

25. Matematikai logika, bizonyítási módszerek

I. Elméleti összefoglaló

Logikai műveletek

A matematikai logika **állításokkal** foglalkozik. Az állítás (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy **igaz (I)** vagy **hamis (H)**, ezt az állítás **logikai értékének** nevezzük. Az állításokat általában latin nagybetűvel jelöljük, például „ A : Ma délután moziba megyek.”, illetve „ B : Holnap kirándulok.”

Egy vagy több állításból **logikai műveletek** felhasználásával újabb állításokat hozhatunk létre. A művelet lehet **egyváltozós** (tagadás) vagy **kétváltozós** (és, vagy, ha-akkor, akkor és csak akkor).

Egyváltozós logikai művelet:

- **„nem”** (negáció, tagadás): az A állítás tagadása pontosan akkor igaz, ha A hamis. Jele: $\neg A$.

Kétváltozós logikai műveletek:

- **„és”** (konjunkció): az „ A és B ” állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás is igaz. Jele: $A \wedge B$.

A köznyelvben a **„vagy”** kötőszót többféle jelentésben használjuk attól függően, hogy megengedjük-e mindkét feltétel együttes teljesülését vagy sem. Például a „Holnap vagy holnapután strandolni megyek.” állítást akkor is igaznak fogadjuk el, ha mindkét említett napon strandolok, viszont a „Ma este 7 órára színházba vagy moziba megyek.” állítás mindkét fele egyszerre nem teljesülhet, ezért ez csak úgy lehet igaz, ha pontosan az egyik része teljesül. (Ezt jelezhetjük a következő megfogalmazással is: „Ma este 7 órára vagy színházba, vagy moziba megyek.”) A két eset megkülönböztetésére a matematikában kétféle „vagy”-ot használunk: az előbbi példa esetében megengedőt, az utóbbi esetében kizárót. Ha ezt a különbséget a köznyelvben is hangsúlyozni akarjuk, akkor megtehetjük, hogy a „megengedő vagy” esetében egy **„vagy”** kötőszót, a „kizáró vagy” esetében páros **„vagy-vagy”** kötőszót használunk, de a mindennapi élőbeszédben ezek jelentése nem mindig egyértelmű.

- **„megengedő vagy”** (diszjunkció), a köznyelvben **„vagy”**: az „ A vagy B ” állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás közül legalább az egyik igaz. Jele: $A \vee B$. Ha egy matematikai szövegben „vagy” szerepel, azt általában „megengedő vagy”-ként szoktuk értelmezni.
- **„kizáró vagy”** (antivalencia): az „ A kizáró vagy B ” (a köznyelvben esetleg: „vagy A , vagy B ”) állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás közül pontosan az egyik igaz (tehát mindkettő nem). Jele: $A \oplus B$ (esetleg $A \Delta B$).
- **„ha-akkor”** (implikáció): a „ha A , akkor B ” állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás is igaz, illetve ha az A állítás hamis és a B állítás tetszőleges. (Másképpen: a „ha A , akkor B ” állítás pontosan akkor hamis, ha az A állítás igaz és a B állítás hamis.) Jele: $A \Rightarrow B$ (esetleg $A \rightarrow B$).
- **„akkor és csak akkor”** (ekvivalencia): a „ha A , akkor és csak akkor B ” állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás közül egyszerre vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis. (Más-

képpen: a „ha A , akkor és csak akkor B ” állítás pontosan akkor igaz, ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$.)
 Jele: $A \Leftrightarrow B$ (esetleg $A \leftrightarrow B$).

A műveleteket **logikai értéktáblázat** segítségével is definiálhatjuk, amelyben felsoroljuk, hogy az alapállítás(ok) egyes logikai értékeihez a művelet milyen logikai értéket rendel. Egy n -változós művelet esetében a logikai értéktáblázatnak 2^n sora van, hiszen minden változó kétféle értéket vehet fel. A hosszabb, összetettebb kifejezéseket a gyakorlatban több lépésben (oszlopban) szoktuk kiértékelni, ahol a teljes kifejezés értékéhez általában az utolsó oszlopban jutunk el, ekkor az eredeti kifejezés értéktáblázatának a táblázat ezen utolsó oszlopát tekintjük.

Az egyváltozós logikai művelet értéktáblázata:

A	$\neg A$
I	H
H	I

A kétváltozós logikai műveletek értéktáblázata:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
I	I	I	I	H	I	I
I	H	H	I	I	H	H
H	I	H	I	I	I	H
H	H	H	H	H	I	I

Az értéktáblázat segítségével bonyolultabb kifejezéseket is kiértékelhetünk, illetve egyszerűbb alakra hozhatunk. Például az ekvivalencia és az implikáció kapcsolatát kifejezhetjük a következőképpen:

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

A negáció, a konjunkció és a diszjunkció között fennállnak a **De Morgan-azonosságok**:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B, \text{ illetve } \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B.$$

Tetszőleges A állításra fennállnak még a következő azonosságok:

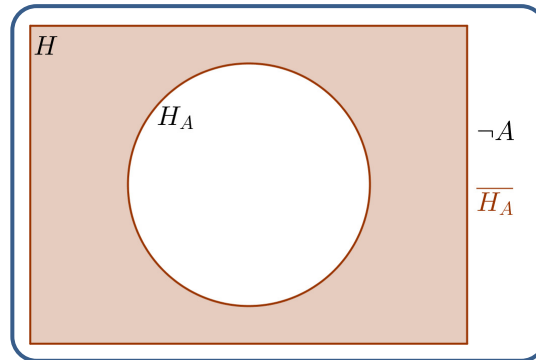
- $\neg(\neg A) = A$,
- $A \wedge \neg A$ értéke mindig hamis,
- $A \vee \neg A$ értéke mindig igaz.

A halmazműveletek és a logikai műveletek kapcsolata

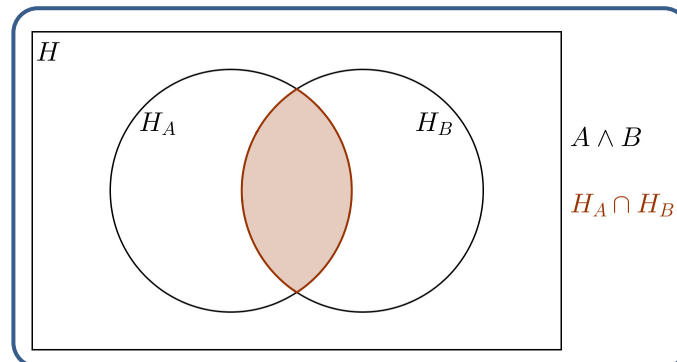
Tekintsük az összes állítás halmazát mint alaphalmazt (H). Ekkor minden A állítás megfeleltethető a H halmaz azon H_A részhalmazának, amelybe azok az állítások tartoznak, amelyek igazsága esetén az A állítás igaz. (Például az „ A : A családjában legfeljebb 2 gyerek van.” állítás esetén a következő kijelentések mind elemei a H_A részhalmaznak: „ A családjában pontosan 2 gyerek van.”, „ A családjában pontosan 1 gyerek van.”, „ A családjában pontosan két fiúgyermek van és lánygyermek nincsen.” stb.)

Ezen az alaphalmazon a korábban felsorolt logikai műveletek a következőkben felsorolt halmazműveleteknek feleltethetők meg (az ábrákon színezéssel jelezzük azokat a részhalmazokat, amelyek esetén a művelet logikai értéke igaz).

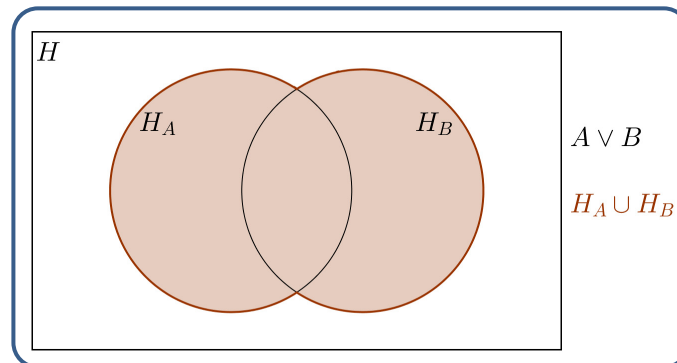
- A tagadás a komplementerképzésnek: $\neg A$ -nak megfelel a H_A halmaz H -ra vett komplementere ($\overline{H_A}$).



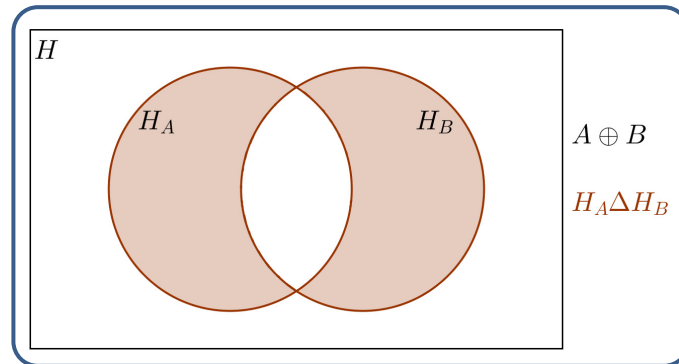
- Az „és” a metszetképzésnek: $A \wedge B$ -nek megfelel a H_A és a H_B halmazok metszete ($H_A \cap H_B$).



- A „megengedő vagy” az unióképzésnek: $A \vee B$ -nek megfelel a H_A és a H_B halmazok uniója ($H_A \cup H_B$).



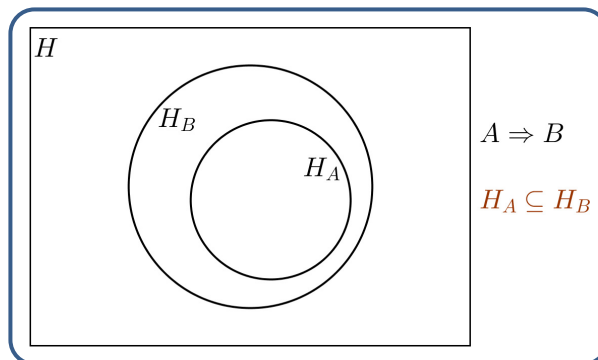
- A „kizáró vagy” a szimmetrikus differenciának: $A \oplus B$ -nek megfelel a H_A és a H_B halmazok szimmetrikus differenciája ($H_A \Delta H_B$, azaz a csak A -ba, illetve a csak B -be tartozó elemek uniója).



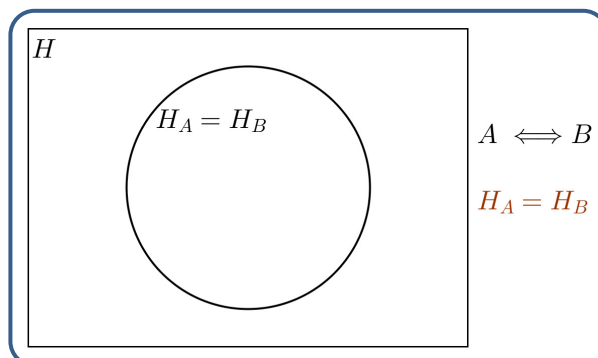
Megjegyzés: Ha speciálisan az A állítás éppen azt mondja, hogy egy x szám eleme egy P halmaznak, a B állítás pedig azt mondja, hogy ugyanazon x szám eleme egy Q halmaznak, akkor közvetlenül is megkapjuk az előzőekben ábrázolt komplementer, metszet, unió és szimmetrikus differencia halmazműveleteket (hiszen például $A \wedge B$ azt mondja, hogy az x szám eleme a P és a Q halmazok metszetének).

A fennmaradó két logikai művelet közvetlenül nem feleltethető meg halmazműveleteknek, azonban jelentésüket a halmazelmélet fogalmaival (részhalmaz, egyenlőség) is szemléltethetjük:

- A „ha-akkor” a tartalmazás megfelelője: $A \Rightarrow B$ esetén a H_A halmaz részhalmaza a H_B halmaznak ($H_A \subseteq H_B$).



- Az „akkor és csak akkor” a két halmaz egyenlőségének megfelelője: $A \Leftrightarrow B$ esetén a H_A és a H_B halmazok megegyeznek ($H_A = H_B$).



Szükséges és elégséges feltétel

A „ha-akkor” formában megfogalmazott $A \Rightarrow B$ állítások esetében A -t feltételnek (premissza), B -t következménynek (konklúzió) is nevezzük.

Definíció: Ha $A \Rightarrow B$, vagyis az A állítás teljesülése esetén biztosan teljesül a B is, akkor azt mondjuk, hogy **az A állítás a B állításnak elégséges feltétele**. (Ekkor ugyanis B igazságának bizonyításához elég A -t igazolni.)

Például: „ A : Az n szám 6-ra végződik.” és „ B : Az n szám páros.” Ekkor $A \Rightarrow B$, hiszen ha egy szám 6-ra végződik, akkor biztosan páros. Viszont a B állítás úgy is lehet igaz, ha A nem teljesül, hiszen nem csak a 6-ra végződő számok párosak. Tehát a 6-ra végződés egy szám párosságának **elégséges, de nem szükséges** feltétele.

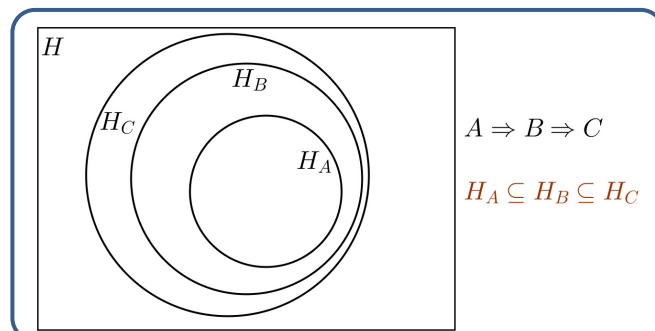
Definíció: Ha $A \Rightarrow B$, vagyis az A állítás teljesülése esetén biztosan teljesül a B is, akkor azt mondjuk, hogy **a B állítás az A állításnak szükséges feltétele**. (Ekkor ugyanis ha A igaz, akkor szükségképpen B is, másképpen fogalmazva A nem lehet igaz B teljesülése nélkül.)

