

1. Halmazok – számhalmazok, pontthalmazok

I. Feladatok

1. Egy osztály a tanév folyamán 3 kirándulást szervezett. Az elsőn az osztály 70%-a, a másodikon az osztály 80%-a, a harmadikon az osztály 90%-a vett részt. Így 12 tanuló háromszor, a többiek kétszer kirándultak. Hányan vannak az osztályban?

ABACUS matematikai lapok; 1999. november; C.335

2. Egy 500 ember érintő felmérés során kiderült, hogy a megkérdezettek 46%-a szereti az eper, 71 %-a a vanília, 85%-a a csokoládé fagyaltot. Van-e a megkérdezettek között hat olyan ember, aki mind a háromféle fagyaltot szereti?

KöMaL 2006. szeptember; C 860

3. Az iskolai síelésen húszan vettek részt. Négy olyan gyerek utazott, akinek pontosan egy testvére is ott volt. Kilenc olyan gyerek ment síelni, akinek pontosan két testvére is utazott. Hét gyerek testvér nélkül ment síelni. Érkezéskor minden gyermeket az édesanyja várta. Hány édesanya várakozott a síelésről megérkező gyerekekre?

ABACUS matematikai lapok; 2006 január; B.682.

4. Egy boltban férfi és női cipőket és kabátokat lehet kapni. Egy alkalommal a raktárkészlet darabszámának felmérésekor azt állapítják meg, hogy a raktárban lévő áruk 25%-a kabát, és a cipők 60%-a férfi cipő. A raktárkészlet hány százaléka a női cipő?

ABACUS matematikai lapok; 2001 január; C. 454.

5. Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amely a 7, a 11 és a 13 számok egyikével sem osztható?

OKTV 1979; 1. forduló

6. Egy osztályban minden diák jár a háromféle szakkör valamelyikére: 17-en matematikára, 13-an fizikára és 11-en kémiára. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak éppen négyszerese azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Hányan járnak mindhárom szakkörre és mennyi az osztálylétszám, ha az osztályba járó fiúk egyharmad része szemüveges, valamint a nem szemüveges fiúk száma egyenlő a lányok számával?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 2. forduló

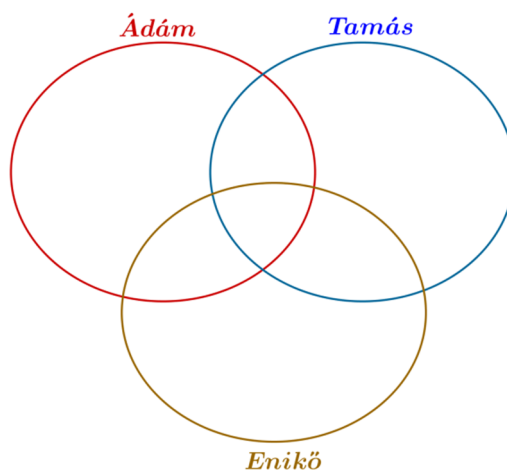
7. Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.

Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.

- a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre?

Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

- b) A feladat szövege alapján töltsd ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg!



Középszintű érettségi vizsga feladata bővítve; 2005. május 10.

8. Egy 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, a német és a francia.

Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:

- (1) Minden diák tanul legalább két idegen nyelvet.
- (2) Az angolt is és a németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanulók számával.
- (3) Angolul 27-en tanulnak.
- (4) A németet és a franciát is tanulók száma 15.

Emelt szintű érettségi vizsga; 2009. május 5.

9. Kullancs kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan a

- a) kétharmada félszemű;
- b) háromnegyede falábú;
- c) négyötöde kampókezű, és
- d) öthatoda kopasz

A hajón a matrózok közül pontosan azok a tisztek, akik egyszerre félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, valamint a tisztek matrózoknak is számítanak.

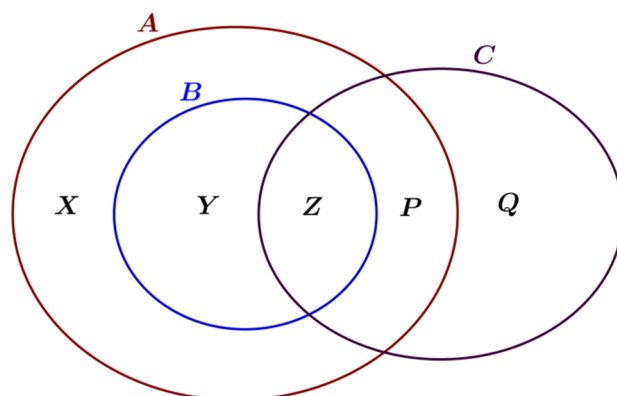
Hány fős a kalózhajó legénysége?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2014/2015; haladók, II. kategória, 3. forduló

10. Egy osztályban mindenki két szakkörbe jár, és bármely három gyerek jár közös szakkörbe. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szakkör, ahová minden gyerek jár.

KöMaL 1982. május; Gy. 2054

11. Az ábrán az A, B, C halmazok Venn-diagramja látható. Adjuk meg az A, B, C halmazok közötti halmazműveletekkel az X, Y, Z, P, Q részhalmazokat!



12. Három embercsoport X, Y, Z közül semelyik kettőnek sincs közös tagja. Az alábbi táblázat az $X, Y, Z, X \cup Y, X \cup Z$, és $Y \cup Z$ csoport tagjainak átlagos életkorát tartalmazza években:

Csoport	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Z$	$Y \cup Z$
Átlagéletkor	37	23	41	29	39,5	33

Mennyi az $X \cup Y \cup Z$ csoport tagjai életkorának átlaga?

KöMaL 1988. november; Gy. 2510

13. Mennyi az $|A \cup B \cup C|$ lehetséges legnagyobb és legkisebb értéke, ha $|A| = 10$, $|B| = 12$, $|C| = 15$ és $|A \cap B \cap C| = 6$? (Az $|A|$ jelöli az A halmaz elemeinek a számát.)

(A) 15 és 31 (B) 16 és 25 (C) 25 és 31 (D) 25 és 37 (E) 31 és 37

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 10. osztály, megyei forduló

14. Tekintse a következő halmazokat:

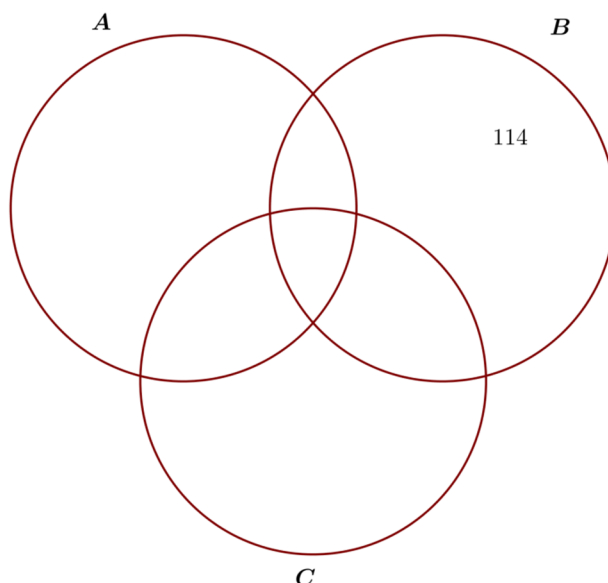
$A = \{a \text{ 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza}\};$

$B = \{a \text{ 300-nál nem nagyobb 3-mal osztható pozitív egész számok halmaza}\};$

$C = \{a \text{ 400-nál nem nagyobb 4-gyel osztható pozitív egész számok halmaza}\}.$

- a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába!

	<i>A halmaz</i>	<i>B halmaz</i>	<i>C halmaz</i>
114	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>
52			
78			
124			
216			



- b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát!
- c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az A halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a B sem a C halmaznak!

Középszintű érettségi vizsga; 2012. május 8.

15. Adott az $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz.

- a) Adja meg az A halmaz háromelemű részhalmazainak a számát!
- b) Az A halmaz elemeiből hány olyan ötös szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődhetnek?
- c) Az A halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz?

Emelt szintű érettségi vizsga; 2007. május 8.

16. Jelölje H a $\sqrt{5,2-x} \leq 3$ egyenlőtlenség **pozitív egész** megoldásainak halmazát.

Jelölje továbbá B azon **pozitív egész** b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám.

Elemjeinek felsorolásával adja meg a H , a B , a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2014. május 6.

17. Legyen $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5-x}\}$ és $B = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > -2\right\}$.

Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2011. május 3.

18. Jelölje H a $[0; 2\pi[$ intervallumot. Legyen A a H azon x elemeinek a halmaza, amelyekre teljesül a $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és B a H halmaz azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül a $2^{\cos x} < 1$ egyenlőtlenség.

Adja meg az A halmazt, a B halmazt és az $A \setminus B$ halmazt!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2008. október 21.

19. A H alaphalmaz tetszőleges részhalmazai A, B és C . Az alábbi összefüggések közül melyek igazak és melyek nem?

- a) $A \cap B \subset A \setminus B$
- b) $A \setminus B \subset A \cup B$
- c) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
- d) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C)$
- e) $\overline{(A \cup B)} \setminus \bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$

20. Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{1; 2; 3\}$. Írjuk fel az

- a) $(A \times B) \cap (B \times A)$;
- b) $(A \times B) \setminus (B \times A)$

halmaz elemeit!

21. Vége a nyárnak. Hét gyerek, Béla, Gábor, Imre, József, Ödön, Péter és Zsolt beszámoltak nyári programjaikról. Háromféle túrán vettek részt: vízi túrán (V), kerék pártúrán (K) és barlang túrán (B). Az alábbi információkat adták meg a matematikát szerető Dezsőnek:

$$V \cap K = \{\text{Gábor; Ödön}\}; B \setminus K = \{\text{Imre; József; Zsolt}\}; V \setminus (K \cup B) = \{\text{Béla}\};$$

$$(V \cup K) \setminus B = \{\text{Béla; Gábor}\}; (V \cap B) \setminus K = \{\text{Zsolt}\}; K \setminus \{V \cup B\} = \emptyset.$$

Dezsőnek azt is megmondták, hogy legalább egy táborban mindegyikük volt. Meg tudja-e mondani ennyi információból Dezső, hogy a gyerekek melyik táborban, táborokban vettek részt?

22. Hány olyan (A, B) rendezett pár van, ahol A és B egy rögzített n elemű halmaz részhalmazai és $A \subseteq B$?

KöMaL 2014. április; B.4625.

23. Egy háromnál nagyobb elemszámú halmazról tudjuk, hogy az egyelemű, a kételemű és a háromelemű részhalmazainak a száma egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Hány elemű a halmaz?

KöMaL 2012. december; C.1149.

24. Az $\{1; 2; 3; \dots; 2009\}$ halmazból legalább hány számot kell kiválasztani, hogy biztosan legyen a kiválasztott számok között két olyan, amelyek különbsége 4?

OKTV 2009/10; II. kategória, 1. forduló

25. Egy n -elemű H halmaznak kiválasztottuk néhány k -elemű részhalmazát ($3 \leq k \leq n$) úgy, hogy H bármely két elemét pontosan három darab, bármely három elemét pontosan két darab kiválasztott részhalmaz tartalmazza. Határozza meg n és k lehetséges értékeit.

OKTV 2010/11; III. kategória, 1. forduló

26. Ábrázoljuk azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyeknek koordinátáira: $|y| \leq 1 - x$ és $|x| \leq 3 - y$.

KöMaL 2012. április; C.1120.

27. Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer (S) síkjában.

Az A ponthalmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek a koordinátáira: $4x - 3y \geq 18$, azaz $A := \{P(x; y) \in S \mid 4x - 3y \geq 18\}$;

a B halmazt ponthalmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek a koordinátáira: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0$, azaz $B := \{P(x; y) \in S \mid x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0\}$;

a C halmazt ponthalmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek a koordinátáira: $y^2 = 4$, azaz $C := \{P(x; y) \in S \mid y^2 = 4\}$.

- Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatot alkotnak az A , a B és a C halmaz pontjai!
- Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B \setminus A$ halmazt?
- Ábrázolja a $B \cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x; y)$ pontja van a legközelebb, illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától?

Emelt szintű érettségi vizsga; 2006. október 25.

28. Van-e nemnegatív egész számokból álló olyan két végtelen A és B halmaz, hogy bármely nemnegatív egész szám pontosan egyféleképpen írható fel egy A -hoz és egy B -hez tartozó szám összegeként?

A Kürschák József Matematikai Tanulmányverseny 1966.évi 3. feladata

29. Adott három, páronként kitérő egyenes. Hol helyezkedhet el a középpontja egy olyan paralelepipedonnak, amelynek az egyenesek mindegyikére illeszkedik éle?

