglaló

Leszámlálási alapfeladatok

A kombinatorikai alapfeladatok esetek, lehetőségek összeszámlálásával foglalkoznak. Általában n jelöli a rendelkezésre álló különbözőfajta elemek számát, k pedig az ezekből kiválasztott elemek számát. Három fő szempont alapján csoportosíthatjuk az alapfeladatokat: 1. az összes elemet kiválasztjuk-e vagy csak néhányat; 2. számít-e a kiválasztott elemek sorrendje vagy sem; 3. megengedett-e az ismétlődés vagy sem. Az első két szempont alapján elvégzett csoportosítást és az elnevezéseket mutatja a következő táblázat:

	Számít a sorrend	Nem számít a sorrend
Az összes elem kiválasztása	permutáció	*– (csak 1 eset lenne)*
Néhány elem kiválasztása	variáció	kombináció

Ismétlés nélküli permutáció

n különböző elem lehetséges sorbarendezéseinek száma $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Például: 10 diákot $10! = 3628800$ -féleképpen sorakoztathatunk fel egymás mögé.

Ismétléses permutáció

Ha összesen n elemünk van, amelyek között $n_1, n_2, \ldots, n_k$ darab azonos, akkor ezek lehetséges sorbarendezéseinek száma $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Például: 3 db A, 2 db B és 5 db C betűből $\dfrac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} = 2520$ -féle „szó” rakható ki.

Ismétlés nélküli variáció

n különböző elemből k darabot $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ -féleképpen választhatunk ki, ha számít a kiválasztás sorrendje.

Például: Egy 100 fős futóversenyen $100 \cdot 99 \cdot 98 = \dfrac{100!}{97!}$ -féleképpen alakulhat az első három helyezett, ha nincs holtverseny ($n = 100,\ k = 3$).

Ismétléses variáció

n-féle elemből k darabot $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ db}} = n^k$ -féleképpen választhatunk ki, ha számít a sorrend, és egy elemet többször is választhatunk.

Például: Egy totószelvény, amelyen 14 sor van, és minden sorban egyet választunk az 1, X, 2 értékek közül, 3^{14} -féleképpen tölthető ki ($n = 3,\ k = 14$).

Ismétlés nélküli kombináció

n különböző elemből k darabot $\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot1}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ -féleképpen választhatunk ki, ha nem számít a kiválasztás sorrendje. Ezt $\binom{n}{k}$-val is jelöljük.

Például: Egy buszjegy, amelyen 9 számból 3-at lyukaszt ki a gép, $\binom{9}{3}=\frac{9!}{6!\cdot3!}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ -féleképpen lyukasztható ki ($n=9,\ k=3$).

Ismétléses kombináció

n-féle elemből k darabot $\binom{n+k-1}{k}$-féleképpen válaszhatunk ki, ha nem számít a sorrend, és egy elemet többször is választhatunk.

Például: 5-féle virágból egy 7 szálas csokrot $\binom{5+7-1}{7}=\binom{11}{7}=330$ -féleképpen állíthatunk össze, ha az azonos fajtájú virágokat nem különböztetjük meg, és mind az 5-féle virágból elegendő számú áll rendelkezésünkre ($n=5,\ k=7$).

Binomiális együtthatók

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$, ahol $0\le k\le n$. Mivel $0!=1$, ezért $\binom{n}{0}=1$.

Összefüggések: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, illetve $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Binomiális tétel: $(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\ldots+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$

Gráfok – definíciók

- **Gráfnak** nevezzük **pontoknak** és **éleknek** a halmazát, ahol minden él két (általában különböző) pontot köt össze. (A pontokat csúcsoknak is nevezzük.)
- Ha két pont között több él is fut, ezeket **párhuzamos éleknek** nevezzük. Ha egy él egy pontot önmagával köt össze, akkor **hurokélnek** nevezzük.
- Ha egy gráfban nincsenek sem párhuzamos élek, sem hurokél, akkor **egyszerű gráfnak** nevezzük.
- Egy csúcs **fokszáma** vagy **foka** a belőle kiinduló élek száma. (A hurokél duplán számít.)
- **Sétának** nevezzük egymáshoz csatlakozó élek egy sorozatát.
- **Útnak** nevezünk egy olyan sétát, amelyben egyetlen csúcsot sem érintünk egynél többször.

- **Körnek** nevezünk egy olyan sétát, amelynek kezdő- és végpontja megegyezik, és ezen kívül egyetlen csúcsot sem érint egynél többször.
- Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két pontja között vezet séta (vagy út).
- Egy gráf **erdő**, ha nem tartalmaz kört. Egy gráf **fa**, ha nem tartalmaz kört, és összefüggő.

Gráfok – összefüggések

- Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese.
- Minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.
- Egy n pontú fának $n-1$ éle van.

II. Kidolgozott feladatok

1. Hány részhalmaza van egy n-elemű halmaznak?

Megoldás: Egy részhalmaz előállításakor minden elemről eldönthetjük, hogy bevesszük-e a részhalmazba, vagy sem. Ez mind az n esetben 2-féle választási lehetőséget jelent, így az összes lehetőség száma $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n\text{ db}} = 2^n$.

Másképpen: egy n-elemű halmaznak $\binom{n}{0}$ db 0-elemű, $\binom{n}{1}$ db 1-elemű, …, $\binom{n}{n}$ db n-elemű részhalmaza van. Ez a binomiális tétel miatt összesen $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$ db részhalmaz.