Például: „ A : Az $ABCD$ négyszög négyzet.” és „ B : Az $ABCD$ négyszög minden szöge derékszög.”. Ekkor $A \Rightarrow B$, hiszen ha egy négyszög négyzet, akkor minden szöge derékszög (vagyis téglalap). Ahhoz, hogy egy négyszög négyzet legyen, szükséges, hogy minden szöge derékszög legyen. Viszont abból még, hogy egy négyszög minden szöge derékszög, nem következik, hogy négyzet. Tehát az, hogy egy négyszög minden szöge derékszög, **szükséges, de nem elégséges** feltétele annak, hogy a négyszög négyzet legyen.

Bizonyításokban felhasználhatjuk egy állítás hamisságának igazolására egy szükséges feltétel hiányát. Ha ugyanis $A \Rightarrow B$ és B nem teljesül, akkor A sem teljesülhet, hiszen így B -nek igaznak kellene lennie, így ellentmondásra jutnánk (lásd később az indirekt bizonyítást). Például: „ A : Az n szám négyzetszám.” és „ B : Az n szám 0-ra, 1-re, 4-re, 5-re, 6-ra vagy 9-re végződik.” Ekkor $A \Rightarrow B$, hiszen a négyzetszámok utolsó számjegye csak 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet (**szükséges, de nem elégséges** feltétel). Ha tehát például egy n szám 7-re végződik, akkor n biztosan nem lehet négyzetszám (a szükséges feltétel nem teljesül).

Megjegyzés: Természetesen, ha A elégséges feltétele B -nek, akkor B szükséges feltétele A -nak. Így az eddigi példák meg is fordíthatóak, például az első esetben: A 6-ra végződés egy szám párosságának elégséges (de nem szükséges) feltétele. Megfordítva: Egy szám párossága a szám 6-ra végződésének szükséges (de nem elégséges) feltétele.

Megjegyzés: Ha egy B állításnak A elégséges, C pedig szükséges feltétele (azaz $A \Rightarrow B \Rightarrow C$), akkor az előző oldalak halmazelméleti jelöléseivel ezt a $H_A \subseteq H_B \subseteq H_C$ módon szemléltethetjük. Például: „ A : Az n szám két 0-ra végződik.”, „ B : Az n szám 20-szal osztható.” és „ C : Az n szám páros.”



Definíció: Ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ (vagyis $A \Leftrightarrow B$), akkor azt mondjuk, hogy **az A állítás a B állításnak szükséges és elégséges feltétele.**

Például: „ A : Az x szám osztható 6-tal.” és „ B : Az x szám páros és osztható 3-mal.” Ekkor $A \Leftrightarrow B$, tehát a 6-tal oszthatóságnak **szükséges és elégséges** feltétele a párosság és a 3-mal oszthatóság együttes teljesülése.

Megjegyzés: Természetesen, ha A szükséges és elégséges feltétele B -nek, akkor B is szükséges és elégséges feltétele A -nak.

Állítások tagadása

Egy A állítás tagadását ($\neg A$) a legegyszerűbben a „nem” tagadószóval fogalmazhatjuk meg. Például „ A : Ma hétfő van.” esetén „ $\neg A$: Ma nem hétfő van.”, esetleg „ $\neg A$: Nem igaz, hogy ma hétfő van.” Elviekben ez a módszer bonyolultabb állításokra is alkalmazható, például „ B : Ha esik az eső és nincs nálam esernyő, akkor nem megyek ki az utcára vagy esőkabátot veszek.” tagadása is megfogalmazható „ $\neg B$: Nem igaz, hogy ha esik az eső és nincs nálam esernyő, akkor nem megyek ki az utcára vagy esőkabátot veszek.” formában. Ezt azonban nyelvileg nehezebb értelmezni, így az egyes (kétváltozós) logikai műveletek tagadásait külön-külön is megadjuk, továbbá a feladatokban is kerüljük a „nem igaz, hogy” kifejezéssel történő tagadást.

- Két „és”-sel összekötött állítás tagadásakor az állítások tagadásait „vagy”-gyal kötjük össze: $A \wedge B$ tagadása $\neg A \vee \neg B$. Például: „Vettem tejet és kölcsönkértem a szomszéd biciklijét.” tagadása „Nem vettem tejet vagy nem kértem kölcsön a szomszéd biciklijét.”
- Két „vagy”-gyal összekötött állítás tagadásakor az állítások tagadásait „és”-sel kötjük össze: $A \vee B$ tagadása $\neg A \wedge \neg B$. Például: „Születésnapomon elmegyünk cirkuszba vagy megnézünk egy filmet.” tagadása „Születésnapomon nem megyünk el cirkuszba és nem nézünk meg egy filmet.” (esetleg „Születésnapomon se cirkuszba nem megyünk el, se filmet nem nézünk.”)
- Két „kizáró vagy”-gyal összekötött állítás tagadásakor az állításokat (vagy az állítások tagadásait) „akkor és csak akkor”-ral kötjük össze: $A \oplus B$ tagadása $A \Leftrightarrow B$ (ami ugyanazt jelenti, mint $\neg A \Leftrightarrow \neg B$). Például: „Idén vagy a tengerparton, vagy a hegyek között nyaralunk.” tagadása „Idén akkor és csak akkor nyaralunk a tengerparton, ha a hegyek között is.” (esetleg „Idén akkor és csak akkor nem nyaralunk a tengerparton, ha a hegyek között sem.”)
- Két „akkor és csak akkor”-ral összekötött állítás tagadásakor az állításokat (vagy az állítások tagadásait) „kizáró vagy”-gyal kötjük össze: $A \Leftrightarrow B$ tagadása $A \oplus B$ (ami ugyanazt jelenti, mint $\neg A \oplus \neg B$). Például: „Akkor és csak akkor veszek új autót, ha ötösöm lesz a lottón.” tagadása „Vagy új autót veszek, vagy ötösöm lesz a lottón.” (esetleg: „Vagy nem veszek új autót, vagy nem lesz ötösöm a lottón.”)

Az eddigiekből megfigyelhetjük, hogy az „és” – „vagy”, illetve a „kizáró vagy” – „akkor és csak akkor” műveletek egymás fordítottjai, tagadásakor felcserélődnek. Mindez abból is igazolható, hogy $A \wedge B$ és $\neg A \vee \neg B$ logikai értéktáblázatában a két oszlop éppen egymás ellentettje, illetve $A \vee B$ és $\neg A \wedge \neg B$ esetében szintúgy. A másik esetben $A \oplus B$ és $A \Leftrightarrow B$ értéktáblázata szintén egymás ellentettje, de mivel $A \Leftrightarrow B$ és $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ értéktáblázata megegyezik (sőt, $A \oplus B$ és $\neg A \oplus \neg B$ értéktáblázata is), ezért $A \oplus B$ -t tagadhatjuk $A \Leftrightarrow B$ és $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ formában is (illetve $A \Leftrightarrow B$ -t

tagadhatjuk $A \oplus B$ és $\neg A \oplus \neg B$ formában is). Sőt, $A \oplus B$ -t tagadhatjuk $\neg A \oplus B$ és $A \oplus \neg B$, illetve $A \Leftrightarrow B$ -t tagadhatjuk $\neg A \Leftrightarrow B$ és $A \Leftrightarrow \neg B$ formában is.

Hátra van még a „**ha-akkor**”-ral összekötött állítások tagadása, amely az előzőeknél valamivel bonyolultabb. Mivel $A \Rightarrow B$ pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis, ezért $A \Rightarrow B$ tagadása pontosan akkor lesz igaz, ha A igaz és B hamis, vagyis $A \wedge \neg B$ igaz:

- Két „**ha-akkor**”-ral összekötött állítás tagadásakor az első állítást és a második állítás tagadását „**és**”-sel kötjük össze: $A \Rightarrow B$ tagadása $A \wedge \neg B$. Például: „*Ha hétfő van, akkor (mindig) elmegyek a fogorvoshoz.*” tagadása „*(Van olyan eset, hogy) hétfő van és nem megyek el a fogorvoshoz.*”

Az $A \Rightarrow B$ típusú állításokat gyakran nem „**ha-akkor**” formulával, hanem a „**minden**” szóval fogalmazzuk meg. Az előző példában szereplő „*Ha hétfő van, akkor mindig elmegyek a fogorvoshoz.*” mondatot úgy is mondhatjuk, hogy „*Minden hétfőn elmegyek a fogorvoshoz.*”. Tagadását ekkor a „**van olyan**” szókapcsolattal is megfogalmazhatjuk: „*Van olyan hétfő, amikor nem megyek el a fogorvoshoz.*” Használatosak a „**minden**” szóra a \forall , a „**van olyan**” kifejezésre a \exists jelölések is. Ekkor például az „*A: Hétfő van.*” és „*B: Elmegyek a fogorvoshoz.*” állítások esetében a „*Minden hétfőn elmegyek a fogorvoshoz.*” állítás leírható $\forall A : B$ (esetleg $\forall A \Rightarrow B$) alakban, míg a „*Van olyan hétfő, amikor nem megyek el a fogorvoshoz.*” állítás leírható $\exists A : \neg B$ (esetleg $\exists A \wedge \neg B$) alakban.

- Egy „**minden A-ra igaz B is**” alakú állítás (amely ugyanazt jelenti, mint $A \Rightarrow B$) tagadása a „**van olyan A, amelyre nem igaz B**” állítás: $\forall A : B$ (vagy $\forall A \Rightarrow B$) tagadása $\exists A : \neg B$ (vagy $\exists A \wedge \neg B$). Például: „*Minden nap takarítani kell.*” tagadása „*Van olyan nap, amikor nem kell takarítani.*”
- Egy „**van olyan A, amelyre igaz B is**” alakú állítás tagadása a „**minden A-ra nem igaz B**” (vagy: „**egyik A-ra sem igaz B**”) állítás: $\exists A : B$ (vagy $\exists A \wedge B$) tagadása $\forall A : \neg B$ (vagy $\forall A \Rightarrow \neg B$). Például: „*Van olyan nap, amikor takarítani kell.*” tagadása „*Minden nap nem kell takarítani.*”, esetleg „*Egyik nap sem kell takarítani.*”

Megjegyzés: A fenti két esetben az A -val jelölt szövegrész (pl. „*nap*”) szigorúan véve nem állítás, hiszen nincs önálló logikai értéke. Nyelvtanilag minden ilyen esetben átfogalmazhatnánk a mondatot úgy, hogy A is megfeleljen az állítás definíciójának (pl. „*Ha ma egy tetszőleges nap van, akkor takarítani kell.*”), ettől azonban a továbbiakban eltekintünk.

Megjegyzés: A „**van olyan A, amelyre igaz B is**” alakú állítást elvileg tagadhatnánk „**nincs olyan A, amelyre igaz B is**” alakban is, ezt azonban – hasonlóan a „**nem igaz, hogy**” kifejezéshez – a feladatokban kerüljük, tudatosan törekedve arra, hogy tagadásakor a „**minden**” és a „**van olyan**” kifejezések egymás párjai legyenek.

Állítások megfordítása

Definíció: Egy $A \Rightarrow B$ típusú állítás megfordításán a $B \Rightarrow A$ állítást (vagyis a feltétel és a következmény megcserélését) értjük.

Például: A Pitagorasz-tétel megfogalmazható $A \Rightarrow B$ alakban. Legyen „*A: A háromszög derékszögű.*” és „*B: A háromszögben a két rövidebb oldalt a-val és b-vel, a leghosszabb oldalt c-vel jelölve teljesül az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.*” Ekkor a tétel így szól: „*Ha egy háromszög derékszögű, akkor a három-*

szögben a két rövidebb oldalt a -val és b -vel, a leghosszabb oldalt c -vel jelölve teljesül az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.” A Pitagorasz-tétel megfordítása ($B \Rightarrow A$): „Ha egy háromszögben a két rövidebb oldalt a -val és b -vel, a leghosszabb oldalt c -vel jelölve teljesül az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés, akkor a háromszög derékszögű.” A Pitagorasz-tétel és a megfordítása is igaz állítás.

Egy igaz állítás megfordítása nem feltétlenül igaz. Például a „Ha egy szám osztható 10-zel, akkor páros.” állítás igaz, de megfordítása, a „Ha egy szám páros, akkor osztható 10-zel.” állítás hamis. Ha egy $A \Rightarrow B$ típusú állítás és megfordítása is igaz, akkor $A \Leftrightarrow B$.

Ekvivalens következtetések

Egyenletek megoldásakor fontos, hogy lehetőleg minden lépésünk **ekvivalens átalakítás** legyen. Például az „ $A: 2x + 4 = 18$ ” és a „ $B: x + 2 = 9$ ” állítások (amelyek az egyenletmegoldásban egymás után következhetnek) ekvivalensek ($A \Leftrightarrow B$), így az A állítás helyett elegendő a B állítást vizsgálnunk, ez a végeredményen nem változtat. (Két egyenletet akkor mondunk ekvivalensnek, ha megoldáshalmazaik megegyeznek, vagyis bármely számra az vagy mindkét egyenletet teljesíti, vagy egyiket sem.)

