

24. Valószínűség-számítás

I. Elméleti összefoglaló

Események, eseménytér

A valószínűség-számítás a véletlen tömegjelenségek vizsgálatával foglalkozik.

- Azokat a jelenségeket, amelyeket a figyelembe vett vagy figyelembe vehető okok nem határoznak meg egyértelműen, **véletlen jelenségeknek** nevezzük.
- Ha valamely véletlen jelenség a figyelembe vett („azonos”) körülmények között nagy számban megismétlődik vagy megismételhető, akkor azt **véletlen tömegjelenségnek** nevezzük.
- Egy véletlen jelenség megfigyelését **kísérletnek** nevezzük.
- Miután megadtuk, hogy mit tekintünk egy kísérlet **kimenetelének**, vizsgálhatjuk a kimenetek halmazát.

Legyen H egy nemüres halmaz, melyet **eseménytérnek** nevezünk.

- Az eseménytér részhalmazait **eseményeknek** nevezzük.
- Az eseménytér egyelemű részhalmazai az **elemi események**, a többeleműek pedig az **összetett események**.
- Az $\emptyset \subseteq H$ (üres halmaz) a **lehetetlen esemény**.
- Az $H \subseteq H$ (az eseménytér) a **biztos esemény**.
- Egy **esemény bekövetkezik**, ha a kísérlet kimenetele az adott eseménynek megfelelő részhalmazba tartozó elemi esemény.
- A lehetetlen esemény sohasem következhet be, a biztos esemény pedig mindig bekövetkezik.
- **Két esemény egyenlő**, ha a kísérlet bármely lehetséges kimenetele esetén vagy mindkét esemény bekövetkezik, vagy egyik sem.
- Az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha A minden egyes bekövetkezésénél B is bekövetkezik. ($A \subseteq B$)

Műveletek eseményekkel, eseményalgebra

- Adott A és B események **összegén** azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik. Jele: $A + B$.
- Az A és B események **szorzatán** azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha mind az A , mind a B bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$.
- Azt az eseményt, amely pontosan akkor következik be, ha az A esemény nem következik be, az A esemény **ellentett eseményének** (vagy **komplementer eseményének**) nevezzük. Jele: $\bar{A}$.

A műveletek tulajdonságai:	Összeadás	Szorzás
Kommutatív tulajdonság	$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Asszociatív tulajdonság	$A + (B + C) = (A + B) + C$	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
Elnyelési tulajdonság	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
Lehetetlen esemény azonosságai	$A + \emptyset = A$	$A \cdot \emptyset = \emptyset$
Biztos esemény azonosságai	$A + H = H$	$A \cdot H = A$
Komplementer esemény azonosságai	$A + \bar{A} = H$	$A \cdot \bar{A} = \emptyset$
Disztributív tulajdonság	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	
de Morgan-azonosságok	$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

- A H eseménytérén értelmezhető események halmazát a rajtuk értelmezett összeadás, szorzás és komplementer-képzés műveletekkel együtt **eseményalgebrának** nevezzük.
- Az A és B **események különbségén** ($A - B$ eseményen) azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem. ($A - B = A \cdot \bar{B}$)
- Az A és B **kizáró események**, ha egyszerre nem következhetnek be. ($A \cdot B = \emptyset$)
- A H eseménytér $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ($n > 1, n \in \mathbb{N}$) eseményeit **teljes eseményrendszernek** nevezzük, ha páronként kizáróak ($A_i \cdot A_j = \emptyset$ minden $i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) és összegük az eseménytér ($A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = H$).

Esemény gyakorisága, relatív gyakoriság, valószínűség

- Ha n kísérletből az A esemény k -szor következett be, akkor k -t az A esemény **gyakoriságának**, a $\frac{k}{n}$ hányadost pedig az A esemény **relatív gyakoriságának** nevezzük.
- A valószínűség fogalma a Kolmogorov-féle axiómák alapján:
 - A **valószínűség axiómái**: Legyen H egy eseménytér. Megadható az eseménytér részhalmazain értelmezett olyan P függvény, amelyre teljesülnek a következők:
 - I. Bármely A eseményre $P(A) \geq 0$.
 - II. $P(H) = 1$.
 - III. Ha A és B kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
 - A valószínűség axiómáit teljesítő P függvényt **valószínűségnek** nevezzük.
- Az n kísérletből álló kísérletsorozatot nagyon sokszor megismételve, tapasztalat szerint az A esemény relatív gyakorisága egy bizonyos szám körül ingadozik. Az ingadozás mértéke n növelésével általában egyre kisebbé válik. Az a szám, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik az A esemény fentebb definiált $P(A)$ valószínűsége.
- Tetszőleges A eseményre teljesül, hogy $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- A H eseménytér tetszőleges A, B, C eseményeire teljesül, hogy:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \text{ illetve}$$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$
- A H eseménytér tetszőleges A és B eseményeire teljesül: $P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B)$.

Klasszikus valószínűségi mező

- Ha a H eseménytér nemüres, véges, és elemi eseményeinek bekövetkezése egyenlő valószínűségű, akkor az eseményteret az eseményeivel és a köztük értelmezett műveletekkel (összeadás, szorzás, kivonás, komplementer), **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük.
- Ha H egy klasszikus valószínűségi mező eseménytere és A egy tetszőleges esemény, valamint $|H| = n$ és $|A| = k$, akkor $P(A) = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi események száma}} = \frac{|A|}{|H|} = \frac{k}{n}$.
- A klasszikus valószínűségi mező eseményei véges halmazok. Az események valószínűségeinek meghatározásához véges halmazok számosságait kell meghatározni, amelyre a kombinatorika eszközei alkalmasak.

Geometriai valószínűség

- Ha egy kísérlettel kapcsolatos események egy H geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetők meg úgy, hogy egy A esemény valószínűsége az eseményhez rendelt részhalmaz $\mu(A)$ geometriai mértékével arányos (μ : hossz, terület, térfogat), akkor **geometriai valószínűségről** beszélünk.

- Geometriai valószínűségi mezőben egy A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{\text{az } A \text{ eseménynek megfelelő részhalmaz mértéke}}{\text{a kísérlettel kapcsolatos teljes alakzat mértéke}}.$$

Feltételes valószínűség, események függetlensége

- Legyen B olyan eseménye a H eseménytérnek, melyre $P(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B feltétel melletti $P(A|B)$ **feltételes valószínűsége** az A esemény bekövetkezésének valószínűségét jelenti, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezett. $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.
- Az A és B eseményeket **független eseményeknek** nevezzük, ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Ha A és B független események, akkor $P(A|B) = P(A)$.
- **(valószínűségek szorzási szabálya)** Ha $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) nem nulla valószínűségű események a H eseménytérén, akkor

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}).$$

- **(teljes valószínűség tétele)** Ha $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ olyan teljes eseményrendszer a H eseménytérén, melynek egyetlen eseménye sem nulla valószínűségű, és A egy tetszőleges esemény, akkor

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

- **(Bayes-tétel)** Ha $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ olyan teljes eseményrendszer a H eseménytérén, melynek egyetlen eseménye sem nulla valószínűségű, és A egy tetszőleges esemény, akkor

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Valószínűségi változók, eloszlás, várható érték, várható abszolút eltérés, szórás

- **Valószínűségi változónak** nevezünk egy eseménytérén értelmezett, a valós számok halmazába képező függvényt.
- Ha egy valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor **diszkrét valószínűségi változónak** nevezzük.
- Ha egy X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, x_3, \dots$, és ezeket az értékeket X rendre $p_1, p_2, p_3, \dots$ valószínűségekkel veszi fel, akkor a $p_1, p_2, p_3, \dots$ számokat az X **eloszlásának** nevezzük.
- Legyenek az X valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, és ezeket az értékeket X rendre $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ valószínűségekkel vegye fel.

- Az X valószínűségi változó **várható értéke**:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i;$$

- Az X valószínűségi változó **várható abszolút eltérése** az $|X - M(X)|$ valószínűségi változó várható értéke:

$$\sum_{i=1}^n |x_i - M(X)| p_i;$$

- Ha az X valószínűségi változó várható értéke $M(X)$, akkor az $(X - M(X))^2$ valószínűségi változó várható értékét (ha az létezik) az X **szórásnégyzetének** nevezzük:

$$D^2(X) = M[(X - M(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i;$$

- Az X szórása pedig a szórásnégyzet négyzetgyöke: $D(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{M[(X - M(X))^2]}$.
- Ha az X valószínűségi változó várható értéke $M(X)$, szórása $D(X)$, akkor:

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Visszatevéses mintavétel: binomiális eloszlás

- Ha az X valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, ahol n pozitív egész, és eloszlása: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, ahol $0 \leq p \leq 1$ és $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, akkor X -et **binomiális eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük. (Az n és p az X valószínűségi változó **paraméterei**.)
- Az n és p paraméterű binomiális eloszlású X valószínűségi változó várható értéke és szórása: $M(X) = np$, illetve $D(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.
- A **visszatevéses mintavétel** során a sokaság elemeit egyenként emeljük ki, majd a vizsgálati eredmény rögzítése után visszatesszük a kiválasztott elemet. A következő mintaelemet csak ezután választjuk ki.
 A visszatevéses mintavétel feltételei teljesülnek abban az esetben is, ha egy kísérletet egymástól függetlenül többször megismételve csak azt vizsgáljuk, hogy egy adott esemény bekövetkezett-e vagy nem.
 Tegyük fel, hogy egy kísérlet során az A esemény p valószínűséggel következik be. Ismételjük meg n -szer egymástól függetlenül a kísérletet! Jelentse az X valószínűségi változó értéke azt, hogy hányszor következett be az n elemű kísérletsorozatban az A esemény. Bizonyítható, hogy ekkor az X valószínűségi változó binomiális eloszlású.

Visszatevés nélküli mintavétel: hipergeometrikus eloszlás

- Ha az X valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, ahol n pozitív egész, és eloszlása: $P(X = k) = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, ahol $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, N és s olyan pozitív egészek, melyekre $n \leq s$, $n \leq N - s$, akkor X -et **hipergeometrikus eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük. (Az n , s és N az X valószínűségi változó paraméterei.)
- Az N , s és n paraméterű hipergeometrikus eloszlású X valószínűségi változó várható értéke és szórása: $M(X) = \frac{sn}{N}$, illetve $D(X) = \sqrt{\frac{ns}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}$.
- A **visszatevés nélküli mintavétel** során vagy egyszerre emeljük ki a minta elemeit a sokaságból, vagy egyenként, de ekkor nem tesszük vissza a már kiválasztott elemeket.
 Tegyük fel, hogy az N elemű sokaságban s számú elem rendelkezik egy adott T tulajdonsággal. Ezután válasszunk ki véletlenszerűen n darab elemet visszatevés nélkül! ($n \leq s$, és $n \leq N - s$.) Legyen az X valószínűségi változó értéke az n -elemű mintában kiválasztott T tulajdonságú elemek száma. Bizonyítható, hogy ekkor az X valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású.

Megjegyzés:

Ha egy n , s , N paraméterű hipergeometrikus eloszlású X valószínűségi változó esetében az n értéke sokkal kisebb, mint az s és az N értéke, akkor eloszlása elhanyagolható mértékben különbözik egy n és $p = \frac{s}{N}$ paraméterű binomiális eloszlású Y valószínűségi változó eloszlásától. Ebben az esetben a hipergeometrikus eloszlás helyett számolhatunk az egyszerűbb binomiális eloszlással.

II. Kidolgozott feladatok

1. Egy csomag magyar kártyából véletlenszerűen kihúzzunk egy lapot. Tekintsük a következő eseményeket:

$A = \{\text{a kihúzott lap piros}\},$

$B = \{\text{a kihúzott lap figura}\},$

$C = \{\text{a kihúzott lap király}\},$

$D = \{\text{a kihúzott lap makk}\}.$

Mit jelentenek a következő események?

a) $A + B$

b) $A \cdot B$

c) $B + C + D$

d) $A \cdot B \cdot C$

e) $(B + D) \cdot C$

f) $(B \cdot D) + C$

g) $A - (B - C)$

h) $\overline{A} \cdot B$

i) $A \cdot D$

j) $\overline{A} \cdot \overline{D}$

k) $\overline{A} + \overline{D}$

Adja meg a következő eseményeket az A, B, C, D eseményekkel végzett műveletek segítségével!
A kihúzott lap:

l) $\{\text{piros király}\}$

m) $\{\text{piros figura vagy makk király}\}$

n) $\{\text{zöld király vagy tők király}\}$

a) $A + B$

Megoldás:

Az A és B események közül legalább az egyiknek be kell következnie, ezért a kihúzott lap piros vagy figura.

Tehát $A + B = \{\text{a kihúzott lap piros vagy figura}\}.$

b) $A \cdot B$

Megoldás:

Az A és B esemény mindegyikének be kell következnie, tehát a kihúzott lapnak pirosnak és figurának is kell lennie, tehát $A \cdot B = \{\text{a kihúzott lap piros figura}\}.$

c) $B + C + D$

Megoldás:

$B + C + D = (B + C) + D$, mert az események összeadása asszociatív.

Mivel minden király figurás lap, a C esemény maga után vonja a B eseményt, vagyis $C \subseteq B$, ezért $B + C = B$.

$(B + C) + D = B + D = \{\text{a kihúzott lap makk vagy figura}\}.$

d) $A \cdot B \cdot C$

Megoldás:

$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, mert az események szorzása asszociatív.

Mivel $C \subseteq B$, ezért $B \cdot C = C$, így

$A \cdot (B \cdot C) = A \cdot C$, vagyis A és C egyszerre kell, hogy bekövetkezzen, azaz a kihúzott lap piros is és király is.

Tehát $A \cdot B \cdot C = \{\text{a kihúzott lap piros király}\}.$

e) $(B + D) \cdot C$

Megoldás:

$(B + D) \cdot C = (B \cdot C) + (D \cdot C)$ a disztributivitás miatt.

Tudjuk, hogy $C \subseteq B$, ezért $B \cdot C = C$.

Ezt felhasználva: $(B \cdot C) + (D \cdot C) = C + (D \cdot C)$.

Azonban $D \cdot C \subseteq C$, ezért $C + (D \cdot C) = C$.

Tehát $(B + D) \cdot C = C = \{\text{a kihúzott lap király}\}$.

f) $(B \cdot D) + C$

Megoldás:

$B \cdot D$ esemény pontosan akkor következik be, ha B is és D is bekövetkezik, ezért

$B \cdot D = \{\text{a kihúzott lap makk figura}\}$.

$(B \cdot D) + C$ esemény pontosan akkor következik be, ha a $(B \cdot D)$ és a C események közül legalább az egyik bekövetkezik, ezért

$(B \cdot D) + C = \{\text{a kihúzott lap makk figura vagy tetszőleges színű király}\}$.

g) $A - (B - C)$

Megoldás:

$B - C$ esemény pontosan akkor következik be, ha B bekövetkezik, de C nem, tehát

$B - C = \{\text{a kihúzott lap figura, de nem király}\}$

$A - (B - C)$ esemény pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de $(B - C)$ nem, azaz

$A - (B - C) = \{\text{a kihúzott lap piros nem figura, vagy piros király}\}$.

Megjegyzés:

Az események különbsége nem asszociatív.

h) $\overline{A} \cdot B$

Megoldás:

$\overline{A}$ esemény pontosan akkor következik be, ha A nem, tehát

$\overline{A} = \{\text{a kihúzott lap nem piros}\}$.

$\overline{A} \cdot B$ esemény pontosan akkor következik be, ha $\overline{A}$ és B egyszerre bekövetkezik, tehát

$\overline{A} \cdot B = \{\text{a kihúzott lap figura, de nem piros}\}$.

