

2. Függvények

I. Feladatok

1. Az $y = |x - 1| + |x + 1|$ függvény grafikonja és az $y = c$ egyenletű egyenes által közrezárt síkidom területe 30. Mekkora a c állandó értéke?

KöMaL 2001. május; C. 631.

2. Hány zérushelye van az a paramétertől függően az

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 4} - a, & \text{ha } x \leq 0, \\ x^2 - 4x + a, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

hozzárendeléssel megadott függvénynek?

KöMaL 2013. március; C. 1106.

3. Adott az

$$f(x) = \frac{(x+a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+b)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x+c)^2}{(c-a)(c-b)}$$

hozzárendelésű függvény, ahol a, b és c különböző valós számok. Határozzuk meg a függvény értékkészletét.

KöMaL 2010. szeptember; C.1043.

4. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényről tudjuk, hogy $f(1) = 0$, másrészt bármely két valós (x, y) számra $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Határozzuk meg az f függvényt!

KöMaL 1983. február; Gy. 2103.

5. Legyen a valós számok halmazán értelmezett $lac(x)$ függvény hozzárendelési szabálya a következő:

$$lac(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [2n; 2n+1], \\ -x + 4n + 3, & \text{ha } x \in]2n+1; 2n+2[, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ahol } n \in \mathbf{Z}, \\ \text{ahol } n \in \mathbf{Z}. \end{matrix}$$

Oldjuk meg a $lac(2x^2 + x + 4) = lac(x^2 + 7x - 1)$ egyenletet a valós számok halmazán.

KöMaL 2010. május; C.1038.

6. Legyen $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyek $(x; y)$ koordinátáira

$$f(x) - f(y) \geq 0.$$

KöMaL 1988. február; Gy. 2423.

7. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek $(x \in \mathbf{R})$ egy zérushelye van. Az $f(x)$ függvény minimumhelye $x = c$. Mekkora lehet az ac szorzat értéke?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2011/2012; haladók, I. kategória, 1. forduló

8. Mi a legkisebb értéke a következő kifejezésnek:

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) ?$$

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 1971; haladók, 1. forduló

9. Határozzuk meg azokat a lineáris $f(x), g(x), h(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) függvényeket, amelyekre

$$F(x) = |f(x)| - |g(x)| + h(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < -1. \\ 3x + 2, & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ -2x + 2, & \text{ha } 0 \leq x. \end{cases}$$

*Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 2. forduló
III. kategória, 1. forduló*

10. Jelölje $\mathbf{P}$ a prímszámok halmazát! Legyen $f: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \left\{ \frac{x^2-1}{24} \right\}$, ahol $\{z\}$ a z szám törttrészét jelöli, (azaz $\{z\} = z - [z]$ és $[z]$ a z egészrésze, vagyis az a legnagyobb egész szám, amely z -nél nem nagyobb)! Mi az f függvény értékkészlete?

*Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2010/2011; kezdők, I-II. kategória, 2. forduló
III. kategória, 1. forduló*

11. A valós számok halmazán értelmezett másodfokú $f(x)$ függvény minden x számra eleget tesz a

$$3 \cdot f(x) + f(2 - x) = x^2$$

egyenlőségnek.

Hány olyan, 2005-nél nem nagyobb természetes szám van, amelyre igaz, hogy

$$f(x) > \frac{13}{4} ?$$

OKTV 2005/2006; I. kategória, 1. forduló

12. A minden valós számra értelmezett $f(x)$ függvényre $f(x + 1) + 3f(-x) = |x|$ teljesül. Adjuk meg az f zérushelyeit!

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2008/2009; haladók, III. kategória, 2. forduló

13. Legyen f az $x = 1$ hely kivételével minden valós számra értelmezett olyan függvény, amely bármely $x \neq 0$ esetén eleget tesz az

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{cx}{x-1}$$

egyenletnek. Számítsuk ki a c valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5.$$

OKTV 1978; 2. forduló

14. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részalmazát, amelyen az alábbi f függvény értelmezhető, és határozzuk meg a függvény értékkészletét ezen az értelmezési tartományon.