KöMaL 2011. szeptember; B.4381

30. Az e és f egyenesek merőlegesen metszik egymást. A két egyenes síkjában fekvő derékszög csúcsa a P pont, egyik szára az e egyenest az A pontban, a másik szára az f egyenest a B pontban metszi. Mi a mértani helye az AB szakasz felezőpontjának, ha a derékszög a P pont körül forog?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 1967; haladók, 1. forduló

31. Adott a térben négy pont: A, B, C, D . Határozzuk meg az S síkot úgy, hogy A és C a sík egyik oldalán, B és D a sík másik oldalán legyenek, és a négy pont S -től egyenlő távolságra legyen.

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1922.évi 1. feladata

32. Egy O középpontú kör egy átmérőjének a végpontjait A és B jelöli. Tekintsük a körvonal egy tetszőleges P pontját, vetítsük azt merőlegesen az AB átmérőre, és jelölje P' a P pont vetületét. Az OP sugáron vegyük azt a Q pontot, amelyre $OQ = OP'$. Mi a Q pontok mértani helye, ha P befutja az egész körvonalat?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 1978; kezdők, 1. forduló

OKTV 2012/13; III. kategória, 1. forduló

II. Megoldások

1. Egy osztály a tanév folyamán 3 kirándulást szervezett. Az elsőn az osztály 70%-a, a másodikon az osztály 80%-a, a harmadikon az osztály 90%-a vett részt. Így 12 tanuló háromszor, a többiek kétszer kirándultak. Hányan vannak az osztályban?

ABACUS matematikai lapok; 1999. november; C.335

Megoldás:

$70\% + 80\% + 90\% = 240\%$. Így a 200% feletti 40% annak a 12 tanulónak felel meg, akik háromszor kirándultak. A teljes osztálylétszám, a 100%, $12 : 0,4 = 30$ fő.

2. Egy 500 ember érintő felmérés során kiderült, hogy a megkérdezettek 46%-a szereti az eper, 71 %-a a vanília, 85%-a a csokoládé fagyaltot. Van-e a megkérdezettek között hat olyan ember, aki mind a háromféle fagyaltot szereti?

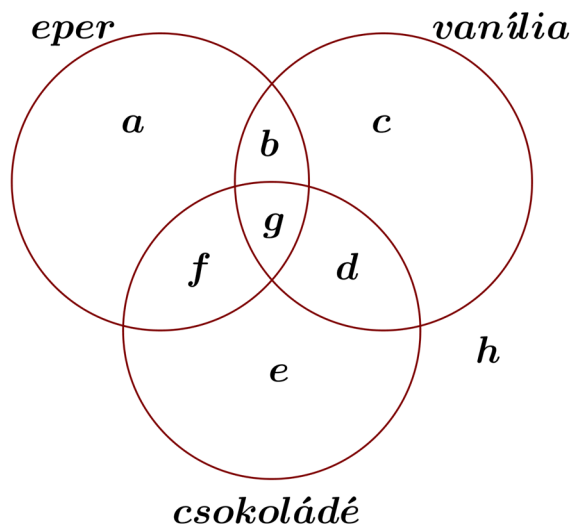
KöMaL 2006. szeptember; C 860

I. Megoldás:

$46\% + 71\% + 85\% = 202\%$, ami azt jelenti, hogy az embereknek legalább a 2%-a mind a háromféle fagyaltot szereti. Az 500-nak a 2% 10, így a feladat állításánál többet állíthatunk, biztos, hogy van 10 olyan ember, aki mind a három fagyaltot szereti.

II. Megoldás:

Használjuk az ábra szerinti jelölést:



$$a + b + c + d + e + f + g + h = 500,$$

$$a + b + d + g = 500 \cdot 0,46 = 230,$$

$$b + c + f + g = 500 \cdot 0,71 = 355,$$

$$e + f + g + d = 500 \cdot 0,85 = 425.$$

Ezek alapján:

$$(a + b + d + g) + (b + c + f + g) + (e + f + g + d) - (a + b + c + d + e + f + g + h) =$$

$$= b + d + f + 2g - h = 510.$$

$b + d + f + g$ értéke legfeljebb 500, h legkisebb értéke 0, így g legalább 10. Tehát van 10 olyan ember, aki mindhárom fagyaltot szereti.

Ez a megoldás az előzőnél lényegesen bonyolultabb, de megmutatja, hogy mi a feltétele annak, hogy g értéke nagyobb legyen: ha a csak egy fagyaltot szerető emberek száma növekszik (a, c, e), akkor g értéke is nagyobb lesz.

3. Az iskolai síelésen húszan vettek részt. Négy olyan gyerek utazott, akinek pontosan egy testvére is ott volt. Kilenc olyan gyerek ment síelni, akinek pontosan két testvére is utazott. Hét gyerek testvér nélkül ment síelni. Érkezőkor minden gyermeket az édesanyja várta. Hány édesanya várakozott a síelésről megérkező gyerekekre?

ABACUS matematikai lapok; 2006. január; B. 682.

Megoldás:

Négy gyereknek egy testvére síelt, ez két családot jelent. Kilenc gyereknek két testvére van, ők három családból jöttek. Az a hét gyerek, aki testvér nélkül jött, hét család tagjai. Összesen 12 családból jöttek a gyerekek, így 12 anyuka várta őket.

4. Egy boltban férfi és női cipőket és kabátokat lehet kapni. Egy alkalommal a raktárkészlet darabszámának felmérésekor azt állapítják meg, hogy a raktárban lévő áruk 25%-a kabát, és a cipők 60%-a férfi cipő. A raktárkészlet hány százaléka a női cipő?

ABACUS matematikai lapok; 2001. december; C. 454.

Megoldás:

Ha a raktárkészlet 25%-a kabát, akkor 75%-a cipő. Ha a cipők 60%-a férfi cipő, akkor 40%-a női cipő. Ha a raktárkészlet x , akkor $x \cdot 0,75 \cdot 0,4 = x \cdot 0,3$ női cipő van, tehát a raktárkészlet 30%-a női cipő.

5. Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amely a 7, a 11 és a 13 számok egyikével sem osztható?

OKTV 1979; 1. forduló

Megoldás:

Ha egy háromjegyű szám osztható a $d < 1000$ természetes számmal, akkor van olyan n egész szám, amelyre:

$$99 < n \cdot d \leq 999 \Rightarrow \frac{99}{d} < n \leq \frac{999}{d},$$

tehát ilyen szám $\left\lceil \frac{999}{d} \right\rceil - \left\lceil \frac{99}{d} \right\rceil$ darab van.

Ezt felhasználva a 7-tel, 11-gyel, illetve 13-mal osztható háromjegyű számok száma:

$$142 - 14 = 128, 90 - 9 = 81, \text{ illetve } 76 - 7 = 69.$$

Ugyanígy a $7 \cdot 11 = 77$ -tel, a $7 \cdot 13 = 91$ -gyel, illetve $11 \cdot 13 = 143$ -mal osztható háromjegyű számok száma:

$$12 - 1 = 11, 10 - 1 = 9, \text{ illetve } 6.$$

$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ -gyel osztható háromjegyű szám pedig már nincs.

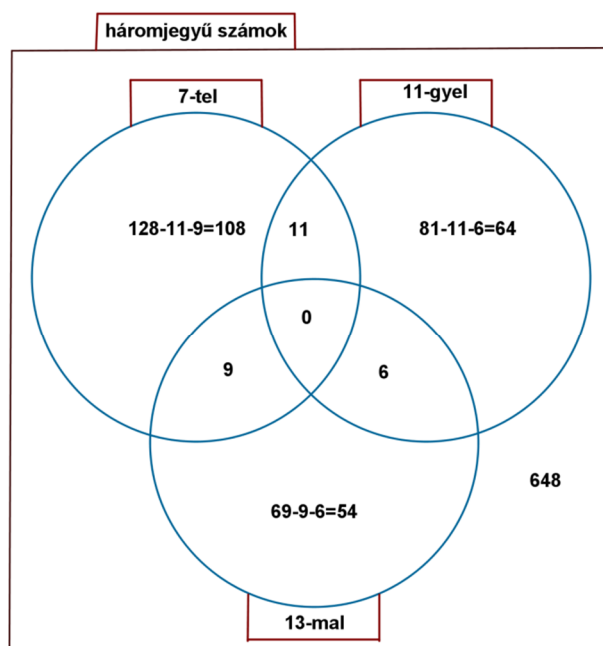
Összesen 900 darab háromjegyű szám van. A logikai szita formula alkalmazásával megkapjuk, hogy hány olyan háromjegyű szám van, amely nem osztható sem 7-tel, sem 11-gyel, sem 13-mal:

$$900 - (128 + 81 + 69) + (11 + 9 + 6) = 648.$$

(Az összes számból levontuk azok számát, amelyek egy számmal oszthatóak. Ekkor a két számmal oszthatóakat kétszer vontuk le, ezért egyszer vissza kell adnunk.

Megjegyzés:

A kiszámolt adatok alapján el tudjuk készíteni azt a halmazábrát, amelyről látható, hogy melyik oszthatósági feltételnek hány szám felel meg:



6. Egy osztályban minden diák jár a háromféle szakkör valamelyikére: 17-en matematikára, 13-an fizikára és 11-en kémiára. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak éppen négyszerese azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Hányan járnak mindhárom szakkörre és mennyi az osztálylétszám, ha az osztályba járó fiúk egyharmad része szemüveges, valamint a nem szemüveges fiúk száma egyenlő a lányok számával?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 2. forduló

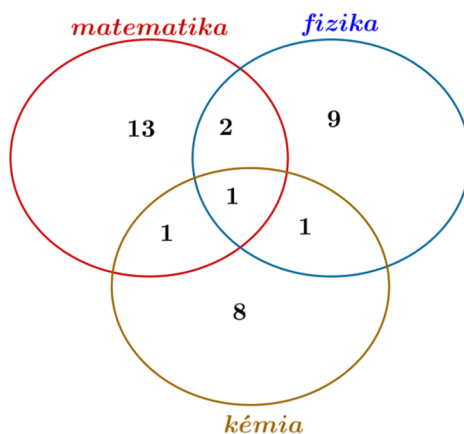
Megoldás:

Jelöljük x -szel a mindhárom szakkörbe járók számát. Ekkor a pontosan két szakkörbe járók száma $4x$. Ha összeadjuk az egyes szakkörökre járók számát, akkor ebben a pontosan két szakkörre járókat kétszer, a három szakkörre járók számát háromszor számoltuk. Ha mindenkit egyszer akarunk figyelembe venni, akkor a pontosan két szakkörre járók számát egyszer, a három szakkörre járók számát kétszer le kell vonnunk. Így az osztálylétszám $17 + 13 + 11 - 4x - 2x = 41 - 6x$.

A fiúk egyharmad része szemüveges, ezért jelöljük a fiúk számát $3f$ -fel. A lányok száma a fiúk számának kétharmada, tehát $2f$, így az osztálylétszám $5f$, azaz osztható 5-tel.

Olyan x -et keresünk, amelyre $41 - 6x$ osztható 5-tel és legalább 17. Ez csak $x = 1$ esetén teljesül, amikor $41 - 6x = 35$. Az osztálylétszám ezek alapján 35, és mindhárom szakkörre 1 tanuló jár.

Még meg kell mutatnunk, hogy van ilyen eset, hiszen különben azt kellene mondanunk, hogy a feladat feltételei nem teljesíthetők. Az alábbi Venn-diagram mutat egy lehetséges megvalósítást:



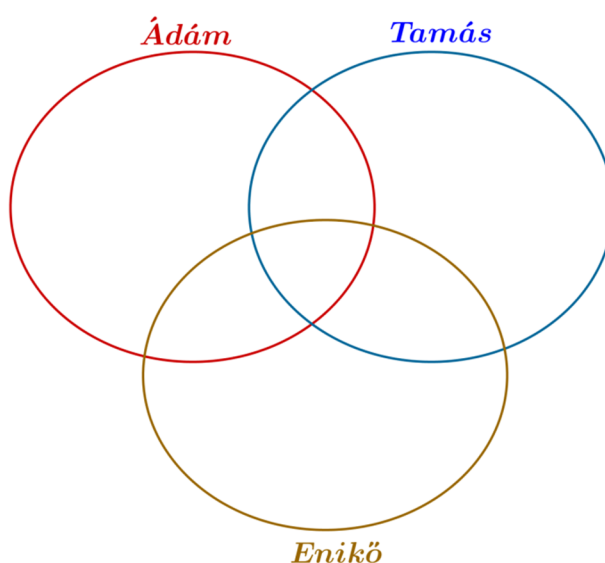
7. Egy rejtvényűjságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.

Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.

- a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre?

Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

- b) A feladat szövege alapján tölts ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg!