Megjegyzés:

$\overline{A} \cdot B = B - A$ felhasználásával is adódik ugyanez az eredmény.

i) $A \cdot D$

Megoldás:

$A \cdot D$ esemény pontosan akkor következik be, ha A és D egyszerre bekövetkezik, tehát a kihúzott lap piros is és makk is egyszerre, ami lehetetlen esemény, tehát

$A \cdot D = \emptyset$.

j) $\bar{A} \cdot \bar{D}$

Megoldás:

$\bar{A} = \{\text{a kihúzott lap nem piros}\}$

$\bar{D} = \{\text{a kihúzott lap nem makk}\}$

$\bar{A} \cdot \bar{D}$ esemény pontosan akkor következik be, ha $\bar{A}$ és $\bar{D}$ egyszerre bekövetkezik, tehát a kihúzott lap nem piros és nem makk, azaz

$\bar{A} \cdot \bar{D} = \{\text{a kihúzott lap zöld vagy tők}\}.$

Megjegyzés:

$\overline{\bar{A} \cdot \bar{D}} = \overline{\bar{A} + \bar{D}}$ alakra hozható a de Morgan-azonosságok miatt, így a keresett esemény az $A + D$ ellentett eseménye.

$A + D = \{\text{a kihúzott lap piros vagy makk}\}$

$\overline{A + D} = \{\text{a kihúzott lap zöld vagy tők}\}.$

k) $\bar{A} + \bar{D}$

I. Megoldás:

$\bar{A} = \{\text{a kihúzott lap nem piros}\}$

$\bar{D} = \{\text{a kihúzott lap nem makk}\}$

$\bar{A} + \bar{D}$ esemény pontosan akkor következik be, ha $\bar{A}$ vagy $\bar{D}$ közül legalább az egyik bekövetkezik, ami a biztos esemény.

Tehát $\bar{A} + \bar{D} = \{\text{a kihúzott lap bármelyik lap lehet}\},$

II. Megoldás:

A de Morgan-azonosságok felhasználásával:

$\bar{A} + \bar{D} = \overline{A \cdot D}$, ami az $A \cdot D$ esemény ellentett eseménye. Viszont egy korábbi feladat megoldása szerint $A \cdot D = \emptyset$, tehát

$\overline{A \cdot D} = \bar{\emptyset} = H$, ami a biztos esemény.

Tehát $\bar{A} + \bar{D} = \{\text{a kihúzott lap bármelyik lap lehet}\},$ vagyis biztos esemény.

l) $\{\text{piros király}\}$

Megoldás:

$\{\text{piros}\} = A$

$\{\text{király}\} = C$

Piros királyt akkor húzunk, ha A és C egyszerre bekövetkezik, ezért

$\{\text{piros király}\} = A \cdot C.$

m) $\{\text{piros figura vagy makk király}\}$

Megoldás:

$\{\text{piros figura}\} = A \cdot B$

$\{\text{makk király}\} = D \cdot C$

$\{\text{piros figura vagy makk király}\} = (A \cdot B) + (D \cdot C).$

n) {zöld király vagy tők király}

Megoldás:

A kihúzott lapnak királynak kell lennie, a színe pedig zöld, vagy tők. Egy lap tők, vagy zöld, ha nem piros és nem makk.

$$\{\text{zöld vagy tők}\} = \overline{A} \cdot \overline{D}$$

A zöld vagy tők lapok közül kell kiválasztani a királyokat, tehát az $\overline{A} \cdot \overline{D}$ és a C eseményeknek egyszerre kell bekövetkezniük.

$$\{\text{zöld király vagy tők király}\} = (\overline{A} \cdot \overline{D}) \cdot C.$$

Megjegyzés:

A végeredmény a de Morgan-azonosságokkal $(\overline{A} \cdot \overline{D}) \cdot C = \overline{(A + D)} \cdot C$ alakban is megadható.

2. Két dobókockával dobunk egyszerre. Az egyik piros, a másik sárga színű. Jelentse az A eseményt, hogy a két dobott szám összege prím, a B esemény pedig azt, hogy legalább az egyik kockával hatost dobtunk. Adja meg a következő események valószínűségét!

- a) A b) B c) $A \cdot B$ d) $A + B$

Mennyi a két kockával dobott számok összegének várható értéke, várható abszolút eltérése és szórása?

Megoldás:

Számít, hogy egy adott számot melyik kockával dobtuk. Ezért az eseményteret mindazon rendezett számpárok alkotják, amelyekben az első helyen a piros, a másodikon a sárga kockával dobott szám áll. Az eseménytér számossága: $|H| = 6 \cdot 6 = 36$.

Mivel bármelyik számpárt (elemi esemény) egyenlő valószínűséggel dobhatjuk, klasszikus valószínűségi mezőt kaptunk. Foglaltuk táblázatba a dobások során kapott összegeket!

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A legkisebb összeg 2, a legnagyobb 12, és köztük minden egész szám szerepel. Így a lehetséges prímelek: 2, 3, 5, 7, 11.

A táblázatban az A eseményhez tartozó prímelek kékkel lettek jelölve. $|A| = 15$.

A B eseményhez tartozó összegek zölddel lettek keretezve. $|B| = 11$.

Leolvasható a táblázatból, hogy $|A \cdot B| = 4$ és $|A + B| = 22$.

A keresett valószínűségek:

$$\text{a) } P(A) = \frac{|A|}{|H|} = \frac{15}{36},$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{|B|}{|H|} = \frac{11}{36},$$

$$\text{c) } P(A \cdot B) = \frac{|A \cdot B|}{|H|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

$$\text{d) } P(A + B) = \frac{|A + B|}{|H|} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}.$$

Megjegyzés:

Az $A + B$ esemény valószínűsége az a), b), c), pontokban kiszámolt valószínűségeket felhasználva a „szita-formulával” is meghatározható:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{15}{36} + \frac{11}{36} - \frac{1}{9} = \frac{26}{36} - \frac{1}{9} = \frac{13 - 2}{18} = \frac{11}{18}.$$

A két kockával dobott összeg várható értékének meghatározásához meg kell adnunk az egyes összegek dobásának valószínűségeit. A gyakoriságok a fenti táblázatból leolvashatók, így a valószínűségek:

összeg (x_i):	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
gyakoriság (k_i):	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
valószínűség (p_i):	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ezeket felhasználva az összeg M várható értéke:

$$\begin{aligned}
 M &= \sum_{i=1}^{11} x_i p_i = \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \\
 &= \frac{2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12}{36} = \frac{252}{36} = 7.
 \end{aligned}$$

A dobott számok összegének várható abszolút eltérése:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{11} |x_i - M| = \\
 &= |2 - 7| \cdot \frac{1}{36} + |3 - 7| \cdot \frac{2}{36} + |4 - 7| \cdot \frac{3}{36} + |5 - 7| \cdot \frac{4}{36} + |6 - 7| \cdot \frac{5}{36} + |7 - 7| \cdot \frac{6}{36} + \\
 &\quad + |8 - 7| \cdot \frac{5}{36} + |9 - 7| \cdot \frac{4}{36} + |10 - 7| \cdot \frac{3}{36} + |11 - 7| \cdot \frac{2}{36} + |12 - 7| \cdot \frac{1}{36} = \\
 &= \frac{5 + 8 + 9 + 8 + 5 + 0 + 5 + 8 + 9 + 8 + 5}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}.
 \end{aligned}$$

A dobott számok összegének szórása:

$$D = \sqrt{\sum_{i=1}^{11} (x_i - M)^2 p_i}.$$

A fenti táblázatból behelyettesítve az x_i és p_i értékeket, valamint a kiszámolt M várható értéket:

$$\begin{aligned}
 D^2 &= (2 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4 - 7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (5 - 7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (6 - 7)^2 \cdot \frac{5}{36} + \\
 &\quad + (7 - 7)^2 \cdot \frac{6}{36} + (8 - 7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9 - 7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (10 - 7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (11 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + \\
 &\quad + (12 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{25 + 32 + 27 + 16 + 5 + 0 + 5 + 16 + 27 + 32 + 25}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}.
 \end{aligned}$$

Ebből a szórás: $D = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,42$.

3. Egy nemzetközi úszóverseny döntőjébe bejutott 8 versenyző közül 3 magyar. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- a) a döntőt a három magyar úszó nyeri;
- b) a magyar úszók közvetlenül egymás után érnek célba;
- c) nincs két közvetlenül egymás után célba érő magyar úszó;
- d) legalább két magyar úszó egymás után ér célba?

A döntőben nem született holtverseny semelyik két úszó között sem, és minden helyezés számít. A kért valószínűségeket 4 tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

Tegyük fel, hogy az úszók bármelyik sorrendje egyenlő valószínűségű a döntőben. Az egyes sorrendek az elemi események, ezért klasszikus valószínűségi mezőt kaptunk. Az összes lehetséges sorrend száma, az eseménytér számossága: $|H| = 8!$.

- a) Legyen az A esemény az, hogy a döntőt a három magyar úszó nyeri. A 3 magyar úszó a dobogón $3!$ sorrendben állhat. Mindegyik dobogós sorrend mögött a többi versenyző $5!$ sorrendben végezhet. Ezért a kedvező esetek száma: $|A| = 3! \cdot 5!$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|H|} = \frac{3! \cdot 5!}{8!} = \frac{6 \cdot 5!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{1}{8 \cdot 7} = \frac{1}{56} \approx 0,0179.$$

- b) Legyen a B esemény az, hogy a magyar úszók közvetlenül egymás után érnek célba. Tekintsük egyetlen elemnek a 3 magyar úszót! Így 6 különböző elem összes ismétlés nélküli permutációinak számát kell megadnunk, ami $6!$. Viszont e sorrendek mindegyikében a magyar versenyzők $3! = 6$ -féle sorrendben érhetnek célba. Ezért a kedvező esetek száma: $|B| = 6! \cdot 3!$.

A keresett valószínűség:

$$P(B) = \frac{|B|}{|H|} = \frac{6! \cdot 3!}{8!} = \frac{6! \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{3}{4 \cdot 7} = \frac{3}{28} \approx 0,1071.$$

- c) Legyen a C esemény az, hogy nincs két közvetlenül egymás után célba érő magyar úszó. A döntő 5 nem magyar résztvevője $5!$ sorrendben végezhet. A 3 magyar úszót e sorrendekben kell elhelyeznünk úgy, hogy magyarok ne kerüljenek közvetlenül egymás mögé.



Minden egyes sorrendben 6 hely közül kell kiválasztani azt a hármat, ahová a magyar úszók kerülhetnek, de a kiválasztott 3 helyen számít a magyar úszók sorrendje. Ezért a kiválasztási lehetőségek számát 6 különböző elem harmadosztályú ismétlés nélküli variációinak száma adja, ami $\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!}$. Így a kedvező esetek száma:

$$|C| = 5! \cdot \frac{6!}{3!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

A keresett valószínűség:

$$P(C) = \frac{|C|}{|H|} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14} \approx 0,3571.$$

- d) Legyen a D esemény az, hogy legalább két magyar úszó egymás után ér célba. Ez az esemény pontosan akkor következik be, ha a c) pontbeli C esemény nem következik be, tehát $D = \overline{C}$.

$$P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} \approx 0,6429.$$

4. A skandináv lottón minden sorsoláskor 35 számból kétszer húznak ki hetet. Egy kitöltött szelvény mind a két húzásnál részt vesz a játékban. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy szelvénnel játszva legalább az egyik húzásnál 4 lesz a találatok száma?

I. Megoldás:

35 számból 7-et: $\binom{35}{7}$ -féleféppen lehet kiválasztani. Bármelyik 7 szám egyenlő valószínűséggel húzható ki, tehát klasszikus valószínűségi mezőt kaptunk.

Legyen az A esemény az, hogy az első húzásnál 4 a találatok száma, a B esemény pedig az, hogy a második húzásnál van 4 találatunk. Annak az eseménynek a valószínűségét keressük, hogy legalább az egyik húzásnál 4 a találatok száma, vagyis $P(A + B)$ -t.

A megoldáshoz a $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ „szita-formulát” használjuk fel. Ehhez a $P(A)$, $P(B)$ és $P(A \cdot B)$ valószínűségeket kell először megadnunk.

4 találat akkor alakul ki, ha a kihúzott 7 számból 4, a ki nem sorsolt 28 számból pedig 3 szerepel a szelvényünkön. Ez $\binom{7}{4} \cdot \binom{28}{3}$ -féleféppen fordulhat elő.

Ez mindkét húzás esetén igaz, tehát: $|A| = |B| = \binom{7}{4} \cdot \binom{28}{3}$.

Ezért: $P(A) = P(B) = \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{28}{3}}{\binom{35}{7}}$.

Az A és a B esemény független egymástól, ezért $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{28}{3}}{\binom{35}{7}} \right)^2$.

Ezeket felhasználva az $A + B$ esemény valószínűsége:

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 2 \cdot \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{28}{3}}{\binom{35}{7}} - \left(\frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{28}{3}}{\binom{35}{7}} \right)^2 = \\ &= \frac{2 \cdot 35 \cdot 3276}{6724520} - \left(\frac{35 \cdot 3276}{6724520} \right)^2 \approx 0,034102 - 0,000291 \approx 0,0338. \end{aligned}$$

II. Megoldás:

Felhasználjuk az első megoldásban kapott $P(A) = P(B) = \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{28}{3}}{\binom{35}{7}} = p$ eredményt, valamint azt,

hogy az A és a B független események, így komplementereik is függetlenek.

A komplementer esemény valószínűségének meghatározásával adjuk meg a kért valószínűséget.

A „legalább egyszer 4 találatos a szelvény” esemény komplementer eseménye az, hogy „egyszer sem lett 4 találatos a szelvény”, ami az $\overline{A} \cdot \overline{B}$ esemény.

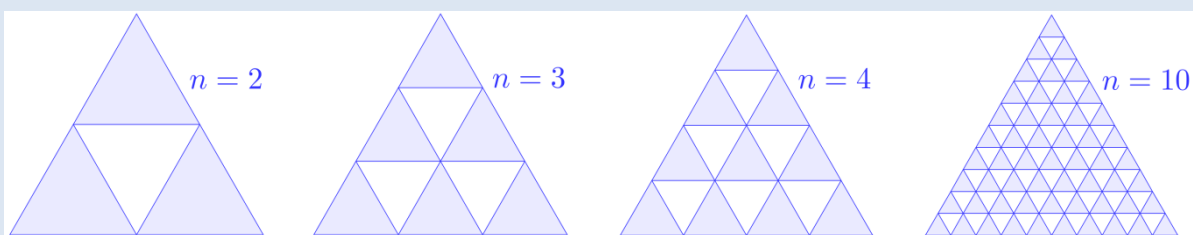
$$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = (1 - p)(1 - p) = (1 - p)^2.$$

A de Morgan-azonosságok miatt: $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A + B})$.

A keresett valószínűség így:

$$P(A + B) = 1 - P(\overline{A + B}) = 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2 \approx 0,0338.$$

5. Egy szabályos háromszög alakú céltáblába véletlenszerű lövések érkeznek. A céltáblát egybevágó kisebb szabályos háromszögekre osztottuk fel és színeztük ki kékkel az alábbi ábrákon látható módon. A felosztás során az eredeti háromszög oldalait $n > 1$ ($n \in \mathbb{N}$) egyenlő részre osztottuk.



Mekkora valószínűséggel találja el a lövedék a céltábla kékkel festett részét, ha

a) $n = 2$,

b) $n = 4$,

c) $n = 25$?

Ha $n > 1$ tetszőleges pozitív egész szám lehet, akkor milyen határok között változhat a találati valószínűség?

Megoldás:

A keresett valószínűségeket geometriai valószínűségi mezőben adjuk meg. Az események valószínűségével arányos mérték a terület. Az eseménytér a céltábla: $\mu(H) = T$, ahol T -a céltábla területe.

A felosztás során keletkező kis háromszögek hasonlóak az eredeti háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\frac{1}{n}$. Felhasználva, hogy hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével: $\frac{t}{T} = \frac{1}{n^2}$, azaz $T = tn^2$, ahol t -vel a felosztáskor keletkező egy kis háromszög területét jelöljük.