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x - \sqrt{2 - x}}}.$$

OKTV 2008/2009; II. kategória, 2. forduló

15. Mutassuk meg, hogy a valós számokon értelmezett

$$f(x) = \sin x + \sin(x \cdot \sqrt{2})$$

függvény sohasem veszi fel a $+2$ illetve -2 értékeket!

OKTV 1984; speciális matematika tantervű osztályok versenye; 3. fordulás feladat részlete

16. Az f függvény értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, és a függvény értékei is pozitív egészek. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre teljesül, hogy minden pozitív egész n esetén

$$\sum_{i=1}^n f^3(i) = f^3(1) + f^3(2) + \dots + f^3(n) = (f(1) + f(2) + \dots + f(n))^2 = \left(\sum_{i=1}^n f(i) \right)^2$$

OKTV 2012/2013; II. kategória, 3. forduló

17. Határozzuk meg azt az f függvényt, amely

- minden nemnegatív egészhez nemnegatív egész számot rendel hozzá, különböző egészekhez különböző egészeket;
- minden nemnegatív egész n -re kielégíti az

$$f^2(0) + f^2(1) + \dots + f^2(n) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

egyenlőtlenséget.

Nemzetközi Magyar Matematika Verseny 1995.

18. A természetes számok halmazán értelmezett f függvényre teljesül a következő egyenlőség:

$$f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3) + \dots + n^2 f(n) = n^3 f(n)$$

tetszőleges $n \geq 1$ esetén. Határozzuk meg $f(2008)$ értékét, ha $f(1) = 2008$!

Nemzetközi Magyar Matematika Verseny 2008.

19. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden $(x; y)$ valós számpárra kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(x) \leq x$$

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden valós x -re $f(x) = x$.

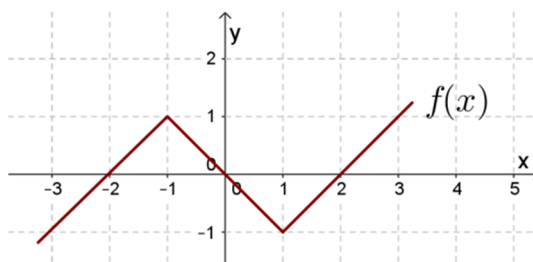
A Kürschák József Matematikai Tanulmányverseny 1979. évi 2. feladata

20. A $g(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{x-9}{|x-9|}$ függvény értelmezési tartománya: $\mathbf{R} \setminus \{0; 9\}$, értékkészlete:

- (A) $\{0\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{0; 2\}$ (D) $\{-2; 2\}$ (E) $\{-2; 0; 2\}$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2000; 9. osztály, megyei forduló

21. Az ábrán az $f(x)$ függvény grafikonja látható. Hány megoldása van az $|f(x) - 1| = \frac{1}{2}$ egyenletnek a $[-2; 2]$ intervallumon?



- (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2011; 10. osztály, megyei forduló

22. Melyik az a legnagyobb valós szám, amelyre az $f(g(x)) \leq g(f(x))$ egyenlőtlenség igaz, ha $f(x) = 3^x - 1$ és $g(x) = 3x + 2$?

- (A) -2 (B) $-0,5$ (C) 0 (D) $0,5$ (E) Nincs ilyen szám.

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007; 11. osztály, megyei forduló

23. A valós számokon értelmezett $f(x)$ függvényre bármely $x \neq 0$ esetén igaz, hogy $2 \cdot f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + 4$. Jelölje S azon valós x -ek összegét, amelyekre $f(x) = 2007$. Melyik az S -hez legközelebbi egész szám?

- (A) -1 (B) 0 (C) 602 (D) 5014 (E) 6021

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007; 12. osztály, döntő

24. Legyen $f(x) = \sqrt{16 + (3 - x)^2} + \sqrt{64 + (9 - x)^2}$. Határozzuk meg a függvény minimumhelyét és a minimum értékét!

25. Határozzuk meg azt az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = x^2 + bx + c$ (b és c valós állandók) alakú másodfokú függvényt, amelyhez van olyan p számérték, amelyre

$$f(p) = 2p^2, \quad f(2p) = 3p^2 + 1, \quad f(3p) = 4p^2 + 4$$

egyidejűleg teljesül! Mennyi a p értéke?