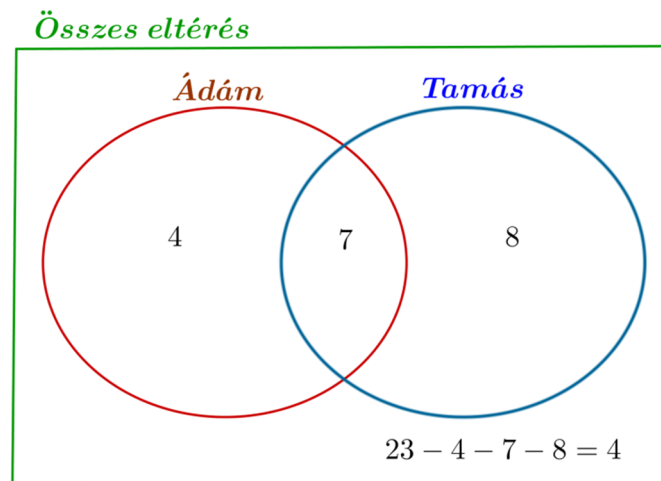
Középszintű érettségi vizsga feladata; 2005. május 10.

I. Megoldás a):

Használjuk a logikai szita formulát: $23 - (11 + 15) + 7 = 4$ eltérést nem találtak meg. (Ha az összes eltérésből levonjuk az Ádám és a Tamás által észrevett eltéréseket, akkor kétszer vontuk le a mindkettőjük által észrevetteket, ezért ezek számát egyszer hozzá kell adnunk.)

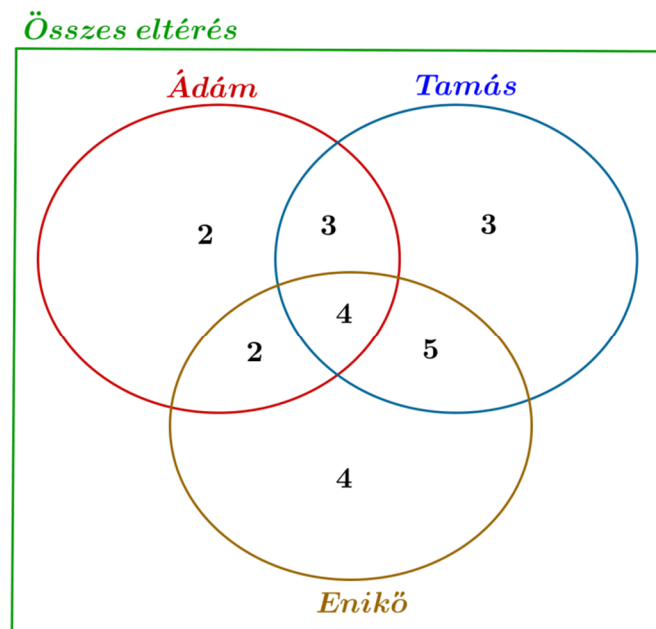
II. Megoldás a):

Az adatok alapján egy halmazábrát készítünk:



Az összes eltérés számából kivonjuk a csak Ádám által megtaláltakat, a csak Tamás által megtaláltakat és a mindkettőjük által észrevett eltérések számát: $23 - (4 + 7 + 8) = 4$. Tehát 4 eltérést nem talált meg egyikük sem.

Megoldás b):



Kihasználtuk azt, hogy hárman együtt minden eltérést megtaláltak, így 4 -et (ezeket nem találta meg sem Ádám, sem Tamás) írtunk abba a tartományba, amelyben a csak Enikő által megtalált eltérések vannak.

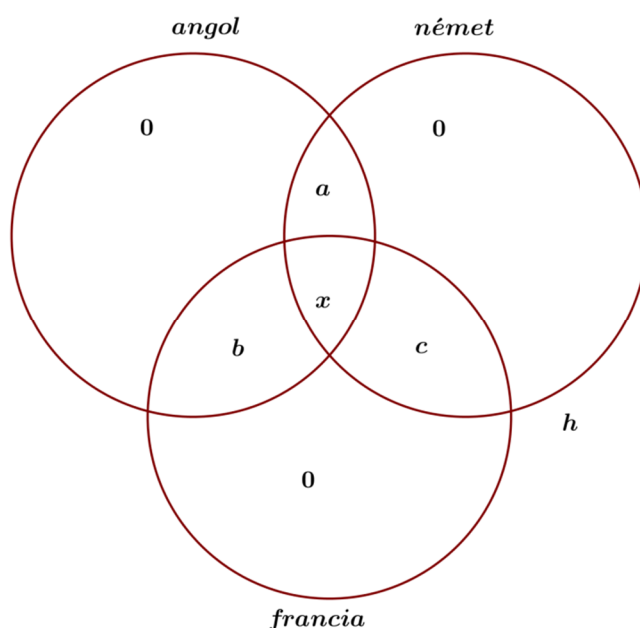
8. Egy 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, a német és a francia.

Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:

- (1) Minden diák tanul legalább két idegen nyelvet.
- (2) Az angolt is és a németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanulók számával.
- (3) Angolul 27-en tanulnak.
- (4) A németet és a franciát is tanulók száma 15.

Emelt szintű érettségi vizsga; 2009. május 5.

Megoldás:



A fenti halmazábrában (1) miatt három tartományba 0-t írtunk. A mindhárom nyelvet tanulók számát x -el, a pontosan két nyelvet tanulók számát a, b, c -vel jelöltük.

Az osztálylétszám: $a + b + c + x = 30$,

$$(2) \text{ miatt } a + x = b + c + x \Rightarrow a = b + c$$

$$(3) \text{ miatt } a + b + x = 27,$$

$$(4) \text{ miatt } c + x = 15.$$

Az első és a harmadik összefüggés miatt $c = 30 - 27 = 3$. Így a negyedik egyenletből $x = 12$. c értékét felhasználva $a = b + 3$. Az eddigi eredményeket a harmadik egyenletbe behelyettesítve:

$$b + 3 + b + 12 = 27 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = 9.$$

Tehát mindhárom nyelvet 12-en tanulják, franciául 9-en nem tanulnak.

9. Kullancs kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan a

- a) kétharmada félszemű;
- b) háromnegyede falábú;
- c) négyötöde kampókezű, és
- d) öthatoda kopasz

A hajón a matrózok közül pontosan azok a tisztek, akik egyszerre félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, valamint a tisztek matrózoknak is számítanak.

Hány fős a kalózhajó legénysége?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2014/2015; haladók, II. kategória, 3. forduló

Megoldás:

A feladat szövege alapján a matrózok száma osztható 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal, ezért ezeknek a számoknak a legkisebb többszörösével, azaz 60-nal is. Jelöljük a matrózok számát $60m$ -mel.

A matrózok egyharmada, azaz $20m$, nem félszemű, egynegyede, azaz $15m$, nem falábú, egyötöde, azaz $12m$, nem kampókezű, egyhatoda, azaz $10m$ nem kopasz.

$20m + 15m + 12m + 10m = 57m$. Így a félszemű, falábú, kampókezű és kopasz matrózok száma legalább $3m$, ők a tisztek. Tudjuk, hogy 5 tiszt van, tehát $5 \geq 3m$. Ennek az egyenlőtlenségnek csak az $m = 1$ pozitív egész szám felel meg, ezért csak 60 fős lehet a kalózhajó legénysége

Még meg kell mutatnunk, hogy ilyen összetételű legénység létezhet.

40 félszemű, 45 falábú, 48 kampókezű és 50 kopasz matrózunk van. $40 + 45 + 48 + 50 = 183$, ebből látható, hogy a matrózok többsége a fentiek közül legalább 3 tulajdonsággal rendelkezik. Tudjuk, hogy 5 rendelkezik mind a négy tulajdonsággal. A példát úgy konstruáljuk, hogy 5 matróz négy tulajdonsággal rendelkezik, 2 csak két tulajdonsággal, 53 pedig három tulajdonsággal. Az alábbi táblázat ilyen esetet mutat:

	Hány fő?	félszemű	falábú	kampókezű	kopasz
nem félszemű	20		×	×	×
nem falábú	15	×		×	×
nem kampókezű	10	×	×		×
nem kopasz	8	×	×	×	
félszem+faláb	2	×	×		
tiszt	5	×	×	×	×
Összesen	60	40	45	48	50

Egy ilyen legénység megfelel a feltételeknek.

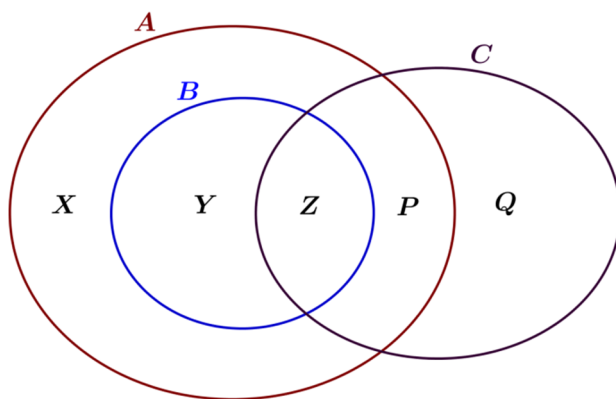
10. Egy osztályban mindenki két szakkörbe jár, és bármely három gyerek jár közös szakkörbe. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szakkör, ahová minden gyerek jár.

KöMaL 1982. május; Gy. 2054

Megoldás:

Ha bármely két gyerek ugyanabba a két szakkörbe jár, akkor ezekbe a szakkörökbe az összes gyerek jár, tehát igaz a feladat állítása. Ha van olyan két gyerek (A, B) , aki nem ugyanabba a két szakkörbe jár, akkor is van olyan szakkör, ahová mind a ketten járnak, hiszen bármely három gyerek is jár közös szakkörbe. Ebbe a szakkörbe viszont az osztály minden gyerekének járnia kell, hiszen A -val és B -vel együtt hárman járnak közös szakkörbe és a közös szakkör csak ez lehet. Így ebben az esetben is találtunk megfelelő szakkört.

11. Az ábrán az A, B, C halmazok Venn-diagramja látható. Adjuk meg az A, B, C halmazok közötti halmazműveletekkel az X, Y, Z, P, Q részhalmazokat!



Megoldás:

Talán a Z halmaz megadásával érdemes kezdeni (de nem kötelező).

$$Z = B \cap C,$$

$$Y = B \setminus C,$$

$$Q = C \setminus A,$$

$$X = A \setminus (B \cup C),$$

$$P = (A \cap C) \setminus B.$$

12. Három embercsoport X, Y, Z közül semelyik kettőnek sincs közös tagja. Az alábbi táblázat az $X, Y, Z, X \cup Y, X \cup Z$, és $Y \cup Z$ csoport tagjainak átlagos életkorát tartalmazza években:

Csoport	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Z$	$Y \cup Z$
Átlagéletkor	37	23	41	29	39,5	33

Mennyi az $X \cup Y \cup Z$ csoport tagjai életkorának átlaga?

KöMaL 1988. november; Gy. 2510

Megoldás:

A H halmaz elemszámát $|H|$ -val jelöljük. Ezt a jelölést használva $37 \cdot |X|; 23 \cdot |Y|; 41 \cdot |Z|$ az egyes halmazokba tartozó emberek életkorának az összege.

Tehát:

$$29 = \frac{37 \cdot |X| + 23 \cdot |Y|}{|X| + |Y|} \Rightarrow 29 \cdot (|X| + |Y|) = 37 \cdot |X| + 23 \cdot |Y| \Rightarrow |Y| = \frac{4}{3}|X|,$$

$$39,5 = \frac{37 \cdot |X| + 41 \cdot |Z|}{|X| + |Z|} \Rightarrow 39,5 \cdot (|X| + |Z|) = 37 \cdot |X| + 41 \cdot |Z| \Rightarrow |Z| = \frac{5}{3}|X|.$$

Ezek alapján már kiszámítható az $X \cup Y \cup Z$ halmazba tartozó emberek átlagéletkora:

$$\frac{37 \cdot |X| + 23 \cdot |Y| + 41 \cdot |Z|}{|X| + |Y| + |Z|} = \frac{37 \cdot |X| + 23 \cdot \frac{4}{3}|X| + 41 \cdot \frac{5}{3}|X|}{|X| + \frac{4}{3}|X| + \frac{5}{3}|X|} = \frac{136 \cdot |X|}{4 \cdot |X|} = 34.$$

Az $X \cup Y \cup Z$ halmazhoz tartozó emberek átlagéletkora 34 év.