2. Hány 8-jegyű szám van? Ezek közül hány olyan van,
a) amelynek szomszédos jegyei különbözők?
b) amelyben szerepel 5-ös számjegy?

Megoldás: A szám első jegye 9-féle lehet (0-val nem kezdődhet), az összes többi jegy pedig 10-féle. Bármelyik jegy után bármelyik következhet, ez összesen $9\cdot\underbrace{10\cdot 10\cdot\ldots\cdot 10}_{7\text{ db}}=9\cdot 10^7$ darab 8-jegyű szám.

a) Ha a szomszédos jegyeknek különbözni kell, akkor kezdjük a szám elejéről a jegyek kitöltését. Az első jegy most is 9-féle lehet, a második helyre már nem választhatjuk az elsőnek leírt számjegyet (tehát csak 9 lehetőségünk van), a harmadik helyre nem választhatjuk a másodiknak leírt számjegyet (ez ismét 9 lehetőség), és így tovább, mindig 9 lehetőségből választhatunk. Tehát 9^8 ilyen szám van. *(Megjegyzés: ha hátulról kezdenénk a kitöltést, akkor az első jegyhez érkezve nem tudnánk befejezni a szorzást, ugyanis itt 9 vagy 8 lehetőségünk lenne aszerint, hogy a második jegy 0 vagy nem 0.)*

b) Célszerű először a kérdéses halmaz komplementerét összeszámolni, vagyis meghatározni, hogy hány olyan 8-jegyű szám van, amelyben nem szerepel 5-ös számjegy. Ekkor az első jegy csak 8-féle lehet, a többi jegy pedig 9-féle, ez összesen $8\cdot\underbrace{9\cdot 9\cdot\ldots\cdot 9}_{7\text{ db}}=8\cdot 9^7$ darab „rossz” szám. A keresett „jó” számokat a „**jó = összes – rossz**” módszerrel kapjuk: $9\cdot 10^7-8\cdot 9^7$ számban szerepel 5-ös számjegy.

3. Hányféleképpen sorakozhat fel egy állatidomár mögött 4 oroszlán, 1 tigris és 3 jegesmedve?

Megoldás: Ha mind a 8 állat különböző lenne, akkor $8!$-féle sorrendet kapnánk. Ha viszont az azonos típusú állatokat nem különböztetjük meg, akkor a lehetőségek száma $\frac{8!}{4!\cdot 1!\cdot 3!}$. Tekintsük ugyanis az eredeti $8!$-féle sorrendet. Mivel a 4 oroszlánt nem különböztetjük meg, és az oroszlánokat egymás között $4!$-féleképpen tudjuk sorba állítani, ezért – ha eltekintünk az oroszlánok megkülönböztetésétől – minden esetet $4!$-szor számoltunk meg, így ennyivel osztanunk kell a lehetőségek számát. Hasonlóképpen a 3 jegesmedvét $3!$-féleképpen tudjuk sorba állítani, ezért, mivel a jegesmedvéket sem különböztetjük meg, minden esetet $3!$-szor számoltunk meg, így ennyivel osztanunk kell a lehetőségek számát.

Másképpen: Válasszuk ki először a 8 hely közül azt a 4-et, ahová oroszlán kerül, majd a maradék 4 hely közül azt az 1-et, ahová tigris, ekkor a jegesmedvék a fennmaradó 3 üres helyre kerülnek. Ez így összesen $\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{3}$ lehetőség (a $\binom{3}{3}=1$ el is hagyható). Ugyanezt például $\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{4}$ alakban is megkaphatjuk, ha először a 3 jegesmedvét, utána pedig a 4 oroszlánt helyezzük el.

4. Hány olyan 10 betűből álló (nem feltétlenül értelmes) szó van, amelyben 4 különböző magánhangzó található? (A mássalhangzók között lehetnek egyformák is. A magyar abc-ben 14 magánhangzó és 21 mássalhangzó van.)

Megoldás: Először rögzítsük, hogy a 10 betű közül hová kerülnek a magánhangzók, ez $\binom{10}{4}$ lehetőség. A 4 rögzített helyre sorrendben (például balról jobbra) $14\cdot 13\cdot 12\cdot 11$-féleképpen választható ki a 4 különböző magánhangzó. Végül a fennmaradó 6 hely mindegyikére 21 mássalhangzó közül választhatunk (egyformákat is), ez $21\cdot 21\cdot 21\cdot 21\cdot 21\cdot 21$ lehetőség. Mivel egy konkrét kitöltés esetén az említett három lépés egymástól független (azaz bármely 4 helyet választottuk a magánhangzóknak, oda bármelyik 4 magánhangzó írható, és ezek bármilyen mássalhangzókkal folytathatók), ezért a megoldás a három végeredmény szorzata, vagyis $\binom{10}{4}\cdot\frac{14!}{10!}\cdot 21^6$.

5. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 14 soros totószelvényt úgy, hogy az első 4 sorban
a) legfeljebb 1 db X legyen?
b) legalább 1 db X legyen?