Előfordulhat, hogy **nem ekvivalens átalakítást** hajtunk végre egy egyenleten. Ha például „ $A: x = 3$ ” és „ $B: x^2 = 9$ ”, akkor $A \Rightarrow B$ igaz, de $B \Rightarrow A$ nem (és így $A \Leftrightarrow B$ sem). A két állítás sorrendjétől függően kétféle probléma lép fel az egyenletmegoldásban:

- Ha $x = 3$ -ből következtetünk $x^2 = 9$ -re (amelynek megoldásai $x_{1,2} = \pm 3$), akkor **hamis gyököt** kapunk (hiszen $x \neq -3$). Itt maga az $(x = 3) \Rightarrow (x^2 = 9)$ implikáció helyes volt, azonban $(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$ már nem igaz, ezért kaptunk a helyes megoldás mellett helytelent is. Ez a módszer mindig megadja a helyes megoldás(oka)t, de mindig szükség van az ellenőrzésre, amely kizárja a hamis gyökö(ke)t. Ilyen lépések többek között a négyzetre emelés és az ismeretlennel való szorzás, például $(x = 6) \Rightarrow (x^2 = 36)$ és $(x = 6) \Rightarrow (x^2 = 6x)$.
- Ha $x^2 = 9$ -ből következtetünk $x = 3$ -re, akkor bár jó megoldást kapunk, **gyökvesztés** lép fel, ugyanis az $x = -3$ megoldást elveszítjük. Itt már maga az $(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$ implikáció sem helyes (annak ellenére, hogy $x = 3$ jó megoldás), hiszen $(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$ azt mondja, hogy „*minden olyan esetben, amikor $x^2 = 9$, igaz, hogy $x = 3$* ”, ez viszont hamis állítás. (Logikailag éppen annyira hamis, mint ha $x^2 = 9$ -ből $x = 4$ -re következtetnénk.) Ez a módszer azért kerülendő, mert gyökvesztés esetén a későbbiekben nem találjuk már meg a hiányzó megoldás(oka)t. Ilyen lépések többek között a gyökvonás és az ismeretlennel való osztás. Elkerülésükre a gyökvonásnál abszolútértéket használunk: az $(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$ hibás lépés helyett a helyes következtetés $(x^2 = 9) \Rightarrow (|x| = 3)$, az ismeretlennel való osztás helyett pedig 0-ra rendezünk: $(x^3 = 2x^2) \Rightarrow (x = 2)$ helyett az $x^3 - 2x^2 = 0$ egyenletet alakítjuk szorzattá.

Bizonyítási módszerek

Direkt bizonyítás: a bizonyítás során igaz állításokból kiindulva (például axiómákból – azaz bizonyítás nélkül elfogadott alaptételekből –, definíciókból és már bizonyított tételekből), logikai következtetésekkel jutunk el a bizonyítandó állításig. A legtöbb matematikai tételt direkt úton bizonyítjuk.

Például: **Tétel:** Egy páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

Bizonyítás: Legyen n egy páratlan szám. Ekkor $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = A + 1$, ahol $A = 4 \cdot (k^2 + k)$ és A osztható 4-gyel $\Rightarrow n^2$ 4-gyel osztva 1 maradékot ad. Az implikáció műveletét használva, igaz állításokból igaz állításokra következtetve eljutottunk a bizonyítandó állításig.

Indirekt bizonyítás: a bizonyítandó állítás tagadásából kiindulva (indirekt feltevés), logikai következtetésekkel ellentmondásra jutunk. (Ez az ellentmondás lehet egy tetszőleges – ismert – igaz állítás hamissága vagy az indirekt feltevés hamissága is.) Így a bizonyítandó állítás nem lehet hamis, szükségképpen tehát igaz lesz.

Például: **Tétel:** Végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítás hamis, vagyis csak véges sok prímszám van. \Rightarrow Az összes prím a következő: p_1, p_2, \dots, p_k , ahol $k \in \mathbb{Z}^+$. Ötlet: tekintsük az $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ számot. $\Rightarrow N$ nem prím (mert nagyobb p_1, p_2, \dots, p_k mindegyikénél), és 1-nél nagyobb. $\Rightarrow N$ összetett szám. $\Rightarrow N$ -nek van legalább egy p prímosztója. De N nem osztható a p_1, p_2, \dots, p_k prímszámok egyikével sem (mert mindegyikkel osztva 1 maradékot ad). $\Rightarrow p$ egy olyan prím, amely különbözik p_1, p_2, \dots, p_k mindegyikétől. \Rightarrow Ellentmondás, hiszen feltevésünk szerint az összes prím p_1, p_2, \dots, p_k .

Legyen „ A : Végtelen sok prímszám van.” A bizonyításban az implikáció műveletét használva, a $\neg A$ feltételből kiindulva a következtetések ellentmondásra vezetnek (ha „ B : Az összes prímszám p_1, p_2, \dots, p_k .”, akkor a $B \wedge \neg B$ állításhoz jutottunk, amely biztosan hamis). Tehát $\neg A$ nem lehet igaz, szükségképpen A igaz.

Teljes indukció: Végtelen sok állítást (pl. A_1, A_2, \dots) akarunk egyszerre bebizonyítani, amelyek valamilyen változótól függenek (általában az A_n állításban n szerepel, például „ A_n : Az első n pozitív egész szám összege $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ ”). Ezt két lépésben tesszük: először megmutatjuk, hogy az első állítás (általában A_1) igaz, utána pedig igazoljuk, hogy ha valamilyen k -ra az A_k állítás igaz (indukciós feltevés), akkor a soron következő A_{k+1} állítás is igaz. Vagyis A_1 igazságából és az $A_k \Rightarrow A_{k+1}$ következtetés helyességéből az $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots$ implikáció-sorozattal az összes állítást beláttuk.

Megjegyzés: A teljes indukció ahhoz hasonlítható, amikor végtelen sok, egymás melletti dominót akarunk fellökní. Ennek teljesüléséhez két dolog szükséges: egyrészt meg kell löknünk az első dominót, másrészt tudnunk kell, hogy bármely dominó eldőlése maga után vonja a következő dominó eldőlését is.

Megjegyzés: Bizonyos feladatokban az indukciós feltevésnél nem csak azt tételezzük fel, hogy valamilyen k -ra az A_k állítás igaz, hanem azt is, hogy az A_1, A_2, \dots, A_k állítások mind igazak (vagyis az első k dominó mindegyike eldőlt már).

Például: **Tétel (A_n):** Az első n pozitív egész szám összege $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$.

Bizonyítás: Az állítás igaz $n=1$ -re, ugyanis „ A_1 : Az első 1 pozitív egész szám összege $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ”

igaz állítás. Tegyük fel most, hogy az A_k állítás igaz valamilyen pozitív egész k -ra, tehát

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2} \quad (\text{ezt nevezzük indukciós feltevésnek}), \text{ majd (ennek felhasználásával)}$$

$$\text{lássuk be } A_{k+1}\text{-et, vagyis hogy } 1 + 2 + \dots + k + 1 = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$

$$\text{Az } 1 + 2 + \dots + (k+1) = \underbrace{(1 + \dots + k)}_{\text{indukciós feltevés}} + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2} \text{ átalakítással}$$

az egyenlőséglánc két végén megkaptuk a bizonyítandó A_{k+1} állítást, ezzel A_{k+1} -et beláttuk. Tehát A_1 igazságából és a „láncreakcióból” adódik, hogy minden pozitív egész n -re A_n is igaz.

Skatulya-elv: Ez a bizonyítási módszer azt a tényt használja ki, hogy ha n skatulyába n -nél több tárgyat szétosztunk, akkor valamelyik skatulyába legalább 2 tárgy kerül. Továbbá, ha n skatulyába $k \cdot n$ -nél több tárgyat szétosztunk, akkor valamelyik skatulyába legalább $k+1$ tárgy kerül.

Például: **Tétel:** 31 egész szám között biztos van 4 olyan, amelyek ugyanolyan jegyre végződik.

Bizonyítás: Az utolsó számjegy $n=10$ -féle lehet, a skatulya-elvet alkalmazhatjuk $k=3$ -ra, így mivel $31 > 3 \cdot 10$, ezért a 10 skatulya valamelyikébe biztosan legalább 4 szám kerül. (Ha minden skatulyába csak legfeljebb 3-3 szám kerülne, akkor összesen legfeljebb $3 \cdot 10 = 30$ számunk lehetne, ami ellentmond annak, hogy 31 számunk van. Az utolsó gondolatban indirekt bizonyítást használtunk.)

II. Kidolgozott feladatok

1. Írjuk fel minél rövidebb formulával az $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)$ kifejezést!

I. Megoldás: Készítsük el a kifejezés logikai értéktáblázatát! A táblázat oszlopaiban először az első zárójel, majd a második zárójel, végül az utolsó oszlopban e két kifejezés „és”-sel összekapcsolásának kiértékelése látható (ez utóbbi megegyezik a teljes kifejezés értékével):

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)$
I	I	I	I	I
I	H	H	I	H
H	I	I	H	H
H	H	I	I	I

A táblázatból kiolvasható, hogy a kifejezés értéke pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke megegyezik. Tehát a kifejezés rövidebb formulával $A \Leftrightarrow B$ alakban írható fel. Természetesen más alakok is megadhatók (például $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$), de az előbb megadott a legrövidebb.

II. Megoldás: Értéktáblázat nélkül is lerövidíthetjük a formulát. A kifejezés pontosan akkor igaz, ha A igazsága maga után vonja B igazságát, A hamissága pedig B hamisságát. (Ha A igaz, akkor

az első zárójel miatt B -nek is igaznak kell lennie, ha pedig A hamis, akkor a második zárójel miatt B -nek is hamisnak kell lennie.) Így a keresett rövidebb formula: $A \Leftrightarrow B$.

2. Készítsük el a következő kifejezések logikai értéktáblázatát!

a) $(\neg A \vee B) \Rightarrow B$

b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \oplus \neg A)$

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee C)$

Megoldás: Az első két kifejezés kétváltozós, így táblázataikban 4 esetet kell vizsgálni a változók lehetséges értékeinek megfelelően. A harmadik kifejezés háromváltozós, így abban $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetséges esetet kell megvizsgálnunk (ennyi sora lesz a táblázatnak). Mindhárom esetben először a zárójel(ek)ben álló kifejezés(eke)t értékeljük ki, majd a közöttük lévő műveletet.

a)

A	B	$\neg A \vee B$	$(\neg A \vee B) \Rightarrow B$
I	I	I	I
I	H	H	I
H	I	I	I
H	H	I	H

Megjegyzés: A táblázatból kiolvasható, hogy $\neg A \vee B = A \Rightarrow B$.

b)

A	B	$A \wedge B$	$A \oplus \neg A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \oplus \neg A)$
I	I	I	I	I
I	H	H	I	H
H	I	H	I	H
H	H	H	I	H

Megjegyzés: A táblázatból kiolvasható, hogy $A \oplus \neg A$ értéke mindig igaz, így a vizsgált kifejezés értéke megegyezik $A \wedge B$ értékével, hiszen a mindig igaz állítást I -vel jelölve tetszőleges C állítás esetén $C \Leftrightarrow I = C$.

c)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \vee C$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee C)$
I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	I	I
I	H	I	H	I	H
I	H	H	H	H	I
H	I	I	I	I	I
H	I	H	I	I	I
H	H	I	I	I	I
H	H	H	I	H	H

3. Írjunk fel olyan kifejezéseket, amelyek logikai értéktáblázata a következő:

A	B	a kifejezés értéke
I	I	I
I	H	I
H	I	H
H	H	I

I. Megoldás: Az egyik lehetőség, hogy felsoroljuk mindazon eseteket, amikor a kifejezés igaz, majd ezeket „vagy”-gyal kapcsoljuk össze: $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

II. Megoldás: Az alpműveletek közül a „vagy” értéke három esetben igaz, egyszer hamis. A „vagy” akkor hamis, ha mindkét változója hamis. Ahhoz, hogy hamis A és igaz B esetén két hamis kifejezést kapcsoljunk össze, B helyett $\neg B$ -t kell tekintenünk, így ebben az esetben a lehetséges megoldás: $A \vee \neg B$.

III. Megoldás: Az alpműveletek közül az „és” értéke három esetben hamis, egy esetben igaz. Ennek tagadása három esetben lesz igaz, egy esetben hamis. Így a következő kifejezés is jó megoldás: $\neg(\neg A \wedge B)$.

IV. Megoldás: Az alpműveletek közül a „ha-akkor” értéke három esetben igaz, egyszer hamis. A „ha-akkor” akkor hamis, ha az első változója igaz, a második hamis. Így a következő kifejezések is jó megoldások: $\neg A \Rightarrow \neg B$, illetve $B \Rightarrow A$.

Természetesen számos további megoldást is előállíthatunk.

4. Legyen „ A : Az n szám osztható 24-gyel.” Adjuk meg az A állítás

a) egy szükséges, de nem elégséges feltételét!

b) egy elégséges, de nem szükséges feltételét!

c) egy szükséges és elégséges feltételét!

Megoldás:

a) Jó megoldás minden olyan állítás, amely következik A -ból, de amelyből nem következik A . Ilyenek például: „Az n szám osztható 2-vel.”, „Az n szám osztható 3-mal.”, és így tovább (a 24 összes valódi osztóját behelyettesíthetjük a mondatba), vagy például „Az n szám osztható 4-gyel és 6-tal.” (ez utóbbi valóban nem elégséges, hiszen például a 12-re is teljesül).

b) Jó megoldás minden olyan állítás, amelyből következik A , de amely nem következik A -ból. Ilyenek például: „Az n szám osztható 48-cal.”, „Az n szám osztható 2400-zal.”, „Az n szám értéke 72.”, és így tovább.

c) Jó megoldás minden olyan állítás, amely ekvivalens A -val. Ilyenek például: „Az n szám osztható 3-mal és 8-cal.”, „Az n szám felírható $24 \cdot k$ alakban, ahol k egész szám.”. Sőt, valójában jó megoldás maga az A állítás is, hiszen minden állítás ekvivalens saját magával.

5. Bontsuk fel a következő állításokat egyszerű kijelentésekre, és írjuk fel logikai műveletekkel az összetett kijelentéseket! Ezt követően fogalmazzuk meg az állítások tagadását!
- „Minden négyszögnek van beírt köre.”
 - „Van olyan autó, amelyiknek lejárt a zöldkártyája és nincs érvényes műszaki vizsgája sem.”
 - „Egyik lakásban sincs sem radiátor, sem kályha.”
 - „Ha éhes vagyok, lemegyek a büfébe.”
 - „Minden iskolában van olyan osztály, ahol mindenki kitűnő.”
 - „Akkor és csak akkor veszek fel reggel kék szoknyát, ha aznap színházba vagy az Operába megyek.”

