

6. Bizonyítási módszerek

I. Feladatok

1. Egy 100×100 -as táblázat minden mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét és kiszámítjuk soronként is, oszloponként is, és a két átlóban is az ott lévő 100-100 szám összegét. Bizonyítsd be, hogy a kapott összegek között lesz két azonos.

Varga Tamás Matematika Verseny 1997; 7. osztály, országos döntő

2. Egy 3×3 -as négyzet alakú táblázat minden mezőjébe beírjuk az 1 és -1 számok valamelyikét. Ezután összeadjuk a sorokba írt számokat, majd az egyes oszlopokba írt számokat is. Igazoljuk, hogy az így kapott 6 szám között mindig van legalább kettő egyenlő.

Kalmár László Matematika Verseny 1996; 5. osztály, országos döntő

3. Egy 3×3 -as táblázat mezőibe az 1, 0, -1 számok valamelyikét írtuk és összeadtuk az egyes sorokban és oszlopokban álló számokat. Igaz-e, hogy a 6 összeg között vannak egyenlők?

KöMaL, 1982. április, Gy.2049.

4. Adott hét különböző természetes szám, melyek összege 100. Bizonyítsuk be, hogy van köztük három, melyek összege legalább 50.

KöMaL, 1980. május, Gy.1913.

Varga Tamás Matematika Verseny 1997; 8. osztály, II. kategória, országos döntő

5. Adott 50 szám, melyek összege 100. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható három úgy, hogy az összegük legalább 6 legyen.

KöMaL, 1982. március, Gy.2039.

6. Adott hét szám. Bármelyik négyet kiválasztva összegük nagyobb a többi három összegénél. Bizonyítsuk be, hogy mindegyik szám pozitív.

7. Adott 101 szám. Bárhogyan választunk ki közülük 50-et, ezek összege kisebb, mint a ki nem választottak összege. Bizonyítsuk be, hogy a számok mindannyian pozitívak.

KöMaL, 1980. október, Gy.1926.

8. Száz szám összege 0. Bizonyítsuk be, hogy a közülük kiválasztható számpárok között legalább 99 olyan van, amelyben a két tag összege nem negatív.

KöMaL, 1983. január, Gy.2097.

9. Az 1, 2, 3, ..., 9, 10 számokat leírjuk valamilyen sorrendben. Ezután minden számhoz hozzáadjuk azt a sorszámot, ahányadik a leírt sorban. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik.

Kalmár László Matematika Verseny 2007; 8. osztály, országos döntő

10. Egy papírlapra felírtuk 1-től 20-ig az egész számokat. Igaz-e, hogy bárhogyan is választunk ki 10-et a felírt számok közül, ezek közül mindig kiválasztható 4 szám úgy, hogy közülük kettő különbsége egyenlő a másik kettő különbségével?

Kalmár László Matematika Verseny 1996. és 1998; 8. osztály, országos döntő

11. Adott 20 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik közt van négy egyenlő.

KöMaL, 1984. május, Gy.2200.

12. Adott egy 3-nál nagyobb p prímszám és tudjuk, hogy p -nek egy hatványa 20 jegyű szám. Igazoljuk, hogy a 20 számjegy között van legalább három azonos.

Kalmár László Matematika Verseny 1996; 7. osztály, országos döntő

13. Az 1, 2, 3, ..., 8, 9 számokat 3 hármas csoportra bontjuk, és kiszámítjuk mindegyik csoportban a számok szorzatát. Igazoljuk, hogy a kapott legnagyobb szorzat legalább 72.

Kalmár László Matematika Verseny 1996; 7. osztály, országos döntő

14. Tíz különböző pozitív egész szám összege 62. Igazoljuk, hogy a számok szorzata osztható 60-nal.

Kalmár László Matematika Verseny 2012; 7. osztály, országos döntő

15. Igazolja, hogy 7 páratlan egész kitevőjű hatványához 1-et adva 8-cal osztható számot kapunk.

Kalmár László Matematika Verseny 1997; 7. osztály, országos döntő

16. Igazoljuk, hogy bárhogyan is adunk meg 51 darab, 100-nál nem nagyobb pozitív egész számot, mindig ki lehet közülük választani kettőt úgy, hogy a kiválasztottak hányadosa 2-nek pozitív egész hatványa.

Kalmár László Matematika Verseny 2010; 8. osztály, országos döntő

17. Az 1, 2, 3, ..., 20 számok közül kiválasztunk 11-et. Mutasd meg, hogy a kiválasztott számok között mindig van kettő olyan, amely közül egyik osztója a másiknak.

Kalmár László Matematika Verseny 1990; 8. osztály, megyei forduló

18. Tetszőlegesen megadunk 10 darab pozitív egész számot, amelyek közül egyik sem osztható 10-zel. Igaz-e, hogy ekkor van köztük néhány olyan (esetleg az összes), amelyeknek összege osztható 10-zel?

Kalmár László Matematika Verseny 1994; 7. osztály, országos döntő

19. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n > 0$ egész számhoz van olyan tízes számrendszerbeli $111\dots11000\dots00$ alakú szám, amely osztható n -nel.

Kalmár László Matematika Verseny 2011; 8. osztály, megyei forduló

20. Bizonyítsuk be, hogy minden 2-hatványnak létezik olyan többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában csak az 1-es és 2-es számjegyek szerepelnek.