Megoldás: a) A „legfeljebb 1” jelentése: „pontosan 0 vagy pontosan 1”. Így tehát két részre bontjuk a lehetőségeket aszerint, hogy 0 vagy 1 db X szerepel az első 4 sorban, majd a két kapott eredményt összeadjuk. Ha nincs X az első 4 sorban, akkor itt mindenütt 2 lehetőségből választhatunk (1 vagy 2), a többi 10 sorban pedig 3 lehetőségből (1, X vagy 2), ez összesen $2^4\cdot 3^{10}$ eset. Ha pedig pontosan 1 db X van az első 4 sor valamelyikében, akkor ez az X 4 különböző helyen lehet (ezzel tulajdonképpen további 4 részre bontottuk ezt az esetet), míg az első 4 sorból a fennmaradó 3 sor mindegyike 2-féleképpen tölthető ki (1 vagy 2), az utolsó 10 sor pedig most is 3-3-

féleképpen, ez tehát összesen $4\cdot 2^3\cdot 3^{10}$ eset. Így a megoldás $2^4\cdot 3^{10}+4\cdot 2^3\cdot 3^{10}$.

b) A „legalább 1" jelentése (ebben a feladatban): „pontosan 1, pontosan 2, pontosan 3 vagy pontosan 4". Így ha 4 részre bontjuk az eseteket, ezen 4 eredmény összege lesz a megoldás. A pontosan 1 db X-et az a) részben már kiszámoltuk. Ha pontosan 2 db X-et kell elhelyeznünk, akkor ez a két X összesen $\binom{4}{2}$ helyre tehető, az első 4 sor fennmaradó 2 helyén 2-2 lehetőségből választhatunk, míg az utolsó 10 sor most is változatlan, ez tehát $\binom{4}{2}\cdot 2^2\cdot 3^{10}$ lehetőség. Hasonlóan felírva a többi esetet is, a megoldás $\binom{4}{1}\cdot 2^3\cdot 3^{10}+\binom{4}{2}\cdot 2^2\cdot 3^{10}+\binom{4}{3}\cdot 2^1\cdot 3^{10}+\binom{4}{4}\cdot 2^0\cdot 3^{10}$.

Megjegyzés: a **b)** részt célszerűbb úgy kiszámítani, hogy az összes totószelvény számából kivonjuk a „rossz" eseteket, vagyis amikor az első 4 sorban nem szerepel egyetlen X sem. Így a végeredmény $3^{14}-2^4\cdot 3^{10}$, amely természetesen csak alakilag különbözik az előzőtől, számértékük megegyezik.

6. Egy cukrászdában 8-féle süteményt árulnak, mindegyiket 100 Ft-ért. Hányféleképpen költhetünk el 1000 Ft-ot süteményre, ha nem szeretnénk pontosan egyféle édességgel hazatérni a vásárlásból? (Mind a 8-féle süteményből elegendő számú áll rendelkezésre.)

Megoldás: Írjunk le minden vásárlást egy számsorozattal, amelyben először annyi darab 1-es szerepel, ahányat az első fajta süteményből veszünk, majd egy 0 következik elválasztónak, ezt követően annyi darab 1-es szerepel, ahányat a második fajta süteményből veszünk, majd ismét egy 0 elválasztónak, és így tovább. Ha például az egyes fajtákból 3, 1, 2, 0, 2, 0, 0, 2 darab süteményt vettünk, akkor ezt a vásárlást az 11101011001100011 számsorozat írja le. Ezzel kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk a lehetséges vásárlások, valamint a 10 db 1-esből és 7 db 0-sból álló számsorozatok között, elegendő tehát ez utóbbiak számát meghatároznunk. A 17-hosszú számsorozatban 10 helyre kell 1-est írnunk, ezt $\binom{17}{10}$-féleképpen tehetjük meg, a fennmaradó helyekre pedig 0 kerül. Ebből le kell még vonnunk azokat az eseteket, amikor csak egyféle süteményt vettünk (ezt 8-féleképpen tehetjük meg), így összesen $\binom{17}{10}-8$ lehetőségünk van.

Megjegyzés: Mivel 8-féle süteményből kell 10-et választanunk úgy, hogy a sorrend nem számít, ezért a megoldást az ismétléses kombináció képletéből is megkaphatjuk, ahol $n=8$ és $k=10$. Így $\binom{8+10-1}{10}=\binom{17}{10}$ esetet kapnánk, ebből kell még levonni a fent említett 8 lehetőséget.

7. Mennyi lesz x^3 együtthatója a $(2x+3)^8$ kifejezésben, ha elvégezzük a hatványozást és a szükséges összevonásokat?

Megoldás: A binomiális tétel szerint $(2x+3)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\cdot(2x)^{8-k}\cdot 3^k$. Ebben az összegben csak $k=5$ esetén kapunk x^3-t tartalmazó tagot, ekkor az együttható értéke $\binom{8}{5}\cdot 2^3\cdot 3^5=108864$.

8. Hányféleképpen olvasható ki a következő ábráról a MATEMATIKA szó?

M	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A

Megoldás: Írjuk be minden mezőbe, hogy odáig hányféleképpen juthatunk el. Ekkor az első sor és az első oszlop minden mezőjébe 1 kerül, a többi mezőbe pedig a fölötte és a tőle balra lévő mezőben álló számok összege (hiszen ezekről a mezőkről léphetünk az adott mezőre, így ennyi útvonalat folytathatunk ezzel a lépéssel):

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

A lehetséges kiolvasások száma a jobb alsó mezőben álló szám, azaz 126.