Megoldás:

a) Az „ A : (A sokszög egy) négyszög.” és „ B : (A sokszögnek) van beírt köre.” jelölésekkel az állítás $\forall A \Rightarrow B$ alakban írható. Ennek tagadása $\exists A : \neg B$, azaz: „Van olyan négyszög, amelynek nincs beírt köre.”

b) Az „ A : autó”, „ B : lejárt a zöldkártyája” és „ C : nincs érvényes műszaki vizsgája” jelölésekkel az állítás $\exists A : (B \wedge C)$ alakban írható. Ennek tagadása $\forall A \Rightarrow \neg(B \wedge C)$, amely a De Morgan-azonosság alapján $\forall A \Rightarrow (\neg B \vee \neg C)$ alakra hozható, azaz: „Minden autónak nem járt le a zöldkártyája vagy van érvényes műszaki vizsgája.” Nyelvileg szebben hangzik a következő (logikailag ekvivalens) megfogalmazás: „Minden autónak érvényes a zöldkártyája és a műszaki vizsgája közül legalább az egyik.”

c) Az „ A : lakás”, „ B : van radiátor” és „ C : van kályha” jelölésekkel, továbbá az „egyik lakásban sincs = minden lakásban nincs” átfogalmazással az állítás $\forall A \Rightarrow (\neg B \wedge \neg C)$ alakban írható. Ennek tagadása $\exists A : \neg(\neg B \wedge \neg C)$, átalakítva $\exists A : (B \vee C)$, azaz: „Van olyan lakás, amelyben van radiátor vagy kályha.”

d) Az „ A : éhes vagyok” és „ B : lemegyek a büfébe” jelölésekkel az állítás $A \Rightarrow B$ alakban írható. Ennek tagadása $A \wedge \neg B$, azaz: „(Van olyan alkalom, hogy) éhes vagyok és nem megyek le a büfébe.” (Az eredeti állítást úgy is fogalmazhattuk volna, hogy „Minden alkalommal, amikor éhes vagyok, lemegyek a büfébe.”)

e) Az „ A : iskola”, „ B : osztály” és „ C : kitűnő” jelölésekkel az állítás $\forall A \Rightarrow (\exists B : \forall C)$ alakban írható. Ennek tagadása $\exists A : \neg(\exists B : \forall C)$, ami a zárójeles kifejezés tagadásának behelyettesítése után $\exists A : \forall B \Rightarrow (\exists \neg C)$ alakra hozható, azaz: „Van olyan iskola, ahol minden osztályban van olyan, aki nem kitűnő.” (esetleg: „Van olyan iskola, ahol minden osztályban van nem kitűnő.”)

f) Az „ A : (ma) reggel kék szoknyát veszek fel”, „ B : (ma) színházba megyek” és „ C : (ma) az Operába megyek” jelölésekkel az állítás $A \Leftrightarrow (B \vee C)$ alakban írható. (A „színházba vagy az Operába megyek” logikailag megengedi, hogy akár mindkét helyre menjek egymás után, bár ez nem valószínű.) Ennek tagadása $A \oplus (B \vee C)$, azaz: „Vagy reggel kék szoknyát veszek fel, vagy aznap

színházba vagy az Operába megyek.” Ennek a megoldásnak hátránya, hogy a formulában szereplő zárójel nem látszik benne, így formailag csak a mondatban szereplő vessző mutatja, hogy nem három egyenértékű „vagy” áll a mondatban. Élőszóban mindez hangsúlyozással jelezhető (például a „kizáró vagy”-hoz tartozó két „vagy”-ot jobban megnyomjuk, esetleg a vesszőnél nagyobb szünetet tartunk), írásban talán szerencsésebb a következő átfogalmazás: „Vagy reggel két szoknyát veszek fel, vagy aznap elmegyek színházba, esetleg az Operába.” De megfogalmazhatjuk a tagadást $\neg A \Leftrightarrow (B \vee C)$ formában is, azaz: „Akkor és csak akkor nem veszek fel reggel két szoknyát, ha aznap színházba vagy az Operába megyek.”

6. Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását: „Ha egy húrnégyszögnek van derékszöge, akkor téglalap.” Igaz-e az állítás, illetve a megfordítása?

Megoldás: Az állítás megfordítása: „Ha egy húrnégyszög téglalap, akkor van derékszöge.” Fontos észrevennünk, hogy a „húrnégyszög” kijelentés nem része a feltételnek, az mindenképpen a mondat elején marad (mint a mondat alanya). Formalizálva: az „ A : a húrnégyszögnek van derékszöge” és „ B : a húrnégyszög téglalap” jelölésekkel az eredeti állítás $A \Rightarrow B$, a megfordítása $B \Rightarrow A$ formában írható.

Az eredeti állítás hamis (egy lehetséges ellenpélda az a négyszög, amelynek szögei az egyik körüljárás szerint: 90° , 60° , 90° és 120° , ez a négyszög a húrnégyszögek tételének megfordítása miatt húrnégyszög, de nem téglalap – vagy általánosabb ellenpélda egy olyan négyszög, amelynek egyik átlója a körülírt kör átmérője, a másik viszont nem). Az állítás megfordítása igaz, hiszen egy tetszőleges téglalpnak van derékszöge.

7. Az alábbi állítások közül hány lehet egyszerre igaz ugyanazon n valós számra vonatkozóan?

$$A: n \geq 3$$

$$B: |n| = 4$$

$$C: n^2 = 16$$

$$D: \sqrt{n} = 2$$

$$E: n^2 = 4n$$

$$F: \lg(n^3) = \lg(16n)$$

I. Megoldás: Ábrázoljuk az állítások logikai kapcsolatát, jelezve az egymásból következő, illetve az ekvivalens állításokat! A , B és C állítások ekvivalensek, továbbá D -ből következik B (és ekkor nyilván C is), de B -ből nem következik D (az ellenpélda $n = -4$). A D állítás ekvivalens az $n = 4$ állítással, amelyből következik E , a megfordítás viszont nem (az ellenpélda $n = 0$). Eddig tehát az állítások kapcsolatát a következőképpen szemléltethetjük: $E \Leftarrow D \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$.

Az F egyenletben a logaritmust elhagyva $n^3 = 16n$ -et kapunk, azonban a logaritmus értelmezési tartománya miatt $n > 0$, ekkor n -nel oszthatunk, így az $n^2 = 16$ állítást kapjuk, de $n > 0$ miatt az egyenlet egyedüli megoldása $n = 4$, amely ekvivalens D -vel: $E \Leftarrow (D \Leftrightarrow F) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$.

Hátra van még az A állítás vizsgálata. Ez független B -től (és C -től), egyikből sem következik a másik (hiszen B és C esetében n pozitív és negatív értéket is felvehet). Az A állítás szintén független E -től, egyikből sem következik a másik. Végül D -ből (és F -ből) következik A , hiszen $n = 4$ teljesíti A -t, de fordított irányban nincs kapcsolat az állítások között.

Így az állítások logikai kapcsolata a következő:

$$E \Leftarrow (D \Leftrightarrow F) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$$

$$\downarrow$$

$$A$$

A kapcsolatokból leolvasható, hogy ha D (és F) igaz, akkor mind a 6 állítás igaz. Ha D (és F) hamis, akkor $n \neq 4$, így a többi állítás a következőképpen írható fel: $A: n \geq 3$ (de $n \neq 4$); $B: n = -4$; $C: n = -4$; $E: n = 0$. Ha A igaz, akkor ez kizárja a másik hármát, így 1 igaz állítást kapunk. Ha A hamis, akkor B és C , illetve E kizárja egymást, így vagy E igaz (1 igaz állítás), vagy B és C (2 igaz állítás), vagy egyik sem (0 igaz állítás).

Vagyis a megadott állítások közül egyszerre 0, 1, 2 vagy 6 lehet igaz.

II. Megoldás: Felsorolhatjuk az egyes állítások esetében n lehetséges értékeit:

$$A: n \geq 3 \qquad B: n \in \{-4; 4\} \qquad C: n \in \{-4; 4\}$$

$$D: n = 4 \qquad E: n \in \{0; 4\} \qquad F: n = 4$$

A felsorolásból is következik az állítások előző megoldásban vázolt logikai kapcsolata, illetve megadhatunk konkrét n értékeket, amelyekre az állítások közül egyszerre 0, 1, 2, 3 vagy 6 lesz igaz:

$$n = 1 \Rightarrow 0 \text{ igaz állítás}$$

$$n = 10 \Rightarrow 1 \text{ igaz állítás (A)}$$

$$n = 0 \Rightarrow 1 \text{ igaz állítás (E)}$$

$$n = -4 \Rightarrow 2 \text{ igaz állítás (B és C)}$$

$$n = 4 \Rightarrow 6 \text{ igaz állítás (az összes)}$$

Más lehetőség nincsen, hiszen n lehetséges értékei közül a B - F állításokhoz elegendő a $-4, 0, 4$ értékeket kipróbálni, az A állításhoz pedig egy 3-nál kisebb és egy 3-nál nem kisebb értéket.

Vagyis a megadott állítások közül egyszerre 0, 1, 2 vagy 6 lehet igaz.

8. Hol van a hiba az $\lg x^2 = 2$ egyenlet alábbi megoldásában?

$$\lg x^2 = 2 \Rightarrow 2 \cdot \lg x = 2 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$$

Megoldás: Az egyenlet megoldása biztosan nem helyes, ugyanis ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy $x = -10$ is jó megoldás. A hibát ott követtük el, hogy a $\lg x^2 = 2 \Rightarrow 2 \cdot \lg x = 2$ átalakítás nem ekvivalens lépés. Írjuk fel az értelmezési tartományokat is, ekkor a következőt kapjuk: $(\lg x^2 = 2 \wedge x^2 > 0) \Rightarrow (2 \cdot \lg x = 2 \wedge x > 0)$. Vagyis az átalakítás során szűkült az értelmezési tartomány ($x \neq 0$ -ról $x > 0$ -ra), emiatt a következtetés iránya nem fordítható meg, azaz gyökvesztés esete áll fenn.

Az egyenlet egy lehetséges helyes megoldása: $\lg x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 10^2 \rightarrow x_{1,2} = \pm 10$.

Megjegyzés: A feladat azt illusztrálja, hogy a logaritmus azonosságai nem mindig ekvivalens átalakítások, az értelmezési tartomány esetleges megváltozása miatt.

9. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) A $\sqrt{6}$ irracionális szám.

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

c) $13 \mid 3^{n+2} + 4^{2n+1}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

d) Bárhogy választunk ki az $1, 2, 3, \dots, 2n$ számok közül $n+1$ -et, biztosan lesz a kiválasztott számok között két olyan, amelyek relatív prímek (azaz legnagyobb közös osztójuk 1).

Megoldás:

a) Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{6}$ nem irracionális, azaz racionális szám (indirekt feltevés), ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor a

$\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve a $6q^2 = p^2$ összefüggést kapjuk. A

jobb oldalon p^2 egy négyzetszám, így prímtenyezős felbontásában minden prímtenyező páros kitevőn szerepel, például a 2 is. (Egyébként p^2 páros, de ezt nem használjuk ki.) A bal oldalon q^2 is négyzetszám, így a 2 kitevője ebben is páros (akár 0 is lehet, ha q^2 páratlan), viszont $6 = 2 \cdot 3$ miatt ekkor a bal oldalon összességében páratlan lesz a 2 kitevője. Egy egyenlet két oldalán nem lehet különböző paritású 2 kitevője, tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt, szükségképpen a bizonyítandó állítás igaz.

b) Teljes indukciót alkalmazunk. Az állítás igaz $n=1$ -re, mert $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$. Tegyük fel, hogy az

állítás igaz valamilyen k -ra (indukciós feltevés), azaz valamilyen rögzített k -ra teljesül az $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ összefüggés. Ebből szeretnénk bebizonyítani, hogy

$k+1$ -re is teljesül az állítás, azaz $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$. Mivel

a bal oldalon $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k+1)(k+2) = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1)] + (k+1)(k+2)$, ezért a szögletes zárójelben álló kifejezést helyettesíthetjük az indukciós feltevés jobb oldalával, így:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)}{3} \cdot (k+3)$, ami

éppen a bizonyítandó állítás. Tehát ha valamilyen rögzített k -ra igaz az állítás, akkor $k+1$ -re is igaz, továbbá $n=1$ -re igaz az állítás, így minden pozitív egész n -re igaz.

c) Teljes indukciót alkalmazunk. Az állítás igaz $n=1$ -re, mert $13 \mid 3^{1+2} + 4^{2 \cdot 1 + 1} = 27 + 64 = 91$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamilyen rögzített k -ra, azaz $13 \mid 3^{k+2} + 4^{2k+1}$, majd lássuk be,

hogy ekkor $k+1$ -re is igaz, vagyis, hogy $13 \mid 3^{(k+1)+2} + 4^{2(k+1)+1}$, azaz $13 \mid 3^{k+3} + 4^{2k+3}$. Alkal-

mazzuk a $3^{k+3} + 4^{2k+3} = 3 \cdot 3^{k+2} + 16 \cdot 4^{2k+1} = 3 \cdot (3^{k+2} + 4^{2k+1}) + 13 \cdot 4^{2k+1}$ átalakítást, így kihasz-

nálhatjuk az indukciós feltevést, tehát $3 \cdot (3^{k+2} + 4^{2k+1})$ osztható lesz 13-mal. Mivel $13 \cdot 4^{2k+1}$ is osztható 13-mal, így e két kifejezés összege is osztható 13-mal, ami éppen a bizonyítandó állítás. Ezzel beláttuk, hogy ha valamilyen rögzített k -ra igaz az állítás, akkor $k+1$ -re is igaz, továbbá $n=1$ -re igaz az állítás, így minden pozitív egész n -re igaz.