Legyen az A esemény az, hogy a lövedék a kék területre csapódik be.

a) $n = 2$ esetén az ábrán a kék kis háromszögeket megszámlálva $\mu(A) = 3t$ adódik. Ezért

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{3t}{T} = \frac{3t}{4t} = \frac{3}{4}.$$

b) $n = 4$ esetén ugyanígy kapjuk, hogy

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{10t}{T} = \frac{10t}{16t} = \frac{5}{8}.$$

c) $n = 25$ esetén nem célszerű az előbbi módszert alkalmazni. Az ábrákat vizsgálva látszik, hogy a céltábla felső csúcsától lefelé haladva az egymást követő sorokban a kék háromszögek száma és így területösszegük is számtani sorozatot alkot: $t_1 = t$ és $d = t$. A legalsó sorban n darab kék háromszög található, így $t_n = nt$.

Az A esemény valószínűsége e számtani sorozat első n tagjának összegével arányos, így

$$\mu(A) = \frac{t_1 + t_n}{2} n = \frac{t + nt}{2} n = t \frac{n(n+1)}{2}.$$

$n = 25$ esetén: $\mu(A) = t \frac{25 \cdot 26}{2} = 325t$, valamint $T = 25^2 t = 625t$. Ezért:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{325t}{625t} = \frac{13}{25}.$$

- d) Vizsgáljuk az A esemény valószínűségét n függvényében! Felhasználva a korábban kapott összefüggéseket:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{t \frac{n(n+1)}{2}}{tn^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat szigorúan monoton csökken és 0-hoz konvergál. Ezért a fenti valószínűséget megadó $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$ sorozat is konvergens és szigorúan monoton csökken.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Maximális értékét $n = 2$ esetén veszi fel, ami $\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{2} < P(A) \leq \frac{3}{4}.$$

6. Tekintsük az $x^2 + px + q = 0$ másodfokú egyenletet, melyben a p és q paramétereknek a $[-1; 1]$ intervallumból véletlenszerűen választva adunk értéket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy lesz valós gyöke a másodfokú egyenletnek?

Megoldás:

Akkor van valós gyöke a másodfokú egyenletnek, ha diszkriminánsa nemnegatív, azaz

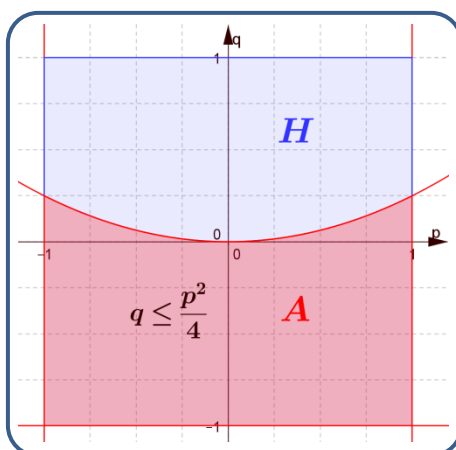
$$p^2 - 4q \geq 0.$$

Ebből $q \leq \frac{p^2}{4}$ adódik. A $[-1; 1]$ intervallumból véletlenszerűen választott p és q értékeknek ezt a feltételt kell teljesíteniük.

Tekintsük eseménytérnek a $H = \{(p; q) \mid p, q \in [-1; 1]\}$ ponthalmazt a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben. Minden kiválasztott p és q értékpárnak megfelel az eseménytér $(p; q)$ pontja. A keresett valószínűséget geometriai valószínűségi mezőben adjuk meg. Az események valószínűségével arányos mérték a terület.

Az eseménytér egy 2 egység oldalú négyzet: $\mu(H) = 4$.

Legyen az A eseménynek megfelelő ponthalmaz a $\{(p; q) \mid q \leq \frac{p^2}{4}; p, q \in [-1; 1]\}$.



$$\mu(A) = 2 + \int_{-1}^1 \frac{p^2}{4} dp = 2 + \frac{1}{12} [p^3]_{-1}^1 = 2 + \frac{1 - (-1)}{12} = \frac{13}{6}.$$

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{\frac{13}{6}}{\frac{4}{4}} = \frac{13}{24}.$$

7. Egy dobozban 3 golyó van: piros, fehér és zöld. 5-ször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy fehéret és zöldet is húzunk legalább kétszer, mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk pirosat?

Megoldás:

Legyen A az az esemény, hogy egy piros golyó nincs a kihúzott 5 golyó között, B esemény pedig az, hogy fehéret és zöldet is legalább kétszer húztunk.

A kérdés az, hogy mekkora valószínűséggel következett be az A esemény, feltéve, hogy B már bekövetkezett, vagyis a $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ feltételes valószínűség értéke mekkora.

Mivel visszatevéssel húzunk, ezért ugyanazt a golyót többször is kivehetjük, és számít a golyók sorrendje. Így egy elemi esemény 3 elem egy ötöd-osztályú ismétléses variációja. Tehát az eseménytér számossága: $|H| = 3^5$.

A B esemény 3 módon következhet be.

2 fehér és 3 zöld golyót húztunk.	A sorrendek száma: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.
3 fehér és 2 zöld golyót húztunk.	A sorrendek száma: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.
2 fehér, 2 zöld és 1 piros golyót húztunk.	A sorrendek száma: $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$.

Ezért $|B| = 10 + 10 + 30 = 50$ és $P(B) = \frac{50}{3^5}$.

Az $A \cdot B$ esemény bekövetkezését a fenti táblázat azon sorrendjei adják, amelyekben nincs piros golyó, így $|A \cdot B| = 10 + 10 = 20$ és $P(A \cdot B) = \frac{20}{3^5}$.

A keresett feltételes valószínűség:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{3^5}}{\frac{50}{3^5}} = \frac{2}{5}.$$

Megjegyzés:

A $P(A|B)$ feltételes valószínűség az alábbi gondolatmenettel is meghatározható:

A B esemény bekövetkezési lehetőségeinek száma a kérdéses valószínűség kiszámításához szükséges összes esetek számát adja, ami a fenti táblázatból adódóan 50.

A kedvező esetek száma a piros golyót nem tartalmazó sorrendek száma, ami a fenti táblázat első két sorából adódóan 20. Ezeket felhasználva a keresett valószínűség:

$$P(A|B) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

8. Közúti forgalmi ellenőrzések és mérések során megállapították, hogy egy adott városban a járművek 50%-a személyautó, 35%-a teherautó, a fennmaradó rész pedig egyéb kategóriába sorolható jármű. A személyautók 15%-ánál, a teherautók 20%-ánál, az egyéb kategóriájú járművek 35%-ánál valami műszaki probléma fedezhető fel.

Ebben a városban egy járművet megállítva mennyi annak a valószínűsége, hogy

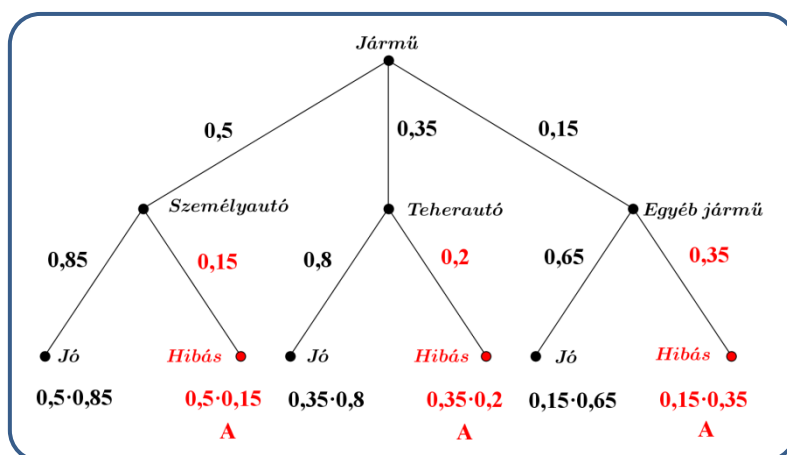
- a műszaki állapota kifogásolható;
- ha a műszaki állapota kifogásolható, akkor teherautó?

Megoldás:

Vezessük be a következő eseményeket! Az adott jármű:

$S = \{\text{személyautó}\}$; $T = \{\text{teherautó}\}$; $E = \{\text{egyéb jármű}\}$; $A = \{\text{hibás jármű}\}$; $H = \{\text{jármű}\}$.

- A $P(A)$ valószínűség az alábbi, a valószínűségeket szemléltető ábráról megadható.



Az A esemény három egymást páronként kizáró esemény összege (hibás személyautó, hibás teherautó vagy hibás egyéb jármű). $P(A)$ e három esemény valószínűségének összege.

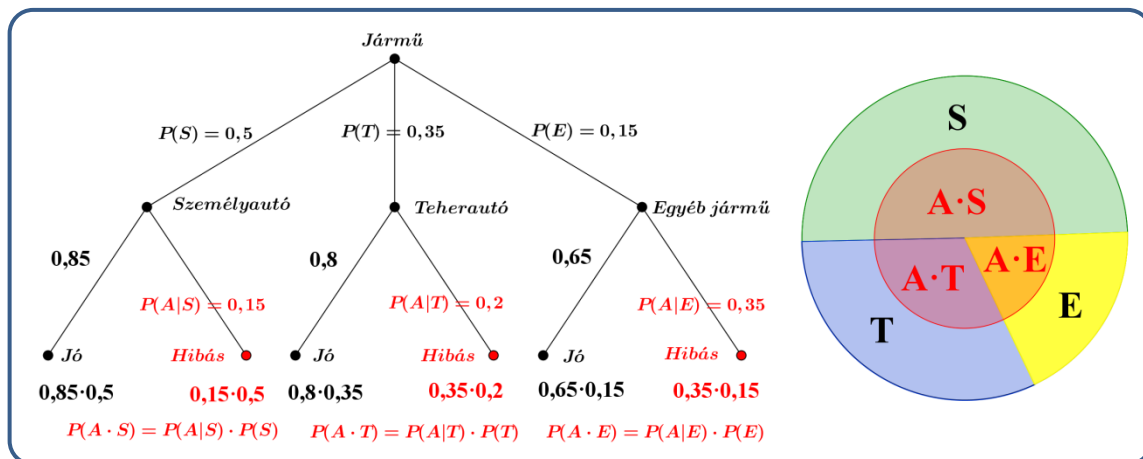
$$P(A) = 0,5 \cdot 0,15 + 0,35 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,35 = 0,075 + 0,07 + 0,0525 = 0,1975.$$

II. Megoldás az a) részre:

Az $S + T + E = H$, valamint S, T, E páronként kizáró események, tehát teljes eseményrendszer alkotnak. Ezért használhatjuk $P(A)$ meghatározására a teljes valószínűség tételét:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|S) \cdot P(S) + P(A|T) \cdot P(T) + P(A|E) \cdot P(E) = \\ &= 0,15 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,35 + 0,35 \cdot 0,15 = 0,1975. \end{aligned}$$

Az alábbi ábra szemlélteti a megoldást.



- b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy jármű teherautó, feltéve, hogy hibás? Tehát a $P(T|A)$ feltételes valószínűséget keressük.

$$P(T|A) = \frac{P(T \cdot A)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,35}{0,1975} = \frac{28}{79} \approx 0,3544.$$

Felhasználtuk az a) részben kapott $P(T \cdot A) = 0,2 \cdot 0,35$ és $P(A) = 0,1975$ értékeket.

II. Megoldás a b) részre:

Mivel S, T, E teljes eseményrendszert alkotnak, alkalmazhatjuk a Bayes-tételt a kérdéses $P(T|A)$ meghatározására:

$$\begin{aligned} P(T|A) &= \frac{P(A|T) \cdot P(T)}{P(A|S) \cdot P(S) + P(A|T) \cdot P(T) + P(A|E) \cdot P(E)} = \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,35}{0,15 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,35 + 0,35 \cdot 0,15} = \frac{28}{79} \approx 0,3544. \end{aligned}$$

9. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét. Legyen az A esemény az, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, a B pedig az, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Függetlenek-e az A és B események?

Megoldás:

Elemi esemény egy 3 dobásos sorozat. A fej és az írás többször is előfordulhat, ezért az eseményteret 2 elem összes harmadosztályú ismétléses variációi alkotják. Mindegyik dobássorozat egyenlő valószínűségű, tehát klasszikus valószínűségi mezőt kaptunk. $|H| = 2^3 = 8$.

Az A esemény a következő módokon valósulhat meg:

1. 2 fej, 1 írás.	A sorrendek száma: 3.
2. 1 fej, 2 írás.	A sorrendek száma: 3.

$$|A| = 3 + 3 = 6; P(A) = \frac{|A|}{|H|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

A B esemény a következő módokon valósulhat meg:

1. 2 fej, 1 írás.	A sorrendek száma: 3.
2. 3 fej, 0 írás.	A sorrendek száma: 1.

$$|B| = 3 + 1 = 4; P(B) = \frac{|B|}{|H|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Az $A \cdot B$ esemény csupán a 2 fej, 1 írás lehetséges 3 sorrendje esetében következik be.

$$|A \cdot B| = 3; P(A \cdot B) = \frac{|A \cdot B|}{|H|} = \frac{3}{8}.$$

Ezután:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A \cdot B),$$

ami azt jelenti, hogy A és B független események.

10. Egy csavargyárban az egyik gép meghibásodása miatt az elkészült csavarok 15%-a selejt. Visszatevéssel 4 elemű mintát veszünk. Jelölje az X valószínűségi változó a hibátlan csavarok számát a mintában.

- Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását!
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában lesz selejtes csavar?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában legalább kettő csavar selejtes lesz?
- Legalább hány elemű mintát kell vennünk ahhoz, hogy 80%-nál nagyobb valószínűséggel legyen benne selejtes csavar?

Megoldás:

- a) X eloszlása, várható értéke és szórása:

Mivel visszatevéssel mintavétel történik, és csak azt vizsgáljuk, hogy egy kiválasztott csavar hibátlan-e vagy nem, az X valószínűségi változó binomiális eloszlású, $n = 4$ és $p = 0,85$ paraméterekkel, ezért eloszlását a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ képlet adja, ahol k az X lehetséges értékein fut végig.

Mivel 4 elemű a minta, X értékei: 0; 1; 2; 3; 4.

X eloszlása:

x_i	$P(X = x_i) = p_i$
0	$p_0 = \binom{4}{0} \cdot 0,85^0 \cdot 0,15^4 \approx 0,0005$
1	$p_1 = \binom{4}{1} \cdot 0,85^1 \cdot 0,15^3 \approx 0,0115$
2	$p_2 = \binom{4}{2} \cdot 0,85^2 \cdot 0,15^2 \approx 0,0975$
3	$p_3 = \binom{4}{3} \cdot 0,85^3 \cdot 0,15^1 \approx 0,3685$
4	$p_4 = \binom{4}{4} \cdot 0,85^4 \cdot 0,15^0 \approx 0,5220$

X várható értéke: $M(X) = np = 4 \cdot 0,85 = 3,4$.

X szórása: $D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4 \cdot 0,85 \cdot 0,15} = \frac{\sqrt{51}}{10} \approx 0,7$.

- b) A 4 elemű mintában akkor lesz legalább egy selejtes csavar, ha nem mind a négy hibátlan ($X < 4$), ami éppen az $X = 4$ komplementer eseménye.

$$P(X < 4) = 1 - P(X = 4) \approx 1 - 0,5220 = 0,4780.$$

- c) Legalább 2 selejtes csavar akkor lesz a mintában, ha maximum 2 hibátlan ($X \leq 2$).

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,0005 + 0,0115 + 0,0975 = 0,1095.$$

- d) Egy n elemű mintában akkor lesz legalább egy selejtes, ha nem mind az n hibátlan ($X < n$), ami éppen az $X = n$ komplementer eseménye. Ennek valószínűsége:

$$P(X < n) = 1 - P(X = n) = 1 - \binom{n}{n} \cdot 0,85^n \cdot 0,15^0.$$

Ennek a valószínűségnek kell 80%-nál nagyobbak lennie.

$$1 - \binom{n}{n} \cdot 0,85^n \cdot 0,15^0 > 0,8$$

$$1 - 0,85^n > 0,8$$

$$0,85^n < 0,2$$

Mivel mindkét oldal pozitív és a 10-es alapú logaritmus szigorúan monoton növekvő, a két oldal 10-es alapú logaritmusai között is ugyanez a reláció teljesül.

$$\lg 0,85^n < \lg 0,2$$

$$n \cdot \lg 0,85 < \lg 0,2$$

Mivel $\lg 0,85 < 0$, ezért

$$n > \frac{\lg 0,2}{\lg 0,85} \approx 9,9.$$

Tehát $n = 10$ -re már teljesül a kívánt feltétel, így legalább 10 elemű mintát kell vennünk ahhoz, hogy 80%-nál nagyobb valószínűséggel legyen benne selejtes csavar.