Írásbeli felvételi feladat a műszaki főiskolák nulladik évfolyamai számára 1998

26. a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb H halmazát, amelyen a $\log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x)^2$ kifejezés értelmezhető!
- b) Mi a fenti H halmazon az $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x)^2$ képlettel definiált f függvény értékkészlete?
- c) Hol monoton növekedő ez az f függvény?

Írásbeli érettségi-felvételi feladat; 2001

27. Határozza meg a következő függvény értelmezési tartományát:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 13x + 3}{-x^2 + 3x + 10}}.$$

Nemzetközi Előkészítő Intézet vizsgadolgozatának feladata; 1981

28. Állapítsa meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetőek! Adja meg a kifejezések legnagyobb és legkisebb értékét!

- a) $\log_2 0,5^{\sin x}$;
- b) $\sqrt{1 - \sin^2 x}$;
- c) $\log_2 0,5^{\sin x} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Közgazdaságtudományi egyetemekre és főiskolákra felvételizők írásbeli érettségi-felvételi feladata; 1992

29. Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetőek:

- a) $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ b) $x \mapsto \sqrt{\operatorname{tg} x}$ c) $x \mapsto \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

Írásbeli érettségi-felvételi feladatok; 1998

30. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p - 3)x^2 + p^2x - 6$.

- a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x) dx$ határozott integrál értékét, ha $p = 3$!
- b) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek!
- c) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2012. május 8.

31. Legyen $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $x \in \mathbf{R}$.

- a) Igazolja, hogy $\int_0^a f(x) dx = -a^3 + a$.
- b) Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x) dx \geq 0$?
- c) Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma?

Emelt szintű érettségi vizsga; 2010. május 4.

32. a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a $[-3; 4]$ intervallumon az $x \mapsto x^2 - 2|x| - 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!
- b) Legyen az f, g és h függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3; \quad g(x) = x - 3; \quad h(x) = |x|.$$

Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = x^2 - 2x - 6.$$

Készítse el – a fenti példának megfelelően – az f, g és h függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket!

Sorolja fel valamennyit!

(A $(g \circ f)(x)$ függvényt nem szükséges újra felírni.)

- c) Keressen példát olyan p és t , a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre

$$(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x) !$$

Adja meg a p és t függvény hozzárendelési szabályát!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2006. május 9.

33. a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} \text{ kifejezés értelmezhető!}$$

- b) Ábrázolja a $[-5; 8]$ intervallumon értelmezett $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt!
- c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti f függvényre vonatkozóan?

A: Az f értékkészlete: $[0; 5]$.

B: Az f függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.

C: Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4; 8]$ intervallumon.

- d) Határozza meg az $\int_{-3}^3 (x^2 - 6x + 9) dx$ értékét!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2007. május 8.

34. Az $f(x) = 3x^2 + b$ függvény grafikonjának az $x = 2$ helyhez tartozó érintője áthalad az origón.

- a) Hol metszi ez az érintő a parabola vezéregyenesét?
- b) Számítsuk ki a függvénygörbe, az érintő és az y tengely által közbezárt terület nagyságát.

KöMaL 2010. december; emelt szintű gyakorló feladatsor 7. feladat

35. Adott a valós számokon értelmezett

$$I(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$$

függvény, és tudjuk, hogy $f(t) = 3t^2 + 4t - 1$. Határozzuk meg az $I(x)$ zérushelyeit, és azokat az intervallumokat, melyeken konvex, illetve konkáv a függvény.

KöMaL 2012. november; emelt szintű gyakorló feladatsor 3. feladat

II. Megoldások

1. Az $y = |x - 1| + |x + 1|$ függvény grafikonja és az $y = c$ egyenletű egyenes által közrezárt síkidom területe 30. Mekkora a c állandó értéke?

