4. Sorozatok

Megjegyzés:

A szakirodalomban használt a sorozat tagjáról, máskor eleméről beszélni. Az alábbiakban mindkét kifejezést használtuk megtartva a feladatok eredeti fogalmazását.

I. Feladatok

1. Van-e a 7, 13, 19, 25, … sorozat (minden tag 6-tal nagyobb, mint az előző) tagjai között olyan szám, ami előállítható két prímszám különbségeként?

Kalmár László Matematika Verseny 1994; 7.osztály, megyei forduló

2. Igazoljuk minél rövidebben, hogy a következő egyenlőség helyes:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100} \quad !$$

Kalmár László MatematikaVerseny 1994; 8.osztály, országos döntő

3. Egy sorozat első két tagja: $a_1 = 2, a_2 = 3$ és minden további tag a két szomszédjának a szorzatánál eggyel kisebb. Számítsuk ki a sorozat első 560 tagjának az összegét!

Kalmár László Matematika Verseny 2008; 8.osztály, országos döntő

4. A pozitív egész számokat a következő „háromszög-táblázatba” írjuk fel:

				17
			10	18
		5	11	19
	2	6	12	20
1	3	7	13	21
	4	8	14	22
		9	15	23
			16	24
				25

A táblázat középső sora így kezdődik: $1, 3, 7, 13, 21, \ldots$
Mi lesz ennek a középső sornak a 100. eleme?

Kalmár László MatematikaVerseny 1998; 7.osztály, megyei forduló

5. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$ egész szám, akkor az

$$n+1, 2n+1, 3n+1, 4n+1 \ldots$$

sorozatban mindig van négyzetszám és mindig van köbszám is.

Kalmár László MatematikaVerseny 2010; 8.osztály, országos döntő

6. Az x_n sorozatot az alábbi módon értelmezzük:

$$x_1 = 5,$$

$$x_{n+1} = x_n^2, \qquad \text{ha} \qquad n \geq 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy x_{n+1} és x_n utolsó n jegye megegyezik.

KöMaL 1986/december; F. 2608.

7. Hány olyan természetes számokból álló (végtelen) sorozat van, amelyben az első $2n$ tag összegének és az első n tag összegének hányadosa nem függ n megválasztásától, továbbá amely sorozatnak egyik tagja az 1971 szám?

KöMaL 1971/március; F. 1763.

8. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható 3-mal. (A Fibonacci sorozatban $a_1 = 1, a_2 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + a_n$ minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ esetén.)

KöMaL 2009/szeptember; C. 997.

9. Legyen n rögzített pozitív egész. Hány olyan $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ sorozat van, amelyben a páratlan indexű tagok páratlan, a páros indexűek páros egész számok?

KöMaL 1992/szeptember; F. 2916.

10. Jelölje a_1, a_2, a_3, a_4 a Pascal-háromszög egyik sorának négy egymás után következő elemét. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad \frac{a_2}{a_2 + a_3}, \quad \frac{a_3}{a_3 + a_4}$$

számok számtani sorozatot alkotnak.

KöMaL 2010/április; B. 4266.

11. Egy sorozat első tagja 2011. A második tagtól kezdve minden tag megegyezik az őt megelőző tagnál 2-vel nagyobb szám reciprokának (-2)-szeresével. Mennyi a sorozat 2011. tagja?

KöMaL 2011/szeptember; K. 296.

12. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatot a következő módon képeztük: a_1, a_2, a_3 pozitív egészek, $a_3 > 2a_2 + a_1$, $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ $(n = 4, 5, \ldots)$. Bizonyítsuk be, hogy $a_{1000} > 2^{999}$.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1982; haladók, általános tantervű osztályok, 2.forduló

13. Az $1, 2, \ldots, n$ számokat valamilyen – tetszés szerinti – sorrendben leírva kapjuk az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot a_1} + \frac{1}{2 \cdot a_2} + \cdots + \frac{1}{n \cdot a_n}$$

összeg értéke akkor a legkisebb, ha csökkenő sorrendbe rendeztük a számainkat, azaz $a_1 = n, \ldots\ a_n = 1$.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1985; kezdők, speciális matematika tagozat, 2. forduló

14. Definiáljuk az a_n $(n \geq 0)$ sorozatot a következőképpen: a_0:=0, az $a_1 := 1$; és $n \geq 2$-re

$a_n := 6a_{n-1} - a_{n-2}$. Bizonyítsa be, hogy $\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^n \cdot a_{n+1} - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{n+1} \cdot a_n = 1$ minden $n \geq 0$-ra!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2006/2007; kezdők, III. kategória, 3.forduló

15. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat: $a_1 = 18$; $a_2 = 48$; $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$, ha $n > 2$.

Hány négyzetszám van a sorozatban?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók I. kategória, 2 .forduló

16. Két számtani sorozat első tagja megegyezik. Az első sorozat egyik tagjának a négyzete a másik ugyanannyiadik tagjának a négyzeténél 7-tel nagyobb, a megelőző tagok négyzeteinek a különbsége $343/64$, a következő tagok négyzeteinek a különbsége pedig $567/64$. Megállapítható-e ezekből az adatokból, hogy a sorozatok hányadik tagjairól van szó? Megállapítható-e a sorozatok valamilyen további adata?

OKTV 1968; általános tantervű osztályok, 2. forduló

17. Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatban a_0 természetes szám, és

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozatban van irracionális szám.

OKTV 1973; szakosított matematika I. tantervű osztályok, 2. forduló

18. Legyen a_n az összes, a tízes számrendszerben legfeljebb n jegyű nem negatív egész számok száma, b_n pedig ezek közül azoknak a száma, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában van 5-ös számjegy. Adjuk meg a_n-et és b_n –et n függvényeként, valamint a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

határértéket.

OKTV 1977; I. forduló

19. Egy sorozatban $a_1 = \frac{2}{3}, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, ha $n > 1$. Állítsuk elő a_n-et n függvényeként!

OKTV 1996/97; II. kategória, 1. forduló

20. Igaz-e, hogy a $7k + 3, k = 0,1,2,\ldots$ számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 123321.)

OKTV 2005/2006; III. kategória, 1. forduló

21. Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tetszőleges pozitív számok, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i = \infty$ és $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2 = \infty$ közül legalább az egyik teljesül. (Pozitív $c_1, c_2, c_3, \ldots$ számok esetén $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$ azt jelenti, hogy az $s_k = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ összegek k növekedésével minden határon túl nőnek.)

OKTV 2008/2009; III. kategória, 2. forduló

22. Határozzuk meg az $S = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + 1\cdot n + 2\cdot 3 + \cdots + 2\cdot n + \cdots + (n-1)n$ összeget.

„Ki miben tudós?" vetélkedő 1964; elődöntő feladata

23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges adott n természetes számhoz megadható végtelen sok 2-hatvány úgy, hogy ezek közül bármely kettőnek a különbsége osztható n-nel.

„Ki miben tudós?" vetélkedő 1966; döntő feladata

24. Legyen

$$A = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot 2n},$$

ahol n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A, 2A, 4A, \ldots , 2^k A, \ldots.$$

sorozatban van egész szám.

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1934.évi 1. feladata

25. Az $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots$ természetes számok végtelen sorozatában

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$$

minden $k > 1$ értékre teljesül. Bebizonyítandó, hogy minden természetes szám felírható ebből a sorozatból kiválasztott számok összegeként (vagy pedig előfordul a sorozatban).

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1960.évi 2. feladata

26. Bizonyítandó, hogy nincs olyan, természetes számokból álló végtelen sorozat, amelynek nem minden eleme egyenlő, s amelynek minden eleme (a másodiktól kezdve) a két szomszédos elem harmonikus közepe (a és b harmonikus közepe $\frac{2ab}{a+b}$) .