Megjegyzés:

Nem használtuk ki, hogy az $Y \cup Z$ csoport tagjainak átlagéletkora 33 év. Erre nem volt szükségünk, felmerülhet bennünk, hogy vajon teljesül-e ez a feltétel. A fent levezetett összefüggéssel

$$\frac{23 \cdot |Y| + 41 \cdot |Z|}{|Y| + |Z|} = \frac{23 \cdot \frac{4}{3}|X| + 41 \cdot \frac{5}{3}|X|}{\frac{4}{3}|X| + \frac{5}{3}|X|} = \frac{99 \cdot |X|}{3 \cdot |X|} = 33$$

az átlagéletkor, ami a megadottal egyezik, tehát nem kaptunk ellentmondást.

13. Mennyi az $|A \cup B \cup C|$ lehetséges legnagyobb és legkisebb értéke, ha $|A| = 10$, $|B| = 12$, $|C| = 15$ és $|A \cap B \cap C| = 6$? (Az $|A|$ jelöli az A halmaz elemeinek a számát.)

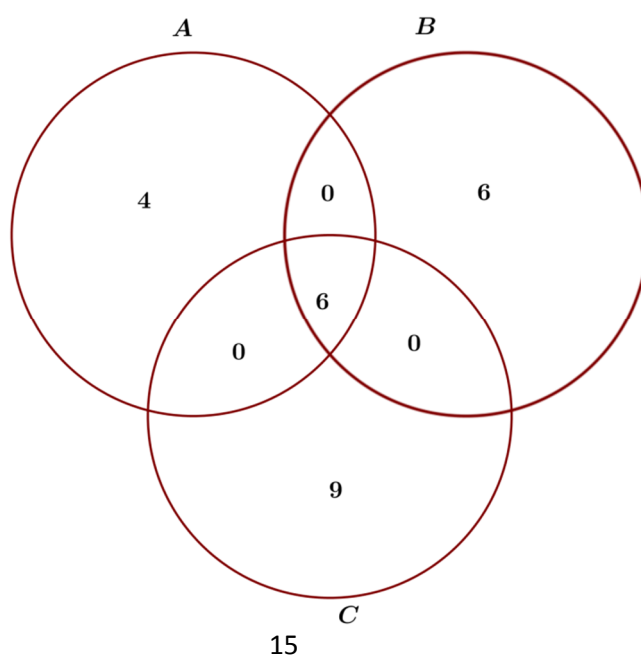
(A) 15 és 31 (B) 16 és 25 (C) 25 és 31 (D) 25 és 37 (E) 31 és 37

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 10. osztály, megyei forduló

Megoldás:

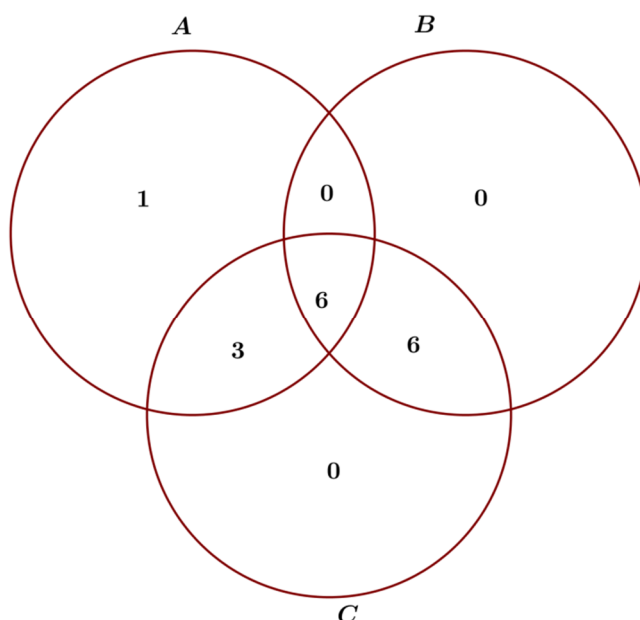
Akkor kapjuk a lehető legtöbb elemet, ha a közös elemek száma a lehető legkevesebb, tehát 6.

Ezt mutatja az ábra:



Ekkor $|A \cup B \cup C| = 25$.

Akkor kapjuk a legkevesebb elemet, ha két-két halmaz közös része a lehető legtöbb elemet tartalmazza. 6 olyan elem van, amely mindhárom halmazban benne van. Az A halmaznak még 4, a B halmaznak még 6, a C halmaznak még 9 elemét kell elhelyeznünk. $4 + 6 + 9 = 19$ páratlan szám, tehát nem lehet minden elem két halmaz közös részében, van legalább egy olyan elem, amely csak egy halmazhoz tartozik. Ez megvalósítható például az ábra szerint:



Ekkor $|A \cup B \cup C| = 16$.

Ezért a **(B)** a helyes válasz.

14. Tekintse a következő halmazokat:

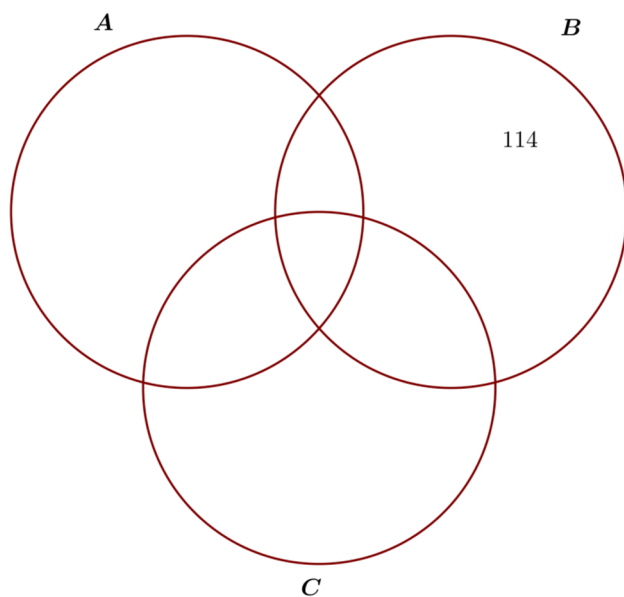
$A = \{a \text{ 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza} \};$

$B = \{a \text{ 300-nál nem nagyobb 3-mal osztható pozitív egész számok halmaza} \};$

$C = \{a \text{ 400-nál nem nagyobb 4-gyel osztható pozitív egész számok halmaza} \}.$

a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába!

	<i>A halmaz</i>	<i>B halmaz</i>	<i>C halmaz</i>
114	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>
52			
78			
124			
216			



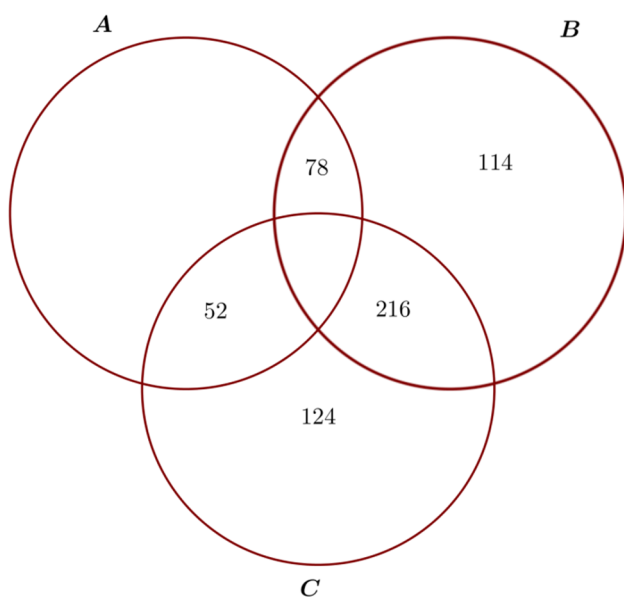
- b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát!
- c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az A halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a B sem a C halmaznak!

Középszintű érettségi vizsga; 2012. május 8.

Megoldás:

a)

	<i>A halmaz</i>	<i>B halmaz</i>	<i>C halmaz</i>
114	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>
52	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>
78	<i>eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>
124	<i>nem eleme</i>	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>
216	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>eleme</i>



- b) Az $A \cap B \cap C$ halmaz elemei azok a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok, amelyek 3-mal és 4-gyel is, azaz 12-vel oszthatóak. Ilyen szám $\left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 8$ darab van, így $|A \cap B \cap C| = 8$.
- c) $|A| = 100$. Ha egy szám eleme az A halmaznak, de nem eleme sem a B halmaznak, sem a C halmaznak, akkor nem nagyobb 100-nál és 3-mal sem, 4-gyel sem osztható. A 100-nál nem nagyobb számok között 33 osztható 3-mal, 25 osztható 4-gyel és 8 osztható 12-vel. A logikai szita formula alapján $100 - (33 + 25) + 8 = 50$ szám nem eleme sem B -nek, sem C -nek.
Így a keresett valószínűség $\frac{50}{100} = 0,5$.

15. Adott az $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz.

- a) Adja meg az A halmaz háromelemű részhalmazainak a számát!
- b) Az A halmaz elemeiből hány olyan ötlet osztható hatjegyű szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődhetnek?
- c) Az A halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz?

Emelt szintű érettségi vizsga; 2007. május 8.

Megoldás:

- a) 6 elemből 3-at kell kiválasztanunk úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít, ezt $\binom{6}{3} = 20$ féle módon tehetjük meg.
- b) Egy ötlet osztható szám 0-ra vagy 5-re végződik. Ha a szám 0-ra végződik, akkor a többi számot tetszőleges sorrendben tehetjük a 0 elé, ez $5! = 120$ féle lehetőség. Ha a szám végére az 5 kerül, akkor a többi számjegyet $4 \cdot 4! = 96$ helyezhetjük el elé, mert az első helyre 0 nem kerülhet. Ez összesen $120 + 96 = 216$ szám.
- c) Ezekből a számjegyekből $5 \cdot 6^5$ hatjegyű szám készíthető. Ha az 1-es számjegyet nem használjuk, akkor $4 \cdot 5^5$ szám írható fel. Ha az összes esetből elhagyjuk azokat a számokat, amelyekben nem szerepel az 1-es, akkor azokat a számokat kapjuk, amelyekben legalább egy 1-es van. Tehát $5 \cdot 6^5 - 4 \cdot 5^5 = 38880 - 12500 = 26380$ ilyen szám van.

16. Jelölje H a $\sqrt{5,2 - x} \leq 3$ egyenlőtlenség **pozitív egész** megoldásainak halmazát.

Jelölje továbbá B azon **pozitív egész** b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám.

Elemeinek felsorolásával adja meg a H , a B , a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2014. május 6.

Megoldás:

A négyzetgyök értelmezése miatt $x \leq 5,2$. Ilyen feltétellel az egyenlőtlenséget négyzetre emelve a megoldás:

$$5,2 - x \leq 9 \Rightarrow -3,8 \leq x.$$

A megoldásokat a pozitív egész számok halmazán keressük, ezért:

$$H = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

$\log_b 2^6$ akkor értelmezhető, ha $b \geq 0; b \neq 1$, továbbá a feladat feltételei szerint b pozitív egész szám. $\log_b 2^6$ akkor pozitív szám, ha $b > 1$.

Ha $\log_b 2^6$ egész, akkor van olyan k pozitív egész kitevő, amire $b^k = 2^6 = 64$. A 64 számot $2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1$ formában tudjuk felírni megfelelő hatvány alakjában. Így $B = \{2; 4; 8; 64\}$.

Tehát $H \cap B = \{2; 4\}$ és $B \setminus H = \{8; 64\}$.

17. Legyen $A = \{x \in \mathbf{R} | \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5-x}\}$ és $B = \{x \in \mathbf{R} | \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > -2\}$.

Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2011. május 3.

Megoldás:

A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq 1$ és $x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$. Ekkor az egyenlőtlenséget négyzetre emelve az egyenlőtlenség iránya megmarad:

$$\begin{aligned} x-1 &\geq 5-x \\ x &\geq 3. \end{aligned}$$

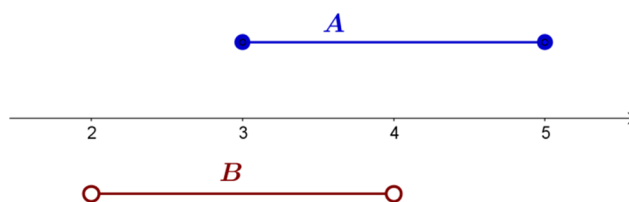
Az értelmezési tartományt is figyelembe véve: $A = \{x \in \mathbf{R} | 3 \leq x \leq 5\} = [3; 5]$ intervallum.

A $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > -2$ egyenlőtlenség az $x > 2$ valós számokra van értelmezve. Az $\frac{1}{2}$ aláú logaritmus függvény szigorúan monoton csökken, ezért

$$\begin{aligned} 2x-4 &< \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \\ x &< 4. \end{aligned}$$

Figyelembe véve az értelmezési tartományt is: $B = \{x \in \mathbf{R} | 2 < x < 4\} =]2; 4[$ intervallum.