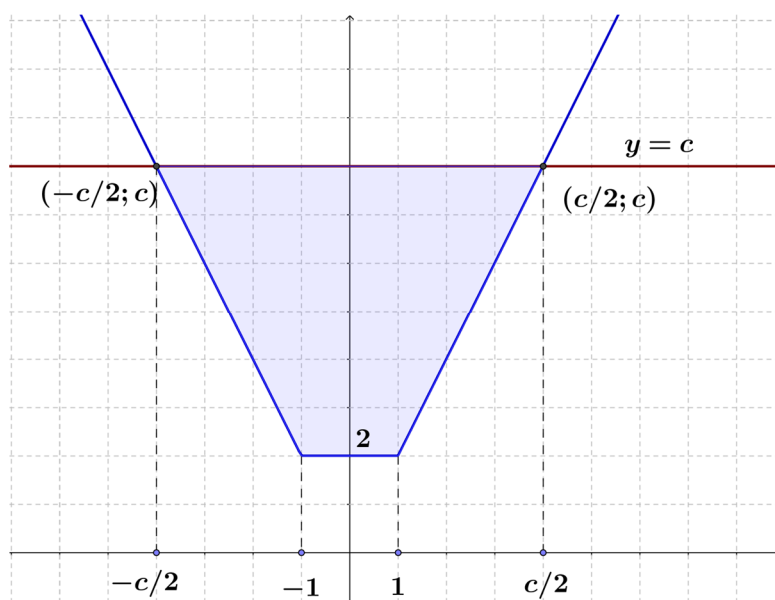
KöMaL 2001. május; C. 631.

Megoldás:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{ha } x < 1 \end{cases} \quad |x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \geq -1 \\ -x - 1, & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

Ezért

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 1 \\ 2, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ -2x, & \text{ha } x \leq -1 \end{cases}$$



Az $y = c$ egyenes a függvény grafikonjával csak akkor fog közre területet, ha $c > 2$, ekkor szimmetrikus trapéz keletkezik. A trapéz csúcsai $(-c/2; c)$; $(c/2; c)$; $(1; 2)$ és $(-1; 2)$, tehát a trapéz két alapja 2 és c ; magassága pedig $c - 2$. A trapéz területe:

$$T = \frac{(c + 2)(c - 2)}{2} = 30$$

$$c^2 - 4 = 60 \Rightarrow c = 8.$$

2. Hány zérushelye van az a paramétertől függően az

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 4} - a, & \text{ha } x \leq 0, \\ x^2 - 4x + a, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

hozzárendeléssel megadott függvénynek?

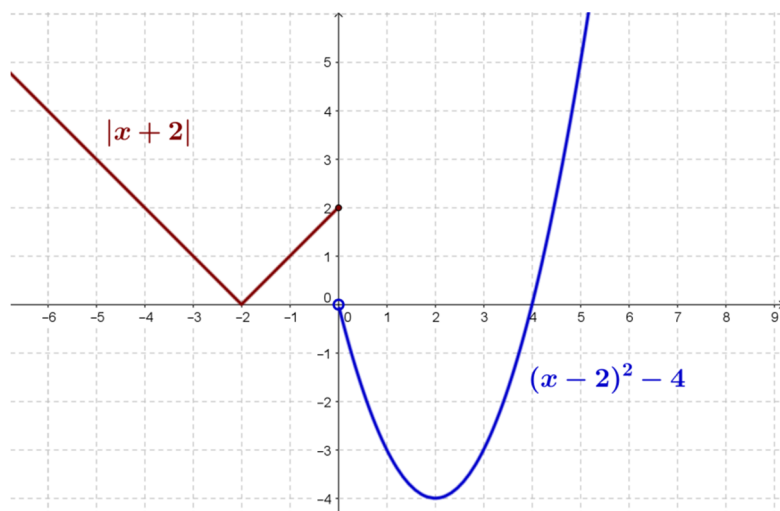
KöMaL 2013. március; C. 1106.

Megoldás:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} - a = \sqrt{(x+2)^2} - a = |x+2| - a;$$

$$x^2 - 4x + a = (x-2)^2 - 4 + a.$$

Az f függvényt külön vizsgáljuk az $x \leq 0$ és az $x > 0$ esetre. Az alábbi ábrán látható az $|x+2|$ és az $(x-2)^2 - 4$ függvény.