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1968.évi 1. feladata

27. Mennyivel egyenlő n, ha $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \cdots + [\sqrt[3]{n}] = 2n$?

(Az $[x]$ az x szám egészrészét jelöli.)

(A) 29 (B)33 (C) 41 (D) 49 (E)53

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008; 12. osztály, országos forduló

28. Jelölje $\{a_n\}$ azon pozitív egész számok növekvő sorozatát, melyek 7-tel osztva 5 maradékot adnak, $\{b_n\}$ azon pozitív egész számok növekvő sorozatát, melyek 5-tel osztva 4 maradékot adnak! Mindkét sorozat első eleme legyen a lehető legkisebb! Az $\{a_n\}$ sorozat első n elemének az összegét jelölje H_n, a $\{b_n\}$ sorozat első n elemének az összegét jelölje Ö_n! Mennyi n értéke, ha

$$\frac{H_n}{\text{Ö}_n} = \frac{32}{23} \ ?$$

(A) 9 (B)18 (C) 27 (D) 81 (E) Nincs ilyen n.

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 12. osztály, megyei forduló

29. Egy számsorozatot a következőképpen értelmezünk:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-2}}\text{, ha } n = 2; 3; 4; \ldots$$

Mennyivel egyenlő az x_{2011}, ha $a = \frac{1}{2011}$ és $b = \frac{1}{2010}$?

$(A)\ \frac{1}{2011}$ $\quad (B)\ \frac{1}{2010}$ $\quad (C)\ 1$ $\quad (D)\ 2010$ $\quad (E)\ 2011$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2011; 12. osztály, országos forduló

30. Vizsgáljuk meg az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ sorozatot. Vegyük a szomszédos elemek különbségét, az alábbi módon egy különbségi háromszöget állítsunk elő:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \ldots \\
& -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{12} & & -\frac{1}{20} & & -\frac{1}{30} & & \ldots & \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \ldots & & \\
& & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{20} & & -\frac{1}{60} & & \ldots & & & \\
& & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{30} & & \ldots & & & & \\
& & & & & -\frac{1}{6} & & \ldots & & & & &
\end{array}$$

Forgassuk el a táblázatot 60°-al úgy hogy az 1-es szám kerüljön a háromszög csúcsába. és hagyjuk el az előjeleket.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & & & & 1 & & & & & \\
& & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
& & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
& & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
& \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Ezután minden sor minden elemét osszuk el az illető sor szélén álló számmal és vegyük az eredmény reciprokát.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a Pascal-háromszöget kapjuk

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom:
Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből

Aritmetika és algebra, 320. feladat

II. Megoldások

1. Van-e a 7, 13, 19, 25, … sorozat (minden tag 6-tal nagyobb, mint az előző) tagjai között olyan szám, ami előállítható két prímszám különbségeként?

Kalmár László Verseny, 1994, 7.osztály, megyei forduló

Megoldás:

A sorozat tagjai $6k+1$ alakban írhatóak fel, ahol $k \geq 1$ egész szám, ezért a sorozat minden tagja pozitív páratlan szám. Két prímszám különbségeként csak akkor állítható elő egy páratlan szám, ha az egyik prímszám páros, azaz 2. Azt keressük, hogy van-e olyan p prímszám, amelyre $6k+1 = p-2$ teljesül. Ekkor $p = 6k+3$ alakú, tehát p 3-mal osztható lenne. Egyetlen 3-mal osztható prímszám van, a 3, de $6k+3 > 3$, ezért nem lehet prím. Ezzel beláttuk, hogy a sorozat egyetlen tagja sem állítható elő két prímszám különbségeként.

2. Igazoljuk minél rövidebben, hogy a következő egyenlőség helyes:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100} \quad !$$

Kalmár László Verseny, 1994, 8.osztály, országos döntő

Megoldás:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{100}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{50}\right)=$$

$$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100} \quad .$$

Megjegyzés:

Hasonlóan belátható, hogy

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \quad ,$$

ahol $n \geq 1$ egész szám.

3. Egy sorozat első két tagja: $a_1 = 2, a_2 = 3$ és minden további tag a két szomszédjának a szorzatánál eggyel kisebb. Számítsuk ki a sorozat első 560 tagjának az összegét!

Kalmár László Verseny, 2008, 8.osztály, országos döntő

Megoldás:

A sorozat képzési szabálya szerint:

$$a_n \cdot a_{n+2} - 1 = a_{n+1} \quad .$$

Ezt átrendezve:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} \quad .$$

Ezt a szabályt alkalmazva kiszámítjuk a sorozat néhány tagját: $2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, \ldots$ A 2 és 3 már szerepelt a sorozat első két elemeként. Tehát a képzési szabály miatt innentől kezdve ismétlődik a sorozat. Az ismétlődő periódus 5 elemből áll, amelyeknek az összege 9. $560: 5 = 112$, tehát 112 ismétlődő periódust kell összeadnunk, ez alapján az első 560 tag összege $9 \cdot 112 = 1008$.

4. A pozitív egész számokat a következő „háromszög-táblázatba” írjuk fel:

				17
			10	18
		5	11	19
	2	6	12	20
1	3	7	13	21
	4	8	14	22
		9	15	23
			16	24
				25

A táblázat középső sora így kezdődik: $1, 3, 7, 13, 21, \ldots$
Mi lesz ennek a középső sornak a 100. eleme?

Kalmár László Verseny, 1998, 7.osztály, megyei forduló

Megoldás:

A középső sorban a második tag 2-vel nagyobb az elsőnél, a harmadik tag 4-gyel nagyobb a másodiknál, a negyedik tag 6-tal nagyobb a harmadiknál és így tovább:

$$a_{n+1} = a_n + 2n \ .$$

Ennek alapján a középső sor 100. elemét így számolhatjuk ki:

$$a_{100} = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 196 + 198 = 1 + \frac{(2 + 198) \cdot 99}{2} = 9901 \ .$$

5. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$ egész szám, akkor az

$$n + 1, 2n + 1, 3n + 1, 4n + 1 \ldots$$

sorozatban mindig van négyzetszám és mindig van köbszám is.

Kalmár László Verseny, 2010, 8.osztály, országos döntő

Megoldás:

Olyan k és m egész számot keresünk, amelyre $k \cdot n + 1 = m^2$. Átrendezve:

$$k \cdot n = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1) \ .$$

Válasszuk az $n = m - 1$ és $k = m + 1$ megfeleltetést. Ekkor $m = n + 1$ és $k = n + 2$.

Valóban $(n + 2)n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ négyzetszám.

Köbszámot hasonló módszerrel állíthatunk elő:

Olyan k és m egész számot keresünk, amelyre $k \cdot n + 1 = m^3$. Átrendezve és szorzattá alakítva:

$$k \cdot n = m^3 - 1 = (m - 1)(m^2 + m + 1) \ .$$

Jó megfeleltetés:

$$n = m - 1\,; k = m^2 + m + 1$$

Tehát:

$$m = n + 1 \quad ; \quad k = (n+1)^2 + n + 1 + 1 = n^2 + 3n + 3\,.$$

Így

$$(n^2 + 3n + 3)n + 1 = (n+1)^3$$

formában köbszámot kapunk.

Megjegyzés:

Általános iskolás ismeretekkel így lehet gondolkozni:

$k \cdot n + 1$ alakú négyzetszámot keresünk, és az $(a \cdot n + 1)^2$ ilyen. Válasszuk a-t 1-nek, ekkor

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = (n+2)n + 1,$$

tehát a sorozat $(n+2)$-edik tagja négyzetszám.