Másképpen: Az előzőnél gyorsabb a következő módszer: minden kiolvasás során 5-ször kell jobbra lépnünk, 4-szer pedig lefelé. Feleltessük meg a jobbra lépésnek a J, a lefelé lépésnek az L betűt. Ekkor minden kiolvasásnak megfelel egy 5 db J és 4 db L betűből álló betűsorozat. Fordítva is igaz, minden ilyen betűsorozatnak megfelel egy kiolvasás. Elegendő tehát az 5 db J és 4 db L betűből képezhető betűsorozatok számát meghatározni, amely éppen $\frac{9!}{5!\cdot 4!}=\binom{9}{5}=126$.

9. Egy 8 fős baráti összejövetelen egyesek kézfogással köszöntötték egymást. Lehetséges-e, hogy minden jelenlévő különböző számú emberrel fogott kezet?

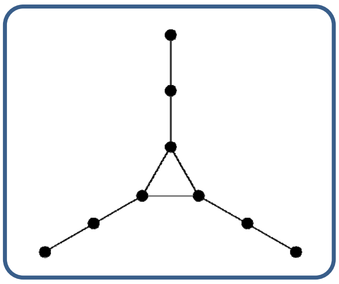
Megoldás: Tekintsük azt az egyszerű gráfot, amelynek csúcsai az emberek, továbbá két csúcs között pontosan akkor vezessen él, ha a megfelelő két ember kezet fogott egymással. Ekkor a kérdés átfogalmazható így: van-e olyan 8 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden csúcs foka különböző?

Egy 8 csúcsú egyszerű gráfban a csúcsok foka 0, 1, 2, …, 7 lehet. Ez éppen 8 lehetséges érték, így ha 8 különböző fokú csúcs lenne, akkor a felsoroltak közül mindegyik fokszámnak szerepelnie kellene. Viszont a 7-edfokú csúcs minden másikkal össze van kötve, a 0-adfokú csúcs pedig semelyik másikkal nincs összekötve, így e két fokszám nem szerepelhet egyszerre a gráfban. Vagyis nincs ilyen gráf, azaz nem lehetséges, hogy mindenki különböző számú emberrel fogott kezet.

Megjegyzés: Ezzel azt is beláttuk, hogy bármely (legalább két pontú) egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs.

10. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka
a) 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1?
b) 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1?

Megoldás: Az **a)** esetben létezik ilyen gráf, például a következő ábrán látható:



A **b)** esetben a fokszámok összege $6+6+5+4+4+3+2+2+1=33$, ami páratlan, így nem létezik ilyen gráf. (Hiszen ha létezne, annak $33:2=16{,}5$ éle lenne, ami nyilvánvalóan lehetetlen.)

11. Hány pontja van annak a fának, amelyben az élek száma pontosan ötöde a fából „hiányzó” élek (vagyis az összekötetlen pontpárok) számának?

Megoldás: Egy n pontú fának $n-1$ éle van, a „hiányzó” élek száma ennek ötszöröse, vagyis $5n-5$. Az n pontból $\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ pontpár választható ki, ez éppen a fában szereplő és a fából hiányzó élek számának összege. Az $\frac{n\cdot(n-1)}{2}=6n-6$ összefüggésből az $n^2-13n+12=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $n_1=1$ és $n_2=12$. Tehát a keresett fának vagy 1 pontja van (az 1 pontú fa is fa, amely nem tartalmaz élt), vagy 12 pontja van (ekkor 11 él található benne).

III. Ajánlott feladatok

1. Egy futóversenyen 20 versenyző indult. Tudjuk, hogy egyikük sem adta fel, és holtverseny sem alakult ki. Hányféle végeredménye lehetett a versenynek? Hányféleképpen alakulhatott az első három hely sorsa?

2. Hányféleképpen festhetjük egy n-emeletes ház szintjeit pirosra, sárgára és kékre? Mi a helyzet akkor, ha a szomszédos szintek nem lehetnek azonos színűek?

3. Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény? Hány 5, 4 és 3 találatos kitöltés van?

4. Hányféleképpen lehet eljutni egy térbeli koordináta-rendszerben az origóból a $(3;\,2;\,5)$ pontba úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?

5. Egy játékboltban 5-féle plüssállat kapható. Hányféleképpen vehetünk 12 állatkát? (Mind az 5-féle állatkából elegendő számú áll rendelkezésre.)

6. Hány olyan 10-hosszúságú kockadobás-sorozat van, amelyben
a) csak 2-es és 6-os szerepel (és mindkettő előfordul)?
b) legfeljebb három 6-os szerepel?

7. Hányféleképpen lehet egy esküvői fotóhoz sorba állítani 6 embert úgy, hogy a menyasszony és a vőlegény egymás mellett álljon?

8. Egy osztályba 15 lány és 17 fiú jár. Hányféleképp választhatunk ki közülük egy 3 lányból és 4 fiúból álló bizottságot? És ha Aladár és Bea rosszban vannak, és ezért mindkettőjüket nem választhatjuk be?

9. Hány olyan permutációja van az 1, 2, …, n számoknak, amelyben az 1, 2, 3, 4 számok ebben a sorrendben szerepelnek? (Tehát az 1 előbb van, mint a 2, a 3 és a 4; a 2 előbb van, mint a 3 és a 4; a 3 pedig előbb van, mint a 4.)

10. Van 6 különböző könyvünk matematikából, 3 fizikából, 7 informatikából és 5 biológiából. Hányféleképpen helyezhetjük el ezeket a könyvespolcon, ha az egyforma témájú könyveknek egymás mellett kell lenniük?