Az $x \rightarrow |x+2| - a$ függvény zérushelyeinek a száma, ha $x \leq 0$:

a értéke	zérushelyek száma
$a < 0$	0
$a = 0$	1
$0 < a \leq 2$	2
$2 < a$	1

Az $x \rightarrow (x-2)^2 - 4 + a$ függvény zérushelyeinek a száma, ha $x > 0$:

a értéke	zérushelyek száma
$a \leq 0$	1
$0 < a < 4$	2
$a = 4$	1
$4 < a$	0

Összefoglalva:

a értéke	zérushelyek száma
$a < 0$	1
$a = 0$	2
$0 < a \leq 2$	4
$2 < a < 4$	3
$a = 4$	2
$4 < a$	1

3. Adott az

$$f(x) = \frac{(x+a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+b)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x+c)^2}{(c-a)(c-b)}$$

hozzárendelésű függvény, ahol a, b és c különböző valós számok. Határozzuk meg a függvény értékkészletét.

KöMaL 2010. szeptember; C.1043.

I. Megoldás:

Közös nevezőre hozzuk a törtet, összevonunk, a nevezőben is elvégezzük a szorzást:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+b)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x+c)^2}{(c-a)(c-b)} = \\ &= \frac{(x^2 + 2ax + a^2)(b-c) - (x^2 + 2bx + b^2)(a-c) + (x^2 + 2cx + c^2)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \\ &= \frac{x^2(b-c-a+c+a-b) + 2x(ab-ac-ab+bc+ac-bc)}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \\ &\quad + \frac{a^2b - a^2c - b^2a + b^2c + c^2a - c^2b}{(a^2 - ab - ac + bc)(b-c)} = \\ &= \frac{a^2b - a^2c - b^2a + b^2c + c^2a - c^2b}{a^2b - a^2c - ab^2 + abc - abc + ac^2 + b^2c - bc^2} = 1 \end{aligned}$$

Az értékkészlet az $\{1\}$ egyelemű halmaz. Ezért érdemes volt kitartani, de nincs-e egyszerűbb:

II. Megoldás:

Az f függvény mindhárom tagja egy másodfokú kifejezés, ezért ezek összege legfeljebb másodfokú függvény.

$$\begin{aligned} f(-a) &= \frac{(-a+a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(-a+b)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(-a+c)^2}{(c-a)(c-b)} = \\ &= 0 + \frac{b-a}{b-c} + \frac{c-a}{c-b} = \frac{b-a-c+a}{b-c} = 1. \end{aligned}$$

Hasonlóan: $f(-b) = f(-c) = 1$. Egy másodfokú függvény egy értéket legfeljebb kétszer, egy elsőfokú függvény egyszer vehet fel. Ezért az f függvény konstans, értéke minden valós szám esetén 1-gyel egyenlő.

4. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényről tudjuk, hogy $f(1) = 0$, másrészt bármely két valós (x, y) számra $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Határozzuk meg az f függvényt!

KöMaL 1983. február; Gy. 2103.

Megoldás:

Válasszuk az $y = 1$ értéket és használjuk fel, hogy $f(1) = 0$. Ekkor

$$|f(x) - f(1)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = |x - 1|,$$

tehát $f(x) = x - 1$ vagy $f(x) = 1 - x$.

Ha minden x -re $f(x) = x - 1$, akkor ez megoldás, hiszen ekkor minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén teljesül a feltétel:

$$|f(x) - f(y)| = |x - 1 - y + 1| = |x - y|.$$

Hasonlóan lehetséges, hogy $f(x) = 1 - x$, mert minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén:

$$|f(x) - f(y)| = |1 - x - 1 + y| = |y - x| = |x - y|.$$

Ha $x = 1$, akkor a két képlet ugyanazt az értéket adja.

Még meg kell vizsgálnunk, hogy van-e olyan $x, y \in \mathbf{R}$; $x, y \neq 1$, amelyre $f(x) = x - 1$ és $f(y) = 1 - y$ teljesül. Ekkor igaz lenne, hogy:

$$|f(x) - f(y)| = |x - 1 - 1 + y| = |x + y - 2| = |x - y|.$$

Ez csak akkor lehet igaz, ha $x + y - 2 = x - y$ vagy $x + y - 2 = y - x$. Az első esetben $y = 1$, a második esetben $x = 1$, de ezt nem engedjük meg. Tehát nincs olyan függvény, amelyre a hozzárendelési szabály bizonyos változóértékekre $x - 1$, másokra pedig $1 - x$ lenne.