$k \cdot n + 1$ alakú köbszámot keresünk, és az $(a \cdot n + 1)^3$ ilyen. Válasszuk a-t 1-nek, ekkor

$$(n+1)^3 = (n^2 + 2n + 1)(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n^2 + 3n + 3)n + 1,$$

azaz a sorozat $(n^2 + 3n + 3)$-edik tagja köbszám.

6. Az x_n sorozatot az alábbi módon értelmezzük:

$$x_1 = 5,$$

$$x_{n+1} = x_n^2, \qquad \text{ha} \qquad n \geq 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy x_{n+1} és x_n utolsó n jegye megegyezik.

KöMaL 1986/december; F. 2608.

Megoldás:

A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk.

$\boldsymbol{n = 1}$-re igaz az állítás, hiszen $x_2 = 25$; $x_1 = 5$, tehát az utolsó számjegyek egyenlőek.

$\boldsymbol{n = k}$-ra feltételezzük, hogy igaz az állítás, azaz x_{k+1} és x_k utolsó k jegye megegyezik. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy $10^k | x_{k+1} - x_k$.

$\boldsymbol{n = k + 1}$-re bizonyítjuk az állítást:
A sorozat képzési szabálya alapján $x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1}^2 - x_k^2 = (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} + x_k)$. Az indukciós feltétel alapján $10^k | x_{k+1} - x_k$. x_{k+1} és x_k 5 hatványa, ezért 5-re végződnek, tehát az összegük 0-ra végződik, így osztható 10-zel. Ezek alapján $10^{k+1} | x_{k+2} - x_{k+1}$, amiből következik, hogy x_{k+2} és x_{k+1} utolsó k+1 jegye megegyezik.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

7. Hány olyan természetes számokból álló (végtelen) sorozat van, amelyben az első $2n$ tag összegének és az első n tag összegének hányadosa nem függ n megválasztásától, továbbá amely sorozatnak egyik tagja az 1971 szám?

KöMaL 1971/március; F. 1763.

Megoldás:

Ha a sorozat első tagja a_1, a differencia d, akkor az első $2n$ tag összegének és az első n tag összegének hányadosa :

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{2n(2a_1+(2n-1)d)}{n(2a_1+(n-1)d)}=\frac{4a_1+(4n-2)d}{2a_1+(n-1)d}.$$

Ha ez a hányados minden n-re azonos, akkor $n=1$ és $n=2$-re is:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{4a_1+2d}{2a_1}=\frac{S_4}{S_2}=\frac{4a_1+6d}{2a_1+d}.$$

Átrendezve:

$$8a_1^2+8a_1\cdot d+2d^2=8a_1^2+12a_1\cdot d$$

$$2d^2-4a_1\cdot d=2d(d-2a_1)=0\,.$$

Ez $d=0$ vagy $d=2a_1$ esetén teljesül.

Ha $d=0$, akkor $a_1\neq 0$, mert ellenkező esetben $S_{2n}=S_n=0$ lenne, tehát nem írhatnánk fel ezek hányadosát. Ekkor a sorozat tagjai egyenlőek és 1971-gyel kell megegyezniük. Ez valóban alkalmas sorozat, mert a vizsgált hányados 2.

Ha $d=2a_1$, akkor is szükséges az $a_1\neq 0$ feltétel. Ekkor a sorozat tagjai: $a_1, 3a_1, 5a_1$ ....

Ezek között akkor szerepel az 1971, ha $(2k-1)a_1=1971$ teljesül valamilyen a_1 és k természetes szám esetén. $1971=3^3\cdot 73$. Ezt felhasználva a lehetséges értékek:

$\boldsymbol{a_1}$	1	3	9	27	73	$3\cdot 73$	$9\cdot 73$	$27\cdot 73$
$\boldsymbol{k}$	$\frac{27\cdot 73+1}{2}$	$\frac{9\cdot 73+1}{2}$	$\frac{3\cdot 73+1}{2}$	$\frac{73+1}{2}$	$\frac{27+1}{2}$	$\frac{9+1}{2}$	$\frac{3+1}{2}$	$\frac{1+1}{2}$

Az 1971 a sorozat k-adik tagja lesz.

Ezek a sorozatok is megfelelőek, mert:

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{4a_1+(4n-2)d}{2a_1+(n-1)d}=\frac{4a_1+(4n-2)\cdot 2a_1}{2a_1+(n-1)\cdot 2a_1}=\frac{8a_1n}{2a_1n}=4.$$

Tehát 9 megfelelő sorozat van.

8. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható 3-mal. (A Fibonacci sorozatban $a_1=1, a_2=1$ és $a_n=a_{n-1}+a_n$ minden $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$ esetén.)

KöMaL 2009/szeptember; C. 997.

Megoldás:

Számítsuk ki a sorozat néhány tagját a képzési szabály alapján:

$$a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8, a_7=13, a_8=21, ...$$

Az a sejtésünk, hogy minden olyan tag osztható 3-mal, amelynek az indexe osztható 4-gyel. Azt fogjuk teljes indukcióval bizonyítani, hogy a_{4n} osztható 3-mal, ha $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

$\boldsymbol{n = 1}$-re igaz az állítás

$\boldsymbol{n = k}$-ra feltételezzük, hogy a_{4k} osztható 3-mal.

$\boldsymbol{n = k + 1}$-re bizonyítjuk:

$$a_{4(k+1)} = a_{4k+4} = a_{4k+3} + a_{4k+2} = a_{4k+2} + a_{4k+1} + a_{4k+1} + a_{4k} = a_{4k+2} + 2a_{4k+1} + a_{4k} =$$

$$= a_{4k+1} + a_{4k} + 2a_{4k+1} + a_{4k} = 2a_{4k}+3a_{4k+1}$$

$3a_{4k+1}$ osztható 3-mal, mert egyik tényezője 3, $2a_{4k}$ pedig az indukciós feltétel alapján osztható 3-mal. Így beláttuk a feladat állítását.

Megjegyzés:

Kicsit egyszerűbben – kevésbé „hivatalosan” – elmondva:
A Fibonacci sorozatban a 3-mal való osztási maradékok: $1, 1; 2; 0; 1; 1; 2; 0; \ldots$, a képzési szabályból adódóan periodikusan ismétlődnek, tehát minden negyedik tag osztható 3-mal.

9. Legyen n rögzített pozitív egész. Hány olyan $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ sorozat van, amelyben a páratlan indexű tagok páratlan, a páros indexűek páros egész számok?

KöMaL 1992/szeptember; F. 2916.

Megoldás:

Jelölje A_n az n egész számhoz tartozó ilyen sorozatok számát.

$A_1 = 1$, mert egyetlen ilyen sorozat van: $a_1 = 1$.

$A_2 = 2$, ezek a sorozatok: $a_1 = 1$; illeve az $a_1 = 1$; $a_2 = 2$.

Tegyük fel, hogy már meghatároztuk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ értékét ($n \geq 2$). Hogyan tudunk $n + 1$ - hez megfelelő sorozatot készíteni?

Ha a sorozat nem tartalmazza az $n + 1$ számot, akkor nyilván minden n-hez tartozó sorozatot megkapunk, ezek száma A_n.

Ha a sorozatnak az utolsó tagja $n + 1$ és van n-nél kisebb tagja, akkor ezt a sorozatot az alábbi módon kaphattuk:

- vettünk egy n-nél kisebb elemeket tartalmazó sorozatot, amelyben az utolsó tag paritása $n + 1$-gyel ellentétes és ehhez hozzávettük $n + 1$-et;
- vettünk egy n-nél kisebb elemeket tartalmazó sorozatot, amelyben az utolsó tag paritása $n + 1$-gyel azonos és ehhez hozzávettük n-et és $n + 1$-et.