11. Egy budapesti, egy vidéki és egy külföldi barátunknak szeretnénk két-két képeslapot küldeni úgy, hogy egyikük se kapjon két egyforma lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a boltban, ahol vásárolunk, összesen nyolcféle képeslap kapható?

12. Hányféleképpen állhat fel n fiú és n lány egy sorba úgy, hogy se két fiú, se két lány ne álljon egymás mellett?

13. Hány olyan különböző téglalap van a síkon, amelynek minden oldala párhuzamos az x, illetve az y tengellyel, továbbá csúcsainak mindkét koordinátája 1 és n közötti egész szám?

14. Hányféleképp oszthatunk szét egy 52 lapos franciakártya-csomagot 4 játékos között úgy, hogy mindenki 13 lapot kapjon, továbbá a legidősebb játékosnak pontosan 2 ász és 5 treff jusson? (Egy csomag francia kártya négy színből (pikk, káró, treff, kőr) tartalmaz színenként 13 lapot: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, bubi, dáma, király, ász.)

15. Fényképezéshez szeretnénk két n hosszúságú sorba felállítani $2n$ különböző magasságú embert úgy, hogy az első sor egyetlen tagja se takarja azt, aki a második sorban mögötte áll (vagyis a második sor minden tagja legyen magasabb az éppen előtte állónál). Hányféleképpen lehetséges ez?

16. Egy nyolctagú társaságban mindenkit megkérdeztünk, hány embert ismer a jelenlévők közül (az ismeretség kölcsönös). A következő válaszokat kaptuk: 2, 0, 3, 4, 3, 1, 2, 2. Kis gondolkodás után rájöttünk, hogy valaki nem mondott igazat. Miért?

17. Egy 6 pontú, egyszerű, összefüggő gráfban van 1, 2, 3, 4 és 5 fokú pont is. Mennyi lehet a hatodik pont foka?

18. Tekintsük a sakktábla mezőinek középpontjait egy gráf csúcsainak. Két csúcs között pontosan akkor vezessen él, ha az egyik mezőről el lehet jutni a másikra egy szabályos lóugrással. Hány éle van az így kapott gráfnak?

19. Igaz-e, hogy minden egynél több pontú fában van legalább két elsőfokú pont?

20. Melyek azok a gráfok, amelyekben bármely két élnek van közös végpontja?

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Egy futóversenyen 20 versenyző indult. Tudjuk, hogy egyikük sem adta fel, és holtverseny sem alakult ki. Hányféle végeredménye lehetett a versenynek? Hányféleképpen alakulhatott az első három hely sorsa?

   Megoldás: $20!$, illetve $20\cdot 19\cdot 18=\frac{20!}{17!}$

2. Hányféleképpen festhetjük egy *n*-emeletes ház szintjeit pirosra, sárgára és kékre? Mi a helyzet akkor, ha a szomszédos szintek nem lehetnek azonos színűek?

   Megoldás: 3^n, illetve $3\cdot 2^{n-1}$ (például alulról felfelé, szintenként haladva)

3. Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény? Hány 5, 4 és 3 találatos kitöltés van?

   Megoldás: Összesen $\binom{90}{5}$, ebből 1 db 5 találatos, $\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}$ db 4 találatos és $\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}$ db 3 találatos.

4. Hányféleképpen lehet eljutni egy térbeli koordináta-rendszerben az origóból a $(3;\,2;\,5)$ pontba úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?

   Megoldás: $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!}$

5. Egy játékboltban 5-féle plüssállat kapható. Hányféleképpen vehetünk 12 állatkát? (Mind az 5-féle állatkából elegendő számú áll rendelkezésre.)

   Megoldás: $\binom{5+12-1}{12}=\binom{16}{12}=\binom{16}{4}=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4!}=1820$

6. Hány olyan 10-hosszúságú kockadobás-sorozat van, amelyben
   a) csak 2-es és 6-os szerepel (és mindkettő előfordul)?
   b) legfeljebb három 6-os szerepel?

   Megoldás: a) $2^{10}-2$ (a két rossz eset: csupa 2-es, illetve csupa 6-os)

   b) a 6-osok száma 0, 1, 2 vagy 3 lehet, így $5^{10}+10\cdot 5^9+\binom{10}{2}\cdot 5^8+\binom{10}{3}\cdot 5^7$

7. Hányféleképpen lehet egy esküvői fotóhoz sorba állítani 6 embert úgy, hogy a menyasszony és a vőlegény egymás mellett álljon?

   Megoldás: $2\cdot 5!$ (a menyasszonyt és a vőlegényt tekintsük egy embernek, ők 2-féle sorrendben állhatnak egymás mellett, így lényegében 5 embert kell sorba rendeznünk)

8. Egy osztályba 15 lány és 17 fiú jár. Hányféleképp választhatunk ki közülük egy 3 lányból és 4 fiúból álló bizottságot? És ha Aladár és Bea rosszban vannak, és ezért mindkettőjüket nem választhatjuk be?

Megoldás: Az első esetben $\binom{15}{3}\cdot\binom{17}{4}$, a második esetben az összes lehetőségből ki kell vonnunk a rosszakat (amikor Aladárt és Beát is beválasztottuk), így $\binom{15}{3}\cdot\binom{17}{4}-\binom{14}{2}\cdot\binom{16}{3}$.