Megjegyzés: Alkalmazhattuk volna a $3^{k+3} + 4^{2k+3} = 16 \cdot (3^{k+2} + 4^{2k+1}) - 13 \cdot 3^{k+2}$ átalakítást is.

d) Skatulya-elvet alkalmazunk. Vegyünk n skatulyát, amelyek mindegyikébe két-két szomszédos egész számot teszünk: az első skatulyába az 1 és a 2, a másodikba a 3 és a 4, és így tovább, végül az n -edikbe a $2n-1$ és a $2n$. Ha most az $1, 2, 3, \dots, 2n$ számok közül $n+1$ -et kiválasztunk, akkor biztosan lesz két olyan szám a kiválasztottak közül, amelyek ugyanabban a skatulyában vannak (mert n skatulyából $n+1$ -szer választottunk), így ez a két kiválasztott szám szomszédos. A szomszédos egész számok pedig biztosan relatív prímek, hiszen ha lenne valamilyen 1-nél nagyobb d közös osztójuk, akkor ez a d osztója lenne a különbségüknek, 1-nek is, ami lehetetlen. (Az utolsó lépésben indirekt bizonyítást alkalmaztunk.)

10. Írjuk fel zárt formában az első n pozitív köbszám összegét, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$!

Megoldás: A képlet megsejtéséhez írjuk fel az első néhány n -re az $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ kifejezés pontos értékét!

$$n=1 \Rightarrow 1^3 = 1 = 1^2$$

$$n=2 \Rightarrow 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$$

$$n=3 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2$$

$$n=4 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2$$

Megfigyelhetjük, hogy az eredmény mindig négyzetszám, mégpedig az első n pozitív egész szám összegének a négyzete. Mivel $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, ezért sejtésünk a következő:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Sejtésünket teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás igaz $n=1$ -re, mert $1^3 = \left[\frac{1 \cdot 2}{2} \right]^2$. Tegyük fel

most, hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, azaz $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$, majd lás-

suk be, hogy ekkor $k+1$ -re is igaz, vagyis $1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$. Mivel a bal

oldalon $1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = [1^3 + 2^3 + \dots + k^3] + (k+1)^3$, ezért a szögletes zárójelre alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, vagyis a bizonyítandó állítás bal oldala így alakítható tovább:

$$\dots = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \cdot \left(\frac{k^2}{4} + (k+1) \right) = \frac{(k+1)^2}{4} \cdot (k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}.$$

Ezzel éppen a bizonyítandó állítást kaptuk. Tehát ha sejtésünk igaz valamely rögzített k -ra, akkor $k+1$ -re is igaz, továbbá $n=1$ -re igaz, így sejtésünket minden pozitív egész n -re igazoltuk. Vagyis az első n pozitív köbszám összege $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

Megjegyzés: A bizonyítandó állítás megsejtése nem volt nyilvánvaló, és sok más esetben sem az. A teljes indukció leginkább akkor alkalmazható, ha vagy már megsejtettük az eredményt, vagy a feladat előre megadta számunkra azt.

11. Hol van a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: $3 \mid 2^n + 3^n + 5^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás teljes indukcióval: Az állítás $n=0$ esetén igaz, mert $2^0 + 3^0 + 5^0 = 1+1+1=3$, ami osztható 3-mal. Tegyük fel most, hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, majd lássuk be, hogy ekkor $k+1$ -re is igaz, azaz: $3 \mid 2^{k+1} + 3^{k+1} + 5^{k+1}$. Alkalmazzuk a következő átalakításokat: $2^{k+1} + 3^{k+1} + 5^{k+1} = 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k + 5 \cdot 5^k = 2 \cdot (2^k + 3^k + 5^k) + 3^k + 3 \cdot 5^k$. Az indukciós feltevés miatt $2^k + 3^k + 5^k$ osztható 3-mal (így ennek 2-szerese is), míg 3^k és $3 \cdot 5^k$ többszörösei 3-nak, így ezek is oszthatók 3-mal, s ezért a három tag összege is osztható 3-mal. Ezzel az állítást belátuk.

Megoldás: A bizonyítás biztosan rossz, hiszen az állítás hamis (csak $n=0$ -ra igaz). A hiba ott van, hogy 3^k nem feltétlenül osztható 3-mal, hiszen $k=0$ esetén $3^0 = 1$. Emiatt $n=0$ -ról $n=1$ -re nem „öröklődik” az állítás, s így a többi 0-nál nagyobb n -re sem.

Megjegyzés: A bizonyítás többi lépése helyes, így ha valamely pozitív egész n -re igaz lenne az állítás, akkor az összes n -nél nagyobb egészre is igaz lenne. De az állítás csak $n=0$ -ra igaz.

12. Adott az $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_{n+2} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) rekurzív sorozat. Igazoljuk, hogy a sorozat explicit alakja $a_n = \frac{1}{2^{n-1} + 1}$!

Megoldás: Teljes indukciót alkalmazunk. Mivel a rekurzió másodrendű (az $n+2$ -edik tag kiszámításakor a két megelőző tagot – az $n+1$ -ediket és az n -ediket – használjuk), ezért az indukciós feltevést most a megelőző két tagra kell majd kihasználnunk, és emiatt az állítást is az első helyett az első két kezdőértékre kell ellenőriznünk.

Az állítás igaz $n=1$ -re és $n=2$ -re, mert $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{1-1} + 1}$ és $\frac{1}{3} = \frac{1}{2^{2-1} + 1}$. Tegyük fel most, hogy az állítás már igaz 1-től valamely rögzített $k+1$ -ig minden egész számra, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$ (így speciálisan k -ra és $k+1$ -re, tehát két szomszédos tagra is), majd lássuk be, hogy ekkor $k+2$ -re is

igaz, vagyis $a_{k+2} = \frac{1}{2^{k+2-1} + 1}$. A sorozat rekurzív megadása alapján $a_{k+2} = \frac{a_k \cdot a_{k+1}}{3a_k - 2a_{k+1}}$, az in-

dukciós feltevés miatt pedig $a_k = \frac{1}{2^{k-1} + 1}$ és $a_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1-1} + 1}$, ezért igaz a következő átalakítás:

$$a_{k+2} = \frac{\frac{1}{2^{k-1} + 1} \cdot \frac{1}{2^k + 1}}{\frac{3}{2^{k-1} + 1} - \frac{2}{2^k + 1}} = \left(\frac{1}{(2^{k-1} + 1) \cdot (2^k + 1)} \right) : \left(\frac{3 \cdot (2^k + 1) - 2 \cdot (2^{k-1} + 1)}{(2^{k-1} + 1) \cdot (2^k + 1)} \right).$$

Tovább alakítva ezt

$$\text{kapjuk: } a_{k+2} = \frac{1}{3 \cdot (2^k + 1) - 2 \cdot (2^{k-1} + 1)} = \frac{1}{3 \cdot 2^k + 3 - 2^k - 2} = \frac{1}{2 \cdot 2^k + 1} = \frac{1}{2^{k+1} + 1},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. Ezzel az állítást minden $n \in \mathbb{Z}^+$ számra igazoltuk.

III. Ajánlott feladatok

1. Tudjuk, hogy minden olyan hétfőn, amikor Micimackó mézet eszik, Zsebibaba Malackával játszik a réten. Ma Zsebibaba nincs kint a réten. Ehet-e ma mézet Micimackó, ha

- a) ma hétfő van? b) ma szerda van?

2. Ugyanazt jelentik-e az $(A \Rightarrow B) \oplus (B \Rightarrow A)$ és a $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (A \wedge B)$ kifejezések?
3. Véletlenszerűen kitöltöttük egy kétváltozós (A -t és B -t tartalmazó) kifejezés logikai értéktáblázatát. (Egyenlő eséllyel választva a lehetséges kitöltések közül.) Mekkora eséllyel lesz a felírt táblázat éppen a $B \Rightarrow (A \wedge \neg A)$ kifejezés logikai értéktáblázata?

4. Tekintsük a következő állításokat ugyanazon n pozitív egész számra vonatkozóan:

A : Az n összetett szám. C : Az n számnak van 1 -nél nagyobb négyzetszám osztója.

B : Az n osztható 4 -gyel. D : Az n számnak van nála kisebb pozitív prímosztója.

Mely állítások ekvivalensek egymással, illetve melyikből következik valamelyik másik?

5. Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását!

a) „Minden barátomnak van legalább két testvére vagy legalább egy kutyája.”

b) „Egyik héten sincs olyan nap, amikor négy órát tanulok.”

c) „Van olyan tantárgy, amelyikből év végén írásban és szóban is vizsgázunk.”

d) „Ha a telefonomra ébredek fel, nem félek a dolgozattól.”

e) „Minden embernek van olyan könyve, amelyiknek minden sorát kívülről tudja.”

6. Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását: „Ha egy négyzetszám 6 -ra végződik, akkor osztható 9 -cel.” Igaz-e az állítás, illetve a megfordítása?

7. Készítsük el a $(\neg A \wedge B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$ kifejezés logikai értéktáblázatát, majd írjuk fel többféle logikai formulával a kifejezés tagadását!
8. Írjunk fel olyan K, L és M kifejezéseket, amelyek logikai értéktáblázata a következő:

A	B	K	L	M
I	I	H	H	I
I	H	H	H	I
H	I	I	H	H
H	H	I	I	I

9. a) Adjuk meg egy elégséges, de nem szükséges feltételét annak, hogy egy köbszám osztható legyen 16-tal!
- b) Adjuk meg egy szükséges, de nem elégséges feltételét annak, hogy egy négyszög téglalap legyen!
- c) Adjuk meg egy szükséges és elégséges feltételét annak, hogy az $ABCD$ négyszögnek legyen beírt köre!
10. Ekvivalensek-e minden esetben a következő átalakítások?
- a) Egy egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk $2x + 3$ -at.
- b) Egy egyenlet mindkét oldalából levonunk $\frac{1}{x-2}$ -t.
- c) Egy egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, majd mindkét oldalból gyököt vonunk.
- d) Egy egyenlet mindkét oldalának vesszük a 3-as alapú logaritmusát (feltéve, hogy mindkét oldal pozitív volt).
11. Milyen kapcsolat (szükséges feltétel, elégséges feltétel, szükséges és elégséges feltétel) áll fenn a következő kijelentéspárok két tagja között?
- a) „ A : Az a_n sorozat korlátos.” és „ B : Az a_n sorozat konvergens.”
- b) „ C : Az b_n sorozat divergens.” és „ D : Az b_n sorozat nem korlátos.”
- c) „ E : Az f függvény differenciálható.” és „ F : Az f függvény folytonos.”
12. Egy szigeten igazmondók és hazudósok élnek. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak. Megkérdeztünk öt embert, akik ismerték egymást: „Hány igazmondó van köztetek?” A válaszaik: 1, 2, 3, 4, 5. Hány igazmondó lehetett az öt ember között?
13. Peti macskája minden reggel dorombol, ha aznap esni fog az eső. Ma reggel dorombol. Vigyen-e esernyőt Peti?

14. Írjuk fel zárt formában az $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ kifejezést, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$!

15. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

b) $23 \mid 2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

c) $(n+1)! \geq 2^{n-1}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

16. Igaz-e, hogy biztosan van két olyan különböző prímszám, amelyeknek azonos az utolsó 2013 számjegye?

17. Legfeljebb hány részre oszthatja n egyenes a síkot?

18. Hol van a hiba a következő teljes indukciós bizonyításban?

Állítás: A világ összes lova egyforma színű.

Bizonyítás teljes indukcióval: megmutatjuk, hogy bármely n ló színe megegyezik, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

– Az állítás $n = 1$ ló esetén nyilván igaz, hiszen egy lónak egy színe van.

– Tegyük fel most, hogy az állítás igaz valamely k -ra (azaz bármely k ló színe egyforma), majd lássuk be $k+1$ -re. Vegyünk $k+1$ lovat. Tudjuk, hogy az $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ sorszámú lovak és a $\{2, 3, 4, \dots, k+1\}$ sorszámú lovak is egyforma színűek, hiszen mindkettő egy-egy k elemű halmaz. Mivel a két halmaznak van közös eleme, ezért szükségképpen mind a $k+1$ ló egyforma színű. Ezzel az állítást beláttuk.

19. Adott az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) rekurzív sorozat. Írjuk fel a sorozat első néhány tagját, majd próbáljuk megsejteni a sorozat explicit alakját! Igazoljuk sejtésünket!

20. Tudjuk, hogy igaz a következő három állítás:

1. Ha veszek almát és olcsó a tojás, készítek máglyarakást.

2. Ha nem olcsó a tojás, akkor nem veszek almát és éhes maradok.

3. Csak akkor nem maradok éhes, ha készítek máglyarakást.

Következik-e ebből a három állításból, hogy ha nem készítek máglyarakást, akkor nem veszek almát?

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Tudjuk, hogy minden olyan hétfőn, amikor Micimackó mézet eszik, Zsebibaba Malackával játszik a réten. Ma Zsebibaba nincs kint a réten. Ehet-e ma mézet Micimackó, ha

a) ma hétfő van? b) ma szerda van?

Megoldás: A „ H : Hétfő van.”, „ M : Micimackó mézet eszik.” és „ Z : Zsebibaba Malackával játszik a réten.” jelölésekkel a megadott feltétel $\forall (H \wedge M) \Rightarrow Z$ alakban írható. Ha Z nem teljesül, akkor $H \wedge M$ sem teljesülhet, hiszen így Z -nek is teljesülnie kellene, ami ellentmondás. Tehát ha Zsebibaba ma nincs kint a réten, akkor $H \wedge M$ hamis, így H és M közül legalább az egyik hamis. Így ha ma hétfő van, akkor Micimackó semmiképpen nem ehet mézet. Ha ma szerda van, akkor az is lehetséges, hogy Micimackó eszik mézet, de az is, hogy nem (hiszen H mindenképpen hamis).