Így felhasználtuk az összes olyan sorozatot, amelyek n-nél kisebb elemeket tartalmaznak. Ezek száma $\mathrm{A}_{\mathrm{n}-1}$.

Ha a sorozatnak az utolsó tagja $n + 1$ és nincs n-nél kisebb tagja, akkor egyetlen sorozatot készíthetünk:
Ha $n + 1$ páratlan, akkor az $a_1 = n + 1$ sorozat megfelelő, ha $n + 1$ páros, akkor az $a_1 = n$ és $a_2 = n + 1$ sorozat jó.

Ezzel megkaptuk, hogy $A_{n+1} = A_n + A_{n-1} + 1$.

Ez a képzési szabály a Fibonacci sorozatra emlékeztet. A kiindulási elemeket figyelembe véve megmutatható, hogy $A_n = f_{n+2} - 1$, ahol $f_1 = 1$; $f_2 = 1$; $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ a Fibonacci sorozat első elemei és a rekurzív megadási módja.

10. Jelölje a_1, a_2, a_3, a_4 a Pascal-háromszög egyik sorának négy egymás után következő elemét. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad \frac{a_2}{a_2 + a_3}, \quad \frac{a_3}{a_3 + a_4}$$

számok számtani sorozatot alkotnak.

KöMaL 2010/április, B. 4266.

Megoldás:

A Pascal-háromszög n-edik sorának két szomszédos eleme $\binom{n}{k}$ és $\binom{n}{k+1}$. Ezekkel a kifejezésekkel felírva a megfelelő törtet:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}{\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}} = \frac{k+1}{n+1}$$

összefüggést kapjuk. A következő két tört értéke ugyanígy számolva: $\frac{k+2}{n+1}$; $\frac{k+3}{n+1}$. Ebből látható, hogy számtani sorozatot kaptunk, amelynek a differenciája $\frac{1}{n+1}$, ami csak attól függ, hogy a Pascal-háromszög melyik sorából vettük az elemeket.

11. Egy sorozat első tagja 2011. A második tagtól kezdve minden tag megegyezik az őt megelőző tagnál 2-vel nagyobb szám reciprokának (-2)-szeresével. Mennyi a sorozat 2011. tagja?

KöMaL 2011/szeptember, K. 296.

Megoldás:

A sorozat tagjai:

$$a_1 = 2011;\ a_2 = -\frac{2}{2013};\ a_3 = -\frac{2}{-\frac{2}{2013} + 2} = -\frac{2}{\frac{4024}{2013}} = -\frac{2013}{2012};$$

$$a_4 = -\frac{2}{-\frac{2013}{2012} + 2} = -\frac{4024}{2011};\ a_5 = -\frac{2}{-\frac{4024}{2011} + 2} = 2011.$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat tagjai négyesével ismétlődnek. $2011 = 4 \cdot 502 + 3$, így $a_{2011} = a_3 = -\frac{2013}{2012}$.

12. Az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozatot a következő módon képeztük: a_1, a_2, a_3 pozitív egészek, $a_3 > 2a_2 + a_1$, $\quad a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 2a_{n-3} \quad (n = 4, 5, \dots)$. Bizonyítsuk be, hogy $a_{1000} > 2^{999}$.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1982; haladók, általános tantervű osztályok, 2.forduló

Megoldás:

Teljes indukció módszerével azt fogjuk bebizonyítani, hogy $n \geq 4$ esetén $a_n \geq 2^{n-1}$.

$\boldsymbol{n = 4}$ –re bizonyítjuk az állítást:

$$a_4 = 4a_3 - 3a_2 - 2a_1 \geq 4(2a_2 + a_1 + 1) - 3a_2 - 2a_1 = 5a_2 + 2a_1 + 4 > 8 = 2^3.$$

$\boldsymbol{n}$ –nél ($n \geq 5$)kisebb $\boldsymbol{k}$ egészekre feltételezzük, hogy

$$a_k > 2^{k-1}.$$

$\boldsymbol{n}$ –re bizonyítjuk az állítást:

A rekurziós formulát átrendezzük:

$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2a_{n-1} - 4a_{n-2} - 2a_{n-3} = 2(a_{n-1} - 2a_{n-2} - a_{n-3})$$

Ez azt jelenti, hogy $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2}$ egy mértani sorozat, így

$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2^{n-3}(a_3 - 2a_2 - a_1) \geq 2^{n-3}.$$

Ezt átrendezve:

$$a_n \geq 2^{n-3} + 2a_{n-1} + a_{n-2} \geq 2^{n-3} + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-3} = 6 \cdot 2^{n-3} > 2^{n-1}.$$

Ezzel bizonyítottuk az állításunkat, $n = 1000$-re alkalmazva: $a_{1000} > 2^{999}$.

13. Az $1,2, \dots ,n$ számokat valamilyen – tetszés szerinti – sorrendben leírva kapjuk az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokat. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot a_1} + \frac{1}{2 \cdot a_2} + \dots + \frac{1}{n \cdot a_n}$$

összeg értéke akkor a legkisebb, ha csökkenő sorrendbe rendeztük a számainkat, azaz $a_1 = n, \dots\ a_n = 1$.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1985; kezdők, speciális matematika tagozat, 2.forduló

Megoldás:

Megvizsgáljuk először, hogyan változik az

$$\frac{1}{k \cdot a_k} + \frac{1}{l \cdot a_l} \qquad (1)$$

összeg, ha $k > l$ és ezt a két számot felcseréljük a nevezőkben.

$$\frac{1}{k \cdot a_k} + \frac{1}{l \cdot a_l} - \left(\frac{1}{l \cdot a_k} + \frac{1}{k \cdot a_l}\right) = \frac{1}{k \cdot l \cdot a_k a_l}(la_l + ka_k - ka_l - la_k) =$$
$$= \frac{1}{k \cdot l \cdot a_k a_l}(k - l)(a_k - a_l) > 0$$

akkor és csak akkor, ha $a_k > a_l$. Ezért ha az a_k *és* a_l tényezőket felcseréljük, akkor az (1) összeg csökken.

Legyen az $1,2,3, \dots, n$ számok egy tetszőleges sorrendje $a_1, a_2, \dots, a_n$. Alkalmas cserékkel csökkentsük az

$$S = \frac{1}{1 \cdot a_1} + \frac{1}{2 \cdot a_2} + \dots + \frac{1}{n \cdot a_n}$$

összeget.

Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ sorozat különbözik az $n, n-1, \dots, 1$ sorozattól, azaz nem szigorúan monoton csökken, akkor van két tagja, amelyek egymáshoz képest növekvően állnak, azaz van olyan $l < k$, hogy $a_l < a_k$. Ekkor az a_l és a_k számokat a sorozatban megcserélve az előbbi megállapítás miatt S csökken. Ilyen módon az S értéke mindig csökkenthető, ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ sorozat különbözik az $n, n-1, \dots, 1$ sorozattól. Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ sorozatnak véges sok sorrendje van, ezért véges sok lépésben, az S értékét csökkentve eljutunk az $n, n-1, \dots, 1$ sorozathoz.

Ekkor megkapjuk a minimum értékét:

$$M = \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 1}.$$

14. Definiáljuk az a_n $(n \geq 0)$ sorozatot a következőképpen: a_0:=0, az $a_1 := 1$; és $n \geq 2$-re

$a_n := 6a_{n-1} - a_{n-2}$. Bizonyítsa be, hogy $\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^n \cdot a_{n+1} - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{n+1} \cdot a_n = 1$ minden $n \geq 0$-ra!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2006/2007; kezdők, III. kategória, 3.forduló

Megoldás:

Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást.

$\boldsymbol{n = 0}$ - ra igaz az egyenlőség.