5. Legyen a valós számok halmazán értelmezett $lac(x)$ függvény hozzárendelési szabálya a következő:

$$lac(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [2n; 2n + 1], \\ -x + 4n + 3, & \text{ha } x \in]2n + 1; 2n + 2[, \end{cases} \quad \text{ahol } n \in \mathbf{Z}.$$

Oldjuk meg a $lac(2x^2 + x + 4) = lac(x^2 + 7x - 1)$ egyenletet a valós számok halmazán.

KöMaL 2010. május; C.1038.

Megoldás:

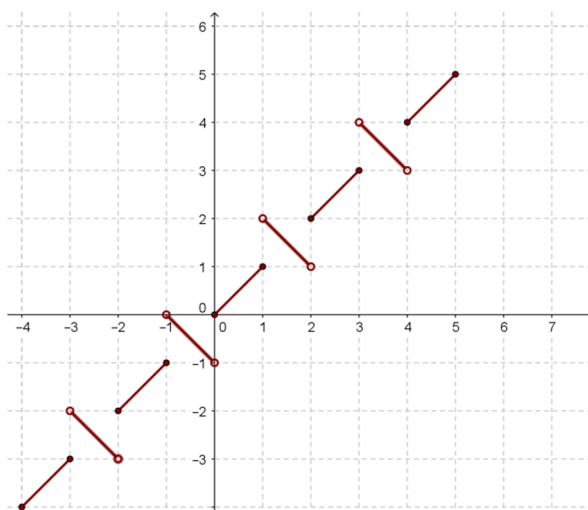
A hozzárendelési szabályt nézzük meg néhány konkrét n természetes számra:

$$lac(x) = x, \text{ ha } x \in [0; 1] \text{ vagy } x \in [2; 3] \text{ vagy } x \in [4; 5] \dots$$

$$lac(x) = -x + 3, \quad \text{ha } x \in]1; 2[$$

$$lac(x) = -x + 7, \quad \text{ha } x \in]3; 4[\dots$$

Megrajzoljuk a függvény grafikonját:



Látható (és belátható), hogy a függvény kölcsönösen egyértelmű függvény, minden értéket pontosan egyszer vesz fel, az $\mathbf{R}$ halmazt az $\mathbf{R}$ halmazra képezi le.

Így a $lac(2x^2 + x + 4) = lac(x^2 + 7x - 1)$ egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$$2x^2 + x + 4 = x^2 + 7x - 1$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 1; x_2 = 5.$$

Ellenőrzéssel megmutathatjuk, hogy ezek valóban megoldások.

6. Legyen $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyek $(x; y)$ koordinátáira

$$f(x) - f(y) \geq 0.$$

KöMaL 1988. február; Gy. 2423.

Megoldás:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= x^2 - 6x + 5 - y^2 + 6y - 5 = x^2 - y^2 - 6x + 6y = \\ &= (x - y)(x + y) - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6) \geq 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenség megoldását keressük.

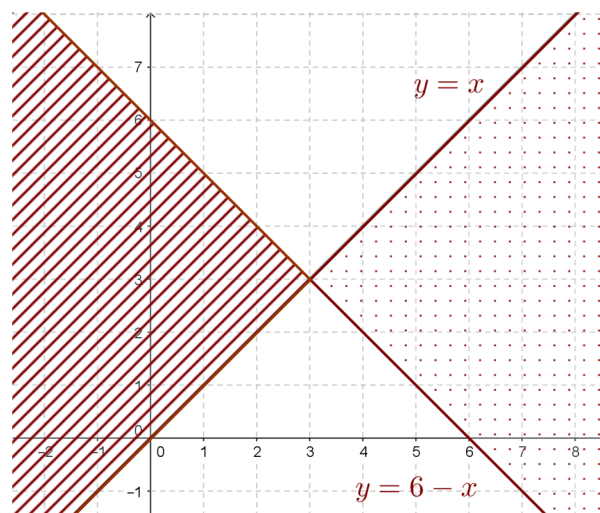
Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, akkor pozitív, ha a két tényező azonos előjelű. Ezek alapján a fenti egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$x - y \leq 0 \text{ és } x + y - 6 \leq 0$$