Megjegyzés: A megoldásból az is kiderült, hogy $A \Rightarrow B$ és $\neg B \Rightarrow \neg A$ ekvivalensek (ezt a fenti példában $(H \wedge M) \Rightarrow Z$ és $\neg Z \Rightarrow \neg(H \wedge M)$ alakban használtuk).

2. Ugyanazt jelentik-e az $(A \Rightarrow B) \oplus (B \Rightarrow A)$ és a $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (A \wedge B)$ kifejezések?

Megoldás: Készítsük el a két kifejezés logikai értéktáblázatát:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \oplus (B \Rightarrow A)$
I	I	I	I	H
I	H	H	I	I
H	I	I	H	I
H	H	I	I	H

A	B	$\neg(A \vee B)$	$A \wedge B$	$(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (A \wedge B)$
I	I	H	I	H
I	H	H	H	I
H	I	H	H	I
H	H	I	H	H

A két értéktáblázat utolsó oszlopai megegyeznek, tehát a két kifejezés ugyanazt jelenti (vagyis ekvivalens).

3. Véletlenszerűen kitöltöttük egy kétváltozós (A -t és B -t tartalmazó) kifejezés logikai értéktáblázatát. (Egyenlő eséllyel választva a lehetséges kitöltések közül.) Mekkora eséllyel lesz a felírt táblázat éppen a $B \Rightarrow (A \wedge \neg A)$ kifejezés logikai értéktáblázata?

Megoldás: Egy kétváltozós kifejezés logikai értéktáblázata négy sorból áll, és mindegyik sor értéke kétféle lehet (igaz vagy hamis). Így összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ -féle lehetséges kitöltés van,

ezek mindegyikét $\frac{1}{16}$ eséllyel választjuk. Tehát speciálisan a $B \Rightarrow (A \wedge \neg A)$ kifejezés táblázatát is $\frac{1}{16}$ eséllyel választjuk (függetlenül attól, hogy ez melyik táblázat).

Bár nem része a feladat megoldásának, de megadjuk a kifejezés logikai értéktáblázatát is:

A	B	$A \wedge \neg A$	$B \Rightarrow (A \wedge \neg A)$
I	I	H	H
I	H	H	I
H	I	H	H
H	H	H	I

4. Tekintsük a következő állításokat ugyanazon n pozitív egész számra vonatkozóan:

A : Az n összetett szám. C : Az n számnak van 1-nél nagyobb négyzetszám osztója.

B : Az n osztható 4-gyel. D : Az n számnak van nála kisebb pozitív prímosztója.

Mely állítások ekvivalensek egymással, illetve melyikből következik valamelyik másik?

Megoldás: Az A és D állítások ekvivalensek, továbbá B -ből következik C (de fordítva nem), illetve C -ből (és így B -ből is) következik A és D (de fordítva nem). Az állítások logikai kapcsolata a következő: $B \Rightarrow C \Rightarrow (A \Leftrightarrow D)$.

5. Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását!

a) „Minden barátomnak van legalább két testvére vagy legalább egy kutyája.”

b) „Egyik héten sincs olyan nap, amikor négy órát tanulok.”

c) „Van olyan tantárgy, amelyikből év végén írásban és szóban is vizsgázunk.”

d) „Ha a telefonomra ébrednek fel, nem félek a dolgozattól.”

e) „Minden embernek van olyan könyve, amelyiknek minden sorát kívülről tudja.”

Megoldás:

a) „Van olyan barátom, akinek nincs se legalább két testvére, se legalább egy kutyája.”, esetleg „Van olyan barátom, akinek legfeljebb egy testvére van, és nincs kutyája.”

b) „Van olyan hét, amikor van olyan nap, amikor négy órát tanulok.”

c) „Minden tantárgyra igaz, hogy év végén nem vizsgázunk belőle írásban vagy nem vizsgázunk belőle szóban.”, esetleg „Minden tantárgyra igaz, hogy év végén nem vizsgázunk belőle írásban is és szóban is.”

d) „(Van olyan, hogy) a telefonomra ébrednek fel, és félek a dolgozattól.”

e) „Van olyan ember, akinek minden könyvében van olyan sor, amit nem tud kívülről.”

6. Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását: „Ha egy négyzetszám 6-ra végződik, akkor osztható 9-cel.” Igaz-e az állítás, illetve a megfordítása?

Megoldás: Az állítás megfordítása: „Ha egy négyzetszám osztható 9-cel, akkor 6-ra végződik.” Sem az eredeti állítás nem igaz (egy lehetséges ellenpélda a 16), sem a megfordítása (egy lehetséges ellenpélda a 9).

7. Készítsük el a $(\neg A \wedge B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$ kifejezés logikai értéktáblázatát, majd írjuk fel többféle logikai formulával a kifejezés tagadását!

Megoldás: A kifejezés logikai értéktáblázata:

A	B	$\neg A \wedge B$	$B \Rightarrow A$	$(\neg A \wedge B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$
I	I	H	I	H
I	H	H	I	H
H	I	I	H	H
H	H	H	I	H

A táblázatból kiderül, hogy a kifejezés értéke (A és B értékétől függetlenül) mindig hamis, így tagadása a mindig igaz állítás. Ezt jelölhetjük I -vel is, de felírhatunk olyan, A -t és/vagy B -t tartalmazó formulákat is, amelyek értéke mindig igaz, például: $A \vee \neg A$, $A \oplus \neg A$, $B \Leftrightarrow B$, illetve $(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

8. Írjunk fel olyan K , L és M kifejezéseket, amelyek logikai értéktáblázata a következő:

A	B	K	L	M
I	I	H	H	I
I	H	H	H	I
H	I	I	H	H
H	H	I	I	I

Megoldás: K értéke (B -től függetlenül) pont ellentétes A értékével, így egy lehetséges megoldás K -ra: $\neg A$. Néhány további lehetőség például: $\neg A \wedge (B \vee \neg B)$, $(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

L értéke csak akkor igaz, ha A és B értéke is hamis. Néhány lehetséges megoldás: $\neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(\neg A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \oplus (B \vee \neg B))$.

M értéke csak akkor hamis, ha A értéke hamis, B értéke igaz. Néhány lehetséges megoldás: $B \Rightarrow A$, $\neg A \Rightarrow \neg B$, $A \vee \neg B$, $\neg(\neg A \wedge B)$.

9. a) Adjuk meg egy elégséges, de nem szükséges feltételét annak, hogy egy köbszám osztható legyen 16-tal!
- b) Adjuk meg egy szükséges, de nem elégséges feltételét annak, hogy egy négyszög téglalap legyen!

- c) Adjuk meg egy szükséges és elégséges feltételét annak, hogy az $ABCD$ négyszögnek legyen beírt köre!

Megoldás:

a) Néhány lehetséges megoldás: a köbszám osztható 128-cal, a köbszám a 16^3 , a köbszám egy 8-cal osztható szám köbe. (Nem jó megoldás: a köbszám osztható 32-vel, ugyanis a köbszám prímbontásában 2 kitevője biztosan 3-mal osztható, így ekkor 2 kitevője legalább 6, míg a 16-tal oszthatóság esetében szintén, tehát ez egy szükséges és elégséges feltétel lenne.)

b) Néhány lehetséges megoldás: a négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, a négyszög szemközti oldalai egyenlők, a négyszög átlói felezik egymást. (Ezek egyike sem elégséges, ugyanis teljesül minden olyan paralelogrammára is, amely nem téglalap.)

c) Néhány lehetséges megoldás: az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, az $ABCD$ konvex négyszög oldalaira teljesül az $AB + CD = AD + BC$ összefüggés, az $ABCD$ konvex négyszög belső szögfelezői egy ponton mennek át.

10. Ekvivalensek-e minden esetben a következő átalakítások?

a) Egy egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk $2x + 3$ -at.

b) Egy egyenlet mindkét oldalából levonunk $\frac{1}{x-2}$ -t.

c) Egy egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, majd mindkét oldalból gyököt vonunk.

d) Egy egyenlet mindkét oldalának vesszük a 3-as alapú logaritmusát (feltéve, hogy mindkét oldal pozitív volt).

Megoldás:

a) Ez a lépés mindig ekvivalens, hiszen nem változik az egyenlet megoldásainak halmaza.

b) Ez a lépés nem mindig ekvivalens. A következtetés ugyan logikailag lehet helyes, de nem minden esetben megfordítható. Elképzelhető ugyanis, hogy bővül az egyenlet értelmezési tartománya – ez még önmagában nem feltétlenül probléma, de ezáltal bővízhet a megoldáshalmaza is.

Például a $2 + \frac{1}{x-2} = x + \frac{1}{x-2}$ egyenletnek nincs megoldása, míg a $2 = x$ egyenletnek már van,

de ez az eredeti egyenletnek nem megoldása (hamis gyök). Az is elképzelhető, hogy a következtetés már logikailag sem helyes, ha úgy szűkül az értelmezési tartomány, hogy ezzel együtt a megoldáshalmaz is szűkül. Például az $x+1=3$ egyenletnek megoldása az $x=2$, míg az

$x+1-\frac{1}{x-2}=3-\frac{1}{x-2}$ egyenletnek már nem (gyökvesztés). Ugyanakkor, ha sem az eredeti,

sem az átalakítás utáni egyenlet értelmezési tartománya nem tartalmazza a 2-t, akkor a lépés ek-

vivalens, például az $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}$ vagy a $\sqrt{x-10} + \frac{1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$ egyenletek

esetében.

c) Ez a lépés nem mindig ekvivalens. A négyzetre emelés logikailag helyes, de bővízhet a megoldáshalmaz (például az $x=2 \Rightarrow x^2=4$ lépés során), így itt hamis gyököt kaphatunk, míg a

gyökvonás a megfelelő kikötések nélkül logikailag sem helyes lépés (például az $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ lépés során), itt gyökvesztés következhet be. A két művelet együttesen sem mindig ekvivalens, például az $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ lépések helytelenek. Ugyanakkor, ha az eredeti egyenlet mindkét oldaláról tudjuk, hogy nemnegatív, akkor a két lépés ekvivalens átalakítás, ilyenkor az eredeti egyenletet kapjuk vissza (például $2x = 6 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow 2x = 6$).

d) Ez a lépés mindig ekvivalens, hiszen a 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $a = b$ akkor és csak akkor teljesül (pozitív a, b értékekre), ha $\log_3 a = \log_3 b$. A pozitivitási feltétel nélkül már nem lenne ekvivalens a lépés, hiszen például $a = -2$ esetén a jobb oldalra nem is tudnánk értelmezni a logaritmus műveletét.

11. Milyen kapcsolat (szükséges feltétel, elégséges feltétel, szükséges és elégséges feltétel) áll fenn a következő kijelentéspárok két tagja között?

a) „ A : Az a_n sorozat korlátos.” és „ B : Az a_n sorozat konvergens.”

b) „ C : Az b_n sorozat divergens.” és „ D : Az b_n sorozat nem korlátos.”

c) „ E : Az f függvény differenciálható.” és „ F : Az f függvény folytonos.”

Megoldás:

a) A konvergenciából következik a korlátosság ($B \Rightarrow A$), de megfordítva nem, például az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens. Így A szükséges (de nem elégséges) feltétele B -nek, illetve B elégséges (de nem szükséges) feltétele A -nak.

b) A nem korlátosságból következik a divergencia ($D \Rightarrow C$), de megfordítva nem, például a $b_n = (-1)^n$ sorozat divergens, de korlátos. Így C szükséges (de nem elégséges) feltétele D -nek, illetve D elégséges (de nem szükséges) feltétele C -nek.

Megjegyzés: Mivel $C = \neg B$ és $D = \neg A$, így $B \Rightarrow A = \neg C \Rightarrow \neg D = D \Rightarrow C$ az **a)** feladat alapján.

c) A differenciálhatóságból következik a folytonosság ($E \Rightarrow F$), de megfordítva nem, például az $f(x) = |x|$ függvény $x = 0$ -ban folytonos, de nem differenciálható. Így E elégséges (de nem szükséges) feltétele F -nek, illetve F szükséges (de nem elégséges) feltétele E -nek.

12. Egy szigeten igazmondók és hazudósok élnek. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak. Megkérdeztünk öt embert, akik ismerték egymást: „Hány igazmondó van köztetek?” A válaszaik: 1, 2, 3, 4, 5. Hány igazmondó lehetett az öt ember között?

Megoldás: Ha n igazmondó van a szigeten, akkor ők mind az n -en n -et fognak válaszolni a kérdésre, a többiek pedig n -től különböző számot. Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy a válaszok között hány olyan (0 és 5 közötti) szám van, amely ugyanannyiszor szerepel, mint amennyi az értéke. Ez két számra teljesül, a 0-ra és az 1-re. Tehát az öt ember között 0 vagy 1 igazmondó lehetett. (Ezek valóban lehetségesek is: az első esetben mindegyikük hazudott, a második esetben pedig csak az mondott igazat, aki 1-et választott.)

13. Peti macskája minden reggel dorombol, ha aznap esni fog az eső. Ma reggel dorombol. Vigyen-e esernyőt Peti?

Megoldás: Az „ A : Peti macskája ma reggel dorombol.” és „ B : Ma esni fog az eső.” jelölésekkel a feltétel $(\forall) B \Rightarrow A$ alakban írható. Ha A értéke igaz, akkor B értéke igaz és hamis is lehet, az implikáció biztosan igaz lesz. Tehát az is lehet, hogy ma esni fog az eső, de az is, hogy nem. Így Peti vihet magával esernyőt, de nem biztos, hogy lesz rá szüksége. (Ha nem szeretne elázni, akkor a biztonság kedvéért jobban teszi, ha visz magával.)

Megjegyzés: A feladat arra kérdezett rá, hogy a $B \Rightarrow A$ állítás esetén teljesül-e biztosan az $A \Rightarrow B$ állítás (vagyis az eredeti állítás megfordítása, jelen esetben „Minden olyan napon, amikor Peti macskája reggel dorombol, esni fog az eső.”) is. Ez nyilván nem igaz, csak akkor lenne igaz, ha a két állítás ekvivalens lenne.