KöMaL, 1995. október, F.3084.

21. Mutassa meg, hogy 2013-nak van olyan többszöröse, amelynek

- a) minden számjegye 1-es;
- b) amelyben mind a tíz számjegy szerepel.

22. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, akik nem ismerik egymást, de bármely hét között van legalább kettő, akik ismerik egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsuk be, hogy n nyaraló esetén legfeljebb $6n$ tárgy kerül ajándékozásra.

OKTV, 1986; KöMaL, 1986. szeptember, F.2591.

23. Egy osztályban mindenki két szakkörbe jár, és bármely három gyerek jár közös szakkörbe. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szakkör, ahová minden gyerek jár.

KöMaL, 1982. május, Gy.2054.

24. Egy osztályban bármely két gyerek jár közös szakkörbe, de mindenki legfeljebb két szakkörnek a tagja. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szakkör, ahová az osztálynak legalább a kétharmad része jár.

KöMaL, 1986. április, Gy.2334.

25. Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék és tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincsen öt különböző korú, azonos színű tehén a gulyában, akkor található három azonos színű és egyidős tehén ugyanabból a faluból.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1987/1988; haladók, II. kategória, 2. forduló
Varga Tamás Matematika Verseny 2001; 7. osztály, országos döntő

26. Egy nemzetközi konferencián 9 tudós vesz részt. Egyikük sem beszél háromnál több nyelvet, és közülük bármely három között van kettő, akik beszélnek közös nyelvet. Bizonyítsuk be, hogy van olyan nyelv, amelyen legalább hárman beszélnek.

KöMaL, 1979. február, F.2187.

27. Egy szobában 9 ember van. Bármely 3 között található kettő olyan, akik ismerik egymást. Mutassuk meg, hogy található a szobában négy olyan ember, akik közül bármely kettő ismeri egymást.

KöMaL, 1979. április, F.2201.

28. Egy nemzetközi konferencián 200 tudós vesz részt. Mindegyikük legfeljebb 4 nyelven beszél, továbbá bármely három között van kettő, akik beszélnek közös nyelven. Bizonyítsuk be, hogy van olyan nyelv, amit közülük legalább 26-an beszélnek.

KöMaL, 2006. február, B.3890.

29. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{100 + \sqrt{99 + \sqrt{98 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < 11$.

KöMaL, 1994. október, F.3028.

30. Igaz-e minden n természetes számra a $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\dots\sqrt{n}}}} < 3$ egyenlőtlenség?

KöMaL, 1998. február, F.3216.

II. Megoldások

1. Egy 100×100 -as táblázat minden mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét és kiszámítjuk soronként is, oszloponként is, és a két átlóban is az ott lévő 100-100 szám összegét. Bizonyítsd be, hogy a kapott összegek között lesz két azonos.

Varga Tamás Matematika Verseny 1997; 7. osztály, országos döntő

Megoldás: Az összegek lehetséges értékei 100, 101, 102, ..., 300. Azaz 201-féle értéke lehet az összegeknek. A 100 sorban, a 100 oszlopban és a 2 átlóban 202 összeget számolunk, ezek nem lehetnek mind különböző értékek, hiszen csak 201-féle eredményt kaphatunk.

2. Egy 3×3 -as négyzet alakú táblázat minden mezőjébe beírjuk az 1 és -1 számok valamelyikét. Ezután összeadjuk a sorokba írt számokat, majd az egyes oszlopokba írt számokat is. Igazoljuk, hogy az így kapott 6 szám között mindig van legalább kettő egyenlő.

Kalmár László Matematika Verseny 1996; 5. osztály, országos döntő

Megoldás: Az összegek lehetséges értékei páratlanok: 3, 1, -1 , -3 . Azaz 4-féle összeg lehetséges. A 3 sorban és a 3 oszlopban 6 összeget számolunk, ezek nem lehetnek mind különböző értékek, hiszen csak 4-féle eredményt kaphatunk.

3. Egy 3×3 -as táblázat mezőibe az 1, 0, -1 számok valamelyikét írtuk és összeadtuk az egyes sorokban és oszlopokban álló számokat. Igaz-e, hogy a 6 összeg között vannak egyenlők?

KöMaL, 1982. április, Gy.2049.

Megoldás: A lehetséges sor-, illetve oszlopösszegek hét darab szám, a -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 és a 3 közül kerülhetnek ki. Ha a 6 összeg között nincsenek egyenlők, akkor a felsorolt hét szám közül pontosan egy nem szerepel az összegek között. Jelöljük ezt a hiányzó számot h -val.

A sorösszegek összege ugyanannyi, mint az oszlopösszegeké, hiszen mindkét esetben a táblázatba írt kilenc darab számot adtuk össze. Emiatt a szóban forgó 6 összeg összege páros, tehát h -nak is párosnak kell lennie. Ebből következik, hogy a 3 és a -3 is szerepel az összegek között.

A 3 három darab 1 , a -3 három darab -1 összegeként állhat csak elő, ez a három-három szám így vagy egy-egy sorban, vagy egy-egy oszlopban szerepel. Feltehető, hogy egy-egy sorban vannak. Ekkor a táblázat harmadik sorában mindhárom szám különböző, hisz egyébként volna két egyenlő oszlopösszeg. A harmadik sorban az 1 , -1 , 0 számok állnak valamilyen sorrendben, de abban az oszlopban, ahová a 0 kerül, szintén az 1 , -1 , 0 számok állnak, tehát találtunk olyan sort és oszlopot, amelyben egyforma, 0 összegű számok állnak.