11. Egy dobozban 20 db golyó van, amelyek közül 5 piros, a többi fehér színű. Véletlenszerűen választva kiveszünk egyszerre 3 golyót. Jelölje az X valószínűségi változó a piros golyók számát a mintában.

- Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását!
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában lesz legalább egy piros golyó?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában legfeljebb egy piros golyó lesz?

Megoldás:

- Mivel visszatevés nélküli mintavétel történik, és csak azt vizsgáljuk, hogy egy kiválasztott golyó a mintában rendelkezik-e egy adott tulajdonsággal vagy nem, az X valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású, $n = 3$, $s = 5$ és $N = 20$ paraméterekkel, ezért eloszlását a

$$P(X = k) = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ képlet adja, ahol } k \text{ az } X \text{ lehetséges értékein fut végig.}$$

Mivel 3 elemű a minta, X értékei: 0; 1; 2; 3.

X eloszlása:

x_i	$P(X = x_i) = p_i$
0	$p_0 = \frac{\binom{5}{0} \binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{15!}{3! \cdot 17!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{455}{1140} \approx 0,3991$
1	$p_1 = \frac{\binom{5}{1} \binom{15}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{5 \cdot 15!}{3! \cdot 17!} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{525}{1140} \approx 0,4605$
2	$p_2 = \frac{\binom{5}{2} \binom{15}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{5!}{3! \cdot 17!} \cdot 15 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 15}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{150}{1140} \approx 0,1316$
3	$p_3 = \frac{\binom{5}{3} \binom{15}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{5!}{3! \cdot 17!} = \frac{5 \cdot 4}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{10}{1140} \approx 0,0088$

X várható értéke:

$$M(X) = n \frac{s}{N} = 3 \cdot \frac{5}{20} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

X szórása:

$$D(X) = \sqrt{\frac{ns}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{20} \cdot \left(1 - \frac{5}{20}\right) \cdot \frac{20-3}{20-1}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{17}{19}} = \sqrt{\frac{153}{304}} \approx 0,71.$$

- b) A 3 elemű mintában akkor lesz legalább egy piros golyó ($X > 0$), ha nem teljesül az, hogy nincs egy sem, ami éppen az $X = 0$ komplementer eseménye, ezért:

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{455}{1140} \approx 0,6009.$$

- c) Annak valószínűsége, hogy a mintában legfeljebb 1 piros golyó lesz ($X \leq 1$):

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{455}{1140} + \frac{525}{1140} = \frac{980}{1140} \approx 0,8596.$$

III. Ajánlott feladatok

1. Két dobókockával dobunk egyszerre, és a dobott számok összegét vizsgáljuk. Legyen az A esemény az, hogy az összeg páratlan, a B esemény az, hogy az összeg 3-mal osztható és a C pedig az, hogy az összeg nagyobb mint 6. Adja meg az alábbi eseményeket az A , B és C események segítségével!
- a) Az összeg 6-tal osztható;
 - b) Az összeg hétnél kisebb vagy páratlan szám;
 - c) Az összeg 6-nál nagyobb páros szám;
 - d) Az összeg 3-mal nem osztható páros szám vagy 6-nál nagyobb;
 - e) Az összeg éppen 6.

2. Egy 32 cm széles és 18 cm magas téglalap alakú monitoron véletlenszerűen felvillan egy-egy pont. Tekintsük a következő eseményeket!

$A = \{\text{a bal alsó sarokból induló átló fölött villan fel a pont}\};$

$B = \{\text{a képernyő jobb felén villan fel a pont}\};$

$C = \{\text{a képernyő középpontjához 4,5 cm-nél közelebb villan fel a pont}\}.$

Rajzolja le az alábbi eseményeknek megfelelő képernyőrészeket!

a) $A + B$

b) $A - C$

c) $A + \overline{B}$

d) $\overline{C} \cdot \overline{B}$

e) $(A + C) \cdot B$

f) $C + (\overline{B} \cdot A)$

Mekkora a valószínűsége az a), b), c) pontokban megadott eseményeknek?

3. Két távoli város között vasúton és légi úton szállítanak árukat. Az A esemény jelentse azt, hogy egy adott napon van vasúti szállítás, a B esemény pedig azt, hogy van légi szállítás. Adja meg a következő események jelentését szövegesen!

a) $A + B$

b) $A - B$

c) $\overline{A} + \overline{B}$

d) $A + \overline{B}$

e) $\overline{A} \cdot \overline{B}$

f) $B + (\overline{B} \cdot A)$

4. Két kalapba számozott golyókat raktunk. Az elsőbe 6 darab pirosat 1-től 6-ig számozva, a másodikba 4 darab fehérét 1-től 4-ig számozva. Kihúzzunk mindkét kalapból véletlenszerűen egy-egy golyót.

- a) Jelentse az A eseményt azt, hogy a kihúzott golyókon lévő számok szorzata 3-mal osztható, B esemény pedig azt, hogy a számok szorzata 10-nél kisebb. Adja meg az A , B , $A \cdot B$ és $A - B$ események valószínűségeit, valamint azt, hogy mekkora valószínűséggel következik be A , feltéve, hogy B bekövetkezett!
- b) Mennyi a kihúzott golyókon lévő számok szorzatának várható értéke, várható abszolút eltérése és szórása?

5. Domonkosnak sok szabályos dobókockája van. Először egy dobókockával kezd el játszani, és a dobálás közben a következő kérdéseken gondolkozik:

- a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy négy egymás utáni dobásból legalább egyszer sikerül hatost dobni?
- b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy csak negyedike sikerül először hatost dobni?
- c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 10-szer kell dobni az első hatosig?

Ezután több kockával dob egyszerre, és a következőkre kíváncsi:

- d) Legalább hány kockát kell feldobni egyszerre ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb valószínűséggel legyen köztük hatos?
- e) Vajon hány kockát kell egyszerre feldobni ahhoz, hogy a legnagyobb valószínűséggel legyen köztük pontosan egy hatos?

Adja meg a helyes válaszokat Domonkos fenti kérdéseire!

6. Egy 3 cm élű fakockát befestettünk pirosra, majd feldaraboltuk 27 db 1 cm élű kisebb kockára, s utána mindet beleraktuk egy dobozba. Pakolás közben véletlenül kiborult a doboz, és a kockák szétgurultak a földön. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a szétgurult kockák között van olyan, amelyiknek piros lapja van felül?
7. Egy jól megkevert 32 lapos magyarkártya-pakliból kihúzzunk 5 lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott 5 lap között lesz
 - a) pontosan három zöld;
 - b) legalább három zöld;
 - c) pontosan egy pár? (A pár két azonos értékű, de különböző színű lap. Például két darab hetes.)
8. Egy tűzijáték befejezéseként fellőnek 4 kék, 3 sárga és 5 zöld rakétát egymás után. A rakéták fel-lövési sorrendje véletlenszerű. Az azonos színű rakétákat nem különböztetjük meg.
 - a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a zöld rakétákat egymás után lövik fel?
 - b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a fellőtt rakéták közül az első két rakéta zöld, a harmadik sárga és az utolsó kék lesz?
 - c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem lönek ki egymás után két zöld színű rakétát?
9. A „bergengőc” lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnel játszik, az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnel.
 - a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha p annak a valószínűsége ($0 < p < 1$), hogy egy szelvényen egy húzás esetén telitalá-lata lesz?

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnel játszik.

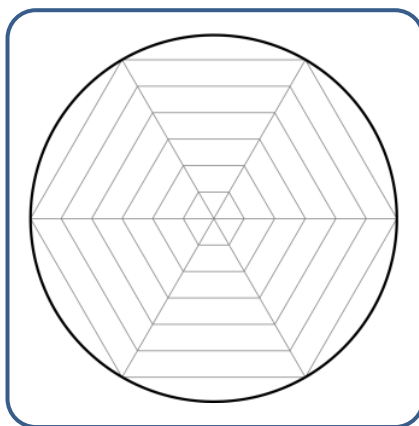
 - b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata lesz valame-lyik szelvényén?
 - c) A telitalálat szempontjából az a)-ban vagy a b)-ben leírt játék kedvezőbb Bandi számára?

(Emelt szintű matematika érettségi 2010. október)
10. Egy gimnázium 10. évfolyamán sokan járnak szakkörökre. Többek között matematika, fizika és kémia szakkörre is. Véletlenül találkozunk az iskola folyosóján egy tizedikes diákkal, és megkér-dezzük tőle, hogy milyen szakkörökre jár. Legyen az M esemény az, hogy ez a tanuló jár matema-tika szakkörre, F az, hogy fizikára, K pedig az, hogy kémia szakkörre. Ismerjük a következő való-színűségeket:

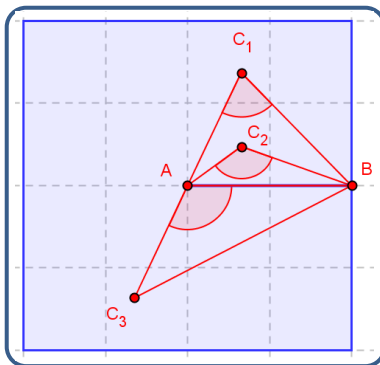
$$P(M) = 0,5; \quad P(M \cdot F) = 0,25; \quad P(M \cdot F \cdot K) = 0,1; \quad P(F) = 0,4;$$

$$P(M \cdot K) = 0,15; \quad P(K) = 0,33; \quad P(F \cdot K) = 0,2.$$
 - a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül legalább az egyik szakkörre jár a tanuló?
 - b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan két szakkörre jár?

11. Egy kosárban 25 húsvéti tojást viszünk. A kosárban vannak egyszínű piros tojások és hímes tojások is. Útközben hozzáütődött a kosár egy járókelőhöz, így több tojás megrepedt. A baleset után véletlenszerűen kiválasztva egy tojást a kosárból, $0,2$ valószínűséggel veszünk ki épen maradt piros tojást, $0,2$ valószínűséggel választunk ép hímes tojást és ugyancsak $0,2$ valószínűséggel megrepedt nem piros színű hímes tojást is. Piros színű hímes tojást $\frac{2}{5}$, repedt piros színű hímes tojást pedig $\frac{7}{25}$ valószínűséggel vehetünk ki. Egy megrepedt nem hímes piros tojást ugyanakkora valószínűséggel választhatunk ki, mint egy repedt, se nem piros, se nem hímes tojást. Mekkora valószínűséggel húzhatunk a kosárból olyan épen maradt tojást, amelyik nem piros és nem is hímes?
12. Egy pók beszótt hálójával egy 6 cm sugarú kör alakú nyílást az ábrán látható módon. A középpontból indulva sugárirányban 1 cm -enként következnek a pókfonalból készített szabályos hatszögek. A pók észrevette, hogy fennakadt egy muslinca a hálóban. Feltételezzük, hogy a muslinca pontszerű és bárhol a fonalon egyenlő valószínűséggel akadhatott fenn.
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy sugárirányú szálon akadt fenn?
 - Mekkora a valószínűsége annak, hogy belülről a harmadik hatszögön vagy attól befelé lévő szálon akadt fenn a muslinca?



13. Egy 4 egység oldalú négyzet középpontja A , egyik oldalának felezőpontja B . Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy az AB egyenesére nem illeszkedő C pontját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az ABC háromszög
- tompaszögű;
 - derékszögű lesz?



14. Az $x^2 + bx + 4 = 0$ egyenletben a b paraméter értékét véletlenszerűen választjuk a $[-6; 6]$ intervallumból. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy valós gyöke lesz az egyenletnek?

15. Péter és Judit találkozót beszélnek meg este 7 és fél nyolc között. Mivel tömegközlekedési eszközzel utaznak, bizonytalan az érkezésük. Judit 5 percet hajlandó várni Péterre, míg Péter 10 percet Juditra. Mekkora valószínűséggel sikerül találkozniuk?
16. Egy zöldség-kiskereskedőhöz egy banán- és egy mandarinszállítmány érkezett. A szállítás során a mandarinszállítmány negyede vesztett az értékéből, a banánszállítmány 60%-a túlérlett, a gyümölcsök többi része első osztályú maradt. A kiskereskedő, mielőtt átvette a két szállítmányt, ellenőrizte az áru minőségét. Kiválasztott az egyik szállítmányból véletlenszerűen egy gyümölcsöt. A kiválasztott gyümölcs első osztályúnak bizonyult, ezért visszatették a helyére. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha ugyanabból a gyümölcsfajtából megint kivesz egy darabot, az ismét első osztályú lesz?
17. Egy számítógépgyár 3 távol-keleti cégtől szerzi be ugyanazt az alaplapt: egy kínai, egy tajvani és egy koreai cégtől. A kínai beszállítótól az alaplapon 45%-át, melyek 0,5%-a hibás, a tajvani cégtől az alaplapon 30%-át, melyből minden 100. hibás. A maradék alaplaponkat a koreai cég gyártja 3,5%-os hibaarányal. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- egy alaplapt véletlenszerűen kiválasztva, az jó;
 - az alaplapt jó, feltéve, hogy kínai a beszállító;
 - nem koreai az alaplapt, feltéve, hogy jó;
 - jó az alaplapt, feltéve, hogy nem koreai?
18. Vizsgálja meg, hogy a lottósorsolásnál kihúzott öt nyerőszámból hány osztható öttel! Jelölje ezt a számot X -szel!
- Adja meg az X valószínűségi változó eloszlását, várható értékét, várható abszolút eltérését és szórását!
 - Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok között több öttel osztható lesz, mint öttel nem osztható?
19. Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.
- Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!
- A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.
- Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes!
- A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.
- Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?

(Emelt szintű matematika érettségi 2012. május)

20. Egy család autóval utazik, és a gyerekek abban versengenek, hogy ki lát meg hamarabb olyan autót, amelyiknek a rendszámában legalább két kilences szerepel. Feltételezzük, hogy csak azok az autók számítanak, amelyek rendszámában három betűt három számjegy követ, és az ilyen rendszámú autók bármelyikével egyenlő valószínűséggel találkozhatnak. Ugyanazzal az autóval többször is találkozhatnak.
- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első meglátott autó rendszámában lesz legalább két kilences?
 - b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első 20 autó között egy vagy két ilyen rendszámú autóval találkoznak?
 - c) 100 autónként átlagosan hány ilyen rendszámú autóra számíthatnak az út során a gyerekek?
 - d) Legalább hány autóval kell találkozniuk ahhoz, hogy 80%-nál nagyobb valószínűséggel lássanak ilyen rendszámot?
21. Egy előzetes felmérés szerint egy 1200 fős faluban 600-an a kormánypártra szavaznának, 400-an más pártra és 200-an még nem tudják, vagy nem mennének el szavazni. Egy közvélemény-kutató cég véletlenszerűen kiválasztott 20 embert fog megkérdezni az előzetes felmérés szerinti biztos szavazók közül arról, hogy a kormánypártra szavazna-e, vagy nem. A cég matematikusai azt akarják kiszámolni, mekkora a valószínűsége annak, hogy
- a) éppen hatan nem fognak a kormánypártra szavazni a húszból;
 - b) legalább ketten a kormánypártra fognak szavazni.

A matematikusok egyik része a visszatevés nélküli modellel (hipergeometrikus eloszlást feltételezve), másik része pedig a visszatevéses modellel (binomiális eloszlást feltételezve) számol. Mekkora lesz az eltérés az egyes kérdésekre kapott eredmények között a két matematikus csoport esetében?