14. Írjuk fel zárt formában az $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ kifejezést, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$!

Megoldás: Az első néhány n érték behelyettesítésével megsejthetjük, hogy a kifejezés zárt alakja $\frac{n}{n+1}$. A sejtést igazolhatjuk teljes indukcióval: $n=1$ -re az állítás igaz, mert $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, továbbá ha valamely rögzített k -ra igaz, akkor $k+1$ -re is, mivel:

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Az állítás teljes indukció nélkül, direkt módon is igazolható, ha észrevesszük, hogy $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Vagyis a kifejezés felírható a következőképpen is:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

15. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

b) $23 \mid 2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

c) $(n+1)! \geq 2^{n-1}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

Megoldás:

a) Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n=1$ -re igaz, mert $1^3 = 1^2 \cdot (2 \cdot 1^2 - 1)$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, majd lássuk be, hogy ekkor $k+1$ -re is igaz, azaz:

$$\left[1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 \right] + (2k+1)^3 = (k+1)^2 \left(2(k+1)^2 - 1 \right).$$

Az indukciós feltevést kihasználva a $k^2(2k^2 - 1) + (2k + 1)^3 = (k + 1)^2(2(k + 1)^2 - 1)$ összefüggést kell igazolni, amely a zárójelek felbontásával és rendezéssel belátható.

b) Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 1$ -re igaz, mert:

$$23 \mid 2^{7+3} + 3^{2+1} \cdot 5^{4+1} = 1024 + 27 \cdot 3125 = 85399 = 3713 \cdot 23.$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, majd lássuk be, hogy ekkor $k + 1$ -re is igaz, azaz $23 \mid 2^{7(k+1)+3} + 3^{2(k+1)+1} \cdot 5^{4(k+1)+1}$. Alkalmazzuk a következő átalakításokat:

$$2^{7k+10} + 3^{2k+3} \cdot 5^{4k+5} = 128 \cdot (2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}) + 23 \cdot (239 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1})$$

Az összeg első tagja az indukciós feltevés miatt, a második tagja pedig a 23-as szorzótényező miatt lesz 23-mal osztható, ezzel az állítást beláttuk $k + 1$ -re is.

c) Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 1$ -re igaz, mert $(1 + 1)! \geq 2^{1-1}$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, majd lássuk be, hogy ekkor $k + 1$ -re is igaz, azaz $(k + 2)! \geq 2^k$. Tekintsük a $(k + 2)! = (k + 2) \cdot (k + 1)! > 2 \cdot (k + 1)! \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ összefüggéseket.
 indukciós feltevés

(A becslésben kihasználtuk, hogy $k + 2 > 2$.) Ezzel az állítást beláttuk $k + 1$ -re is.

16. Igaz-e, hogy biztosan van két olyan különböző prímszám, amelyeknek azonos az utolsó 2013 számjegye?

Megoldás: Skatulya-elve alkalmazunk. A pozitív egész számok utolsó 2013 számjegye (szükség esetén a kis számok elejére 0-kat írva) összesen 10^{2013} -féle lehet. Mivel végtelen sok prímszám van, ezért $10^{2013} + 1$ különböző pozitív prímszám választása esetén biztosan lesz kettő, amelyeknek azonos az utolsó 2013 számjegye. Tehát az állítás igaz.

17. Legfeljebb hány részre oszthatja n egyenes a síkot?

Megoldás: Kísérletezéssel megállapíthatjuk, hogy 1 egyenes a síkot legfeljebb 2 részre, 2 egyenes legfeljebb 4 részre, 3 egyenes legfeljebb 7 részre, 4 egyenes legfeljebb 11 részre oszthatja. (A maximumot akkor kapjuk, ha az egyenesek között nincsenek párhuzamosak, illetve semelyik három egyenes nem metszi egymást ugyanabban a pontban.) Innen megfogalmazhatjuk sejtésként, hogy n egyenes a síkot legfeljebb $1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ részre oszthatja. A sejtést teljes indukcióval igazolhatjuk, az állítás $n = 1$ -re igaz, mert 1 egyenes valóban 1+1 részre osztja a síkot. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, majd lássuk be, hogy ekkor $k + 1$ -re is igaz, azaz $k + 1$ egyenes a síkot legfeljebb $1 + (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1)$ részre oszthatja. Ehhez tekintsük a $k + 1$ egyenest tartalmazó ábrát, majd hagyjuk el erről képzeletben az egyik egyenest. Ekkor k egyenes van az ábrán, amelyek – az indukciós feltevést kihasználva – legfeljebb $1 + (1 + 2 + 3 + \dots + k)$ részre osztják a síkot. Ekkor elég megmutatni, hogy ha behúzzuk az elhagyott $k + 1$ -edik egyenest, akkor az legfeljebb $k + 1$ új részt eredményez. Ez pedig azért igaz, mert a $k + 1$ -edik egyenesnek az összes korábbival legfeljebb 1-1 metszéspontja lehet,

ez a legfeljebb k metszéspont legfeljebb $k + 1$ részre oszthatja ezt az egyenest, és minden ilyen rész pontosan egy új síkrészt hoz létre. Ezzel az állítást beláttuk.

18. Hol van a hiba a következő teljes indukciós bizonyításban?

Állítás: A világ összes lova egyforma színű.

Bizonyítás teljes indukcióval: megmutatjuk, hogy bármely n ló színe megegyezik, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

– Az állítás $n = 1$ ló esetén nyilván igaz, hiszen egy lónak egy színe van.

– Tegyük fel most, hogy az állítás igaz valamely k -ra (azaz bármely k ló színe egyforma), majd lássuk be $k + 1$ -re. Vegyünk $k + 1$ lovat. Tudjuk, hogy az $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ sorszámú lovak és a $\{2, 3, 4, \dots, k + 1\}$ sorszámú lovak is egyforma színűek, hiszen mindkettő egy-egy k elemű halmaz. Mivel a két halmaznak van közös eleme, ezért szükségképpen mind a $k + 1$ ló egyforma színű. Ezzel az állítást beláttuk.

Megoldás: Az állítás $n = 1$ -re valóban igaz, de semmitmondó. Az is helyes indoklás, hogy ha az állítás igaz lenne valamilyen 1 -nél nagyobb k -ra, akkor abból $k + 1$ -re is következne. (Ez egyébként nyilvánvaló, hiszen ha bármely 2 ló egyforma színű, akkor bármely 3 is.)

A hiba ott van, hogy $k = 1$ -ről $k + 1 = 2$ -re nem „öröklődik” a tulajdonság, itt nem működik az indukciós lépés. Ekkor ugyanis az $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ és $\{2, 3, 4, \dots, k + 1\}$ halmazoknak nincsen metszete, ugyanis az előbbi az egyelemű $\{1\}$, míg az utóbbi az egyelemű $\{2\}$ halmaz. Tehát hiába igaz az állítás $n = 1$ -re, ettől még nem lesz igaz $n = 2$ -re (és nagyobb n -ekre sem).

19. Adott az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) rekurzív sorozat. Írjuk fel a sorozat első néhány tagját, majd próbáljuk megsejteni a sorozat explicit alakját! Igazoljuk sejtésünket!

Megoldás: Az $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 10$, $a_4 = 28$, $a_5 = 82$ értékek felírása után megsejthetjük, hogy a sorozat explicit alakja $a_n = 3^{n-1} + 1$. A sejtést teljes indukcióval igazoljuk, az állítás igaz $n = 1$ -re, mert $2 = 3^{1-1} + 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, majd lássuk be, hogy ekkor $k + 1$ -re is igaz, azaz $a_{k+1} = 3^k + 1$. Az indukciós feltevést és a sorozat rekurzív megadását kihasználva $a_{k+1} = 3 \cdot a_k - 2 = 3 \cdot (3^{k-1} + 1) - 2 = 3^k + 1$. Ezzel az állítást beláttuk.

20. Tudjuk, hogy igaz a következő három állítás:

1. Ha veszek almát és olcsó a tojás, készítek máglyarakást.
2. Ha nem olcsó a tojás, akkor nem veszek almát és éhes maradok.
3. Csak akkor nem maradok éhes, ha készítek máglyarakást.

Következik-e ebből a három állításból, hogy ha nem készítek máglyarakást, akkor nem veszek almát?

I. Megoldás: Az „ A : veszek almát”, „ T : olcsó a tojás”, „ M : készítek máglyarakást” és „ E : éhes maradok” jelölésekkel a feladat állításai: $(A \wedge T) \Rightarrow M$, $\neg T \Rightarrow (\neg A \wedge E)$, $\neg E \Leftrightarrow M$. A kérdés

pedig, hogy $\neg M \Rightarrow \neg A$ következik-e az előző három állításból. Megmutatjuk, hogy ez következik az előzőekből.

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy $\neg M \Rightarrow \neg A$ nem teljesül, azaz tagadása, $\neg M \wedge A$ teljesül. Ekkor $\neg E \Leftrightarrow M$ miatt $\neg M \Leftrightarrow E$. Innentől két esetet vizsgálunk. Ha T igaz, akkor $(A \wedge T) \Rightarrow M$ miatt M is igaz lenne, ami ellentmondás. Ha viszont T hamis, akkor $\neg T \Rightarrow (\neg A \wedge E)$ miatt $\neg A$ igaz, ami szintén ellentmondás. Tehát $\neg M \wedge A$ nem lehet igaz, így $\neg M \Rightarrow \neg A$ szükségképpen igaz, vagyis a kérdéses állítás valóban következik a megadott három állításból.

II. Megoldás: Az előző megoldásban formalizált kifejezések mellett az eredeti jelentésükkel is megadjuk a megoldást. Tegyük fel (indirekt módon), hogy a feladat kérdése nem következik a három állításból, azaz van olyan, amikor nem készítek máglyarakást és veszek almát. Ekkor a 3. állítás miatt biztosan éhes maradok. Innentől két esetet vizsgálunk. Ha olcsó a tojás, akkor az 1. állítás miatt készítek máglyarakást, ami ellentmondás. Ha viszont nem olcsó a tojás, akkor a 2. állítás miatt nem veszek almát, ami szintén ellentmondás. Tehát az indirekt feltevés hamis volt, így az eredeti három állításból következik, hogy ha nem készítek máglyarakást, akkor nem veszek almát.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Készítsük el az $(A \Leftrightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ kifejezés logikai értéktáblázatát, majd írjuk fel minél egyszerűbb logikai formulával a kifejezés tagadását!
2. Ugyanazt jelentik-e az $(A \oplus B) \Rightarrow (\neg B \vee A)$ és a $\neg((B \Rightarrow A) \wedge (A \oplus B))$ kifejezések?
3. Tekintsük a következő állításokat ugyanazon n pozitív egész számra vonatkozóan:

A: Az n két 0-ra végződik. C: Az n számnak van 1-nél nagyobb négyzetszám osztója.

B: Az n osztható 5-tel. D: Az n osztható 4-gyel és 25-tel.

Soroljuk fel, hogy a fenti állítások közül melyek szükséges, elégséges, illetve szükséges és elégséges feltételei egymásnak!

4. Fogalmazzunk meg olyan állításokat, amelyek tagadásai a következő állítások!
 - a) „Van olyan falu, ahol nincs posta.”
 - b) „Ha férfival találkozom, az biztosan kékszemű.”
 - c) „Minden szállodában minden szobában van telefon és rádió is.”
 - d) „Van olyan munkahely, ahol van olyan ember, aki dolgozik vagy kávéét főz.”
 - e) „Minden póknak legfeljebb 8 szeme van.”

5. Hogyan szól a Thalész-tétel megfordítása? Ekvivalens-e a megfordítással a következő állítás: „*T: Minden derékszögű háromszög átfogója kétszer olyan hosszú, mint a köré írható kör sugara.*”?
6. Egy színház ruhatárában a következő felirat olvasható: „*A ruhatárba le nem adott tárgyakért nem vállalunk felelősséget!*” Logikailag következik-e ebből a feliratról, hogy a ruhatárba leadott táskánk biztonságban van?
7. Az alábbiak közül mely egyenletek ekvivalensek a $3x + 2 = 17$ egyenlettel?

$$A: 3x - \frac{2}{x-5} = 15 - \frac{2}{x-5} \quad B: \frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5} \quad C: \frac{20}{x} = 4$$

$$D: x + \sqrt{3-x} = 5 + \sqrt{3-x} \quad E: \lg(x-4)^2 = 0 \quad F: \sin((x+2)\pi) = \sin(7\pi)$$

8. Aladár, Béla és Cecil beszélgetnek egymással. Aladár azt mondja: „Béla hazudik.” Béla azt mondja: „Cecil hazudik.” Cecil azt mondja: „Aladár és Béla hazudik.” Ki mond igazat és ki hazudik hármuk közül?
9. Írjuk fel zárt formában az $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$ kifejezést, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$!

10. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) $9 \mid 7^n + 3n - 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

b) Minden irracionális szám tizedestört alakjában legalább egy számjegy végtelen sokszor szerepel. (Igaz-e az állítás legalább két számjegyre is?)

c) Ha adott a síkon 10 egyenes, amelyek közül semelyik kettő sem párhuzamos, akkor kiválasztható közülük kettő, amelyek 20° -nál kisebb szöveget zárnak be egymással.

11. Jó-e a következő bizonyítás?

Állítás: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bizonyítás teljes indukcióval: Az állítás $n=1$ esetén igaz, mert $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}$. Tegyük fel most,

hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, majd lássuk be, hogy ekkor $k+1$ -re is igaz, azaz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1}. \text{ Az indukciós feltevést kihasználva:}$$

$$\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} \right) + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1}.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Készítsük el az $(A \Leftrightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ kifejezés logikai értéktáblázatát, majd írjuk fel minél egyszerűbb logikai formulával a kifejezés tagadását!