Tehát bárhogyan töltjük ki a táblázatot, a 6 összeg között vannak egyenlők.

4. Adott hét különböző természetes szám, melyek összege 100 . Bizonyítsuk be, hogy van köztük három, melyek összege legalább 50 .

KöMaL, 1980. május, Gy.1913.

Varga Tamás Matematika Verseny 1997; 8. osztály, II. kategória, országos döntő

Megoldás: Legyen a hét szám $A > B > C > D > E > F > G$. Azt kell megmutatnunk, hogy $A + B + C \geq 50$.

Ha $C > 15$, akkor $C \geq 16$, $B \geq 17$, $A \geq 18$ és így $A + B + C \geq 18 + 17 + 16 = 51 > 50$.

Ha $C \leq 15$, akkor $D \leq 14$, $E \leq 13$, $F \leq 12$, $G \leq 11$, akkor

$D + E + F + G \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, ezért a többi három szám összege $A + B + C \geq 50$.

5. Adott 50 szám, melyek összege 100 . Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható három úgy, hogy az összegük legalább 6 legyen.

KöMaL, 1982. március, Gy.2039.

Megoldás: A számok közül a három legnagyobb $A \geq B \geq C$.

Ha $C \geq 2$, akkor $A + B + C \geq 6$.

Ha $C < 2$, akkor az A , B , C számoktól különböző további 47 szám ugyancsak kisebb mint 2 , így az összegük kisebb mint $47 \cdot 2 = 94$, ezért $A + B + C \geq 100 - 94 = 6$.

6. Adott hét szám. Bármelyik négyet kiválasztva összegük nagyobb a többi három összegénél. Bizonyítsuk be, hogy mindegyik szám pozitív.

I. megoldás: Legyen a hét szám $A \geq B \geq C \geq D \geq E \geq F \geq G$. Elegendő azt belátni, hogy a G szám pozitív.

Az egyenlőtlenségekből $A + B + C \geq D + E + F$ adódik.

Ha $G \leq 0$ lenne, akkor $A + B + C \geq D + E + F + G$ adódna, ami nem lehetséges. Ezért $G > 0$.

II. megoldás: Legyen a hét szám a, b, c, d, e, f, g . Ekkor az $a + b + c + d > e + f + g$ és $a + e + f + g > b + c + d$ egyenlőtlenségek összegéből $2a > 0$ következik, azaz $a > 0$. Mivel a az adott számok bármelyikét jelölheti, ezért mindegyikük pozitív.

7. Adott 101 szám. Bárhogyan választunk ki közülük 50-et, ezek összege kisebb, mint a ki nem választottak összege. Bizonyítsuk be, hogy a számok mindannyian pozitívak.

KöMaL, 1980. október, Gy.1926.

I. megoldás: Legyenek a számok $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{100} \geq a_{101}$. Elegendő azt belátni, hogy $a_{101} > 0$.

Nyilván $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50} \geq a_{51} + a_{52} + a_{53} + \dots + a_{100}$.

Ha $a_{101} \leq 0$ lenne, akkor $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50} \geq a_{51} + a_{52} + a_{53} + \dots + a_{100} + a_{101}$ adódna, ami nem lehetséges. Ezért $a_{101} > 0$.

II. megoldás: Válasszunk ki egyet a 101 szám közül, legyen ez a . Ha a megmaradt 100 számot két 50-es csoportra osztjuk, és S_1 -gyel, illetve S_2 -vel jelöljük az egyes csoportokban álló számok összegét, ekkor a feltétel szerint $S_1 < S_2 + a$ és $S_2 < S_1 + a$.

A két egyenlőtlenséget összeadva $S_1 + S_2 < S_1 + S_2 + 2a$, így $0 < 2a$, $0 < a$. Mivel a -t tetszőlegesen választottuk az adott számok közül, így beláttuk, hogy a számok mindannyian pozitívak.

8. Száz szám összege 0. Bizonyítsuk be, hogy a közülük kiválasztható számpárok között legalább 99 olyan van, amelyben a két tag összege nem negatív.

KöMaL, 1983. január, Gy.2097.

Megoldás: Legyenek a számok $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $a_{50} + a_{99}$ milyen előjelű.

Ha $a_{50} + a_{99} \geq 0$, akkor $0 \leq a_{50} + a_{99} \leq a_{51} + a_{99} \leq a_{52} + a_{99} \leq \dots \leq a_{97} + a_{99} \leq a_{98} + a_{99}$, és $0 \leq a_{50} + a_{99} \leq a_{50} + a_{100} \leq a_{51} + a_{100} \leq a_{52} + a_{100} \leq \dots \leq a_{98} + a_{100} \leq a_{99} + a_{100}$, itt felsoroltunk 100 darab nemnegatív összeget. Ezek között csak $a_{50} + a_{99}$ szerepel kétszer, vagyis találtunk 99 olyan számpárt, ahol a két tag összege nem negatív.