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Két dobókockával dobunk egyszerre, és a dobott számok összegét vizsgáljuk. Legyen az A esemény az, hogy az összeg páratlan, a B esemény az, hogy az összeg 3-mal osztható és a C pedig az, hogy az összeg nagyobb mint 6. Adja meg az alábbi eseményeket az A , B és C események segítségével!
- a) Az összeg 6-tal osztható;
 - b) Az összeg hétnél kisebb vagy páratlan szám;
 - c) Az összeg 6-nál nagyobb páros szám;
 - d) Az összeg 3-mal nem osztható páros szám vagy 6-nál nagyobb;
 - e) Az összeg éppen 6.

Megoldás:

$H = \{\text{a két kockával dobott számok összege}\};$

$A = \{\text{az összeg páratlan}\}; \quad B = \{\text{az összeg 3-mal osztható}\}; \quad C = \{\text{az összeg 6-nál nagyobb}\}.$

Az $A \subseteq H, B \subseteq H, C \subseteq H$. A komplementer-képzést H -ra vonatkoztatva az eredmények:

- a) $\overline{A} \cdot B$
- b) $\overline{C} + A$
- c) $C \cdot \overline{A}$
- d) $(\overline{B} \cdot \overline{A}) + C$
- e) $\overline{C} \cdot B \cdot \overline{A}$

Megjegyzés:

A fenti H eseménytér elemi eseményei a lehetséges összegek által alkotott egy elemű halmazok. Ezek az elemi események nem egyenlő valószínűségűek, ezért nem klasszikus valószínűségi mezőt kaptunk.

2. Egy 32 cm széles és 18 cm magas téglalap alakú monitoron véletlenszerűen felvillan egy-egy pont. Tekintsük a következő eseményeket!

$A = \{\text{a bal alsó sarokból induló átló fölött villan fel a pont}\};$

$B = \{\text{a képernyő jobb felén villan fel a pont}\};$

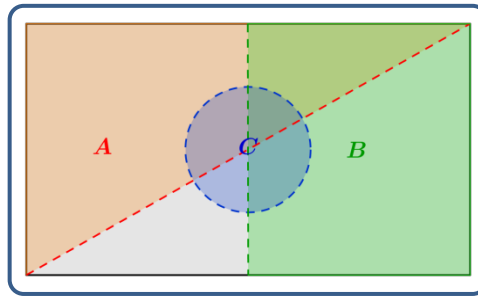
$C = \{\text{a képernyő középpontjához 4,5 cm-nél közelebb villan fel a pont}\}.$

Rajzolja le az alábbi eseményeknek megfelelő képernyő részeket!

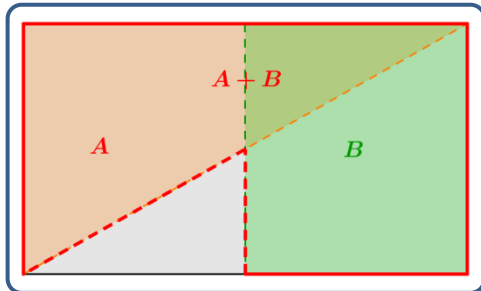
- a) $A + B$
- b) $A - C$
- c) $A + \overline{B}$
- d) $\overline{C} \cdot \overline{B}$
- e) $(A + C) \cdot B$
- f) $C + (\overline{B} \cdot A)$

Mekkora a valószínűsége az a), b), c) pontokban megadott eseményeknek?

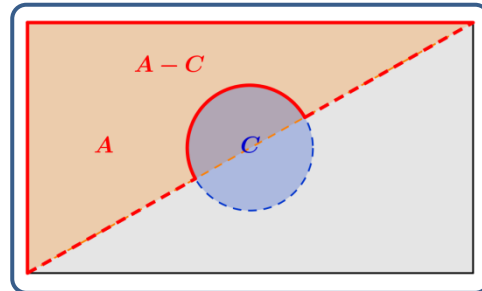
Megoldás:



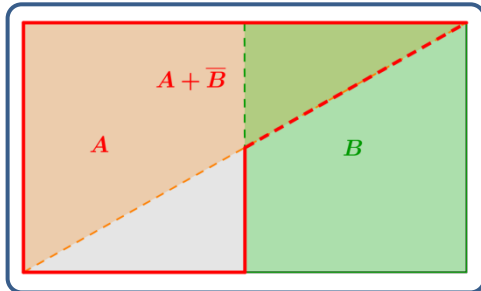
a) $A + B; P(A + B) = \frac{7}{8}.$



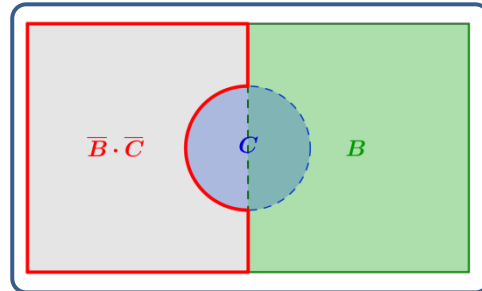
b) $A - C; P(A - C) \approx 0,4448.$



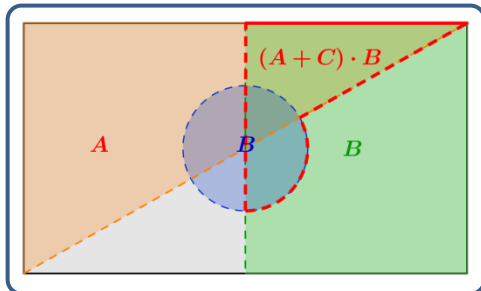
c) $A + \bar{B}; P(A + \bar{B}) = \frac{5}{8}.$



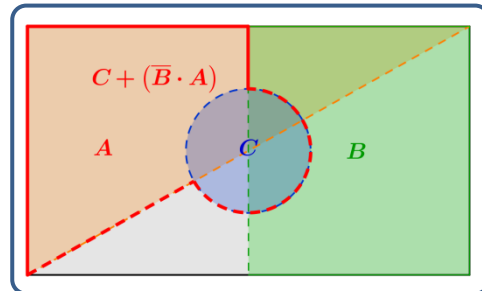
d) $\bar{C} \cdot \bar{B}$



e) $(A + C) \cdot B$



f) $C + (\bar{B} \cdot A)$



Megjegyzés:

A határvonalak figyelembevétele vagy elhanyagolása nem változtat a kérdéses események valószínűségein.

3. Két távoli város között vasúton és légi úton szállítanak árukat. Az A esemény jelentse azt, hogy egy adott napon van vasúti szállítás, a B esemény pedig azt, hogy van légi szállítás. Adja meg a következő események jelentését!

a) $A + B$

b) $A - B$

c) $\bar{A} + \bar{B}$

d) $A + \bar{B}$

e) $\bar{A} \cdot \bar{B}$

f) $B + (\bar{B} \cdot A)$

Megoldás:

a) $A + B$	Vasúti vagy légi szállítás közül legalább az egyik van az adott napon.
b) $A - B$	Van vasúti, de nincs légi szállítás az adott napon.
c) $\overline{A} + \overline{B}$	Az adott napon nincs vasúti szállítás, vagy nincs légi szállítás.
d) $A + \overline{B}$	Az adott napon vasúti szállítás van, vagy nincs légi szállítás.
e) $\overline{A} \cdot \overline{B}$	Se vasúti, se légi szállítás nincs az adott napon.
f) $B + (\overline{B} \cdot A)$	$B + (\overline{B} \cdot A) = A + B$, tehát megegyezik az a) esettel.

4. Két kalapba számozott golyókat raktunk. Az elsőbe 6 darab pirosat 1-től 6-ig számozva, a másodikba 4 darab fehérét 1-től 4-ig számozva. Kihúzzunk mindkét kalapból véletlenszerűen egy-egy golyót.
- a) Jelentse az A eseményt azt, hogy a kihúzott golyókon lévő számok szorzata 3-mal osztható, B esemény pedig azt, hogy a számok szorzata 10-nél kisebb. Adja meg az A , B , $A \cdot B$ és $A - B$ események valószínűségeit, valamint azt, hogy mekkora valószínűséggel következik be A , feltéve, hogy B bekövetkezett?
- b) Mennyi a kihúzott golyókon lévő számok szorzatának várható értéke, várható abszolút eltérése és szórása?

Megoldás:

- a) $A = \{a \text{ szorzat 3-mal osztható}\}$ $B = \{a \text{ szorzat 10-nél kisebb}\}$.

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16
5	5	10	15	20
6	6	12	18	24

$H = \{(a; b) \mid 1 \leq a \leq 6; 1 \leq b \leq 4; a, b \in \mathbb{N}\}$, így $|H| = 24$.

$$|A| = 12; \text{ ezért } P(A) = \frac{|A|}{|H|} = \frac{1}{2}.$$

$$|B| = 15; \text{ ezért } P(B) = \frac{|B|}{|H|} = \frac{5}{8}.$$

$$|A \cdot B| = 6; \text{ ezért } P(A \cdot B) = \frac{|A \cdot B|}{|H|} = \frac{1}{4}.$$

$$|A - B| = 6; \text{ ezért } P(A - B) = \frac{|A - B|}{|H|} = \frac{1}{4}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}.$$

- b) Legyen X valószínűségi változó a kihúzott számok szorzata. X lehetséges értékeit, azok gyakoriságait és valószínűségeit a következő táblázat mutatja.

x_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24
k_i	1	2	2	3	1	3	2	1	1	3	1	1	1	1	1
p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

várható érték:	várható abszolút eltérés:	szórás:
$M(X) = \sum_{i=1}^{15} x_i p_i = 8,75.$	$\sum_{i=1}^{15} x_i - M(X) p_i = 5,04.$	$D(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{15} (x_i - M(X))^2 p_i} = 6,1.$

5. Domonkosnak sok szabályos dobókockája van. Először egy dobókockával kezd el játszani, és a dobálás közben a következő kérdéseken gondolkodik:

- Mennyi annak a valószínűsége, hogy négy egymás utáni dobásból legalább egyszer sikerül hatost dobni?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy csak negyedekre sikerül először hatost dobni?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 10-szer kell dobni az első hatosig?

Ezután több kockával dob egyszerre és a következőkre kíváncsi:

- Legalább hány kockát kell feldobni egyszerre ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb valószínűséggel legyen köztük hatos?
- Vajon hány kockát kell egyszerre feldobni ahhoz, hogy a legnagyobb valószínűséggel legyen köztük pontosan egy hatos?

Adja meg a helyes válaszokat Domonkos fenti kérdéseire!

Megoldás:

- Legyen az A esemény az, hogy legalább egyszer hatost dobtunk a négy dobásból. Egyszerűbb A komplementerének a valószínűségét meghatározni, így $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Annak a valószínűsége, hogy egy dobás nem hatos: $\frac{5}{6}$. Az egymást követő dobások független események, ezért

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4; P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0,518.$$

- Jelölje B a vizsgált eseményt. Annak valószínűsége, hogy az első három dobás egyike sem hatos: $\left(\frac{5}{6}\right)^3$. Egy dobás $\frac{1}{6}$ valószínűséggel hatos. Ezért:

$$P(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296} \approx 0,096.$$

- Legyen a C_1 esemény az, hogy elsőre sikerül hatost dobni. $P(C_1) = \frac{1}{6}$.

A C_2 esemény az, hogy másodikkra. $P(C_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

Így tovább: $P(C_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$; $P(C_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$; ... $P(C_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$; ...

Legyen a C esemény az, hogy legfeljebb 10-szer kell dobnia az első hatosig.

$$C = \sum_{i=1}^{10} C_i.$$

C egymást kizáró események összege, ezért

$$P(C) = \sum_{i=1}^{10} P(C_i).$$

A $P(C_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$ mértani sorozat, $P(C_1) = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$. Tehát a keresett valószínűség:

$$P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{10} - 1}{\frac{5}{6} - 1} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,8385.$$

Megjegyzés:

A keresett válasz a komplementer esemény valószínűségének meghatározásával is megadható.

- d) Legyen n a kockák száma. Legyen D az az esemény, hogy a feldobott n kockából legalább egy hatos. Milyen n esetén teljesül, hogy $P(D) > 0,9$?

Egyszerűbb áttérni D komplementer eseményére és azt vizsgálni, hogy milyen n esetén teljesül az $1 - P(\overline{D}) > 0,9$, ami az $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1$ egyenlőtlenséghez vezet.

Ennek megoldása: $n > 12,63$; vagyis legalább 13 kockát kell egyszerre feldobni.

- e) Legyen n a kockák száma és az E esemény az, hogy a feldobott n kockából pontosan egy hatos. $P(E)$ maximumát keressük n függvényében. Az n feldobott kocka közötti hatosok száma binomiális eloszlású valószínűségi változó, ezért:

$$P(E) = \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Tekintsük az $n \mapsto \frac{n}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvény $f(x) = \frac{x}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}^+$ kiterjesztését!

Ez deriválható, és megkeressük a szélsőértékét.

$$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + \frac{x}{6} \cdot \ln \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \left(1 + x \cdot \ln \frac{5}{6}\right).$$

Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldása:

$$x = -\frac{1}{\ln \frac{5}{6}} \approx 5,48.$$

Itt a derivált pozitívból negatívba vált, tehát lokális maximuma van f -nek.

Az eredeti $n \mapsto \frac{n}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvény $n = 5$ vagy $n = 6$ esetén maximális.

$$n = 5\text{-nél: } \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

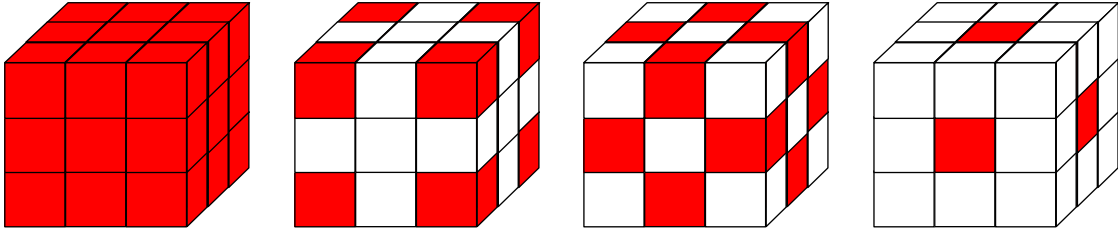
$$n = 6\text{-nál: } \frac{6}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Tehát 5 és 6 kockánál egyenlően maximális a valószínűsége annak, hogy pontosan 1 kockán lesz 6-os.

6. Egy 3 cm élű fakockát befestettünk pirosra, majd feldaraboltuk 27 db 1 cm élű kisebb kockára, s utána mindet beleraktuk egy dobozba. Pakolás közben véletlenül kiborult a doboz és a kockák szétgurultak a földön. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a szétgurult kockák között van olyan, amelyiknek piros lapja van felül?

Megoldás:

A feldarabolás után kapott kockák pirosra festett lapjaik száma szerint csoportosíthatók.



piros lapok száma	$P(\text{felül piros lap})$	$P(\text{felül fehér lap})$	kockák száma
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	8
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	12
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	6
0	0	1	1

Legyen az A esemény az, hogy van olyan kocka, amelyiknek piros lapja van felül. Térjünk át A komplementer eseményére, ami azt jelenti, hogy minden kockának fehér lapja van felül. Az egyes kockák leesésének kimenetelét nem befolyásolja a többi kocka, így leesésük a többitől független kísérletnek tekinthető. Ezért

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot 1^1 = \frac{2^{12} \cdot 5^6}{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 6^6} = \frac{5^6}{2^2 \cdot 3^{18}} \approx 10^{-5}.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0,999999.$$

7. Egy jól megkevert 32 lapos magyarkártya-pakliból kihúzzunk 5 lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott 5 lap között lesz
- pontosan három zöld;
 - legalább három zöld;
 - pontosan egy pár? (A pár két azonos értékű, de különböző színű lap. Például két darab hetes.)