9. Hány olyan permutációja van az 1, 2, …, n számoknak, amelyben az 1, 2, 3, 4 számok ebben a sorrendben szerepelnek? (Tehát az 1 előbb van, mint a 2, a 3 és a 4; a 2 előbb van, mint a 3 és a 4; a 3 pedig előbb van, mint a 4.)

Megoldás: $\frac{n!}{4!}$

10. Van 6 különböző könyvünk matematikából, 3 fizikából, 7 informatikából és 5 biológiából. Hányféleképpen helyezhetjük el ezeket a könyvespolcon, ha az egyforma témájú könyveknek egymás mellett kell lenniük?

Megoldás: $4!\cdot 6!\cdot 3!\cdot 7!\cdot 5!$ (a $4!$ a négy téma sorrendjét jelöli)

11. Egy budapesti, egy vidéki és egy külföldi barátunknak szeretnénk két-két képeslapot küldeni úgy, hogy egyikük se kapjon két egyforma lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a boltban, ahol vásárolunk, összesen nyolcféle képeslap kapható?

Megoldás: $\binom{8}{2}^3 = 28^3 = 21952$

12. Hányféleképpen állhat fel n fiú és n lány egy sorba úgy, hogy se két fiú, se két lány ne álljon egymás mellett?

Megoldás: $2\cdot n!\cdot n!$ (felváltva jönnek a fiúk és a lányok, a sor fiúval és lánnyal is kezdődhet)

13. Hány olyan különböző téglalap van a síkon, amelynek minden oldala párhuzamos az x, illetve az y tengellyel, továbbá csúcsainak mindkét koordinátája 1 és n közötti egész szám?

Megoldás: $\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{2}=\frac{n^2\cdot(n-1)^2}{2^2}$ (az x és az y tengelyen is 2-2 koordinátát kell kiválasztanunk n-ből)

14. Hányféleképp oszthatunk szét egy 52 lapos franciakártya-csomagot 4 játékos között úgy, hogy mindenki 13 lapot kapjon, továbbá a legidősebb játékosnak pontosan 2 ász és 5 treff jusson? (Egy csomag francia kártya négy színből (pikk, káró, treff, kőr) tartalmaz színenként 13 lapot: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, bubi, dáma, király, ász.)

Megoldás: $3\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{36}{7}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13} + \binom{3}{2}\cdot\binom{12}{5}\cdot\binom{36}{6}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}$. Két esetre bonthatjuk aszerint, hogy a legidősebb játékoshoz kerül-e a treff ász, vagy sem. Először a legidősebb játékosnak adunk ászokat, majd treffeket, illetve további lapokat, végül a második és a harmadik játékosnak 13-13 lapot, a maradék a negyedik játékosé.

15. Fényképezéshez szeretnénk két n hosszúságú sorba felállítani $2n$ különböző magasságú embert úgy, hogy az első sor egyetlen tagja se takarja azt, aki a második sorban mögötte áll (vagyis a második sor minden tagja legyen magasabb az éppen előtte állónál). Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás: $\frac{(2n)!}{2^n}$. Először tetszőlegesen felállítjuk a $2n$ embert a $2n$ helyre, majd az egymás mögött állókat megcseréljük, ha szükséges. Az egymás mögötti emberek cseréiből 2^n elrendezés adódik, amelyek közül pontosan egy felel meg a követelményeknek.

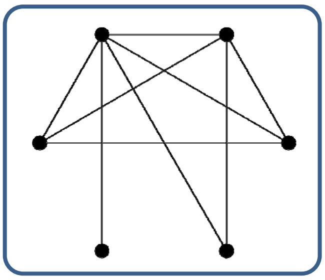
Ugyanez más alakban: $\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\binom{2n-4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$. Először kiválasztunk 2 embert a $2n$-ből, majd a megfelelő sorrendben egymás mögé állítjuk őket. Ezután a maradék $2n-2$ emberből választunk 2-t, és így tovább, „oszloponként" töltjük fel a sorokat.

16. Egy nyolctagú társaságban mindenkit megkérdeztünk, hány embert ismer a jelenlévők közül (az ismeretség kölcsönös). A következő válaszokat kaptuk: 2, 0, 3, 4, 3, 1, 2, 2. Kis gondolkodás után rájöttünk, hogy valaki nem mondott igazat. Miért?

Megoldás: Az ismeretségi gráfban a fokszámok összege páratlan (17) lenne, ami nem lehetséges.

17. Egy 6 pontú, egyszerű, összefüggő gráfban van 1, 2, 3, 4 és 5 fokú pont is. Mennyi lehet a hatodik pont foka?

Megoldás: A hatodik pont foka 3 (a fokszámösszeg miatt a keresett fokszám páratlan, 1 és 5 nem lehet). A 3 tényleg meg is valósulhat, erre példa a következő gráf:



18. Tekintsük a sakktábla mezőinek középpontjait egy gráf csúcsainak. Két csúcs között pontosan akkor vezessen él, ha az egyik mezőről el lehet jutni a másikra egy szabályos lóugrással. Hány éle van az így kapott gráfnak?

Megoldás: Írjuk rá a sakktábla minden mezőjére, hogy hány helyre ugorhatunk onnan:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

A beírt számok éppen az egyes csúcsok fokszámai a gráfban. Az élek száma a fokszámösszeg fele, vagyis $\frac{4\cdot 2+8\cdot 3+20\cdot 4+16\cdot 6+16\cdot 8}{2}=168$.