Ha $a_{50} + a_{99} < 0$, akkor $0 > a_{50} + a_{99} \geq a_{49} + a_{98} \geq a_{48} + a_{97} \geq \dots \geq a_3 + a_{52} \geq a_2 + a_{51}$, ennek a 49 párnak az összege negatív. Ez az összeg viszont nem más, mint $S - (a_1 + a_{100})$, ahol S jelöli a 100 szám összegét. A feltétel szerint $S = 0$, így ha $a_{50} + a_{99} < 0$, akkor $a_1 + a_{100} > 0$. Ugyanakkor $0 < a_1 + a_{100} \leq a_2 + a_{100} \leq a_3 + a_{100} \leq \dots \leq a_{98} + a_{100} \leq a_{99} + a_{100}$, tehát most is találtunk 99 olyan számpárt, amelyben a két tag összege nem negatív.

9. Az 1, 2, 3, ..., 9, 10 számokat leírjuk valamilyen sorrendben. Ezután minden számhoz hozzáadjuk azt a sorszámot, ahányadik a leírt sorban. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik.

Kalmár László Matematika Verseny 2007; 8. osztály, országos döntő

Megoldás: Legyen az 1, 2, 3, ..., 9, 10 számok valamilyen sorrendje $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$. Ekkor a feladat szerint képzett összegek: $b_1 = a_1 + 1, b_2 = a_2 + 2, \dots, b_{10} = a_{10} + 10$. Azt kell belátunk, hogy a b_i számok között van kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik.

Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy nincs kettő a b_i -k között, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik. Ez azt jelenti, hogy minden lehetséges végződés pontosan egyszer fordul elő. Emiatt tudjuk a $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10}$ összeg utolsó számjegyét, hiszen az összeadandók utolsó számjegyeinek összege $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, az összeg utolsó számjegye 5.

$b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + 1 + 2 + \dots + 10 = 110$ miatt a $b_1 + b_2 + \dots + b_{10}$ összeg 0-ra végződik és nem 5-re. Ellentmondásra jutottunk. Hibás volt a feltevés, így igaz a feladat állítása.

10. Egy papírlapra felírtuk 1-től 20-ig az egész számokat. Igaz-e, hogy bárhogyan is választunk ki 10-et a felírt számok közül, ezek közül mindig kiválasztható 4 szám úgy, hogy közülük kettő különbsége egyenlő a másik kettő különbségével?

Kalmár László Matematika Verseny 1996. és 1998; 8. osztály, országos döntő

Megoldás: Belátjuk, hogy ha az 1, 2, 3, ..., 20 számokból kiválasztunk 10 számot, és az azokból bármely két szám összegét kiszámoljuk, az összegek között lesz legalább két egyenlő. Ebből következik a feladat állítása, mert ha $a + b = c + d$, akkor $a - c = d - b$.

A 10 számból 45 számpár választható ki, 45 összeget számolunk. Az összegek lehetséges értékei: 3, 4, 5, ..., 39, azaz 37-féle eredményt kaphatunk. Ebből látszik, hogy a 45 összeg között biztosan van két azonos eredmény.

11. Adott 20 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik közt van négy egyenlő.

KöMaL, 1984. május, Gy.2200.

Megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy a 20 számot növekvő sorrendbe állítva, már a szomszédos tagok közötti különbségek között is van legalább négy egyenlő. A szomszédos tagok közötti különbségek száma 19. Tegyük fel, hogy minden különbség legfeljebb 3-szor fordul elő. Legalább 7 különböző nagyságú különbség van, mert $6 \cdot 3 + 1 = 19$. A különbségek összege legalább $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 = 70$, azonban a különbségek összege ≤ 69 . Az ellentmondás oka a hibás feltevés, tehát a szomszédos elemek közötti különbségek között van legalább négy egyenlő.

12. Adott egy 3-nál nagyobb p prímszám és tudjuk, hogy p -nek egy hatványa 20 jegyű szám. Igazoljuk, hogy a 20 számjegy között van legalább három azonos.

Kalmár László Matematika Verseny 1996; 7. osztály, országos döntő

Megoldás: Tegyük fel, hogy a számban a számjegyek között nincs három azonos. Ekkor a tíz számjegy mindegyikéből legfeljebb kettő van, és csak úgy lehet 20 számjegy, ha mind a tíz számjegyből pontosan kettő van.

Ezért ebben a 20-jegyű számban a számjegyek összege $2 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 90$, a számjegyek összege osztható 3-mal, így a 20-jegyű prímhatalvány is osztható 3-mal, tehát p is osztható 3-mal. Ez ellentmond annak, hogy $p > 3$ prímszám. Hibás a feltevésünk, tehát p hatványában legalább három számjegy azonos.

13. Az 1, 2, 3, ..., 8, 9 számokat 3 hármas csoportra bontjuk, és kiszámítjuk mindegyik csoportban a számok szorzatát. Igazoljuk, hogy a kapott legnagyobb szorzat legalább 72.

Kalmár László Matematika Verseny 1996; 7. osztály, országos döntő

Megoldás: Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Azaz van olyan csoportosítása a kilenc számnak, hogy mindhárom csoportban a számok szorzata legfeljebb 71. A szorzatok között van páros, ez legfeljebb 70. Azt kaptuk, hogy $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \leq 70 \cdot 71 \cdot 71$, ami ellentmondás, mivel $(1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 6) \cdot (8 \cdot 9) = 70 \cdot 72 \cdot 72$. A feltevés tehát hamis, az állítás igaz.