Megoldás:

- a) $A = \{\text{pontosan három zöld a kihúzott 5 lapból}\}.$

$$P(A) = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{56 \cdot 276}{201376} = \frac{69}{899} \approx 0,0768.$$

- b) $B = \{\text{legalább 3 zöld a kihúzott 5 lapból}\}.$

$$P(B) = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{32}{5}} = \frac{56 \cdot 276 + 70 \cdot 24 + 56 \cdot 1}{201376} = \frac{17192}{201376} \approx 0,0854.$$

c) $C = \{\text{pontosan egy pár a kihúzott öt lapból}\}.$

- Az összes eset: $\binom{32}{5}.$
- Melyik fajta lapból van egy pár? $\binom{8}{1}$ lehetőség.
- Melyik két színből áll a pár? $\binom{4}{2}$ lehetőség.
- A többi 3 lap egymástól és az „egy pár” fajtájától is különböző legyen. $\binom{7}{3}$ lehetőség.

E három lap lehet:

- egyszínű: $\binom{4}{1}$ lehetőség;
- 2 különböző színű: $\binom{4}{2}$ a két szín kiválasztási lehetőségeinek száma, a kiválasztott két színből $\binom{2}{1}$ -féleképpen adható meg 2 kártya közös színe, és $\binom{3}{2}$ -féleképpen lehet kiválasztani azt a két kártyát, amelyeknek azonos lesz a színe.
Ez összesen $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2}$ lehetőség;
- 3 különböző színű: $4 \cdot 3 \cdot 2$ lehetőség.

$$P(C) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \right]}{\binom{32}{5}} = \frac{107520}{201376} = \frac{480}{899} \approx 0,5339.$$

8. Egy tűzijáték befejezéseként fellönek 4 kék, 3 sárga és 5 zöld rakétát egymás után. A rakéták fel-lövési sorrendje véletlenszerű. Az azonos színű rakétákat nem különböztetjük meg.

- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a zöld rakétákat egymás után lövik fel?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a fellőtt rakéták közül az első két rakéta zöld, a harmadik sárga és az utolsó kék lesz?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem lönek ki egymás után két zöld színű rakétát?

Megoldás:

a) A kedvező esetek száma:

Az 5 zöld rakétát egynek tekintve 8 elem ismétléses permutációinak számát kell meghatároz-nunk, ahol 4, 3, 1 az ismétlődő elemek száma. Ennek értéke:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = 280.$$

Az összes eset száma: 12 elem ismétléses permutációinak száma, ahol 4, 3, 5 az ismétlődő elemek száma, ami

$$\frac{12!}{4! \cdot 3! \cdot 5!} = 27720.$$

$$P = \frac{280}{27720} = \frac{1}{99} \approx 0,0101.$$

b) Rögzített helyek: ZZZxxxxxxK. Az x-szel jelölt 8 helyen 3 zöld, 2 sárga és 3 kék rakéta löhe-tő fel. Ezért:

$$P = \frac{\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}}{\frac{12!}{4! \cdot 3! \cdot 5!}} = \frac{560}{27720} = \frac{2}{99} \approx 0,0202.$$

- c) A 3 sárga és a 4 kék rakéta kilövési sorrendje: $\frac{7!}{4!3!} = 35$ -féle lehet. Minden egyes sorrendben 8 hely közül választhatjuk valamelyik 5-öt a zöld rakétáknak, ami $\binom{8}{5} = 56$ -féleképpen lehetséges. Így azoknak a kilövési sorrendeknek a száma, amelyekben nincs két zöld rakéta egymás után: $35 \cdot 56 = 1960$.

$$P = \frac{1960}{27720} = \frac{7}{99} \approx 0,0707.$$

9. A „bergengóc” lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnel játszik, az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnel.

- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha p annak a valószínűsége ($0 < p < 1$), hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz?

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnel játszik.

- b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata lesz valamelyik szelvényén?
c) A telitalalat szempontjából az a)-ban vagy a b)-ben leírt játék kedvezőbb Bandi számára?
(Emelt szintű matematika érettségi 2010. október)

Megoldás:

- a) Legyen az A esemény az, hogy az első húzásnál telitalálatos a szelvény, a B pedig az, hogy a másodiknál. $P(A) = P(B) = p$, valamint az A és B független események.

Legalább egyszer telitalálatos a következő esetekben lehet a szelvény:

Bekövetkezett esemény	Valószínűség
Az első húzásnál telitalálatos a szelvény, a másodiknál nem, tehát az $A \cdot \bar{B}$ esemény következett be.	$P(A \cdot \bar{B}) = p(1 - p) = p - p^2$
Az első húzásnál nem telitalálatos a szelvény, a másodiknál igen, tehát az $\bar{A} \cdot B$ esemény következett be.	$P(\bar{A} \cdot B) = (1 - p)p = p - p^2$
Mindkét húzásnál telitalálatos a szelvény, tehát az $A \cdot B$ esemény következett be.	$P(A \cdot B) = pp = p^2$

E három esemény páronként egymást kizáró, ezért összegük valószínűsége az egyes események valószínűségeinek összegével egyenlő. $P[(A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B) + (A \cdot B)] = 2p - p^2$.

- b) Két esetet kell vizsgálni annak alapján, hogy Bandi a két szelvényét azonosan vagy különbözően töltötte-e ki.

Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a telitalalat esélye p .

Ha Bandi a két szelvényt különbözően tölti ki, akkor a telitalalatának esélye $2p$.

- c) Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2p - p^2$ vagy p a nagyobb. Mivel $0 < p < 1$, ezért $2p - p^2 - p = p(1 - p) > 0$, tehát az első játékszabály kedvezőbb.

Ha Bandi két különböző szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2p - p^2$ vagy $2p$ a nagyobb. Mivel $p^2 > 0$, ezért $2p - p^2 < 2p$, tehát a második játékszabály kedvezőbb.

10. Egy gimnázium 10. évfolyamán sokan járnak szakkörökre. Többek között matematika, fizika és kémia szakkörre is. Véletlenül találkozunk az iskola folyosóján egy tizedikes diákkal, és megkérdezzük tőle, hogy milyen szakkörökre jár. Legyen az M esemény az, hogy ez a tanuló jár matematika szakkörre, F az, hogy fizikára, K pedig az, hogy kémia szakkörre. Ismerjük a következő valószínűségeket:

$$P(M) = 0,5; \quad P(M \cdot F) = 0,25; \quad P(M \cdot F \cdot K) = 0,1; \quad P(F) = 0,4;$$

$$P(M \cdot K) = 0,15; \quad P(K) = 0,33; \quad P(F \cdot K) = 0,2.$$

- a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül legalább az egyik szakkörre jár a tanuló?
 b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan két szakkörre jár?

Megoldás:

- a) Legalább az egyik szakkörre jár, tehát az $M + F + K$ esemény következik be.

$$P(M + F + K) = P(M) + P(F) + P(K) - P(M \cdot F) - P(M \cdot K) - P(F \cdot K) + P(M \cdot F \cdot K).$$

$$P(M + F + K) = 0,73.$$

- b) Pontosán két szakkörre jár $P(M \cdot F) + P(M \cdot K) + P(F \cdot K) - 3 \cdot P(M \cdot F \cdot K) = 0,3$ valószínűséggel.

11. Egy kosárban 25 húsvéti tojást viszünk. A kosárban vannak egyszínű piros tojások és hímes tojások is. Útközben hozzáütődött a kosár egy járókelőhöz, így több tojás megrepedt. A baleset után véletlenszerűen kiválasztva egy tojást a kosárból, 0,2 valószínűséggel veszünk ki éppen maradt piros tojást, 0,2 valószínűséggel választunk ép hímes tojást és ugyancsak 0,2 valószínűséggel megrepedt nem piros színű hímes tojást is. Piros színű hímes tojást $\frac{2}{5}$, repedt piros színű hímes tojást pedig $\frac{7}{25}$ valószínűséggel vehetünk ki. Egy megrepedt nem hímes piros tojást ugyanakkora valószínűséggel választhatunk ki, mint egy repedt, se nem piros, se nem hímes tojást. Mekkora valószínűséggel húzhatunk a kosárból olyan éppen maradt tojást, amelyik nem piros és nem is hímes?

Megoldás:

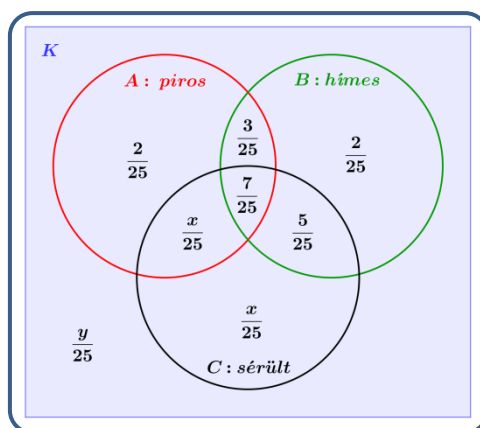
Legyen $K = \{\text{a kosárban lévő tojást húzunk}\}$;

$A = \{\text{piros tojást húzunk}\}$; $B = \{\text{hímes tojást húzunk}\}$; $C = \{\text{repedt tojást húzunk}\}$.

A feladat szövegéből tudjuk:

ép piros tojás	$P(A - C) = 0,2 = \frac{5}{25}$
ép hímes tojás	$P(B - C) = 0,2 = \frac{5}{25}$
megrepedt nem piros színű hímes tojás	$P(B \cdot C - A) = 0,2 = \frac{5}{25}$
piros hímes tojás	$P(A \cdot B) = \frac{2}{5} = \frac{10}{25}$
repedt piros színű hímes tojás	$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{7}{25}$
Egy megrepedt nem hímes piros tojást ugyanakkora valószínűséggel választhatunk ki, mint egy repedt, se nem piros, se nem hímes tojást.	$P(A \cdot C - B) = P(C - (A + B)) = \frac{x}{25}$
Mekkora valószínűséggel húzhatunk a kosárból olyan éppen maradt tojást, amelyik nem piros és nem is hímes?	$P(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) = \frac{y}{25} = ?$

A táblázat alapján kitölthető az alábbi ábra a megfelelő valószínűségekkel.



A beírt valószínűségek összege 1, tehát

$$\frac{2}{25} + \frac{3}{25} + \frac{2}{25} + \frac{7}{25} + \frac{5}{25} + \frac{2x}{25} + \frac{y}{25} = 1.$$

$$19 + 2x + y = 25$$

$$2x + y = 6; x, y \in \mathbb{N}$$

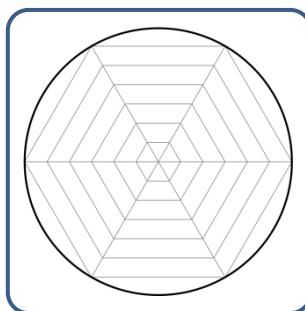
x:	0	1	2	3
y:	6	4	2	0
$\frac{y}{25}$:	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	0

A keresett valószínűség lehetséges értékei:

$$\frac{6}{25}, \quad \frac{4}{25}, \quad \frac{2}{25}, \quad 0.$$

12. Egy pók beszótt hálójával egy 6 cm sugarú kör alakú nyílást az ábrán látható módon. A középpontból indulva sugárirányban 1 cm-enként következnek a pókfonalból készített szabályos hatszögek. A pók észrevette, hogy fennakadt egy muslinca a hálóban. Feltételezzük, hogy a muslinca pontszerű és bárhol a fonalon egyenlő valószínűséggel akadhatott fenn.

- Mekkora a valószínűsége annak, hogy sugárirányú szálon akadt fenn?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy belülről a harmadik hatszögön vagy attól befelé lévő szálon akadt fenn a muslinca?



Megoldás:

A megoldást geometriai valószínűségi mezőben adjuk meg. A választott mérték a hosszmérték. A pókhálót alkotó fonál $\mu(H)$ teljes hosszát a 6 darab sugárirányú szál hosszának és 6 darab szabályos hatszög területének összege adja. A szabályos hatszögek kerületei számtani sorozatot alkotnak.

$$k_1 = 6; d = 6.$$

$$\mu(H) = 6 \cdot 6 + 6 \cdot \frac{6 + 36}{2} = 162 \text{ cm.}$$

- a) Legyen az A esemény az, hogy sugárirányú szálon akadt fenn a muslinca!
 $\mu(A) = 36$, ezért

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{36}{162} = \frac{2}{9}.$$

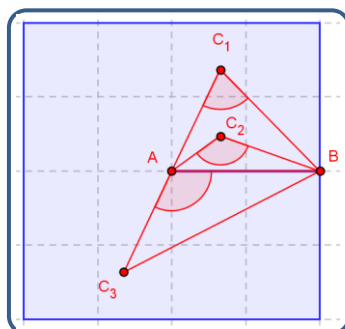
- b) Legyen a B esemény az, hogy belülről a harmadik hatszögon vagy attól befelé lévő szálon akadt fenn a muslinca!

$$\mu(B) = 6 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{6 + 18}{2} = 54,$$

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(H)} = \frac{54}{162} = \frac{1}{3}.$$

13. Egy 4 egység oldalú négyzet középpontja A , egyik oldalának felezőpontja B . Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy az AB egyenesére nem illeszkedő C pontját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az ABC háromszög

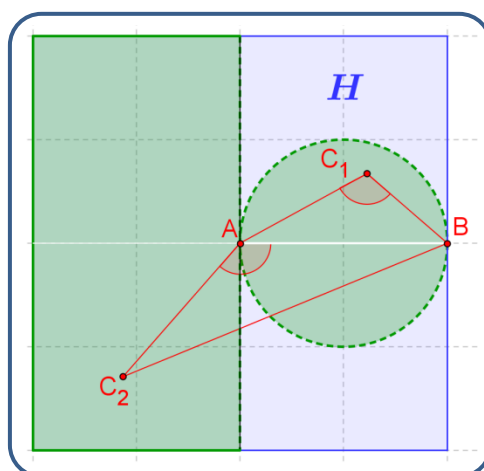
- a) tompaszögű;
 b) derékszögű lesz?

**Megoldás:**

A megoldást geometriai valószínűségi mezőben adjuk meg. A választott mérték a terület. A H eseménytér a 4 egységnyi oldalú négyzet. $\mu(H) = 16$.

- a) Tompaszögű az ABC háromszög, ha valamelyik csúcsánál tompaszöge van.
- Ha az A csúcsnál van a tompaszög, akkor a négyzet bal oldali felén lévő C pontok felelnek meg (kivéve az AB egyenesének pontjait).
 - A B csúcsnál legfeljebb derékszög lehet.
 - A C csúcsnál akkor lesz tompaszög, ha C az AB szakasz fölé rajzolt Thalész-körön belül van (kivéve az AB szakasz pontjait).

Legyen a T esemény az, hogy az ABC háromszög tompaszögű lesz.

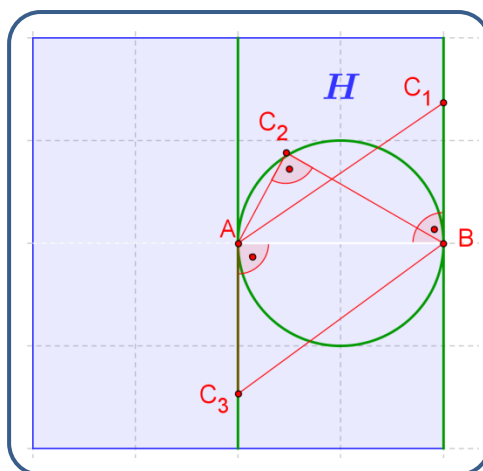


$$\mu(T) = 8 + 1^2 \cdot \pi = 8 + \pi \approx 11,14,$$

$$P(T) = \frac{\mu(T)}{\mu(H)} = \frac{8 + \pi}{16} \approx 0,6963.$$

b) Legyen a D esemény az, hogy az ABC háromszög derékszögű lesz.

Derékszögű lesz az ABC háromszög, ha C az alábbi ábrán látható zöld színű görbék valamely pontja. Mivel e vonalak területe 0, ezért $\mu(D) = 0$, így a keresett valószínűség is $P(D) = 0$.