Az alábbi ábra segít a válaszadásban:



$$A \cup B = [3; 5] \cup]2; 4[=]2, 5];$$

$$A \cap B = [3; 5] \cap]2; 4[= [3; 4[;$$

$$B \setminus A =]2; 4[\setminus [3; 5] =]2; 3[.$$

18. Jelölje H a $[0; 2\pi[$ intervallumot. Legyen A a H azon x elemeinek a halmaza, amelyekre teljesül a $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és B a H halmaz azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül a $2^{\cos x} < 1$ egyenlőtlenség.

Adja meg az A halmazt, a B halmazt és az $A \setminus B$ halmazt!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2008. október 21.

Megoldás:

A 2-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért ha $2^{\sin x} > 1 = 2^0$, akkor $\sin x > 0$. A H halmaz elemeiből válogatva a megoldás: $0 < x < \pi$; ezért $A =]0; \pi[$.

Ha $2^{\cos x} < 1 = 2^0$, akkor $\cos x < 0$. A H halmazon a megoldás: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; tehát $B =]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$.

Így $A \setminus B =]0; \frac{\pi}{2}]$.

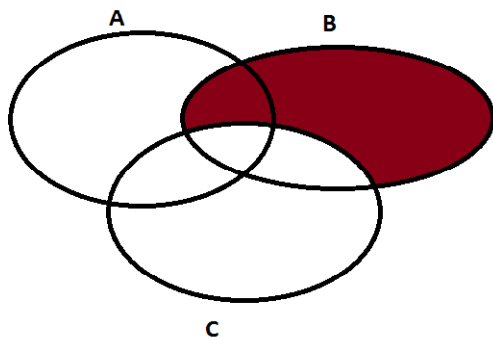
19. A H alaphalmaz tetszőleges részhalmazai A, B és C . Az alábbi összefüggések közül melyek igazak és melyek nem?

- a) $A \cap B \subset A \setminus B$
- b) $A \setminus B \subset A \cup B$
- c) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
- d) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C)$
- e) $\overline{(A \cup B)} \setminus \bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$

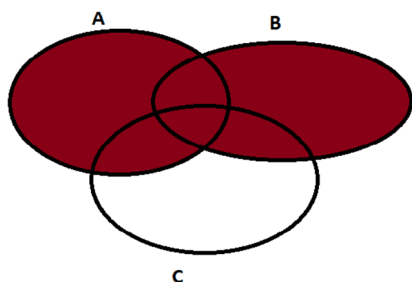
Megoldás:

- a) $A \cap B \subset A \setminus B$ nem igaz, mert $A \cap B$ azokat az elemeket tartalmazza, amelyek az A és B halmaznak is elemei, míg $A \setminus B$ halmazban nincsenek benne a B halmaznak az elemei.
- b) $A \setminus B \subset A \cup B$ igaz, mert $A \cup B$ a két halmaz minden elemét tartalmazza és $A \setminus B$ az A halmaz bizonyos elemeit tartalmazza.
- c) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ nem igaz, ahogy az alábbi ábrák mutatják:

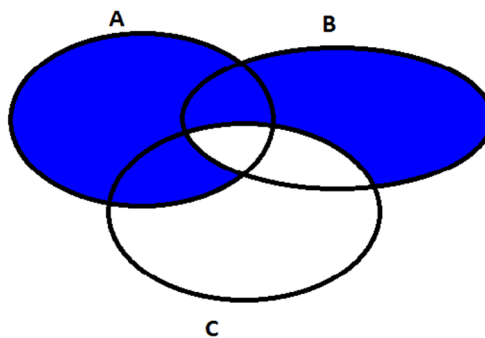
$B \setminus C$:



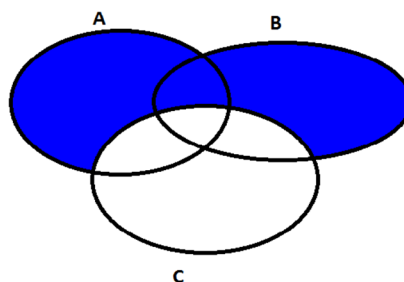
$A \cup B$



$A \cup (B \setminus C)$

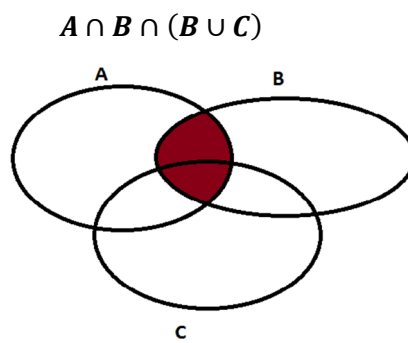
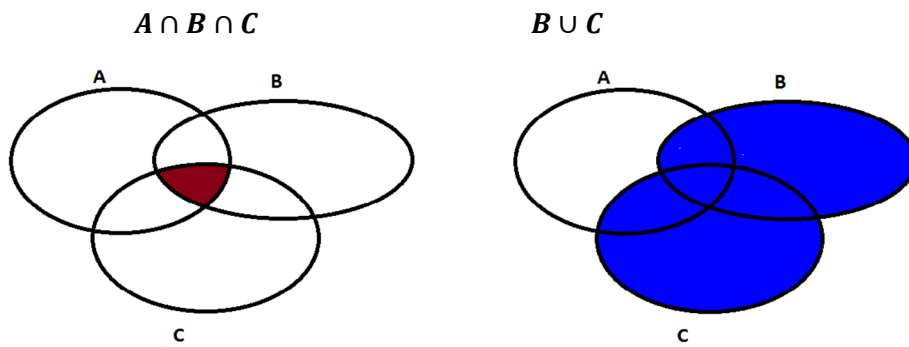


$(A \cup B) \setminus C$



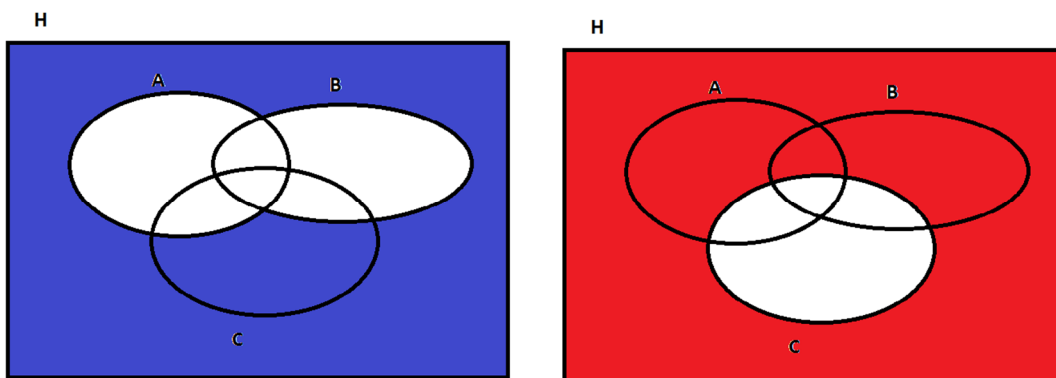
Láthatóan a két késsel jelölt halmaz nem azonos.

d) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C)$, nem igaz.



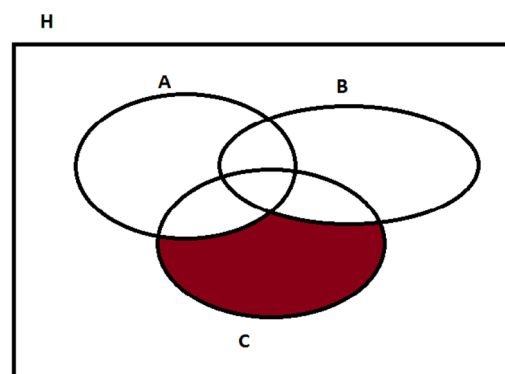
A két bordóval jelölt terület nem azonos.

e) $\overline{(A \cup B)} \setminus \bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ egyenlőség igaz.

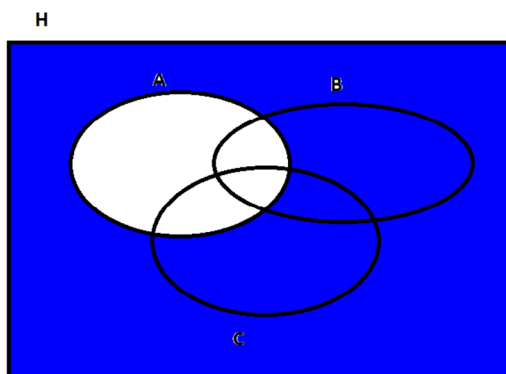
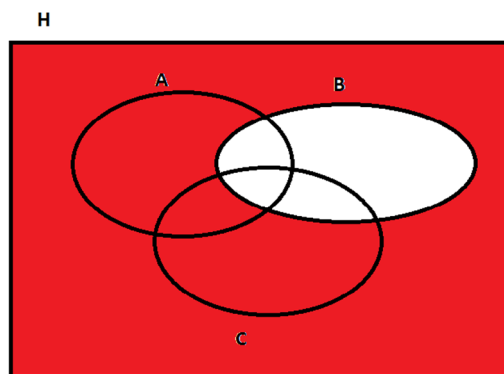
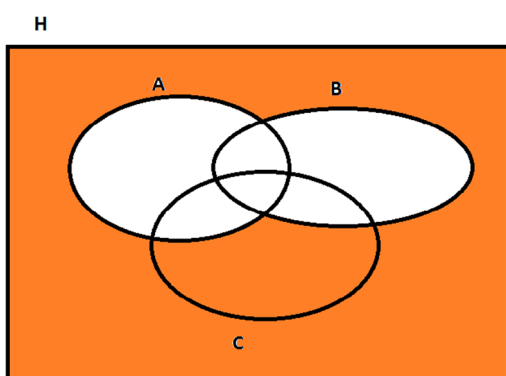
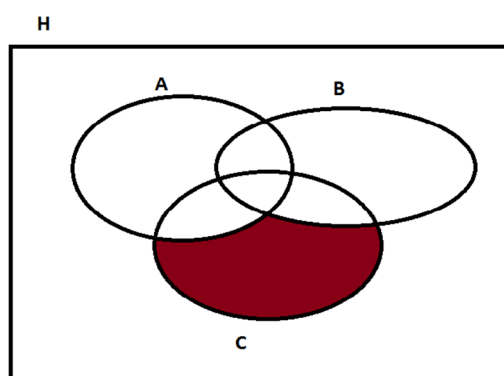


$\overline{(A \cup B)}$

$\bar{C}$



$\overline{(A \cup B)} \setminus \bar{C}$


 $\bar{A}$

 $\bar{B}$

 $\bar{A} \cap \bar{B}$

 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$

A két bordóval jelölt terület azonos, ezért az egyenlőség igaz.

20. Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{1; 2; 3\}$. Írjuk fel az

- a) $(A \times B) \cap (B \times A)$;
- b) $(A \times B) \setminus (B \times A)$

halmaz elemeit!

Megoldás:

- a) $A \times B = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3)\}$
 $B \times A = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2); (3; 1); (3; 2)\}$, így
 $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2)\}$.