14. Tíz különböző pozitív egész szám összege 62. Igazoljuk, hogy a számok szorzata osztható 60-nal.

Kalmár László Matematika Verseny 2012; 7. osztály, országos döntő

Megoldás: $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$, és a 3, 4, 5 számok páronként relatív prímelek, így elég belátni, hogy a tíz szám között van 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztható szám is. Indirekt úton bizonyítunk.

Tegyük fel, hogy a számok között nincs 3-mal osztható. Vegyük a tíz legkisebb ilyen tulajdonságú szám összegét: $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 + 13 + 14 = 75$, ami ellentmond annak, hogy a tíz szám összege 62. Hibás a feltevés, emiatt a számok között van 3-mal osztható.

Ha a számok között nincs 4-gyel osztható, akkor a számok összege legalább $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11 + 13 = 67$, ami ellentmond annak, hogy a tíz szám összege 62. Hibás a feltevés, emiatt a számok között van 4-gyel osztható.

Ha nincs köztük 5-tel osztható, akkor az összeg legalább $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 12 = 63$, ez ellentmond annak, hogy a tíz szám összege 62. Hibás a feltevés, emiatt a számok között van 5-tel osztható.

Beláttuk, hogy a számok között van 3-mal, van 4-gyel és van 5-tel osztható, így a számok szorzata osztható 60-nal.

15. Igazolja, hogy 7 páratlan egész kitevőjű hatványához 1-et adva 8-cal osztható számot kapunk.

Kalmár László Matematika Verseny 1997; 7. osztály, országos döntő

1. megoldás: Bizonyítsunk teljes indukcióval. $n = 1$ és $n = 3$ esetén $7^n + 1$ értéke osztható 8-cal ($7^1 + 1 = 8$, $7^3 + 1 = 344$). Belátjuk, ha $7^n + 1$ osztható 8-cal, akkor $7^{n+2} + 1$ is osztható 8-cal, és ezzel igazoltuk az állítást. $7^{n+2} + 1 = 49 \cdot 7^n + 1 = 48 \cdot 7^n + (7^n + 1)$, és ez osztható 8-cal, mert $48 \cdot 7^n$ is, $(7^n + 1)$ is osztható 8-cal, így az összegük is.

2. megoldás: A jól ismert $a + b \mid a^{2n+1} + b^{2n+1}$ oszthatóság szerint $7 + 1 \mid 7^{2n+1} + 1^{2n+1}$, azaz $8 \mid 7^{2n+1} + 1$.

16. Igazoljuk, hogy bárhogyan is adunk meg 51 darab, 100-nál nem nagyobb pozitív egész számot, mindig ki lehet közülük választani kettőt úgy, hogy a kiválasztottak hányadosa 2-nek pozitív egész hatványa.

Kalmár László Matematika Verseny 2010; 8. osztály, országos döntő

Megoldás: Írjuk fel az 51 szám mindegyikét egy páratlan szám és egy 2-hatvány szorzataként. Ez a páratlan szám 100-nál kisebb, így 50-féle értéke lehet. Emiatt az 51 szám esetén lesz kettő, amelyek felbontásában ugyanaz a páratlan szám szerepel. Ezek hányadosa 2-nek pozitív egész hatványa lesz, mert a két szám nem lehet egyenlő.

17. Az 1, 2, 3, ..., 20 számok közül kiválasztunk 11-et. Mutasd meg, hogy a kiválasztott számok között mindig van kettő olyan, amely közül egyik osztója a másiknak.

Kalmár László Matematika Verseny 1990; 8. osztály, megyei forduló

Megoldás: (Lényegében azonos az előző feladattal.) Írjuk fel a 11 szám mindegyikét egy páratlan szám és egy 2-hatvány szorzataként. Ez a páratlan szám 20-nál kisebb, így 10-féle értéke lehet. Emiatt a 11 szám esetén lesz kettő, amelyek felbontásában ugyanaz a páratlan szám szerepel. Ezek hányadosa 2-nek pozitív egész hatványa lesz, azaz egyik szám osztója a másiknak.

18. Tetszőlegesen megadunk 10 darab pozitív egész számot, amelyek közül egyik sem osztható 10-zel. Igaz-e, hogy ekkor van köztük néhány olyan (esetleg az összes), amelyeknek összege osztható 10-zel?

Kalmár László Matematika Verseny 1994; 7. osztály, országos döntő

Megoldás: Legyenek a számok $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$. Képezzük az $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ összegeket. A kapott összegek között vagy van olyan, ami 10-zel osztható, ekkor igaz az állítás. Ha nincs köztük 10-zel osztható, akkor biztosan van köztük olyan, amelyik 10-zel osztva ugyanazt a maradékot adja, így ezek különbsége osztható 10-zel. És ez a különbség néhány a_i összege.

19. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n > 0$ egész számhoz van olyan tízes számrendszerbeli $111\dots11000\dots00$ alakú szám, amely osztható n -nel.

Kalmár László Matematika Verseny 2011; 8. osztály, megyei forduló

Megoldás: Tekintsük az $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots11}_{n+1 \text{ db } 1\text{-es}}$ számokat. Ezek a számok n -el osztva n -féle

különböző maradékot adhatnak, így van két olyan szám, melyeknek ugyanaz az osztási maradéka. Ezek különbsége osztható n -nel. Ez a különbség $111\dots11 - 11\dots1 = 111\dots100\dots0$.