19. Igaz-e, hogy minden egynél több pontú fában van legalább két elsőfokú pont?

Megoldás: Igaz, vegyük például a leghosszabb utat (vagy ha több ilyen is van, akkor az egyiket közülük). Ennek két végpontja biztos elsőfokú, hiszen a végpontokból az úton szereplő belső pontokba nem mehet további él (ekkor kör lenne a fában), és az úton nem szereplő pontokba sem mehet él (ekkor egy még hosszabb utat kapnánk).

20. Melyek azok a gráfok, amelyekben bármely két élnek van közös végpontja?

Megoldás: Ilyen a 3 pontú kör, illetve azok az n pontú fák ($n \in \mathbb{Z}^+$), amelyekben egy rögzített pont van összekötve az összes többivel (az ilyen gráfokat csillagnak nevezik).

IV. Ellenőrző feladatok

1. Egy 20 tagú klub elnököt, titkárt, jegyzőt és pénztárost választ. (Egy ember nem kaphat egyszerre több tisztséget.) A népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni. Hányféleképpen alakulhat ki a vezetőség?

2. Hány négyszöget határoznak meg egy szabályos 15-szög csúcsai?

3. Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amelyben bármely két szomszédos számjegy szorzata prímszám?

4. Hányféle anagramma (a betűk sorrendjének megváltoztatásával keletkező, nem feltétlenül értelmes szó) készíthető a MATEMATIKA szó betűiből?

5. Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 100 közötti pozitív egész számok közül három különbözőt úgy, hogy az összegük osztható legyen 3-mal?

6. Adott egy síkban 10 egyenes, amelyek közül 5 párhuzamos. Legfeljebb hány metszéspontjuk lehet?

7. Egy italautomatában öt oszlop mindegyikében 8-8 (oszloponként egyforma) üveg van egymásra helyezve. Egy oszlopból mindig csak a legalsó elemet lehet kivenni. Hányféleképpen lehet kiüríteni az automatát?

8. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka
a) 1, 1, 2, 3, 4?
b) 1, 1, 2, 3, 5?
c) 3, 3, 3, 3, 4?

9. Egy fának 8 pontja van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám? Keressük meg az összes megoldást, rajzoljuk le a kapott fákat!

10. Egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n. Igazoljuk, hogy a gráf összefüggő!

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Egy 20 tagú klub elnököt, titkárt, jegyzőt és pénztárost választ. (Egy ember nem kaphat egyszerre több tisztséget.) A népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni. Hányféleképpen alakulhat ki a vezetőség?

Megoldás: Kovács úr 4-féle tisztséghez juthat, ezt követően a maradék három tisztségre a többi 19 tag közül választhatunk, ez összesen $4\cdot 19\cdot 18\cdot 17=23256$ lehetőség.

Másképpen: Ha Kovács úrra nem figyelünk, összesen $20\cdot 19\cdot 18\cdot 17$-féle kimenetele lehet a választásnak. Ezek közül $19\cdot 18\cdot 17\cdot 16$ olyan lehetőség van, amikor Kovács úr nem jut tisztséghez. A jó esetek száma így $20\cdot 19\cdot 18\cdot 17-19\cdot 18\cdot 17\cdot 16=(20-16)\cdot 19\cdot 18\cdot 17=23256$.

2. Hány négyszöget határoznak meg egy szabályos 15-szög csúcsai?

Megoldás: A 15 csúcsból bármely 4-et kiválaszthatjuk, ezek egyértelműen meghatároznak egy négyszöget (a kiválasztás sorrendje nem számít). Így a lehetőségek száma $\binom{15}{4}$.

3. Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amelyben bármely két szomszédos számjegy szorzata prímszám?

Megoldás: Minden második számjegynek 1-esnek kell lennie, a köztes számjegyek pedig a 2, 3, 5, 7 közül kerülhetnek ki tetszőlegesen. Ha 1-essel kezdődik a telefonszám, akkor $1\cdot 4\cdot 1\cdot 4\cdot 1\cdot 4\cdot 1=4^3$ jó megoldást kapunk, ha pedig nem 1-essel kezdődik a telefonszám, akkor $4\cdot 1\cdot 4\cdot 1\cdot 4\cdot 1\cdot 4=4^4$ jó megoldást kapunk. Így összesen 4^3+4^4 ilyen telefonszám van.

4. Hányféle anagramma (a betűk sorrendjének megváltoztatásával keletkező, nem feltétlenül értelmes szó) készíthető a MATEMATIKA szó betűiből?

Megoldás: A MATEMATIKA szó 10 betűs, ebből 2 db M, 3 db A és 2 db T betű egyforma. Így a lehetséges sorrendek száma $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$.

5. Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 100 közötti pozitív egész számok közül három különbözőt úgy, hogy az összegük osztható legyen 3-mal?

Megoldás: Az első 100 pozitív egész közül 33 db osztható 3-mal, 34 ad 3-mal osztva 1 maradékot, és 33 ad 3-mal osztva 2 maradékot. Három különböző szám összege akkor lesz 3-mal osztható, ha vagy mindhárom ugyanannyi maradékot (0-t, 1-et vagy 2-t) ad, vagy mindhárom különböző maradékot ad 3-mal osztva. A lehetőségek száma így $\binom{33}{3}+\binom{34}{3}+\binom{33}{3}+33\cdot 34\cdot 33$.