Megoldás: A kifejezés logikai értéktáblázata:

A	B	$A \Leftrightarrow \neg B$	$B \vee A$	$(A \Leftrightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
I	I	H	I	H
I	H	I	I	I
H	I	I	I	I
H	H	H	H	I

A táblázatból kiolvasható, hogy az $(A \Leftrightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ állítás tagadása csak akkor lesz igaz, ha A és B is igaz. Így ennek legegyszerűbb formulája: $A \wedge B$.

2. Ugyanazt jelentik-e az $(A \oplus B) \Rightarrow (\neg B \vee A)$ és a $\neg((B \Rightarrow A) \wedge (A \oplus B))$ kifejezések?

Megoldás: Készítsük el a két kifejezés logikai értéktáblázatát:

A	B	$A \oplus B$	$\neg B \vee A$	$(A \oplus B) \Rightarrow (\neg B \vee A)$
I	I	H	I	I
I	H	I	I	I
H	I	I	H	H
H	H	H	I	I

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \oplus B$	$(B \Rightarrow A) \wedge (A \oplus B)$	$\neg((B \Rightarrow A) \wedge (A \oplus B))$
I	I	I	H	H	I
I	H	I	I	I	H
H	I	H	I	H	I
H	H	I	H	H	I

A két értéktáblázat utolsó oszlopai különböznek, tehát a két kifejezés nem ugyanazt jelenti.

3. Tekintsük a következő állításokat ugyanazon n pozitív egész számra vonatkozóan:

A : Az n két 0-ra végződik. C : Az n számnak van 1-nél nagyobb négyzetszám osztója.

B : Az n osztható 5-tel. D : Az n osztható 4-gyel és 25-tel.

Soroljuk fel, hogy a fenti állítások közül melyek szükséges, elégséges, illetve szükséges és elégséges feltételei egymásnak!

Megoldás: Az állítások logikai kapcsolata: $B \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow D) \Rightarrow C$.

Az A és D állítások egymás szükséges és elégséges feltételei.

Az A és a D állítás a B és a C állításnak elégséges, de nem szükséges feltételei.

A B és a C állítások az A és a D állításnak szükséges, de nem elégséges feltételei.

4. Fogalmazzunk meg olyan állításokat, amelyek tagadásai a következő állítások!

a) „Van olyan falu, ahol nincs posta.”

b) „Ha férfival találkozom, az biztosan kékszemű.”

c) „Minden szállodában minden szobában van telefon és rádió is.”

d) „Van olyan munkahely, ahol van olyan ember, aki dolgozik vagy kávéfőz.”

e) „Minden póknak legfeljebb 8 szeme van.”

Megoldás:

a) „Minden faluban van posta.”

b) „(Van, hogy) olyan férfival találkozom, aki nem kékszemű.”

c) „Van olyan szálloda, amelyben van olyan szoba, ahol nincs telefon vagy rádió.”

d) „Minden munkahelyen minden ember nem dolgozik és nem főz kávéfőz.”, esetleg „Egyik munkahelyen se dolgozik egyik (ott lévő) ember se, és egyikük sem főz kávéfőz.”

e) „Van olyan pók, amelynek 8-nál több szeme van.”

5. Hogyan szól a Thalész-tétel megfordítása? Ekvivalens-e a megfordítással a következő állítás: „ T : Minden derékszögű háromszög átfogója kétszer olyan hosszú, mint a köré írható kör sugara.”?

Megoldás: A Thalész-tétel: „Ha egy kör átmérőjének A és B végpontját összekötjük a körív A -tól és B -től különböző tetszőleges C pontjával, akkor az ABC háromszögnek C -nél derékszöge van.” A megfordítás (egyik lehetséges megfogalmazása): „Ha az ABC háromszögnek C -nél derékszöge van, akkor a C csúcs rajta van az AB -re mint átmérőre rajzolt köríven (és különbözik A -tól, illetve B -től).” A megfordítás ekvivalens azzal az állítással, hogy „ S : Egy derékszögű háromszög átfogója a háromszög köré írható kör átmérője.”, ami pedig ekvivalens a feladatban kért állítással. ($S \Rightarrow T$ nyilvánvaló, a $T \Rightarrow S$ irány igazolásához pedig csak azt kell meggondolnunk, hogy a háromszög köré írható kör középpontja az átfogó mindkét végpontjától sugárnyi távolságra van, így T fennállása esetén a középpont csak az átfogó felezőpontja lehet.) Tehát a Thalész-tétel megfordítása és a megadott T állítás is ekvivalensek.

6. Egy színház ruhatárában a következő felirat olvasható: „A ruhatárba le nem adott tárgyakért nem vállalunk felelősséget!” Logikailag következik-e ebből a feliratból, hogy a ruhatárba leadott táskánk biztonságban van?

Megoldás: Nem következik belőle. Az „ A : a ruhatárba le nem adott tárgy” és „ B : nem vállalunk felelősséget” jelölésekkel a felirat az $A \Rightarrow B$ implikációval szemléltethető. Ez nem mond semmit azokra az esetekre, amikor A hamis (tehát egy leadott tárgyról van szó). A ruhatárba leadott táskáról csak akkor lenne információnk, ha az állítás megfordítása ($B \Rightarrow A$: „Ha nem vállalunk fele-

lősséget egy tárgyért, akkor azt nem adták le a ruhatárba.” vagy $\neg A \Rightarrow \neg B$: „A ruhatárba leadott tárgyakért felelősséget vállalunk.”), vagy esetleg egy ekvivalencia ($A \Leftrightarrow B$: „Pontosan azokért a tárgyakért vállalunk felelősséget, amelyeket leadtak a ruhatárba.”, esetleg „Csak azokért a tárgyakért vállalunk felelősséget, amelyeket leadtak a ruhatárba.”) lenne kiírva. Természetesen a leadott táska remélhetőleg ennek ellenére is biztonságban van.

7. Az alábbiak közül mely egyenletek ekvivalensek a $3x + 2 = 17$ egyenlettel?

$$A: 3x - \frac{2}{x-5} = 15 - \frac{2}{x-5} \quad B: \frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5} \quad C: \frac{20}{x} = 4$$

$$D: x + \sqrt{3-x} = 5 + \sqrt{3-x} \quad E: \lg(x-4)^2 = 0 \quad F: \sin((x+2)\pi) = \sin(7\pi)$$

Megoldás: Az eredeti egyenlet ekvivalens az $x = 5$ egyenlettel.

Az A egyenletben a nevező miatt $x \neq 5$, így ez nem ekvivalens az eredeti egyenlettel. (A -nak nincs megoldása; ha mindkét oldalhoz $\frac{2}{x-5}$ -öt adnánk, akkor bővülne az értelmezési tartomány, $x = 5$ hamis gyök lenne.)

A B egyenletben, noha $x^2 = 25$ -nek két megoldása lenne, a nevező miatt $x \neq -5$, így $x = 5$ az egyetlen megoldás, ez tehát ekvivalens az eredeti egyenlettel. (De ha mindkét oldalt $x+5$ -tel szoroznánk, akkor bővülne az értelmezési tartomány, $x = -5$ hamis gyök lenne.)

A C egyenletben $x \neq 0$, az egyetlen megoldás $x = 5$, ez tehát ekvivalens az eredeti egyenlettel.

Megjegyzés: Mivel $x = 0$ sem az eredeti, sem a C egyenletnek nem megoldása, ezért a C egyenlet esetében a megoldáshalmazon – és az ekvivalencián – nem változtat az, hogy a két egyenlet (az eredeti és C) értelmezési tartománya különböző.

A D egyenletben a gyökvonás miatt $x \leq 3$, így ez nem ekvivalens az eredeti egyenlettel. (D -nek nincs megoldása; ha mindkét oldalból levonnánk $\sqrt{3-x}$ -et, akkor bővülne az értelmezési tartomány, $x = 5$ hamis gyök lenne.)

Az E egyenlet ekvivalens az $(x-4)^2 = 1$ egyenlettel, amelynek megoldásai $x_1 = 5$ és $x_2 = 3$, így ez nem ekvivalens az eredeti egyenlettel. (Ha az egyenletet $2 \cdot \lg(x-4) = 0$ alakra hoznánk, akkor szűkülne az értelmezési tartomány, így már csak $x = 5$ lenne megoldás, az $x = 3$ gyököt elvesztenénk. Így tévesen azt hihetnénk, hogy az egyenlet ekvivalens a megadott egyenlettel, holott valójában nem az.)

Az F egyenletnek végtelen sok megoldása van: egyrészt $x_1 = 5 + 2k_1$, ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$, másrészt $x_2 = 2k_2 - 8$, ahol $k_2 \in \mathbb{Z}$. (A kapott x_1 megoldások a páratlan egészek, az x_2 megoldások a párosak, vagyis az egyenletnek minden egész szám megoldása.) Tehát ez nem ekvivalens az eredeti egyenlettel. (Ha nem gondolnánk sem a periódusra, sem a szinuszértékek kétfajta egyenlőségére, és a szinuszokat elhagyva $(x+2)\pi = 7\pi$ alakra hoznánk az egyenletet, akkor $x = 5$ kivételével az összes többi gyököt elvesztenénk.)

Tehát csak a B és a C egyenlet ekvivalens az eredeti egyenlettel.

8. Aladár, Béla és Cecil beszélgetnek egymással. Aladár azt mondja: „Béla hazudik.” Béla azt mondja: „Cecil hazudik.” Cecil azt mondja: „Aladár és Béla hazudik.” Ki mond igazat és ki hazudik hármuk közül?

Megoldás: Ha Aladár igazat mond, akkor Béla hazudik, tehát Cecil igazat mond, így Aladárnak és Bélának is hazudnia kellene, ami ellentmondás. Tehát Aladár nem mondhat igazat.

Vagyis Aladár hazudik, ekkor Béla igazat mond, Cecil pedig hazudik, így Aladár és Béla közül legalább az egyikük igazat mond, ami valóban teljesül. Tehát Aladár és Cecil hazudik, Béla igazat mond.

9. Írjuk fel zárt formában az $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$ kifejezést, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$!

Megoldás: Az első néhány n értékre kiszámolva a kifejezést, a következő sejtést fogalmazhatjuk meg: $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$. A sejtés igazolható teljes indukcióval,

vagy direkt módon, megfigyelve az $\frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right)$, $\frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right)$, $\frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right)$, ..., $\frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$ összefüggést, amelynek felhasználásával:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{n}{3n+1}.$$

10. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

- a) $9 \mid 7^n + 3n - 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.
- b) Minden irracionális szám tizedestört alakjában legalább egy számjegy végtelen sokszor szerepel. (Igaz-e az állítás legalább két számjegyre is?)
- c) Ha adott a síkon 10 egyenes, amelyek közül semelyik kettő sem párhuzamos, akkor kiválasztható közülük kettő, amelyek 20° -nál kisebb szöget zárnak be egymással.

Megoldás:

a) Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás igaz $n=1$ -re, mert $9 \mid 7+3-1$. Ha igaz valamely rögzített k -ra, akkor $k+1$ -re is igaz, mert $7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7 \cdot (7^k + 3k - 1) - 18k + 9$, ami az indukciós feltevés és $-18k + 9 = 9 \cdot (-2k + 1)$ miatt szintén osztható 9-cel.

b) Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Ha az állítás hamis, akkor a vizsgált irracionális szám tizedestört alakjában mind a 10 számjegy csak véges sokszor szerepelne, így összesen csak véges sok számjegyből állna a szám, de ekkor racionális lenne, ami ellentmondás.

Az erősebb állítás is igaz: minden irracionális szám tizedestört alakjában legalább két számjegy végtelen sokszor szerepel. Ha ugyanis pontosan egy számjegy szerepelne csak végtelen sokszor, akkor egy bizonyos tizedesjegytől kezdődően már csak ez a számjegy szerepelne a számban, így

egy véges rész után periodikus lenne a tizedestört alak, vagyis a szám racionális lenne, ami ellentmondás.

c) Skatulya-elvet alkalmazunk. Az egyenesek egymással bezárt szöge nem változik, ha önmagukkal párhuzamosan eltoljuk őket úgy, hogy egy közös ponton mindegyikük átmenjen. Ebben a pontban az egyenesek a teljes szöget 20 részre osztják, amelyek közül legalább az egyik nem lehet nagyobb $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ -nál. (Az utolsó lépésben indirekt bizonyítást alkalmaztunk.) Az ezt a szöget határoló két egyenes megfelelő lesz.

Megjegyzés: Két egyenes bezárt szögén a keletkező szögek közül a nem nagyobbat értjük, így a bezárt szög 0° és 90° közötti lehet.

11. Jó-e a következő bizonyítás?

Állítás: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bizonyítás teljes indukcióval: Az állítás $n=1$ esetén igaz, mert $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}$. Tegyük fel most, hogy az állítás igaz valamely rögzített k -ra, majd lássuk be, hogy ekkor $k+1$ -re is igaz, azaz: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1}$. Az indukciós feltevést kihasználva:

$$\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} \right) + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1}.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Megoldás: A bizonyítás nem lehet jó, ugyanis az állítás eredendően hamis, a 14. ajánlott feladatban belátott módon $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n} \neq \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$. A hiba ott van a bizonyításban,

hogy a megadott állítás nem értelmes $n=1$ -re, ekkor ugyanis az összeadás utolsó tagja $\frac{1}{(1-1) \cdot 1} = \frac{1}{0}$ lenne, ami nem értelmezhető. A bizonyításban felírt $\frac{1}{1 \cdot 2}$ kifejezés már $n=2$ -höz

tartozik, ekkor viszont a jobb oldalon nem $\frac{3}{2} - \frac{1}{1}$ -et, hanem $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$ -t kellene kapnunk, így az egyenlőség szintén nem teljesül. Tehát az indukció kezdőlépése hiányzik, az állítás nem igaz $n=1$ -re (és $n=2$ -re sem). Formailag egyébként az indukciós lépés helyes, vagyis ha valamilyen rögzített k -ra igaz lenne az állítás, akkor $k+1$ -re is igaz lenne. Viszont nem találunk egy megfelelő k -t sem, amelyre az állítás igaz lenne.