Ezzel beláttuk az állítást.

20. Bizonyítsuk be, hogy minden 2-hatványnak létezik olyan többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában csak az 1-es és 2-es számjegyek szerepelnek.

KöMaL, 1995. október, F.3084.

Megoldás: Bizonyítsunk teljes indukcióval. Erősebb állítást igazolunk: van olyan n -jegyű, 1 és 2 számjegyekből álló szám, amely osztható 2^n -nel.

(Az indukciós feltevés ellenőrzése.) Az állítás $n = 1, 2, 3$ és 4 esetén igaz, hiszen a $2, 12, 112, 2112$ számok rendre oszthatók a $2, 4, 8, 16$ számokkal.

(Indukciós feltevés.) Feltehetjük: $n = k$ -ra még igaz, van olyan k -jegyű, 1 és 2 számjegyekből álló szám, amely osztható 2^k -nel.

(Indukciós lépés.) Belátjuk, hogy $n = k + 1$ -re is igaz az állítás: van olyan $k + 1$ -jegyű, 1 és 2 számjegyekből álló szám, amely osztható 2^{k+1} -nel.

Megfigyelhetjük a példában szereplő $2, 12, 112, 2112$ számoknál, hogy mindig a legutolsó szám elé első számjegynek írtunk 1-et vagy 2-t: $2 \rightarrow 12, 12 \rightarrow 112, 112 \rightarrow 2112$.

Legyen A az indukciós feltétel szerint létező k -jegyű, 1 és 2 számjegyekből álló szám, amely osztható 2^k -nal. Írjunk a szám elé első számjegynek 1-est, illetve írjunk 2-est: $\overline{1A} = 10^k + A$, illetve $\overline{2A} = 2 \cdot 10^k + A$. Tudjuk, hogy $2^k \mid A$ (indukciós feltétel) és $2^k \mid 10^k$, így $2^k \mid 10^k + A$. Ha $2^{k+1} \mid 10^k + A$ teljesül, akkor megtaláltuk a keresett számot: $\overline{1A}$. Ha nem teljesül az oszthatóság, akkor $10^k + A = a \cdot 2^k$, ahol a páratlan szám. Mivel $10^k = b \cdot 2^k$, és b páratlan szám, így $2 \cdot 10^k + A = (10^k + A) + 10^k = a \cdot 2^k + b \cdot 2^k = (a + b) \cdot 2^k$, ahol $(a + b)$ páros szám. Ez azt jelenti, hogy $2 \cdot 10^k + A$ osztható $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ -nel.

21. Mutassa meg, hogy 2013-nak van olyan többszöröse, amelynek
- minden számjegye 1-es;
 - amelyben mind a tíz számjegy szerepel.

Megoldás: a) Tekintsük az $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots11}_{2013 \text{ db } 1\text{-es}}$ számokat. 2013-mal osztva 2013-féle

maradékot kaphatunk. Ha ezek a számok 2013-mal osztva 2013-féle különböző maradékot adnak, akkor az egyik maradék 0, és az ehhez tartozó szám osztható 2013-mal. Ha nem kapjuk meg mindegyik osztási maradékot, akkor lesz két olyan szám, melyeknek ugyanaz az osztási maradéka. Ezek különbsége osztható 2013-mal.

Ez a különbség $111\dots11 - 11\dots1 = 111\dots100\dots0 = 111\dots1 \cdot 10^k$. Mivel 2013 és 10^k relatív prímek, így abból, hogy 2013 osztója a $111\dots1 \cdot 10^k$ szorzatnak, az következik, hogy 2013 osztója az $111\dots1$ számnak.

Ezzel beláttuk az állítást.

- b)** Tekintsük az $12345678900000 + 1, 12345678900000 + 2, 12345678900000 + 3, \dots, 12345678900000 + 2013$ számokat. Ez a 2013 szám 2013-mal osztva páronként különböző maradékokat ad, ezért valamelyik maradék a 0, és az ehhez tartozó szám osztható 2013-mal.

22. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, akik nem ismerik egymást, de bármely hét között van legalább kettő, akik ismerik egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsuk be, hogy n nyaraló esetén legfeljebb $6n$ tárgy kerül ajándékozásra.

OKTV, 1986; KöMaL, 1986. szeptember, F.2591.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy az üdülő egyetlen lakójának sem lehet 6-nál több ismerőse, ebből pedig a feladat állítása már következik.

Bármelyik A nyaraló ismerősei – ha vannak ilyenek – egymást nem ismerhetik, ellenkező esetben két ilyen és A közül bármely kettő ismerné egymást, a feladat szövege pedig ezt kizárja.

A másik feltétel szerint bármely 7 ember között vannak ismerősök, így A ismerősei – mint egymást kölcsönösen nem ismerő emberek – valóban legfeljebb hatan lehetnek.

Így viszont az üdülés n darab résztvevője egyenként legfeljebb 6 másikat ajándékoz meg, az ajándékok száma ezért valóban nem több, mint $6n$.

23. Egy osztályban mindenki két szakkörbe jár, és bármely három gyerek jár közös szakkörbe. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szakkör, ahová minden gyerek jár.

KöMaL, 1982. május, Gy.2054.