$\boldsymbol{n = k}$ **-** ra feltételezzük, hogy

$$\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^k \cdot a_{k+1} - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+1} \cdot a_k = 1.$$

$\boldsymbol{n = k + 1}$ - re bizonyítunk:

$$\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+1} \cdot a_{k+2} - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+2} \cdot a_{k+1} =$$

$$= \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+1} (6 \cdot a_{k+1} - a_k) - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+2} \cdot a_{k+1} =$$

$$= 6 \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+1} \cdot a_{k+1} - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+1} a_k - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+2} \cdot a_{k+1}$$

Ebben a kifejezésben előállítunk egy olyan részletet, amiben az indukciós feltételt fel tudjuk használni, majd megvizsgáljuk a maradék tagokat:

$$\left\{\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^k \cdot a_{k+1} - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+1} \cdot a_k\right\} + \left(6 \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+1} - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^k\right) \cdot a_{k+1} -$$

$$-\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{k+2} \cdot a_{k+1} = 1 + a_{k+1} \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^k \left(6 \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) - 1 - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2\right). \qquad (*)$$

Ebben a kifejezésben:

$$6 \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) - 1 - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 18 - 12 \cdot \sqrt{2} - 1 - 9 + 12 \cdot \sqrt{2} - 8 = 0.$$

Ezért a $(*)$ összefüggés értéke 1, ezzel az állítást beláttuk $\boldsymbol{n = k + 1}$- re, befejeztük a teljes indukciós bizonyítást.

15. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat: $a_1 = 18$; $a_2 = 48$; $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$, ha $n > 2$.

Hány négyzetszám van a sorozatban?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók, I. kategória, 2. forduló

Megoldás:

$a_1 = 2 \cdot 3^2$; $a_2 = 2^4 \cdot 3$. A további tagokat a rekurzió szerint képezve mindig olyan számokat fogunk kapni, amelyben csak a 2 és 3 szerepel prímtényezőként. Akkor kapunk négyzetszámot, ha mindkét prímszám kitevője páros. A képzési szabály miatt a 2-hatványok kitevőjének kettes maradéka így ismétlődik: 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; …, tehát 3 számból álló periódus: 1; 0; 1. A 3 kitevőinek kettes maradéka pedig így ismétlődik: 0; 1; 1; 0; 1; 1; , azaz szintén 3 számból álló periódust kapunk: 0; 1; 1. Láthatóan nem egyszerre lesz páros a 2 és a 3 kitevője, tehát sohasem kapunk négyzetszámot.

16. Két számtani sorozat első tagja megegyezik. Az első sorozat egyik tagjának a négyzete a másik ugyanannyiadik tagjának a négyzeténél 7-tel nagyobb, a megelőző tagok négyzeteinek a különbsége $343/64$, a következő tagok négyzeteinek a különbsége pedig $567/64$. Megállapítható-e ezekből az adatokból, hogy a sorozatok hányadik tagjairól van szó? Megállapítható-e a sorozatok valamilyen további adata?

OKTV 1968; általános tantervű osztályok, 2. forduló

Megoldás:

A két sorozat első tagját jelöljük a-val, a differenciák legyenek d és D. A feladat feltételei legyenek igazak az n-edik, $(n+1)$-edik, $(n+2)$-edik tagokra:

$$(a+nd)^2 - (a+nD)^2 = 7$$

$$(a+(n-1)d)^2 - (a+(n-1)D)^2 = \frac{343}{64}$$

$$(a+(n+1)d)^2 - (a+(n+1)D)^2 = \frac{567}{64}$$

Átrendezve:

$$2an(d-D) + n^2(d^2-D^2) = 7 \qquad (1)$$

$$2a(n-1)(d-D) + (n-1)^2(d^2-D^2) = \frac{343}{64} \qquad (2)$$

$$2a(n+1)(d-D) + (n+1)^2(d^2-D^2) = \frac{567}{64} \qquad (3)$$

A (2) és (3) számtani közepéből kivonjuk az (1) egyenletet:

$$(d^2-D^2) = \frac{7}{64}. \qquad (4)$$

Ezt visszahelyettesítjük (1) és (2)-be:

$$2an(d-D) + \frac{7}{64}n^2 = 7 \qquad (5)$$

$$2a(n-1)(d-D) + \frac{7}{64}(n-1)^2 = \frac{343}{64} \qquad (6)$$

(5)-ből (6)-t kivonva :

$$2a(d-D) + \frac{7}{64}(2n-1) = \frac{105}{64} \qquad (7)$$

Ennek n-szeresét (5)-ből kivonva, majd rendezve:

$$\frac{7}{64}(n^2 - 2n^2 + n) = 7 - \frac{105n}{64}$$

$$n^2 - 16n + 64 = (n-8)^2 = 0.$$

Tehát $n = 8$, ezért a $8.9.10.$ tagokról beszél a feladat.

Ezt az eredményt visszahelyettesítjük a (7) egyenletbe:

$$a(d - D) = 0.$$

$d \neq D$, mert a két sorozatnak nem minden tagja egyenlő, ezért csak $a = 0$ lehetséges. Így a két sorozatot $a_n = (n-1)d$ és $A_n = (n-1)D$, alakban adhatjuk meg. Az (1); (2); $és$ (3) egyenletek négy ismeretlent tartalmaznak, ezért nem tudjuk mindegyik ismeretlent meghatározni.

Az a és n meghatározható és azt tudjuk mondani, hogy d és D között fennáll a (4) összefüggés.

17. Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatban a_0 természetes szám, és

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \qquad (n = 0,1,2, \ldots).$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozatban van irracionális szám.

OKTV 1973; szakosított matematika I. tantervű osztályok, 2. forduló

Megoldás:

Először azt bizonyítjuk, hogy ha a természetes szám és $\sqrt{a}$ racionális, akkor egész szám is. Indirekt bizonyítást adunk. Tegyük fel, hogy $\sqrt{a} = \frac{b}{c}$, ahol b, c relatív prímek és $c \neq 1$. ekkor négyzetre emelés után:

$$b^2 = ac^2.$$

$c \neq 1$, ezért van prímosztója, legyen p az egyik. A fenti összefüggés szerint p osztója b^2-nek is, így b-nek is. Ekkor b és c nem lenne relatív prím, ezzel ellentmondásra jutottunk. Tehát $\sqrt{a}$ egész.

Most az eredeti állítást bizonyítjuk teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy a_0 természetes szám és az $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ rekurzióval megadott mindegyik szám racionális, az előbbi bizonyításból adódóan természetes szám. A sorozat egyik tagja sem lehet 1, mert akkor a következő $\sqrt{2}$ lenne, ami irracionális. Tehát a sorozat mindegyik tagja legalább 2. Így:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} < \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2a_n} \leq a_n.$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat monoton fogy. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mert nincs végtelen sok természetes számból álló monoton fogyó sorozat. A feladat állítását beláttuk.

18. Legyen a_n az összes, a tízes számrendszerben legfeljebb n jegyű nemnegatív egész számok száma, b_n pedig ezek közül azoknak a száma, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában van 5-ös számjegy. Adjuk meg a_n-et és b_n –et n függvényeként, valamint a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

határértéket.

OKTV 1977; I. forduló

Megoldás:

A legfeljebb n-jegyű nemnegatív számok: $0;\ 1;\ \dots;\ 10^n-1$, tehát $a_n=10^n$. Azokat a számokat, amelyekben van 5-ös számjegy, úgy kapjuk meg, ha az összes számból levonjuk azokat, amelyekben nincs 5-ös. Legfeljebb n-jegyű számokat vizsgálunk, ezért mindenütt, a szám elején is megengedjük a nullát. Most 5-öst nem használunk, ezért minden helyiértéken 9-féle számjegyből választhatunk, így 9^n a rossz esetek száma, azaz $b_n=10^n-9^n$ olyan nemnegatív szám van, amelyben szerepel az 5-ös. Így

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{10^n-9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}=\frac{1}{1-0}=1.$$

Felhasználtuk, hogy $\lim_{n\to\infty}q^n=0$, ha q olyan valós szám, amelyre $|q|<1$.