Megjegyzés:

A D esemény nem lehetetlen esemény, hiszen végtelen sok pont megfelel a feltételnek, de valószínűsége mégis 0.

14. Az $x^2 + bx + 4 = 0$ egyenletben a b paraméter értékét véletlenszerűen választjuk a $[-6; 6]$ intervallumból. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy valós gyöke lesz az egyenletnek?

Megoldás:

Legyen az A esemény az, hogy legfeljebb egy valós gyöke van a másodfokú egyenletnek! Ez akkor következik be, ha a diszkrimináns nempozitív: $b^2 - 16 \leq 0$, azaz, ha $b \in [-4; 4]$.

Geometriai valószínűségi mezőben az eseménytér legyen a $H = [-6; 6]$ intervallum, a választott mérték pedig a hosszmérték. $\mu(H) = 12$. $A = [-4; 4]$ és $\mu(A) = 8$. Ekkor

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{2}{3}.$$

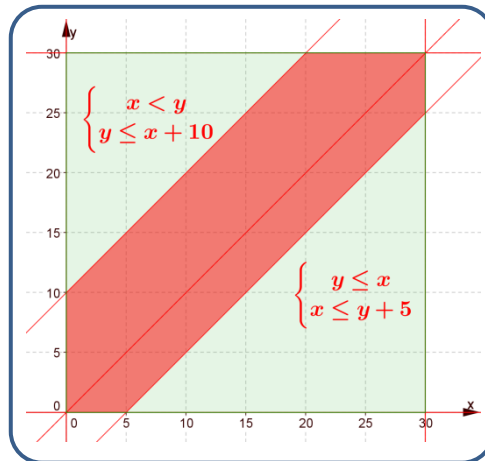
15. Péter és Judit találkozót beszélnek meg este 7 és fél nyolc között. Mivel tömegközlekedési eszközzel utaznak, bizonytalan az érkezésük. Judit 5 percet hajlandó várni Péterre, míg Péter 10 percet Juditra. Mekkora valószínűséggel sikerül találkozniuk?

Megoldás:

Péter 7 óra utáni érkezési ideje x , Judité pedig y perc. $x, y \in [0; 30]$.

- Ha Péter érkezik hamarabb, azaz $x < y$, akkor Péter 10 percig vár, tehát akkor találkoznak, ha $y \leq x + 10$.
- Ha Judit érkezik hamarabb vagy egyszerre érkeznek, azaz $y \leq x$, akkor Judit – ha kell – vár 5 percig, tehát akkor találkoznak, ha $x \leq y + 5$.

Geometriaival valószínűségi mezőben az eseménytér $H = \{(x; y) | x, y \in [0; 30]\}$, a választott mérték a terület. $\mu(H) = 900$.



Legyen az A esemény az, hogy létrejön a találkozó. Az A esemény bekövetkezésének fenti feltételeit az ábra piros színű tartománya jelzi.

$$\mu(A) = 900 - \frac{20^2}{2} - \frac{25^2}{2} = 387,5,$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{387,5}{900} = \frac{31}{72} \approx 0,4306.$$

16. Egy zöldség-kiskereskedőhöz egy banán- és egy mandarinszállítmány érkezett. A szállítás során a mandarinszállítmány negyede vesztett az értékéből, a banánszállítmány 60%-a túlért, a gyümölcsök többi része első osztályú maradt. A kiskereskedő, mielőtt átvette a két szállítmányt, ellenőrizte az áru minőségét. Kiválasztott az egyik szállítmányból véletlenszerűen egy gyümölcsöt. A kiválasztott gyümölcs első osztályúnak bizonyult, ezért visszatették a helyére. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha ugyanabból a gyümölcsfajtából megint kivesz egy darabot, az ismét első osztályú lesz?

Megoldás:

$M = \{\text{mandarint választott}\}; B = \{\text{banánt választott}\};$

$E = \{\text{első osztályú gyümölcsöt választott}\}; H = \{\text{gyümölcsöt választott}\}.$

$P(M) = P(B) = \frac{1}{2}. M + B = H$ és $M \cdot B = \emptyset$, ezért M és B teljes eseményrendszert alkotnak.

Első osztályú gyümölcsöt vett ki, feltéve, hogy az mandarin: $P(E|M) = \frac{3}{4}$ valószínűséggel.

Első osztályú gyümölcsöt vett ki, feltéve, hogy az banán: $P(E|B) = \frac{2}{5}$ valószínűséggel.

Első alkalommal első osztályú gyümölcs kivételének valószínűsége a teljes valószínűség tétele alapján:

$$P(E) = P(E|M) \cdot P(M) + P(E|B) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{40}.$$

Az elsőnek húzott első osztályú gyümölcs

$$P(M|E) = \frac{P(M \cdot E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{23}{40}} = \frac{15}{23}$$

valószínűséggel mandarin.

Az elsőnek húzott első osztályú gyümölcs

$$P(B|E) = \frac{P(B \cdot E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{23}{40}} = \frac{8}{23}$$

valószínűséggel banán.

A második húzás során annak valószínűsége, hogy újra ugyanabból a gyümölcsből első osztályút vesz ki:

$$P(M|E) \cdot P(E|M) + P(B|E) \cdot P(E|B) = \frac{15}{23} \cdot \frac{3}{4} + \frac{8}{23} \cdot \frac{2}{5} = \frac{289}{460} \approx 0,6283.$$

17. Egy számítógépgyár 3 távol-keleti cégtől szerzi be ugyanazt az alaplapt: egy kínai, egy tajvani, és egy koreai cégtől. A kínai beszállítótól az alaplaptok 45%-át, melyek 0,5%-a hibás, a tajvani cégtől az alaplaptok 30%-át, melyből minden 100. hibás. A maradék alaplaptokat a koreai cég gyártja 3,5%-os hibaarányal. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

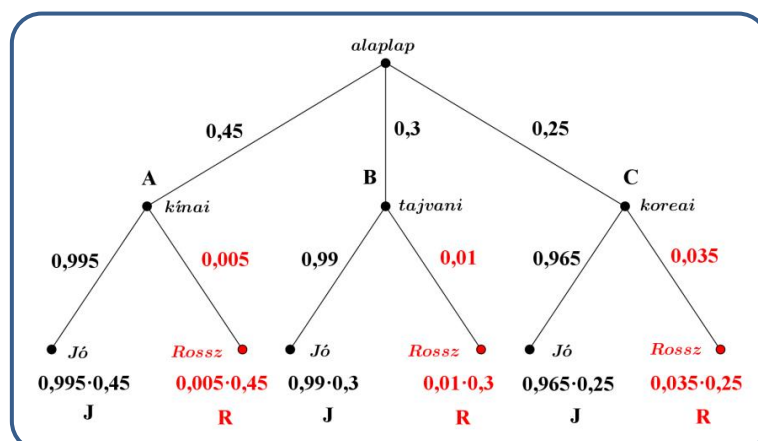
- egy alaplaptot véletlenszerűen kiválasztva, az jó;
- az alaplapt jó, feltéve, hogy kínai a beszállító;
- nem koreai az alaplapt, feltéve, hogy jó;
- jó az alaplapt, feltéve, hogy nem koreai?

Megoldás:

$A = \{\text{kínai az alaplapt}\}$; $B = \{\text{tajvani az alaplapt}\}$; $C = \{\text{koreai az alaplapt}\}$;

$J = \{\text{jó az alaplapt}\}$; $R = \{\text{rossz az alaplapt}\}$; $H = \{\text{beszerzett alaplapt}\}$.

$A + B + C = H$ és A, B, C egymást páronként kizáró események, ezért teljes eseményrendszert alkotnak.



a) A fenti ábra, illetve a teljes valószínűség tétele alapján:

$$P(J) = P(J|A) \cdot P(A) + P(J|B) \cdot P(B) + P(J|C) \cdot P(C) = \\ = 0,995 \cdot 0,45 + 0,99 \cdot 0,3 + 0,965 \cdot 0,25 = 0,986.$$

b) $P(J|A) = 0,995$.

c) $A + B = \{\text{nem koreai az alaplap}\}$.

$$P[(A + B)|J] = \frac{P[(A + B) \cdot J]}{P(J)} = \frac{P(A \cdot J) + P(B \cdot J)}{P(J)} = \frac{0,995 \cdot 0,45 + 0,99 \cdot 0,3}{0,986} = 0,7553.$$

d) Annak valószínűsége, hogy jó az alaplap, feltéve, hogy nem koreai:

$$P[J|(A + B)] = \frac{P[J \cdot (A + B)]}{P(A + B)} = \frac{P(A \cdot J) + P(B \cdot J)}{P(A + B)} = \frac{0,995 \cdot 0,45 + 0,99 \cdot 0,3}{0,45 + 0,3} = 0,993.$$

18. Vizsgálja meg, hogy a lottósorsolásnál kihúzott öt nyerőszámból hány osztható öttel! Jelölje ezt a számot X -szel!

- a) Adja meg az X valószínűségi változó eloszlását, várható értékét, várható abszolút eltérését és szórását!
- b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok között több öttel osztható lesz, mint ötten nem osztható?

Megoldás:

A lottószámok közül 18 db ötten osztható. Az X hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N = 90$, $s = 18$, $n = 5$ paraméterekkel. X lehetséges értékei: 0; 1; 2; 3; 4; 5.

a) X eloszlása:

x_i	$P(X = x_i)$
0	$P(X = 0) = \frac{\binom{18}{0} \cdot \binom{72}{5}}{\binom{90}{5}} = 0,31836$
1	$P(X = 1) = \frac{\binom{18}{1} \cdot \binom{72}{4}}{\binom{90}{5}} = 0,42135$
2	$P(X = 2) = \frac{\binom{18}{2} \cdot \binom{72}{3}}{\binom{90}{5}} = 0,20762$
3	$P(X = 3) = \frac{\binom{18}{3} \cdot \binom{72}{2}}{\binom{90}{5}} = 0,04746$
4	$P(X = 4) = \frac{\binom{18}{4} \cdot \binom{72}{1}}{\binom{90}{5}} = 0,00501$
5	$P(X = 5) = \frac{\binom{18}{5} \cdot \binom{72}{0}}{\binom{90}{5}} = 0,00019$

A várható érték: 1.

A várható abszolút eltérés a fenti táblázat 5 tizedesjegyre kerekített értékeivel számolva: 0,63669.

A szórás: 0,87410.

b) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,05266$.

19. Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyek hibás, mert csorba a széle.

- a) Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!

A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.

- b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes!

A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.

- c) Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?

(Emelt szintű matematika érettségi 2012. május)

Megoldás:

- c) 0 vagy 1 csorba szélű lehet a kiválasztott 10 pohár között. 45 pohár ép, 5 csorba.

$$P = \frac{\binom{45}{10} + \binom{5}{1} \cdot \binom{45}{9}}{\binom{50}{10}} \approx 0,742.$$

- d) Legyen X a kiválasztott 15 pohár között lévő csorbák száma! X binomiális eloszlású valószínűségi változó, $n = 15$ és $p = 0,1$ paraméterekkel.

$$P(X = 2) = \binom{15}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{13} \approx 0,267.$$

- e) Jelölje A azt az eseményt, hogy az első gépsoron készült a pohár, $\bar{A}$ azt, hogy a második gépsoron, B pedig azt az eseményt, hogy selejtes a pohár. A Bayes-tétel alapján:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})} = \frac{0,1 \cdot 0,6}{0,1 \cdot 0,6 + 0,04 \cdot 0,4} \approx 0,789.$$

20. Egy család autóval utazik, és a gyerekek abban versengenek, hogy ki lát meg hamarabb olyan autót, amelyiknek a rendszámában legalább két kilences szerepel. Feltételezzük, hogy csak azok az autók számítanak, amelyek rendszámában három betűt három számjegy követ, és az ilyen rendszámú autók bármelyikével egyenlő valószínűséggel találkozhatnak. Ugyanazzal az autóval többször is találkozhatnak.

- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első meglátott autó rendszámában lesz legalább két kilences?
- b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első 20 autó között egy vagy két ilyen rendszámú autóval találkoznak?
- c) 100 autónként átlagosan hány ilyen rendszámú autóra számíthatnak az út során a gyerekek?
- d) Legalább hány autóval kell találkozniuk ahhoz, hogy 80%-nál nagyobb valószínűséggel lássanak ilyen rendszámot?

Megoldás:

- a) Kedvező esetek száma: Legalább két kilences a 3 számjegy közül $\binom{3}{1} \cdot 9 + 1 = 28$ -féleképpen lehet. Ezek mindegyike előtt 3 betű az angol ábécéből 26^3 féle sorrendben állhat. Tehát $26^3 \cdot 28$ ilyen rendszám lehetséges.

Az összes lehetséges rendszám: $26^3 \cdot 10^3$ féle lehet.

$$P = \frac{26^3 \cdot 28}{26^3 \cdot 10^3} = 0,028.$$

- b) Legyen az X valószínűségi változó értéke az első 20 autó között előforduló ilyen rendszámúak száma! X binomiális eloszlású $n = 20$ és $p = 0,028$ paraméterekkel.

$$P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{20}{1} \cdot 0,028^1 \cdot 0,972^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,028^2 \cdot 0,972^{18} \approx 0,4158.$$

- c) Legyen az Y valószínűségi változó értéke a 100 autó között előforduló ilyen rendszámúak száma! Y binomiális eloszlású $n = 100$ és $p = 0,028$ paraméterekkel. Ennek várható értéke adja meg a választ: $M(Y) = np = 100 \cdot 0,028 = 2,8$. Tehát kb. 3 ilyen autóra számíthatnak 100 autónként.

- d) Annak a valószínűsége, hogy n autó egyikének sem ilyen a rendszáma: $0,972^n$. A keresett valószínűség ezen esemény komplementerének a valószínűsége: $P = 1 - 0,972^n$.

Így az $1 - 0,972^n > 0,8$ egyenlőtlenség megoldása adja az eredményt: $n > 56,67$. Mivel n pozitív egész, ezért legalább 57 autóval kell találkozniuk.

21. Egy előzetes felmérés szerint egy 1200 fős faluban 600-an a kormánypártra szavaznának, 400-an más pártra és 200-an még nem tudják, vagy nem mennének el szavazni. Egy közvélemény-kutató cég véletlenszerűen kiválasztott 20 embert fog megkérdezni az előzetes felmérés szerinti biztos szavazók közül arról, hogy a kormánypártra szavazna-e, vagy nem. A cég matematikusai azt akarják kiszámolni, mekkora a valószínűsége annak, hogy

- a) éppen hatan nem fognak a kormánypártra szavazni a húszból;
b) legalább ketten a kormánypártra fognak szavazni.

A matematikusok egyik része a visszatevés nélküli modellel (hipergeometrikus eloszlást feltételezve), másik része pedig a visszatevéses modellel (binomiális eloszlást feltételezve) számol. Mekkora lesz az eltérés az egyes kérdésekre kapott eredmények között a két matematikus csoport esetében?

Megoldás:

a) Éppen hatan nem fognak a kormánypártra szavazni a húszból.	
hipergeometrikus eloszlással	binomiális eloszlással
paraméterek: $N = 1000; s = 400; n = 20$.	paraméterek: $n = 20; p = 0,4$.
$P(X = 6) = \frac{\binom{400}{6} \cdot \binom{600}{14}}{\binom{1000}{20}} \approx 0,1245059$.	$P(Y = 6) = \binom{20}{6} \cdot 0,4^6 \cdot 0,6^{14} \approx 0,1244117$.
Az eltérés: $ P(X = 6) - P(Y = 6) = 0,1245059 - 0,1244117 = 9,42 \cdot 10^{-5}$.	

b) Legalább ketten a kormánypártra fognak szavazni:	
hipergeometrikus eloszlással	binomiális eloszlással
paraméterek: $N = 1000; s = 600; n = 20$	paraméterek: $n = 20; p = 0,6$
$P(V \geq 2) = 1 - P(V < 2)$ $P(V = 0) = \frac{\binom{600}{0} \cdot \binom{400}{20}}{\binom{1000}{20}} \approx 8,21356 \cdot 10^{-9}.$ $P(V = 1) = \frac{\binom{600}{1} \cdot \binom{400}{19}}{\binom{1000}{20}} \approx 2,58695 \cdot 10^{-7}.$ $P(V \geq 2) \approx 0,9999997331.$	$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2)$ $P(Z = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^{20} \approx 1,09951 \cdot 10^{-8}.$ $P(Z = 1) = \binom{20}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^{19} \approx 3,29853 \cdot 10^{-7}.$ $P(Z \geq 2) \approx 0,9999996592.$
Az eltérés: $ P(V \geq 2) - P(Z \geq 2) = 0,9999997331 - 0,9999996592 = 7,39 \cdot 10^{-8}.$	
A két matematikus csoport által kapott eredmények eltérése az a) esetben 10^{-5} , a b) esetben 10^{-8} nagyságrendűnek adódott, ami alátámasztja, hogy ha egy hipergeometrikus eloszlás esetén n lényegesen kisebb, mint N és s , akkor számolhatunk n és $p = \frac{s}{N}$ paraméterű binomiális eloszlással.	