- b) $(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(1; 3); (2; 3)\}$

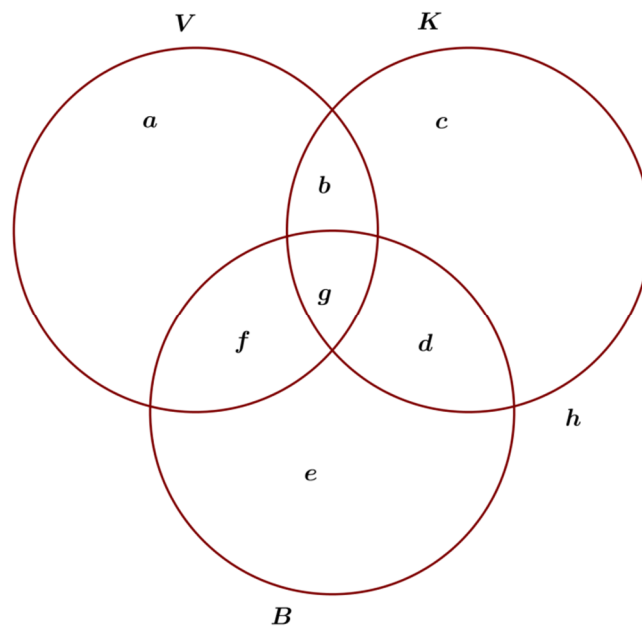
21. Vége a nyárnak. Hét gyerek, Béla, Gábor, Imre, József, Ödön, Péter és Zsolt beszámoltak nyári programjaikról. Háromféle túrán vettek részt: vízi túrán (V), kerék pártúrán (K) és barlang túrán (B). Az alábbi információkat adták meg a matematikát szerető Dezsőnek:

$$V \cap K = \{\text{Gábor; Ödön}\}; B \setminus K = \{\text{Imre; József; Zsolt}\}; V \setminus (K \cup B) = \{\text{Béla}\};$$

$$(V \cup K) \setminus B = \{\text{Béla; Gábor}\}; (V \cap B) \setminus K = \{\text{Zsolt}\}; K \setminus \{V \cup B\} = \emptyset.$$

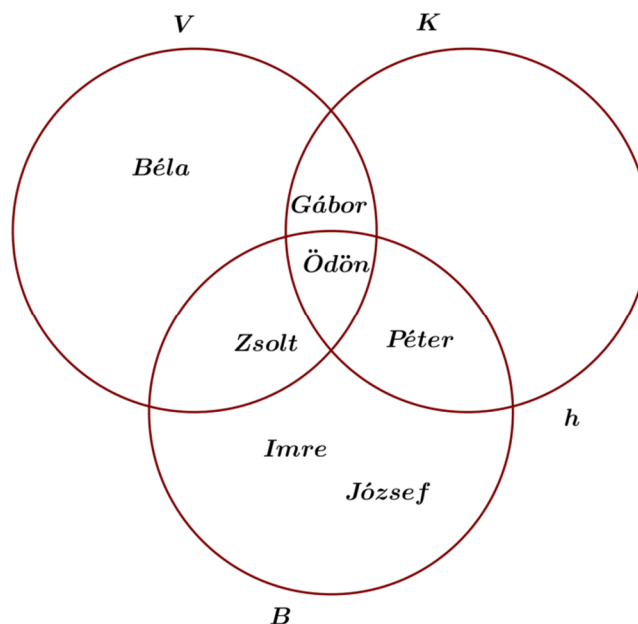
Dezsőnek azt is megmondták, hogy legalább egy táborban mindegyikük volt. Meg tudja-e mondani ennyi információból Dezső, hogy a gyerekek melyik táborban, táborokban vettek részt?

Megoldás:



A fenti halmazábra kisbetűkkel jelölt tartományait fogjuk meg határozni.

- $K \setminus \{V \cup B\} = \emptyset$, ezért a **c**-vel jelölt részbe nem tartozik gyerek.
- $(V \cap B) \setminus K = \{\text{Zsolt}\}$, így az **f**-vel jelölt tartományban Zsolt van.
- $V \setminus (K \cup B) = \{\text{Béla}\}$, tehát az **a**-val jelölt részen Béla van.
- $B \setminus K = \{\text{Imre; József; Zsolt}\}$, azaz az **e**-vel jelölt részbe Imre és József tartozik, hiszen csak Zsolt van az **f** területen.
- $(V \cup K) \setminus B = \{\text{Béla; Gábor}\}$, így a **b** tartományban Gábor van, mert Béla az **a**-val jelölt területhez tartozik, **c**-ben pedig nincs gyerek.
- $V \cap K = \{\text{Gábor; Ödön}\}$, tehát Ödön a **g**-vel jelölt területen van.
- Ezek után Péter csak a **d**-vel jelölt területen lehet.



Így Dezső meg tudja mondani, hogy

vizi túrán Béla, Gábor, Ödön és Zsolt;

kerékpár túrán Gábor, Ödön és Péter,

barlang túrán Ödön, Zsolt, Péter, Imre és József volt.

22. Hány olyan (A, B) rendezett pár van, ahol A és B egy rögzített n elemű halmaz részhalmazai és $A \subseteq B$?

KöMaL 2014. április; B.4625.

I. Megoldás:

Válasszunk egy k elemű ($0 \leq k \leq n$ egész) B részhalmazt. Ezt $\binom{n}{k}$ féle módon tehetjük meg. Egy k elemű halmaznak 2^k darab részhalmaza van (minden elemet vagy beleválasztunk a részhalmazba, vagy nem). Így egy adott B halmazhoz az A halmazt 2^k féle módon adhatjuk meg. Az összes megfelelő (A, B) párt úgy kapjuk meg, ha ezt elvégezzük minden $0 \leq k \leq n$ egész számra. Ezek alapján a keresett (A, B) rendezett párok száma

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^k,$$

amit a binomiális tétel alkalmazásával zárt alakban is meg tudunk adni, érték 3^n .

II. Megoldás:

Legyen az adott n elemű halmaz egy tetszőleges eleme x . Az alábbi esetek lehetségesek:

- $x \in A$ és $x \in B$;
- $x \notin A$ és $x \in B$;
- $x \notin A$ és $x \notin B$;
- $x \in A$ és $x \notin B$.

Az $A \subseteq B$ akkor és csak akkor teljesül, ha az első három eset valamelyike áll fenn. A halmaz mindegyik elemére egymástól függetlenül meghatározva, hogy melyik feltétel teljesüljön a háromból, megkapjuk az összes megfelelő (A, B) rendezett párt. Így 3^n eset van.

23. Egy háromnál nagyobb elemszámú halmazról tudjuk, hogy az egyelemű, a kételemű és a háromelemű részhalmazainak a száma egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Hány elemű a halmaz?

KöMaL 2012. december; C.1149.

Megoldás:

A halmaz elemszámát jelöljük n -nel. Az egyelemű részhalmazok száma n , a kételemű részhalmazoké $\binom{n}{2}$, a háromeleműeké $\binom{n}{3}$. A számtani sorozat bármely tagja a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő elemek számtani közepe, ezért:

$$\binom{n}{2} = \frac{n + \binom{n}{3}}{2} \Rightarrow 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = n + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}.$$

$n > 3$ feltétel miatt n -nel egyszerűsíthetünk, majd rendezzük az egyenletet:

$$6n - 6 = 6 + n^2 - 3n + 2 \Rightarrow n^2 - 9n + 14 = 0.$$

A másodfokú egyenlet két gyöke 2 és 7. n háromnál nagyobb, ezért a halmaz 7 elemű.

Ennek a halmaznak 7 egyelemű, $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ kételemű és $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$ háromelemű részhalmaza van. Ezek a számok valóban számtani sorozatot alkotnak.

24. Az $\{1; 2; 3; \dots; 2009\}$ halmazból legalább hány számot kell kiválasztani, hogy biztosan legyen a kiválasztott számok között két olyan, amelyek különbsége 4?

OKTV 2009/10; II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Állítsuk párba a számokat úgy, hogy az egy párban lévő számok különbsége 4 legyen:

1	2	3	4	9	10		2003	2004	2009
5	6	7	8	13	14	...	2007	2008	

Láthatóan a $8k + m$ és $8k + m + 4$ számok kerülnek egy párba, ahol $0 \leq k \leq 250$ egész és $m = 1, 2, 3, 4$. A 2009 számnak nincs párja. Így 1005 csoportot alakítottunk ki. Ha 1006 számot választunk ki, akkor biztosan lesz olyan pár, amelyből mindkét számot kiválasztottuk, tehát a két szám különbsége 4.

Megmutatjuk, hogy 1005 számot még ki tudunk választani úgy, hogy ez ne teljesüljön. Legyenek ezek a számok az 1, 2, 3, 4, 9, 10, ..., 2003, 2004, 2009 (a fenti táblázat felső sora)

Tehát legalább 1006 számot kell kiválasztanunk, hogy biztosan legyen a kiválasztott számok között két olyan, amelyek különbsége 4.

25. Egy n -elemű H halmaznak kiválasztottuk néhány k -elemű részhalmazát ($3 \leq k \leq n$) úgy, hogy H bármely két elemét pontosan három darab, bármely három elemét pontosan két darab kiválasztott részhalmaz tartalmazza. Határozza meg n és k lehetséges értékeit.

OKTV 2010/11; III. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Válasszuk ki a $H_1; H_2; H_3; \dots; H_j$ k -elemű részhalmazokat. Egy n -elemű halmazból két elemet $\binom{n}{2}$ féle módon választhatunk ki, és ezeket az elempárokat a részhalmazok közül pontosan 3 tartalmazza, az ilyen elempárok száma a részhalmazokban $3 \cdot \binom{n}{2}$.

Ezt az értéket más módon is megszámloljuk. Egy k -elemű halmaznak $\binom{k}{2}$ elempárja van, j ilyen halmaz van, tehát:

$$3 \cdot \binom{n}{2} = j \cdot \binom{k}{2}.$$

A háromelemű halmazokra ugyanezt a gondolatot használva:

$$2 \cdot \binom{n}{3} = j \cdot \binom{k}{3}.$$

A fenti egyenleteket átalakítva:

$$3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = j \cdot \frac{k(k-1)}{2}, \quad (1)$$

$$2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = j \cdot \frac{k(k-1)(k-2)}{6}. \quad (2)$$

A (2) egyenletet az (1) egyenlettel elosztva:

$$\frac{2(n-2)}{9} = \frac{k-2}{3} \Rightarrow n = \frac{3}{2}k - 1.$$

n csak akkor lesz egész, ha k páros, jelöljük $2t$ -vel. Ekkor $n = 3t - 1$, ahol $t \geq 2$ egész.

Ezt írjuk be az (1) egyenlet kétszeresébe:

$$3 \cdot (3t-1)(3t-2) = j \cdot 2t \cdot (2t-1).$$

Ebből következik, hogy $(2t-1) | 3 \cdot (3t-1)(3t-2)$. Megmutatjuk, hogy $2t-1$ és $3t-1$, illetve $2t-1$ és $3t-2$ számok relatív prímek. Legyen $d = (2t-1; 3t-1)$. Ekkor $d | 2 \cdot (3t-1) - 3 \cdot (2t-1) = 1$ -nek, így $d = 1$. Hasonlóan $3 \cdot (2t-1) - 2 \cdot (3t-2) = 1$, így $(2t-1; 3t-2) = 1$. Ezek alapján a fenti oszthatóság csak $(2t-1) | 3$ esetén teljesülhet. Azt is tudjuk, hogy $t \geq 2$ egész, így $(2t-1) = 3$. Innen $t = 2, n = 5, k = 4, j = 5$.

Ezek szerint a H halmaz 5-elemű, amelynek öt darab 4-elemű részhalmazát választjuk ki. Ez valóban megvalósítható a feladat feltételeivel. Legyen:

$$H = \{1; 2; 3; 4; 5\};$$

$$H_1 = \{2; 3; 4; 5\}; H_2 = \{1; 3; 4; 5\}; H_3 = \{1; 2; 4; 5\}; H_4 = \{1; 2; 3; 5\}; H_5 = \{1; 2; 3; 4\}$$

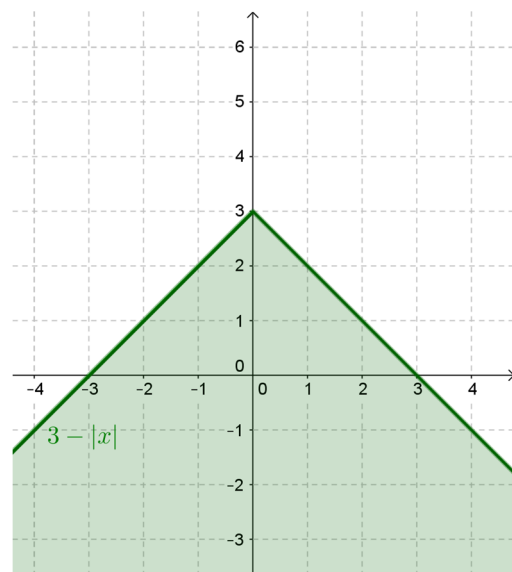
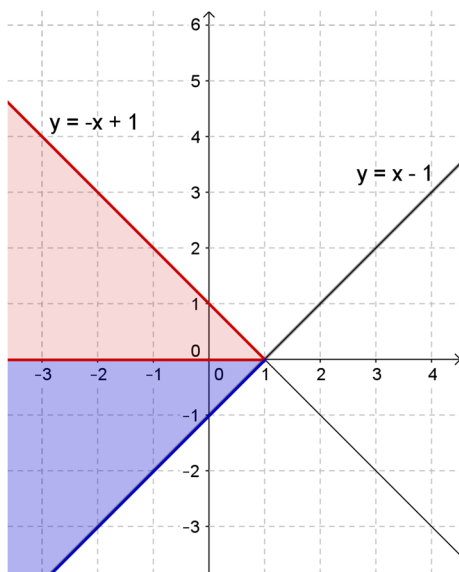
26. Ábrázoljuk azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyeknek a koordinátáira: $|y| \leq 1 - x$ és $|x| \leq 3 - y$.

KöMaL 2012. április; C.1120.