19. Egy sorozatban $a_1=\frac{2}{3}, a_n=a_{n-1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, ha $n>1$. Állítsuk elő a_n-et n függvényeként!

OKTV 1996/97; II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

A képzési szabályt használva $a_1=\frac{2}{3};\ a_2=\frac{3}{4};\ a_3=\frac{4}{5};\ \dots$. Az a sejtésünk, hogy

$$a_n=\frac{n+1}{n+2}.$$

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$-re igaz az állítás és tegyük fel, hogy $n-1$-re is már beláttuk, hogy

$$a_{n-1}=\frac{n}{n+1}.$$

A rekurzív képzési szabály és az indukciós feltétel miatt:

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n+1}{n+2},$$

amit bizonyítani akartunk.

20. Igaz-e, hogy a $7k+3, k=0,1,2,\dots$ számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 123321.)

OKTV 2005/2006; III. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Azok a számok, amelyeknek minden jegye egyenlő, nyilván palindrom számok, ezért keressük ezek között a megfelelő számokat. Az a kérdés, hogy a $c\ (1+10+10^2+\cdots+10^t)$ alakú számok között milyen c ($1 \leq c \leq 9$ egész) esetében kapunk 7-tel osztva 3-t maradékul.

Az $1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, \ldots$. számok 7-es maradéka 1; 4; 6; 5; 2; 0, a maradékok innentől kezdve periodikusan ismétlődnek. Ha a maradék 1, akkor a c-t válasszuk 3-nak, ha 4; 6; 5; 2 , akkor c legyen 6; 4; 2; 5. Ekkor a $c\ (1+10+10^2+\cdots+10^t)$ szám 7-tel osztva 3-t ad maradékul. A nullához nem tudunk alkalmas c-t választani. Tehát ilyen módon végtelen sok palindrom számot kapunk.

21. Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tetszőleges pozitív számok, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i = \infty$ és $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2 = \infty$ közül legalább az egyik teljesül. (Pozitív $c_1, c_2, c_3, \ldots$ számok esetén $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$ azt jelenti, hogy az $s_k = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ összegek k növekedésével minden határon túl nőnek.)

OKTV 2008/2009; III. kategória, 2. forduló

Megoldás:

A feladatot indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van olyan T szám, hogy minden k természetes számra:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k} < T \text{ és } a_1+\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_k}{k^2} < T\,.$$

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_i}+\frac{a_i}{i^2}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{a_i}\cdot\frac{a_i}{i^2}} = \sqrt{\frac{1}{i^2}} = \frac{1}{i}.$$

Ezt $i = 1$-től k-ig összegezzük és felhasználjuk az indirekt feltételt:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+a_1+\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_k}{k^2}\right) < T.$$

Ismert, hogy az $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$ harmonikus sor minden határon túl nő, tehát elég nagy k-ra az összeg nagyobb lesz T-nél. Ellentmondásra jutottunk, ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

Megjegyzés:

A harmonikus sor értékének becslése:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^r+1}+\cdots+\frac{1}{2^{r+1}}\right) >$$

$$> 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+\cdots+2^r\cdot\frac{1}{2^{r+1}} = 1+(r+1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{r+3}{2}.$$

Ez pedig r növekedésével tetszőlegesen nagy értéket felvehet.

22. Határozzuk meg az $S = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + 1\cdot n + 2\cdot 3 + \cdots + 2\cdot n + \cdots + (n-1)n$ összeget.

„Ki miben tudós?” vetélkedő 1964; elődöntő feladata

Megoldás:

Csoportosítsuk a tagokat, egy csoportba kerülnek azok a tagok, amelyekben az első tényező azonos:

$$S = [1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + 1\cdot n] + [2\cdot 3 + \cdots + 2\cdot n] + \cdots + (n-1)n =$$

$$S = 1\cdot(2+3+\cdots+n) + 2\cdot(3+4+\cdots+n) + \cdots + k\cdot[(k+1)+(k+2)+\cdots+n] + \cdots$$

Egy ilyen csoport összege:

$$k\cdot[(k+1)+(k+2)+\cdots+n] = k\cdot\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}.$$

Az S összeg így alakul:

$$S = \frac{1\cdot(n-1)(n+2)}{2} + \frac{2\cdot(n-2)(n+3)}{2} + \frac{3\cdot(n-3)(n+4)}{2} + \cdots +$$
$$+ \frac{(n-3)\cdot 3\cdot(2n-2)}{2} + \frac{(n-2)\cdot 2\cdot(2n-1)}{2} + \frac{(n-1)\cdot 1\cdot 2n}{2}.$$

Láthatóan párba állíthatóak a tagok úgy, hogy két-két azonos tényező legyen bennük. Ezért a számtani sorozat összegképletének levezetésénél használt módszerrel:

$$2S = \frac{1\cdot(n-1)(3n+2)}{2} + \frac{2\cdot(n-2)(3n+2)}{2} + \frac{3\cdot(n-3)(3n+2)}{2} + \cdots +$$
$$+ \frac{k\cdot(n-k)(3n+2)}{2} + \cdots +$$
$$+ \frac{(n-3)\cdot 3\cdot(3n+2)}{2} + \frac{(n-2)\cdot 2\cdot(3n+2)}{2} + \frac{(n-1)\cdot 1\cdot(3n+2)}{2} =$$
$$= \frac{3n+2}{2}\cdot(n-1+2n-4+3n-9+\cdots+nk-k^2+\cdots+(n-1)n-(n-1)^2) =$$
$$= \frac{3n+2}{2}\cdot n\cdot\big(1+2+\cdots+(n-1)\big) - \frac{3n+2}{2}\cdot(1^2+2^2+\cdots(n-1)^2).$$

Felhasználjuk az első $(n-1)$ szám illetve négyzetszám összegére vonatkozó összefüggést:

$$2S = \frac{3n+2}{2}\cdot\left(n\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} - \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\right) =$$
$$= \frac{(3n+2)\cdot(n-1)\cdot n}{12}\cdot(3n-2n+1) = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(3n+2)}{12},$$

Tehát

$$S = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(3n+2)}{24}.$$

23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges adott n természetes számhoz megadható végtelen sok 2-hatvány úgy, hogy ezek közül bármely kettőnek a különbsége osztható n-nel.

„Ki miben tudós?" vetélkedő 1966; döntő feladata

Megoldás:

Ha a $2^1, 2^2, 2^3, \ldots\ 2^k \ldots$ hatványokat n-nel elosztjuk, akkor a $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ számok valamelyike lehet a maradék. A 2- hatványok száma végtelen, ezért a skatulya-elv szerint van olyan maradék, amely n-nel osztva végtelen sok hatványnál fordul elő. E hatványok közül bármely kettő különbsége osztható n-nel.

24. Legyen

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n},$$

ahol n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A, 2A, 4A, \ldots, 2^k A, \ldots.$$

sorozatban van egész szám.

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1934.évi 1. feladata

Megoldás:

A törtet bővítsük a $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n$ szorzattal:

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n}.$$

$\binom{2n}{n}$ egész szám, azt adja meg, hogy $2n$ különböző elemből hányféle módon tudunk n elemet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít.

Így $2^n \cdot A$ egész szám.