6. Adott egy síkban 10 egyenes, amelyek közül 5 párhuzamos. Legfeljebb hány metszéspontjuk lehet?

Megoldás: A lehető legtöbb metszéspontot akkor kapjuk, ha semelyik három egyenes nem metszi egymást egy pontban. Ekkor a 10 egyenes összesen $\binom{10}{2}=45$ metszéspontot határozna meg. Viszont a párhuzamos egyenesek nem metszik egymást, tehát ebből le kell vonnunk $\binom{5}{2} = 10$ metszéspontot. Vagyis legfeljebb 35 metszéspont lehet, ha az 5 párhuzamos egyenesen kívül nincsenek további párhuzamosak, továbbá minden metszésponton csak két egyenes halad át a 10-ből.

Másképpen: Vegyük fel először az 5 párhuzamos egyenest, ezeknek nincsen metszéspontjuk. Utána egyesével húzzuk be a maradék 5 egyenest, figyelve rá, hogy a lehető legtöbb metszéspont keletkezzen. Az első behúzott egyenes 5 metszéspontot hoz létre, a második legfeljebb 6-ot (ha mind a 6 meglévő egyenest metszi), a harmadik legfeljebb 7-et, a negyedik legfeljebb 8-at, az ötödik legfeljebb 9-et. Ez összesen legfeljebb $5+6+7+8+9=35$ metszéspont.

7. Egy italautomatában öt oszlop mindegyikében 8-8 (oszloponként egyforma) üveg van egymásra helyezve. Egy oszlopból mindig csak a legalsó elemet lehet kivenni. Hányféleképpen lehet kiüríteni az automatát?

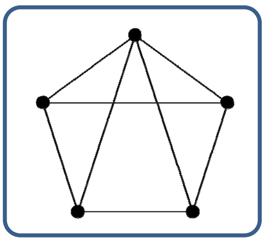
Megoldás: Legyen az öt oszlop A, B, C, D és E, ekkor a lehetséges kiürítések megfeleltethetők egy-egy olyan 40-hosszú betűsorozatnak, amelyben 8-8 db A, B, C, D és E betű szerepel. Ilyen sorozatból összesen $\frac{40!}{(8!)^5}$ (vagy más alakban $\binom{40}{8}\cdot\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}$) különböző létezik, ennyiféle módon üríthető ki tehát az automata.

8. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka
a) 1, 1, 2, 3, 4?
b) 1, 1, 2, 3, 5?
c) 3, 3, 3, 3, 4?

Megoldás: Az **a)** esetben nem létezik ilyen gráf, mivel a fokszámösszeg páratlan.

A **b)** esetben sincs ilyen gráf, mivel egy 5 pontú egyszerű gráfban minden fokszám legfeljebb 4 lehet, 5 semmiképpen (ez csak párhuzamos élekkel vagy hurokéllel lenne megvalósítható).

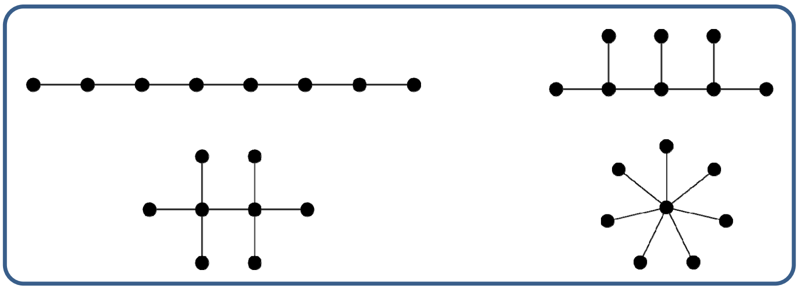
A **c)** esetben létezik ilyen gráf, amely a következő ábrán látható.



9. Egy fának 8 pontja van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám? Keressük meg az összes megoldást, rajzoljuk le a kapott fákat!

Megoldás: Az egyik fokszám biztosan 1, hiszen minden fában van elsőfokú pont. A fának 7 éle van, tehát a fokszámok összege 14. Ha minden csúcs elsőfokú lenne, akkor a fokszámösszeg 8 lenne (ez persze nem lenne fa), így még 6-tal kell növelni a fokszámösszeget. Ezt négyféleképpen tehetjük meg ($6\cdot 1$, $3\cdot 2$, $2\cdot 3$ vagy $1\cdot 6$), a lehetséges fokszámok: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2 vagy 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3 vagy 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4 vagy 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 7. Tehát a két fokszám 1 és 2; 1 és 3; 1 és 4; illetve 1 és 7 lehet.

A kapott fák:



10. Egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n. Igazoljuk, hogy a gráf összefüggő!

Megoldás: Legyen u és v a gráf két tetszőleges pontja, meg kell mutatnunk, hogy vezet közöttük út. Ha u és v szomszédosak, készen vagyunk. Ha nem, akkor kihasználjuk, hogy a feltételek miatt u is, v is legalább n ponttal szomszédos, így szükségképpen van legalább egy közös szomszédjuk, legyen w egy ilyen. Ekkor az $u - w - v$ út megfelelő.

Másképpen: Ha a gráf nem lenne összefüggő, akkor legalább két komponense lenne. Mivel minden pont foka legalább n, ezért egy komponensen belül legalább $n+1$ pontnak kell lennie (hiszen minden pontnak legalább n szomszédja van). Viszont ekkor a két komponensben már legalább $2n+2$ pont lenne, ami ellentmondás. Tehát szükségképpen a gráf összefüggő.