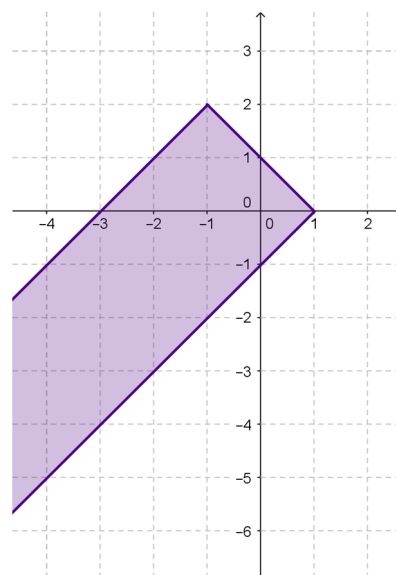
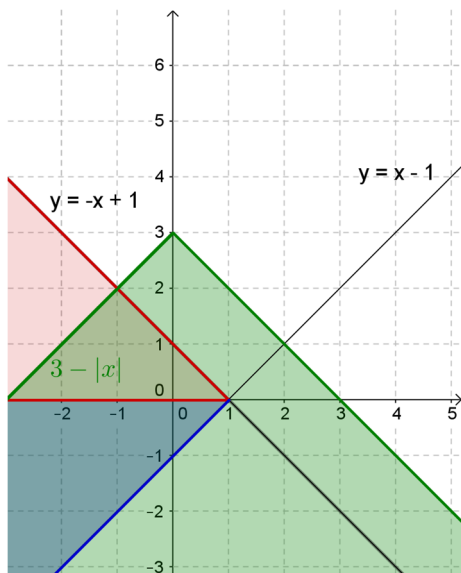
I. Megoldás:

Ha $y \geq 0$, akkor $|y| = y$, tehát azokat a pontokat keressük, amelyekre $y \leq 1 - x$ (az alábbi ábrán ezeket a pontok pirossal jelöljük). Ha $y < 0$, akkor $|y| = -y$, ekkor $-y \leq 1 - x \Rightarrow y \geq x - 1$ (az ábrán a kékkel jelölt pontok).

A második egyenlőtlenséget érdemes így átalakítani: $y \leq 3 - |x|$. Az $y = 3 - |x|$ grafikon „alatt” vannak a megfelelő pontok (zölddel ábrázolva). Természetesen itt is alkalmazhattuk volna az x előjele szerinti szétválasztást.



A feladat megoldását a két ábra közös része adja. A harmadik ábrán a két feltétel együtt, a negyediken pedig a megoldás látható:



27. Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer (S) síkjában.

Az A ponthalmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek a koordinátáira: $4x - 3y \geq 18$, azaz $A := \{P(x; y) \in S \mid 4x - 3y \geq 18\}$;

a B halmazt ponthalmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek a koordinátáira: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0$, azaz $B := \{P(x; y) \in S \mid x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0\}$;

a C halmazt ponthalmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek a koordinátáira: $y^2 = 4$, azaz $C := \{P(x; y) \in S \mid y^2 = 4\}$.

- Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatot alkotnak az A , a B és a C halmaz pontjai!
- Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B \setminus A$ halmazt?
- Ábrázolja a $B \cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x; y)$ pontja van a legközelebb, illetve, a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától?

Emelt szintű érettségi vizsga; 2006. október 25.

Megoldás:

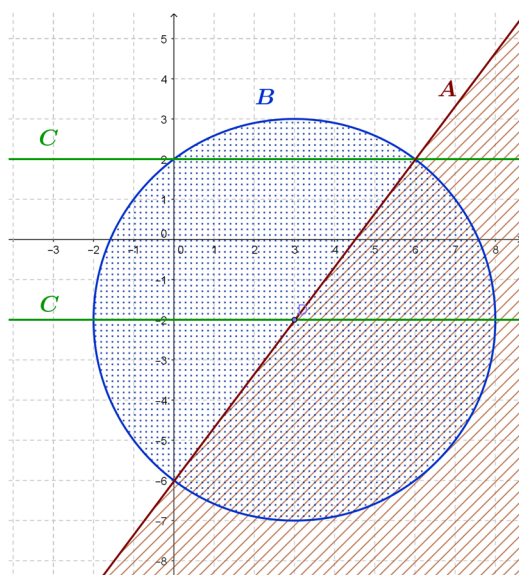
a)

Átalakítjuk az egyes halmazokat leíró összefüggéseket, majd ábrázoljuk koordináta-rendszerben:

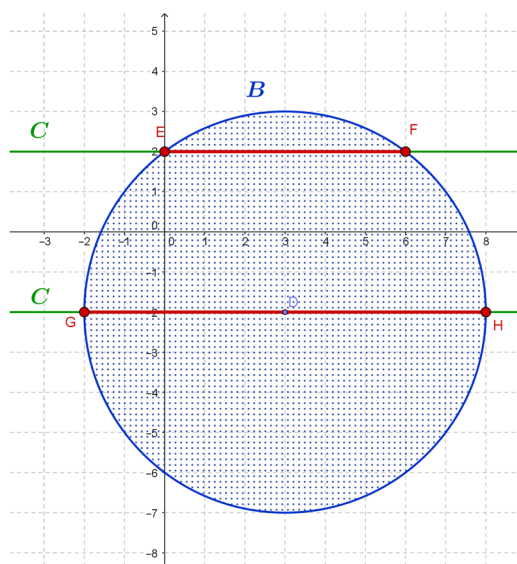
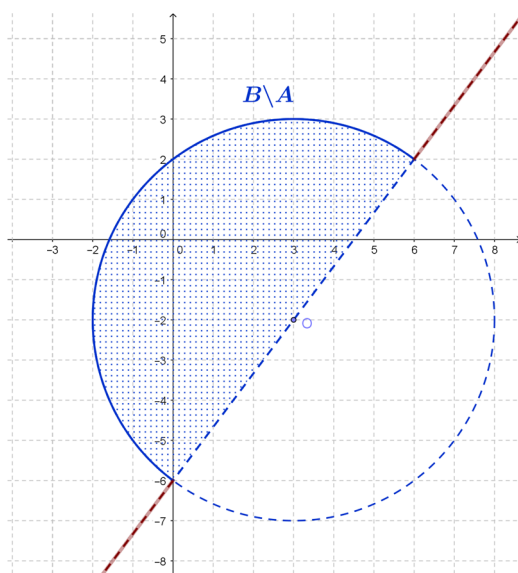
A : $y \leq \frac{4}{3}x - 6$; ezek a pontok az $y = \frac{4}{3}x - 6$ egyenletű egyenesen és alatta helyezkednek el.

B : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leq 12 + 9 + 4 = 25$; ezek a pontok a $(3; -2)$ középpontú, 5 egység sugarú körvonalon és azon belül vannak.

$C: y = +2$ vagy $y = -2$; ezek a pontok két, az x -tengellyel párhuzamos, egyenesen vannak.



b) A $B \setminus A$ halmaz a bal oldali ábrán a kék pontozott félkör, a körív hozzátartozik, az átmérő nem.



c) A jobb oldali ábrán a piros EF és GH szakaszok jelölik a $B \cap C$ halmazt.

Az $E(0; 2)$ pont távolsága az origótól 2 egység; az $F(6; 2)$ pont távolsága $\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$; a $G(-2; -2)$ pont távolsága $\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$; a $H(8; -2)$ pont távolsága $\sqrt{8^2 + (-2)^2} = \sqrt{68}$. Ezek szerint az origóhoz legközelebb az E pont és a $(0; -2)$ pont, legtávolabb a H pont van.

28. Van-e nemnegatív egész számokból álló olyan két végtelen A és B halmaz, hogy bármely nemnegatív egész szám pontosan egyféleképpen írható fel egy A -hoz és egy B -hez tartozó szám összegeként?

A Kürschák József Matematikai Tanulőverseny 1966.évi 3. feladata

Megoldás:

Megadunk két megfelelő halmazt. A 0 szám legyen eleme mind a két halmaznak. A többi pozitív egész számot a következő módon osztjuk be a két halmazba:

- az A halmazba azok a számok kerüljenek, amelyekben a tízes számrendszerben felírva minden 0-tól különböző számjegy páratlan sorszámu helyen áll (a szám végétől kezdjük el számolni);
- a B halmazba pedig azok, amelyekben minden 0-tól különböző számjegy páros sorszámu helyen áll.

Mind a két halmaz nyilvánvalóan végtelen halmaz.

Ha egy A és egy B halmazba tartozó számot összeadunk, akkor egy olyan egész számot kapunk, amelyben a páratlan sorszámu helyeken az A -beli számjegy, a páros sorszámu helyen a B -beli számjegy áll.

A 0 csak az A és a B -beli 0 összeadásával állítható elő. A pozitív számokhoz pedig az A -hoz tartozó elemet a páratlan sorszámu számjegyekből, a B -hez tartozó elemet a páros sorszámu számjegyekből tudjuk egyértelműen előállítani. Egy ilyen számot másik két szám előállításával nem tudunk megkapni, hiszen valamelyik helyiértékre más számjegy kerülne. Tehát az előállítás egyértelműen lehetséges. Például a 43259 számot a 40209 A halmazbeli és a 3050 B halmazbeli szám összegeként állíthatjuk elő.

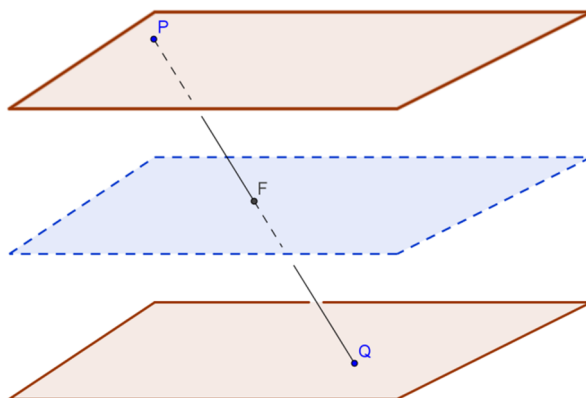
Megjegyzés:

A feladatnak megfelelő két halmaz tetszőleges számrendszerben azonos módszerrel megalkotható.

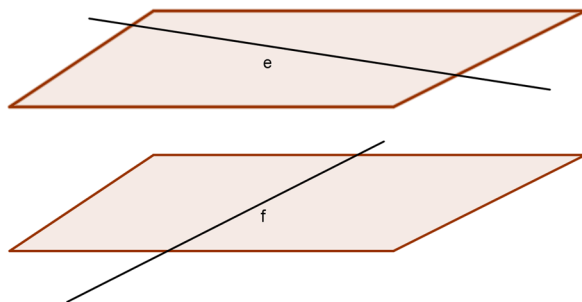
A feladat általánosítható, véges sok halmaz használatával ugyanígy előállíthatóak a nemnegatív egész számok.

29. Adott három, páronként kitérő egyenes. Hol helyezkedhet el a középpontja egy olyan paralelepipedonnak, amelynek az egyenesek mindegyikére illeszkedik éle?

KöMaL 2011.szeptember; B.4381

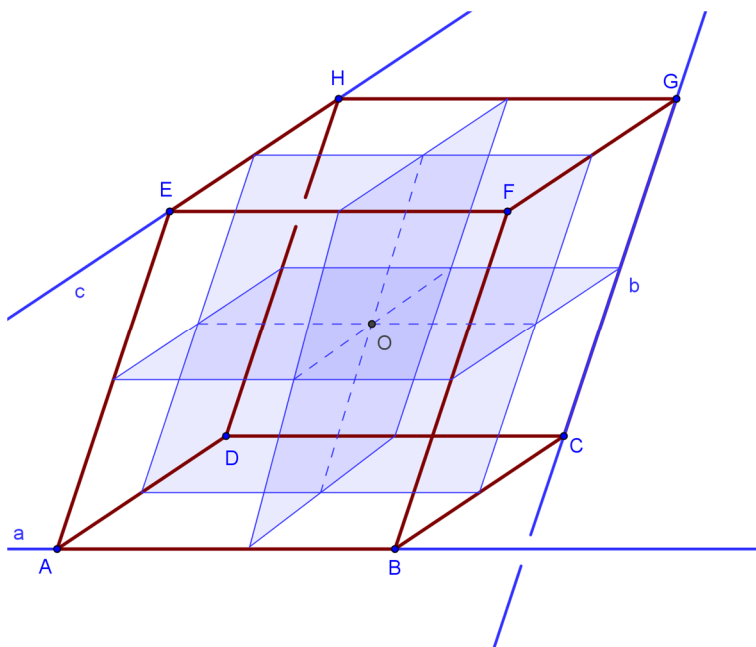
Megoldás:

Tudjuk, hogy két párhuzamos síkot összekötő szakaszok felezőpontjai a síkok távolságát felező közép-párhuzamos síkon vannak.



Két kitérő egyenesre egyértelműen fektethető két olyan sík, amelyek párhuzamosak és tartalmazzák a két egyenes egyikét.