Megoldás: Ha bármely két gyerek ugyanabba a két szakkörbe jár, akkor igaz az állítás. Ha van két gyerek, akik nem ugyanabba a két szakkörbe járnak, akkor biztosan van olyan szakkör, ahová mindketten járnak, hiszen bármely három gyerek jár közös szakkörbe. Ebbe a szakkörbe viszont az osztályból kiválasztott tetszőleges harmadik gyerek is jár, mert vele együtt ez a két gyerek jár közös szakkörbe. Tehát van olyan szakkör, ahová minden gyerek jár.

24. Egy osztályban bármely két gyerek jár közös szakkörbe, de mindenki legfeljebb két szakkörnek a tagja. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szakkör, ahová az osztálynak legalább a kétharmad része jár.

KöMaL, 1986. április, Gy.2334.

Megoldás: Ha van olyan gyerek, aki csak egy szakkörbe jár, akkor a feltétel miatt az osztályból mindenki jár ebbe a szakkörbe, és ekkor igaz az állítás.

Az az eset maradt, hogy mindenki pontosan két szakkörbe jár. Tekintsünk valakit az osztályból és legyen S_1 és S_2 az a két szakkör, ahová ő jár. Az első feltétel szerint ekkor mindenki tagja S_1 és S_2 közül valamelyiknek. A két szakkör egyikébe ezért az osztálynak legalább a fele jár, azonban ez még kevés.

Feltehető, hogy a két szakkör egyikébe sem jár mindenki az osztályból. Van olyan g_1 gyerek, aki nem jár S_2 -be, de ekkor szükségszerűen jár S_1 -be. És van olyan g_2 gyerek, aki nem jár S_1 -be, de jár S_2 -be. Legyen S az a szakkör, ahová g_1 és g_2 is jár. $S \neq S_1$, $S \neq S_2$.

S -nek pontosan azok a tagjai, akik S_1 és S_2 közül csak az egyik szakkörbe járnak. Ugyanis, ha valaki tagja S_1 -nek és S_2 -nek, akkor nem lehet tagja S -nek, hiszen mindenki pontosan két szakkörbe jár. Ha valaki tagja S_1 -nek, de S_2 -nek nem, akkor csak úgy járhat közös szakkörbe a g_2 gyerekekkel, ha tagja S -nek. Hasonlóan, ha valaki tagja S_2 -nek és S_1 -nek nem, akkor tekintettel a g_1 gyerekekre, járnia kell S -be.

Több szakkör nem lehet, azaz az osztály tagjai 3 szakkörbe járnak. Minden gyerek két szakkörbe jár, így ha összeadjuk a szakkörök létszámát, az osztály létszámának kétszeresét kapjuk. Ezért a három szakkör egyikébe az osztálynak legalább a kétharmada jár.

25. Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék és tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincsen öt különböző korú, azonos színű tehén a gulyában, akkor található három azonos színű és egyidős tehén ugyanabból a faluból.

*Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 1987/1988; haladók, II. kategória, 2. forduló
Varga Tamás Matematika Verseny 2001; 7. osztály, országos döntő*

Megoldás: Van 17 azonos színű tehén, mivel 4 szín van és $4 \cdot 16 < 65$. Ezek között – mivel csak legfeljebb négyféle korú tehén van – találhatunk 5 azonos korút, hiszen $4 \cdot 4 < 17$. Az 5 tehén között van 3, melyek ugyanabba a faluba tartoznak.

26. Egy nemzetközi konferencián 9 tudós vesz részt. Egyikük sem beszél háromnál több nyelvet, és közülük bármely három között van kettő, akik beszélnek közös nyelvet. Bizonyítsuk be, hogy van olyan nyelv, amelyen legalább hárman beszélnek.

KöMaL, 1979. február, F.2187.

Megoldás: Két esetet vizsgálunk: bármely két tudós beszél közös nyelvet; illetve van két tudós, akik nem beszélnek közös nyelvet.

Az első esetben bármelyikük 8 másikkal beszél, és mivel legfeljebb három nyelven tud, ezért található a többiek között legalább kettő (sőt legalább három), akikkel azonos nyelven beszél.

A második esetben mondjuk A és B nem beszélnek közös nyelven. A és B mellé válasszuk harmadiknak sorba a többi hét tudóst. Ezek mindegyike a feltétel szerint vagy A -val, vagy B -vel beszél közös nyelvet. A és B együttvéve legfeljebb $2 \cdot 3 = 6$ nyelven beszél, ezért van legalább két tudós, akik azonos nyelven beszélnek, ezért a többi hét tudós között van legalább két tudós, akik azonos nyelven beszélnek mondjuk A -val.

Ezzel befejeztük a bizonyítást.

Megjegyzés: 8 tudós esetén még nem igaz az állítás, mert ha például közülük az első négyből bármely kettőnek van közös nyelve és az utolsó négy között is bármely kettőnek van közös nyelve, továbbá az ehhez szükséges 12 nyelv mind különböző, akkor a feltételeink teljesülnek, az állítás mégsem igaz.

27. Egy szobában 9 ember van. Bármely 3 között található kettő olyan, akik ismerik egymást. Mutassuk meg, hogy található a szobában négy olyan ember, akik közül bármely kettő ismeri egymást.

KöMaL, 1979. április, F.2201.

Megoldás: Ha a társaságnak van olyan tagja, aki legalább 4 másikat nem ismer, akkor az utóbbiak közül bármely kettőnek ismernie kell egymást, azaz máris találtunk négy megfelelő embert.