25. Az $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots$ természetes számok végtelen sorozatában

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$$

minden $k > 1$ értékre teljesül. Bebizonyítandó, hogy minden természetes szám felírható ebből a sorozatból kiválasztott számok összegeként (vagy pedig előfordul a sorozatban).

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1960.évi 2. feladata

Megjegyzés: A zárójeles toldalék felesleges akkor, ha egytagú összeget is lehetségesnek tartunk. A megoldásban szereplő összegek így értendők.

Megoldás:

Azt fogjuk bizonyítani, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok segítségével minden olyan n szám felírható a feladat feltételei szerint, amelyre $0 < n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

A bizonyításhoz k-ra vonatkozó teles indukciót használunk:

$\boldsymbol{k = 1}$ esetén $a_1 = 1$. Ekkor $n = 1 = a_1$ megfelelő felírás.

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{k-1}$-re $(k > 1)$ igaz az állítás, tehát minden 0 és $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$ közé eső szám felírható alkalmas a_i számok összegeként.

Bizonyítunk $\boldsymbol{k}$-ra:

Ha $0 < n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$, akkor már az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ számok is elegendőek az indukciós feltétel szerint.

Ha $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \leq n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, akkor $0 \leq n - a_k \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$.

Ekkor, ha $0 = n - a_k$, akkor az $n = a_k$ felírás megfelelő. Különben $n - a_k$ az indukciós feltétel miatt felírható az $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ számokból alkalmasan választott összeg formájában. Ehhez hozzáadva az a_k számot, megkapjuk az n egy lehetséges felírását.

Teljes indukcióval beláttuk a feladat állítását.

26. Bizonyítandó, hogy nincs olyan, természetes számokból álló végtelen sorozat, amelynek nem minden eleme egyenlő, s amelynek minden eleme (a másodiktól kezdve) a két szomszédos elem harmonikus közepe (a és b harmonikus közepe $\frac{2ab}{a+b}$) .

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1968.évi 1. feladata

I. Megoldás:

Ha a sorozat első két eleme h_1 és h_2, akkor a képzési szabály alapján $h_2 = \frac{2h_1h_3}{h_1+h_3}$, amiből átrendezéssel

$$\frac{2}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{h_3} = \frac{2}{h_2} - \frac{1}{h_1} = \frac{2h_1 - h_2}{h_2h_1} \quad \Rightarrow \quad h_3 = \frac{h_2h_1}{2h_1 - h_2}.$$

Hasonlóan számolva

$$h_4 = \frac{h_2h_1}{3h_1 - 2h_2}.$$

Az a sejtésünk, hogy

$$h_n = \frac{h_2h_1}{(n-1)h_1 - (n-2)h_2}, \quad \text{ahol } n \geq 3 \text{ természetes szám.}$$

Ezt az állítást teljes indukcióval tudjuk bizonyítani.

$\boldsymbol{n = 3}$-ra igaz az állítás.

$\boldsymbol{k < n}$-re $(\boldsymbol{n} > 3)$ feltételezzük, hogy igaz az állítás:

$$h_k = \frac{h_2h_1}{(k-1)h_1 - (k-2)h_2}$$

$\boldsymbol{n = k + 1}$-re bizonyítunk. A harmonikus közép így is kifejezhető:

$$\frac{2}{h_k} = \frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_{k+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{h_{k+1}} = \frac{2}{h_k} - \frac{1}{h_{k-1}}$$

Az indukciós feltételt felhasználva:

$$\frac{1}{h_{k+1}} = \frac{2(k-1)h_1 - 2(k-2)h_2}{h_2h_1} - \frac{(k-2)h_1 - (k-3)h_2}{h_2h_1} =$$

$$= \frac{(2k-2-k+2)h_1 - (2k-4-k+3)h_2}{h_2h_1} = \frac{kh_1 - (k-1)h_1}{h_2h_1}.$$

Reciprokot véve:

$$h_{k+1} = \frac{h_2h_1}{kh_1 - (k-1)h_1},$$

ezzel sejtésünket beláttuk.

A sorozat n-edik elemét így is írhatjuk:

$$h_n = \frac{h_2 h_1}{(n-1)(h_1 - h_2) + h_2}$$

Ha $h_1 = h_2$, akkor a sorozat minden eleme h_1-gyel egyenlő, amit a feladat szövege kizár.

Ha $h_1 \neq h_2$, akkor a számláló nem nulla állandó, a nevező pedig tetszőlegesen nagy lehet. Így elég nagy n-re a sorozat eleme 1-nél kisebb lesz, tehát nem lehet természetes szám. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

II. Megoldás:

A feladat feltételéből következik, hogy

$$\frac{1}{h_n} = \frac{\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_{n+1}}}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat elemeinek reciprokaiból képzett sorozat számtani sorozat. A természetes számok reciprokai a $[0,1]$ intervallumba esnek. Ha a számtani sorozat nem állandó, pozitív tagokból áll, akkor lesz tetszőlegesen nagy eleme, ami ellent mond annak, hogy minden eleme egy adott intervallumhoz tartozik.

27. Mennyivel egyenlő n, ha $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \cdots + [\sqrt[3]{n}] = 2n$?

(Az $[x]$ az x szám egészrészét jelöli.)

(A) 29 (B)33 (C) 41 (D) 49 (E)53

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008; 12. osztály, országos forduló

I. Megoldás:

Tudjuk, hogy a Gordiusz Matematika Tesztversenyen csak egy jó megoldás van. helyettesítsük be a megadott értékeket. A számolásnál kihasználjuk, hogy ha $k^3 \leq i < (k+1)^3$ $(i, k$ természetes számok), akkor $[\sqrt[3]{i}] = k$. A 33-mal számolva:

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \cdots + [\sqrt[3]{8}] + \cdots + [\sqrt[3]{27}] + \cdots + [\sqrt[3]{33}] =$$
$$= 7 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 66 = 2 \cdot 33,$$

tehát ez jó megoldás, ezért a helyes válasz a ***B***.

II. Megoldás:

Most nem használjuk ki, hogy öt lehetőség közül kell megtalálnunk a jó választ.

Legyen $k^3 \leq n < (k+1)^3$ alkalmas k természetes számra. Ekkor

$$S = [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \cdots + [\sqrt[3]{n}] =$$
$$= 1 \cdot (2^3 - 1^3) + 2 \cdot (3^3 - 2^3) + \cdots + (\mathrm{k} - 1) \cdot (k^3 - (k-1)^3) + k \cdot (n + 1 - k^3) =$$
$$= -1^3 - 2^3 - 3^3 - \cdots - (k-1)^3 + (k-1)k^3 + k \cdot (n + 1 - k^3) =$$
$$= 1^3 - 2^3 - 3^3 - \cdots - (k-1)^3 - k^3 + k(n+1)$$

Felhasználjuk a köbszámok összegére vonatkozó összefüggést:

$$S = k(n+1) - \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Azt keressük, hogy milyen n-re lesz:

$$k(n+1) - \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 2n,$$

$$n \cdot (k-2) = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - k$$

Ha $k = 2$, akkor a baloldal 0, a jobb oldal 7, tehát nincs megfelelő n.

Ha $k \neq 2$, akkor:

$$n = \frac{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - k}{k-2} = \frac{k^2(k+1)^2 - 4k}{4(k-2)}. \qquad (1)$$

Az így kapott értéknek a

$$k^3 \leq \frac{k^2(k+1)^2 - 4k}{4(k-2)} < (k+1)^3 \qquad (2)$$

feltételt teljesítenie kell.

Behelyettesítéssel látható, hogy $k = 1$-re nem teljesül az egyenlőtlenség, $k = 3$-ra igen.