Megjegyzés:

A hipergeometrikus eloszlás helyettesíthetősége a fenti feltételek mellett azért fontos, mert

- lényegesen egyszerűbb a binomiális eloszlás képletével számolni;
- ha az N elemszámot nem ismerjük, csak a p valószínűséget, akkor nem is tudunk a hipergeometrikus eloszlás képletével számolni;
- ha nem tudjuk, nem akarjuk figyelembe venni p változását, vagy csak elhanyagolható mértékben változik az egymást követő kiválasztások során, akkor a feltételek teljesülése esetén számolhatunk a binomiális eloszlással.

Ha nem tekinthetünk el p változásától a kihúzások során, akkor nem használhatjuk a binomiális eloszlást.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Egy 20 oldalú dobókozaéder oldalaira 1-től 20-ig vannak felírva az egész számok. Ezzel dobva a kidobott számot vizsgáljuk. Tekintsük a következő eseményeket!

$A = \{\text{legfeljebb 15-öt dobunk}\};$

$B = \{\text{páros számot dobunk}\};$

$C = \{\text{összetett számot dobunk}\};$

$D = \{\text{prímszámot dobunk}\};$

$E = \{\text{legalább 8-at dobunk}\}.$

- a) Vannak-e köztük egymást kizáró események?
b) Adja meg a fenti események komplementer eseményeit!
c) Adja meg a következő eseményekhez tartozó kimenetek által alkotott halmazokat, majd az adott események valószínűségeit is!

$$A + \overline{D};$$

$$\overline{A} \cdot B \cdot C;$$

$$A \cdot E;$$

$$\overline{B + C}.$$

2. Függetlenek-e az A és B események, ha $P(A + B) = 0,76$; $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$?
3. Egy 32 lapos magyarkártya-pakliból véletlenszerűen kiválasztunk 5 lapot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között lesz
- a) legalább két zöld;
b) pontosan két király és két zöld;
c) három zöld és két piros, ha ebben az esetben a kihúzás sorrendje is számít?
4. Egy vásárló 5000 Ft-os zsebszámológépet akar venni. A zsebében van 1 db 10000 Ft-os és 5 db 1000 Ft-os bankjegy. Tegyük fel, hogy egyenlő valószínűséggel veszi ki a bankjegyeket a zsebéből.
- a) A vásárló megállapodik a kereskedővel, hogy egy darab véletlenszerűen kivett bankjeggyel fizet a számológépért. Igazságos-e az ajánlata?
b) A vásárló megállapodik a kereskedővel, hogy két darab véletlenszerűen kivett bankjeggyel fizet a számológépért. Igazságos-e az ajánlata?
5. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy közelebb vannak egymáshoz, mint az egységszakasz végpontjaihoz?
6. Ismét megemelték a buszjegyek árát, ezért Fekete Péter elhatározta, hogy a következő héten munkába menet reggelente nem fog lyukasztani egyszer sem. A problémát csak az jelenti, hogy minden nap 0,3 valószínűséggel száll fel ellenőr a buszra, és ha már felszállt, akkor 95% eséllyel el is szokta kapni a potyautast.
- a) Mekkora valószínűséggel ússza meg Fekete Péter a büntetést a következő hét munkanapjain?
b) Mire számíthat, hányszor fogják megbüntetni a következő hét során?
c) Mekkora valószínűséggel büntetik meg pontosan kétszer?
d) Mekkora valószínűséggel kapják el először éppen az utolsó napon, pénteken?
e) Feltéve, hogy Fekete Pétert egyszer sem büntették meg, mekkora valószínűséggel volt minden nap ellenőr a buszon?

7. Egy esős vidéken a meteorológusok megfigyelései alapján megállapították a nyári hónapokra vonatkozólag, hogy júniusban 45%, júliusban 20% és augusztusban 15% valószínűséggel esik az eső. Figyelembe véve a nyári hónapok napjainak számát, adja meg, mekkora annak a valószínűsége, hogy egy nyári napon
- a) esik az eső;
 - b) június van, feltéve, hogy esik az eső;
 - c) nem augusztus van, feltéve, hogy nem esik az eső?

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Egy 20 oldalú dobóikozaéder oldalaira 1-től 20-ig vannak felírva az egész számok. Ezzel dobva a kidobott számot vizsgáljuk. Tekintsük a következő eseményeket:

$$A = \{\text{legfeljebb 15-öt dobunk}\};$$

$$B = \{\text{páros számot dobunk}\};$$

$$C = \{\text{összetett számot dobunk}\};$$

$$D = \{\text{prímszámot dobunk}\};$$

$$E = \{\text{legalább 8-at dobunk}\}.$$

- a) Vannak-e köztük egymást kizáró események?
b) Adja meg a fenti események komplementer eseményeit!
c) Adja meg a következő eseményekhez tartozó kimenetek által alkotott halmazokat, majd az adott események valószínűségeit is!

$$A + \bar{D};$$

$$\bar{A} \cdot B \cdot C;$$

$$A \cdot E;$$

$$\overline{B + C}.$$

Megoldás:

- a) Egymást kizáróak: C és D . Több nincs.

- b) A komplementerek:

$$\bar{A} = \{\text{legalább 16-ot dobunk}\};$$

$$\bar{B} = \{\text{páratlant dobunk}\};$$

$$\bar{C} = \{\text{1-et vagy prímszámot dobunk}\};$$

$$\bar{D} = \{\text{1-et vagy összetett számot dobunk}\};$$

$$\bar{E} = \{\text{legfeljebb 7-et dobunk}\}.$$

- c) $A + \bar{D} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 18; 20\};$ $P(A + \bar{D}) = \frac{9}{10}.$
 $\bar{A} \cdot B \cdot C = \{16; 18; 20\};$ $P(\bar{A} \cdot B \cdot C) = \frac{3}{20}.$
 $A \cdot E = \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\};$ $P(A \cdot E) = \frac{2}{5}.$
 $\overline{B + C} = \{1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\};$ $P(\overline{B + C}) = \frac{2}{5}.$

2. Függetlenek-e az A és B események, ha $P(A + B) = 0,76$; $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$?

Megoldás:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \text{ ahonnan } P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A + B) = 0,24.$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24 = P(A \cdot B), \text{ tehát függetlenek.}$$

3. Egy 32 lapos magyar kártya-pakliból véletlenszerűen kiválasztunk 5 lapot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között lesz
- a) legalább két zöld;
b) pontosan két király és két zöld;
c) három zöld és két piros, ha ebben az esetben a kihúzás sorrendje is számít?

Megoldás:

- a) A komplementer esemény valószínűségének segítségével felírható:

$$P = 1 - \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{24}{5} + \binom{8}{1} \cdot \binom{24}{4}}{\binom{32}{5}} = \frac{127512}{201376} \approx 0,6332.$$

- b) A kedvező esetek meghatározásakor külön kell vizsgálni azt, ha kiválasztottuk a zöld királyt, illetve ha nem.

Ha a zöld királyt kiválasztottuk: $1 \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{21}{2} = 4410$ eset.

(zöld király; még egy zöld; még egy király; két nem zöld és nem király)

Ha a zöld királyt nem választottuk ki: $\binom{7}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{21}{1} = 1323$ eset.

(két zöld, de nem király; két nem zöld király; egy nem zöld és nem király)

$$P = \frac{4410 + 1323}{\binom{32}{5}} = \frac{5733}{201376} \approx 0,0285.$$

- c) Három zöld és két piros kihúzásának a valószínűsége, ha a kihúzás sorrendje is számít

$$P = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot 5!}{\frac{32!}{27!}} = \frac{188160}{24165120} \approx 0,0078.$$

Megjegyzés:

A keresett valószínűség értéke akkor is ugyanekkora, ha a kihúzás sorrendje nem számít:

$$P = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{32}{5}}.$$

4. Egy vásárló 5000 Ft-os zsebszámológépet akar venni. A zsebében van 1 db 10000 Ft-os és 5 db 1000 Ft-os bankjegy. Tegyük fel, hogy egyenlő valószínűséggel veszi ki a bankjegyeket a zsebéből.

- a) A vásárló megállapodik a kereskedővel, hogy egy darab véletlenszerűen kivett bankjeggyel fizet a számológépért. Igazságos-e az ajánlata?
- b) A vásárló megállapodik a kereskedővel, hogy két darab véletlenszerűen kivett bankjeggyel fizet a számológépért. Igazságos-e az ajánlata?

Megoldás:

- a) Jelöljük az
- X
- valószínűségi változóval a kivett pénz értékét!

X eloszlása alapján a várható értéke:

x_i	$P(X = x_i)$
1000	$\frac{5}{6}$
10000	$\frac{1}{6}$

$$M(X) = 1000 \cdot \frac{5}{6} + 10000 \cdot \frac{1}{6} = 2500 \text{ Ft.}$$

Tehát ebben az esetben a vásárló előnyösebb helyzetben van, mint a kereskedő, mert várhatóan áron alul veheti meg a számológépet, nem pedig ráfizetéssel.

b) X eloszlása alapján a várható értéke:

x_i	$P(X = x_i)$
2000	$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{3}$
11000	$\frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{3}$

$$M(X) = 2000 \cdot \frac{2}{3} + 11000 \cdot \frac{1}{3} = 5000 \text{ Ft. Tehát ez az ajánlat igazságos.}$$

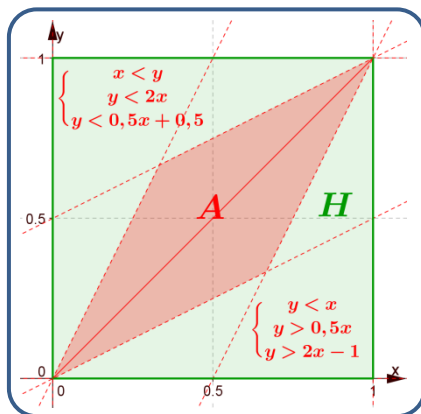
5. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy közelebb vannak egymáshoz, mint az egységszakasz végpontjaihoz?

Megoldás:

Legyen az egységszakasz a derékszögű koordináta-rendszer x -tengelyén a $[0; 1]$ intervallum. Ebben a kiválasztott két pont 0-tól való távolsága x és y ! x és y a következő feltételeket kell, hogy kielégítse:

- Ha $0 < x < y < 1$, akkor $y - x < x$ és $y - x < 1 - y$ kell, hogy teljesüljön.
- Ha $0 < y < x < 1$, akkor $x - y < y$ és $x - y < 1 - x$ kell, hogy teljesüljön.

Geometriaival valószínűségi mezőben legyen az eseménytér: $H = \{(x; y) | x, y \in]0; 1[\}$. A választott mérték a terület. $\mu(H) = 1$. Legyen az A eseménynek megfelelő pontthalmaz a fenti feltételeket teljesítő $(x; y)$ koordinátájú pontok halmaza a H -n. Belátható, hogy az A pontthalmazt az ábrán piros színnel kitöltött rombusz belső pontjai alkotják.



Ennek a rombusznak az egységnégyzettel nem közös csúcsai súlypontok abban a két egyenlőszárú derékszögű háromszögben, amelyre a négyzetet vágja az origóból induló átlója. Egy háromszög súlypontját a csúcsokkal összekötő szakaszok három egyenlő területű háromszögre bontják. Ezt felhasználva adódik, hogy az A halmaznak megfelelő rombusz területe: $\mu(A) = \frac{1}{3}$. Így a keresett valószínűség

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

6. Ismét megemelték a buszjegyek árát, ezért Fekete Péter elhatározta, hogy a következő héten munkába menet reggelente nem fog lyukasztani egyszer sem. A problémát csak az jelenti, hogy minden nap 0,3 valószínűséggel száll fel ellenőr a buszra, és ha már felszállt, akkor 95% eséllyel el is szokta kapni a potyautast.
- Mekkora valószínűséggel ússza meg Fekete Péter a büntetést a következő hét munkanapjain?
 - Mire számíthat, hányszor fogják megbüntetni a következő hét során?
 - Mekkora valószínűséggel büntetik meg pontosan kétszer?
 - Mekkora valószínűséggel kapják el először éppen az utolsó napon, pénteken?
 - Feltéve, hogy Fekete Pétert egyszer sem büntették meg, mekkora valószínűséggel volt minden nap ellenőr a buszon?

Megoldás:

Jelölje az X valószínűségi változó azt, hogy hányszor büntetik meg az 5 nap alatt Fekete Pétert. X binomiális eloszlású, $n = 5$ és $p = 0,3 \cdot 0,95 = 0,285$ paraméterekkel.

- $P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0,285^0 \cdot 0,715^5 \approx 0,1869$ valószínűséggel nem fogják megbüntetni.
- $M(X) = np = 5 \cdot 0,285 = 1,425$. Tehát számíthat rá, hogy 1-szer megbüntetik.
- $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,285^2 \cdot 0,715^3 \approx 0,2969$ valószínűséggel fogják pontosan kétszer megbüntetni.
- $P = 0,715^4 \cdot 0,285 \approx 0,0745$ valószínűséggel büntetik meg először éppen az utolsó napon.
- Legyen A az az esemény, hogy minden nap volt ellenőr a buszon, B pedig az, hogy a héten egyszer sem büntetik meg Fekete Pétert.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0,05^5 \cdot 0,3^5}{0,1869} \approx 4,06 \cdot 10^{-9}.$$

7. Egy esős vidéken a meteorológusok megfigyelései alapján megállapították a nyári hónapokra vonatkozólag, hogy júniusban 45%, júliusban 20% és augusztusban 15% valószínűséggel esik az eső. Figyelembe véve a nyári hónapok napjainak számát, adja meg, mekkora annak a valószínűsége, hogy egy nyári napon
- esik az eső;
 - június van, feltéve, hogy esik az eső;
 - nem augusztus van, feltéve, hogy nem esik az eső?

Megoldás:

$E = \{\text{esős nap}\}; A = \{\text{júniusi nap}\}; B = \{\text{júliusi nap}\}; C = \{\text{augusztusi nap}\}.$

- egy nyári napon esik az eső:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|A) \cdot P(A) + P(E|B) \cdot P(B) + P(E|C) \cdot P(C) = \\ &= 0,45 \cdot \frac{30}{92} + 0,2 \cdot \frac{31}{92} + 0,15 \cdot \frac{31}{92} = \frac{487}{1840} \approx 0,2647. \end{aligned}$$

- június van, feltéve, hogy esik az eső:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cdot E)}{P(E)} = \frac{270}{487} \approx 0,5544.$$

c) nem augusztus van, feltéve, hogy nem esik az eső:

$$P[(A + B)|\bar{E}] = \frac{P[(A + B) \cdot \bar{E}]}{P(\bar{E})} = \frac{P(A \cdot \bar{E}) + P(B \cdot \bar{E})}{1 - P(E)} = \frac{0,55 \cdot \frac{30}{92} + 0,8 \cdot \frac{31}{92}}{\frac{1353}{1840}} = \frac{826}{1353} \approx 0,6105.$$