Ezt a két ismeretet használjuk a feladat megoldásához.



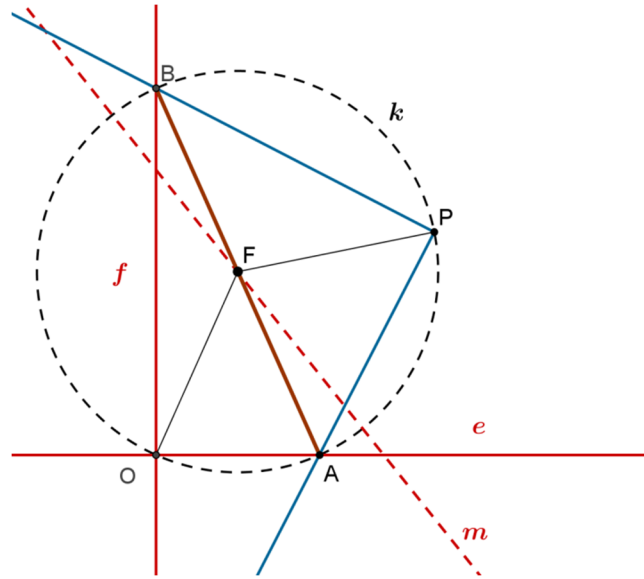
Legyen a három kitérő egyenes $a; b; c$. Az a és b egyenesekre az $ABFE$ és $DCGH$ párhuzamos síkokat, az a és c egyenesekre az $ABCD$ és $EFGH$ síkokat, a b és c egyenesekre az $ADHE$ és $BCGF$ síkokat illesztjük. Így a három egyenes egyetlen a feladatnak megfelelő $ABCDEFGH$ paralelepipedont határoz meg. Tehát egyetlen pontot kapunk a paralelepipedon középpontjaként, az ábrán O -val jelölt pontot.

Ez a pont a három középpárhuzamos sík metszéspontjában van.

30. Az e és f egyenesek merőlegesen metszik egymást. A két egyenes síkjában fekvő derékszög csúcsa a P pont, egyik szára az e egyenest az A pontban, a másik szára az f egyenest a B pontban metszi. Mi a mértani helye az AB szakasz felezőpontjának, ha a derékszög a P pont körül forog?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1967; haladók, 1. forduló

Megoldás:



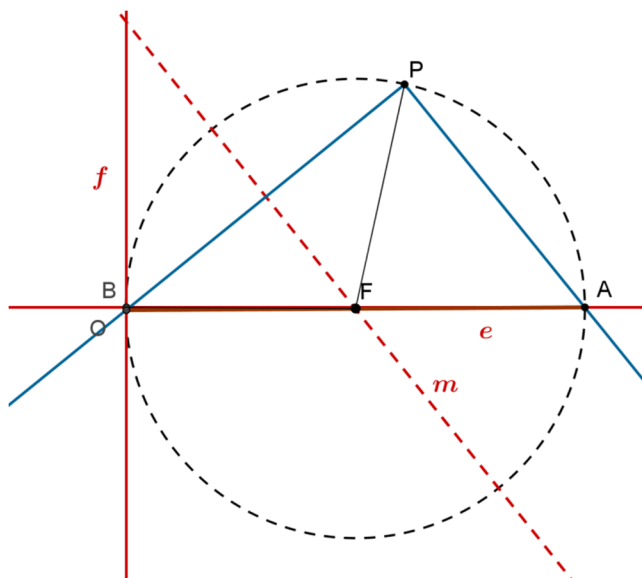
Az e és f egyenesek metszéspontját O -val, AB szakasz felezőpontját F -fel jelöljük.

$\angle AOB = \angle APB = 90^\circ$, ezért O és P rajta van az AB szakasz Thalész-körén, tehát $OF = PF$ a Thalész-kör sugara. Ez azt jelenti, hogy az F pont illeszkedik az OP szakasz m szakaszfelező merőlegesére.

Megmutatjuk, hogy az m egyenes minden pontja előáll valamely AB szakasz felezőpontjaként:

Válasszuk ki az m egyenes egy F pontját. Rajzoljuk meg az F középpontú, FO sugarú k kört. Ez a kör az O pontban metszi az e és f egyeneseket. A k körrel való második metszéspontokat válasszuk A és B pontoknak. AOB derékszög, ezért az AB szakasz a k kör átmérője, így az F pont az AB szakasz felezőpontja.

Ha az F pontnak az m és e egyenesek metszéspontját választjuk, akkor a k kör érinti az f egyenest, AB ekkor is a kör átmérője, tehát F az AB szakasz felezőpontja. Ugyanez igaz akkor, ha F az m és f egyenes metszéspontja.

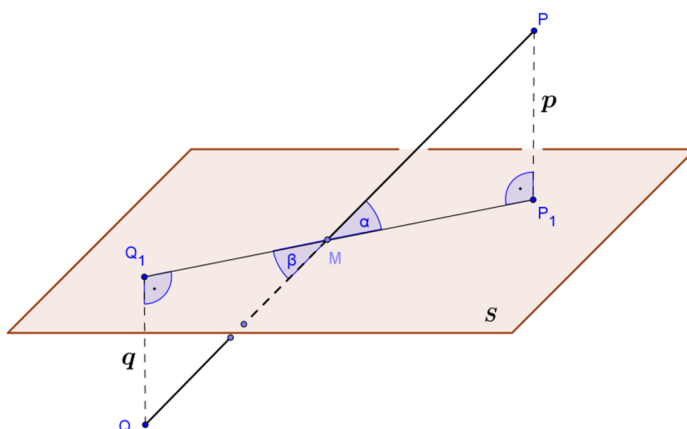


Tehát a keresett mértani hely az m egyenes.

31. Adott a térben négy pont: A, B, C, D . Határozzuk meg az S síkot úgy, hogy A és C a sík egyik oldalán, B és D a sík másik oldalán legyenek, és a négy pont S -től egyenlő távolságra legyen.

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1922.évi 1. feladata

Megoldás:

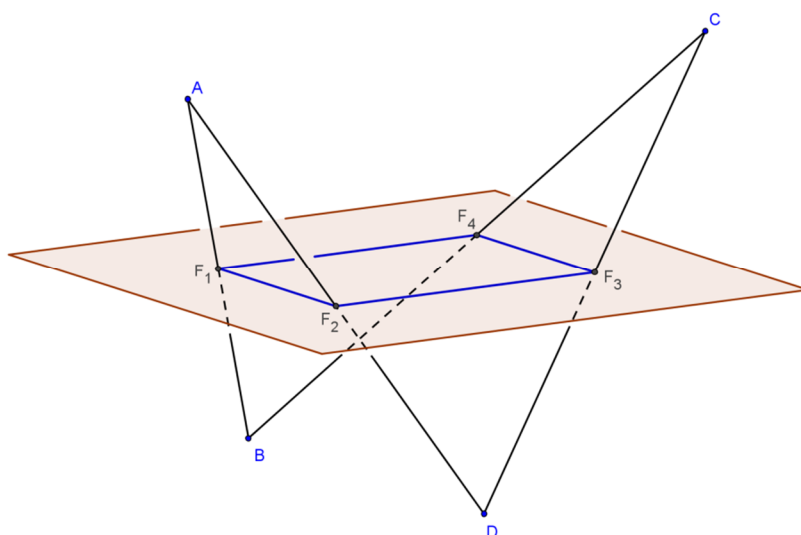


Megmutatjuk, hogy ha egy szakasz metsz egy síkot és a két végpontja a síktól egyenlő távolságra van, akkor a sík áthalad a szakasz felezőpontján.

A PQ szakasz az S síkot az M pontban metszi. A pontokból a síkra bocsátott merőlegesek talppontjai P_1 illetve Q_1 , a végpontoknak a síktól való távolsága: $p = q$. $\alpha = \beta$, mert csúcsszőgek. $PMP_1\Delta \cong MQQ_1\Delta$, mert derékszögek, egy hegyesszőgük és egy megfelelő oldaluk egyenlő. Az egybevágó háromszögeknek az oldalai páronként egyenlők, ezért $QM = MP$, tehát az M pont a PQ szakasz felezőpontja.

Ugyanígy bizonyítható, hogy ha egy sík átmegy egy szakasz felezőpontján, akkor a végpontjai egyenlő távol vannak a síktól.

Alkalmazzuk ezt a kitűzött feladatra.



A keresett síknak át kell mennie az AB, BC, CD, AD szakaszok $F_1; F_2; F_3; F_4$ felezőpontjain. $F_1 F_2$ az $ABD\Delta$ középvonala, ezért $F_1 F_2 \parallel BD$ és $F_1 F_2 = \frac{1}{2} BD$. Hasonlóan $F_3 F_4$ a $CBD\Delta$ középvonala, ezért $F_3 F_4 \parallel BD$ és $F_3 F_4 = \frac{1}{2} BD$. Ezek szerint $F_1 F_2 \parallel F_3 F_4$ és $F_1 F_2 = F_3 F_4$. Tehát az $F_1; F_2; F_3; F_4$ pontok vagy egy egyenesre esnek, vagy paralelogrammát alkotnak.

Ha $F_1; F_2; F_3; F_4$ pontok egy egyenesen vannak, akkor az $A; B; C; D$ pontok is egy síkban vannak, mert BD és AC is párhuzamos ezzel az egyenessel. Ha az egyik pont rajta van a felezőpontokon átmenő egyenesen, akkor a többi is rajta van, így ebben az esetben nem létezik a feladat feltételeinek megfelelő sík. Ha az $A; B; C; D$ pontok egy síkban vannak, de nem egy egyenesen, akkor a felezőpontok egyenesén átmenő minden sík megfelel.

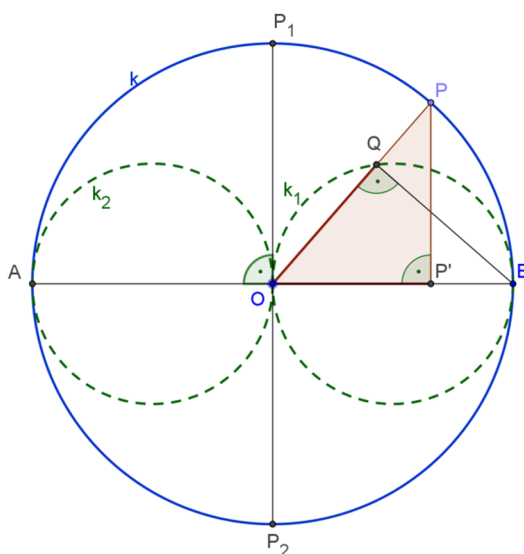
Ha az $F_1; F_2; F_3; F_4$ pontok paralelogrammát alkotnak, akkor ezek egy síkban vannak. Ekkor ez a sík a keresett ponthalmaz.

32. Egy O középpontú kör egy átmérőjének a végpontjait A és B jelöli. Tekintsük a körvonal egy tetszőleges P pontját, vetítsük azt merőlegesen az AB átmérőre, és jelölje P' a P pont vetületét. Az OP sugáron vegyünk azt a Q pontot, amelyre $OQ = OP'$. Mi a Q pontok mértani helye, ha P befutja az egész körvonalat?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1978; kezdők, 1. forduló

Megoldás:

Ha a P pont az A és B pontok közül a B ponthoz van közelebb, akkor a P' az OB sugárra kerül. Az $OPP'\Delta$ és az $OBQ\Delta$ egybevágó, mert az O csúcsnál lévő szögük azonos, $OP = OB$, mert a kör sugarai, és a feladat feltétele szerint $OQ = OP'$. Egybevágó háromszögek minden megfelelő adata



egyenlő, tehát mindkét háromszög derékszögű, $OQB\angle = 90^\circ$. Így a Q pont rajta van az OB szakasz k_1 Thalész-körén.

Ha a P pont az A -hoz van közelebb, akkor a Q pont az OA átmérőjű k_2 Thalész-körén van.

Megmutatjuk, hogy k_1 és k_2 minden pontja előáll megfelelő P pont választása esetén:

Kiválasztjuk a k_1 kör egy O -tól és B -től különböző Q pontját. Az OQ távolságot rámérjük az O pontból indulva az OB szakaszra, $OQ = OP'$. Az így kapott P' pontban merőlegest állítunk az OB szakaszra. Ez a merőleges kimetszi a k körből a megfelelő P pontot.

Ha az O pontot választjuk a k_1 körről, akkor $O = Q = P'$. Ekkor a P_1 és P_2 lehet a kiindulópont. Ha a B pontot választjuk a k_1 körrel, akkor a B pont lesz az alkalmas kiindulópont.

A k_2 kör pontjait hasonló módon kapjuk meg.

A keresett ponthalmaz a k_1 és k_2 körvonal.