Ha $k \geq 4$, akkor csak az első egyenlőtlenséget vizsgálva:

$$4k^3(k-2) \leq k^2(k+1)^2 - 4k$$

$$4k^4 - 8k^3 \leq k^4 + 2k^3 + k^2 - 4k$$

$$3k^3 + 4 < 10k^2 + k$$

feltételnek kellene teljesülnie, de $k \geq 4$ esetén

$$3k^3 + 4 > 3k^3 = 3k \cdot k^2 \geq 12k^2 > 11k^2 = 10k^2 + k^2 > 10k^2 + k.$$

Így csak $k = 3$ esetén kapunk megoldást. Ekkor a (2) egyenlőtlenség másik oldala is teljesül. Az (1) összefüggés alapján $n = 33$, azaz a $(\boldsymbol{B})$ válasz a helyes.

28. Jelölje $\{a_n\}$ azon pozitív egész számok növekvő sorozatát, melyek 7-tel osztva 5 maradékot adnak, $\{b_n\}$ azon pozitív egész számok növekvő sorozatát, melyek 5-tel osztva 4 maradékot adnak! Mindkét sorozat első eleme legyen a lehető legkisebb! Az $\{a_n\}$ sorozat első n elemének az összegét jelölje H_n, a $\{b_n\}$ sorozat első n elemének az összegét jelölje $Ö_n$! Mennyi n értéke, ha

$$\frac{H_n}{Ö_n} = \frac{32}{23}\ ?$$

(A) 9 (B)18 (C) 27 (D) 81 (E) Nincs ilyen n.

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 12. osztály, megyei forduló

Megoldás:

Mindkét sorozat elemei számtani sorozatot alkotnak. Az adott feltételekkel

$$a_1 = 5;\ a_n = 7n - 2; \quad b_1 = 4;\ b_n = 5n - 1.$$

A számtani sorozat összegképlete alapján:

$$H_n = \frac{(5 + 7n - 2) \cdot n}{2} = \frac{(7n + 3) \cdot n}{2}\ ;$$

$$Ö_n = \frac{(4 + 5n - 1) \cdot n}{2} = \frac{(5n + 3) \cdot n}{2}.$$

Azt keressük, hogy mikor lesz

$$\frac{H_n}{Ö_n} = \frac{7n + 3}{5n + 3} = \frac{32}{23}.$$

Az egyenletet megoldva $n = 27$ adódik, tehát $(\boldsymbol{C})$ a jó válasz.

29. Egy számsorozatot a következőképpen értelmezünk:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-2}}\text{, ha } n = 2; 3; 4; \dots$$

Mennyivel egyenlő az x_{2011}, ha $a = \frac{1}{2011}$ és $b = \frac{1}{2010}$?

$(A)\ \frac{1}{2011}$ $\quad (B)\ \frac{1}{2010}$ $\quad (C)\ 1$ $\quad (D)\ 2010$ $\quad (E)\ 2011$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2011; 12. osztály, országos forduló

Megoldás:

A sorozat első néhány tagját felírjuk:

$$x_2 = \frac{b + 1}{a} \quad ; \quad x_3 = \frac{\frac{b+1}{a} + 1}{b} = \frac{a + b + 1}{ab} \quad ;$$

$$x_4 = \frac{\frac{a+b+1}{ab} + 1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{a + b + 1 + ab}{b(b + 1)} = \frac{(a + 1)(b + 1)}{b(b + 1)} = \frac{a + 1}{b} \quad ;$$

$$x_5 = \frac{\frac{a+1}{b} + 1}{\frac{a+b+1}{ab}} = \frac{(a + b + 1)ab}{b(a + b + 1)} = a \ ; \quad x_6 = \frac{a + 1}{\frac{a+1}{b}} = b\,.$$

Látható, hogy a sorozat tagjai periodikusan ismétlődnek, a periódus hossza 4, ezért

$$x_{2011} = x_1 = \frac{1}{2011}.$$

A helyes válasz: ***A***.

30. Vizsgáljuk meg az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ sorozatot. Vegyük a szomszédos elemek különbségét, az alábbi módon egy különbségi háromszöget állítsunk elő:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \dots \\
& -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{12} & & -\frac{1}{20} & & -\frac{1}{30} & & \dots & \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \dots & & \\
& & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{20} & & -\frac{1}{60} & & \dots & & & \\
& & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{30} & & \dots & & & & \\
& & & & & -\frac{1}{6} & & \dots & & & & &
\end{array}
$$

Forgassuk el a táblázatot 60°-al úgy hogy az 1-es szám kerüljön a háromszög csúcsába. és hagyjuk el az előjeleket.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
& & & & & 1 & & & & & \\
& & & & 1 & & 1 & & & & \\
& & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
& & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
& \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Ezután minden sor minden elemét osszuk el az illető sor szélén álló számmal és vegyük az eredmény reciprokát.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a Pascal-háromszöget kapjuk

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom:
Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből

Aritmetika és algebra, 320. feladat

A Pascal-háromszög a binomiális együtthatókat tartalmazza. Ha a sorokat 0-tól, a sorokon belül az elemeket is 0-tól kezdjük számozni, akkor a Pascal-háromszög n-edik sorának k-adik eleme $C_n^k = \binom{n}{k}$. A kiindulási számainkban szeretnénk ezt felfedezni:

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{C_0^0} & & \frac{1}{2C_1^1} & & \frac{1}{3C_2^2} & & \frac{1}{4C_3^3} & & \dots \\ & -\frac{1}{2C_1^0} & & -\frac{1}{3C_2^1} & & -\frac{1}{4C_3^2} & & \dots & \\ & & \frac{1}{3C_2^0} & & \frac{1}{4C_3^1} & & \dots & & \\ & & & -\frac{1}{4C_3^0} & & \dots & & & \end{array}$$

Ezt a tulajdonságot teljes indukcióval igazoljuk. Az első sorban igaz az előállítás

Feltételezzük, hogy a k-adik sorban lévő elemek:

$$\pm\frac{1}{(k+1)C_k^0} \qquad \pm\frac{1}{(k+2)C_{k+1}^1} \qquad \dots \qquad \pm\frac{1}{(k+i)C_{k+i-1}^{i-1}} \quad \pm\frac{1}{(k+i+1)C_{k+i}^i}$$

Ekkor a $(k+1)$-edik sorban lévő elemeket így számoljuk ki:

$$\pm\left(\frac{1}{(k+i+1)C_{k+i}^{i}}-\frac{1}{(k+i)C_{k+i-1}^{i-1}}\right)=\pm\left(\frac{1}{(k+i+1)\frac{(k+i)!}{i!\cdot k!}}-\frac{1}{(k+i)\frac{(k+i-1)!}{(i-1)!\cdot k!}}\right)=$$

$$=\pm\left(\frac{i!\cdot k!}{(k+i+1)!}-\frac{(i-1)!\cdot k!}{(k+i)!}\right)=\pm\left(\frac{i\cdot(i-1)!\cdot k!-(k+i+1)(i-1)!\cdot k!}{(k+i+1)!}\right)=$$

$$=\pm\frac{(-k-1)(i-1)!\cdot k!}{(k+i+1)!}=\mp\frac{(k+1)(i-1)!\cdot k!}{(k+i+1)!}=\mp\frac{(k+1)!\,(i-1)!}{(k+i+1)(k+i)!}=$$

$$=\mp\frac{1}{(k+i+1)\binom{k+i}{i-1}}=\mp\frac{1}{(k+i+1)C_{k+i}^{i-1}}$$

Ez a képzési szabály öröklődését jelenti a $(k+1)$-edik sorra.

Ha elvégezzük a feladatban szereplő átalakításokat, akkor valóban a megfelelő C_n^k binomiális együtthatókat tartalmazó Pascal-háromszöget kapjuk.