Így feltehetjük, hogy mindenki legfeljebb 3 másikat nem ismer, azaz mindenkinek legalább 5 ismerőse van a szobában. Nem lehet mindenkinek pontosan 5 ismerőse, mert ez $9 \cdot 5/2$ ismeretséget jelentene, ami pedig nem egész. Kell tehát lennie legalább 6 ismerőssel rendelkező embernek is, legyen A ilyen, A ismerősei közül az egyik legyen B .

Ha B az A ismerősei közül legalább hármat ismer, akkor ezek közül valamelyik kettő A -val és B -vel együtt megfelelő négyest alkot. Ha nem, akkor B az A ismerősei közül legalább hármat nem ismer, ez a három és A lesz a jó négyes.

Ezzel befejeztük a bizonyítást.

28. Egy nemzetközi konferencián 200 tudós vesz részt. Mindegyikük legfeljebb 4 nyelven beszél, továbbá bármely három között van kettő, akik beszélnek közös nyelven. Bizonyítsuk be, hogy van olyan nyelv, amit közülük legalább 26-an beszélnek.

KöMaL, 2006. február, B.3890.

I. megoldás: Tegyük fel, hogy van két olyan tudós, akik nem beszélnek közös nyelvet. Mivel bármely három ember közt van kettő, akik megértik egymást, így ha ehhez a két emberhez kiválasztunk még egy harmadikat, akkor ő beszél közös nyelvet a két ember valamelyikével. Ezen a két emberen kívül még 198 van, így a két ember valamelyike legalább 99 emberrel beszél közös nyelvet; nevezzük ezek egyikét A -nak. Mivel egy ember legfeljebb 4 nyelvet beszél, a skatulya-elv alapján ebből a 99 emberből legalább 25 beszél egy közös nyelvet. Az A -t is beleszámítva tehát van 26 ember, aki egy nyelvet beszél.

Ha nincs két olyan ember, aki nem érti meg egymást, akkor mindenki mindenkivel tud beszélgetni. Válasszunk ki egy B embert; ekkor ő 199 emberrel tud beszélni. Mivel egy ember legfeljebb 4 nyelvet beszél, ismét a skatulya-elv alapján B legalább 50 emberrel beszél egy bizonyos nyelven.

Mindkét esetben beláttuk, hogy van olyan nyelv, amit legalább 26-an beszélnek.

II. megoldás: Tegyük fel, hogy – a feladat állításával ellentétben – minden nyelvet a résztvevők közül legfeljebb 25-en beszélnek. Vegyünk közülük egyet, A -t, ő bármelyik általa beszélt nyelven legfeljebb 24 másik tudóssal tud kommunikálni; ez azt jelenti, hogy van legalább $200 - 4 \cdot 24 - 1 = 103$ tudós, aki nem beszél A -val közös nyelven. Ha ezek egyike B , akkor B is legfeljebb $4 \cdot 24 = 96$ másik tudóssal tud beszélni, marad tehát legalább $103 - 96 - 1 = 6$ olyan, aki sem A -val, sem B -vel nem beszél közös nyelvet. Ha egyikük C , akkor A , B , C közül semelyik kettő nem beszél közös nyelvet, ami ellentmond a feladat feltételének.

29. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{100 + \sqrt{99 + \sqrt{98 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < 11$.

KöMaL, 1994. október, F.3028.

Megoldás: Vizsgáljuk általános helyzetben ezt az egyenlőtlenséget. Legyen tetszőleges n

pozitív egészre $A_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$. Teljes indukcióval lássuk be, hogy $A_n < \sqrt{n} + 1$. Ez $n = 100$ esetén éppen a kívánt állítás.

Ha $n = 1$, akkor $A_n = 1$ és $\sqrt{n} + 1 = 2$, tehát igaz az állítás. Ha valamely 1-nél nagyobb n -re $A_{n-1} < \sqrt{n-1} + 1$, akkor $A_n = \sqrt{n + A_{n-1}} < \sqrt{n + \sqrt{n-1} + 1} < \sqrt{n + 2\sqrt{n} + 1} = \sqrt{n} + 1$. Ezzel igazoltuk az állítást.

30. Igaz-e minden n természetes számra a $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\dots\sqrt{n}}}} < 3$ egyenlőtlenség?

KöMaL, 1998. február, F.3216.

Megoldás: Ha $n \geq 2$, akkor rögzítsük az n értékét, és tekintsük az alábbi sorozatot.

$a_n = \sqrt{n}$, $a_{n-1} = \sqrt{(n-1)\sqrt{n}} = \sqrt{(n-1)a_n}$, ..., $a_k = \sqrt{ka_{k+1}}$, ..., $a_2 = \sqrt{2a_3}$. A feladat kérdése az, hogy $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\dots\sqrt{n}}}} = a_2 < 3$ igaz-e. Általánosabban bizonyítjuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor $a_k < k + 1$, ha $k = 2, 3, \dots, n$.

Ezt $k = n$ -ről indulva – ekkor $a_n = \sqrt{n} < n + 1$ nyilvánvaló – a k csökkenő értékeire vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, ha $a_k < k + 1$, akkor $a_{k-1} < k$.

Valóban, $a_{k-1} = \sqrt{(k-1)a_k} < \sqrt{(k-1)(k+1)} = \sqrt{k^2 - 1} < \sqrt{k^2} = k$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.