vagy

$$x - y \geq 0 \text{ és } x + y - 6 \geq 0$$

Az első esetben $y \geq x$ és $y \leq 6 - x$. Ábrázoljuk az $y = x$ és $y = 6 - x$ egyeneseket a koordináta-rendszerben. Azok az $(x; y)$ pontok, amelyekre ez teljesül, az első egyenes felett és a második egyenes alatt, illetve a két egyenesen vannak. Ez az ábra sátrózott területe. A második esetben $y \leq x$ és $y \geq 6 - x$, ezt a lehetőséget a pontozott területen lévő pontok adják. A ponthalmazhoz a határoló egyenesek is hozzátartoznak.



A feladat megoldása a két terület együtt.

7. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek ($x \in \mathbf{R}$) egy zérushelye van. Az $f(x)$ függvény minimumhelye $x = c$. Mekkora lehet az ac szorzat értéke?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2011/2012; haladók, I. kategória, I. forduló

Megoldás:

Az f függvénynek egy zérushelye van, ezért a diszkrimináns értéke 0: $D = b^2 - 4ac = 0$.

A függvénynek minimuma van, tehát $a > 0$.

A függvény a c helyen veszi fel a minimumát. $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, amiből látható, hogy a minimumhely $c = -\frac{b}{2a}$, átrendezve $b = -2ac$. Ezt a diszkriminánsra kapott értékbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $4a^2c^2 - 4ac = 4ac(ac - 1) = 0$. Ez csak akkor teljesülhet, ha $ac = 0$ vagy $ac = 1$. Mindkét eset valóban megvalósulhat:

Ha $ac = 0$, akkor $a > 0$ valós szám; $c = 0$; $b = 0 \Rightarrow f(x) = ax^2$.

Ha $ac = 1$, akkor $a > 0$ valós szám; $c = \frac{1}{a}$ és $b = -2 \Rightarrow f(x) = ax^2 - 2x + \frac{1}{a}$.

8. Mi a legkisebb értéke a következő kifejezésnek:

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) ?$$

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 1971; haladók, I. forduló

I. Megoldás:

Az első és utolsó, illetve a két középső tényezőt szorozzuk össze:

$$f(x) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6).$$

Az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ azonosságot alkalmazva:

$$f(x) = (x^2 + 5x)^2 - 36.$$

Egy szám négyzete sohasem lehet negatív, ezért ennek a függvénynek a legkisebb értéke -36 . Ezt az értéket akkor veszi fel, amikor $x^2 + 5x = 0$, tehát $x = 0$ vagy $x = -5$.

II. Megoldás:

Nézzük meg, hogy ha nem jut eszünkbe az előbbi ötlet, hogyan juthatunk el a megoldáshoz. Végezzünk el minden szorzást:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) = (x^2 + x - 2)(x+3)(x+6) = \\ &= (x^3 + x^2 - 2x + 3x^2 + 3x - 6)(x+6) = (x^3 + 4x^2 + x - 6)(x+6) = \\ &= x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 6x^3 + 24x^2 + 6x - 36 = \\ &= x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 36 = x^2(x+5)^2 - 36. \end{aligned}$$

Így is eljuthattunk a függvénynek ahhoz az alakjához, amelyből le tudjuk olvasni, hogy a minimum értéke -36 , és ezt az $x = 0$ és $x = -5$ értékeknél veszi fel a függvény.

9. Határozzuk meg azokat a lineáris $f(x), g(x), h(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) függvényeket, amelyekre

$$F(x) = |f(x)| - |g(x)| + h(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < -1, \\ 3x + 2, & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ -2x + 2, & \text{ha } 0 \leq x. \end{cases}$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 2. forduló

III. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Az F függvény megadásából következik, hogy az abszolútértékes kifejezések előjelváltása a -1 és a 0 helyeken van. Ezért az

$$F(x) = |a(x+1)| - |bx| + cx + d \quad (1)$$

illetve

$$F(x) = |ax| - |b(x+1)| + cx + d \quad (2)$$

alakban kereshetjük a függvényt, ahol a, b, c, d valós számok.

Először az (1) esetet vizsgáljuk:

$$|a(x+1)| = \begin{cases} -|a|(x+1), & \text{ha } x < -1, \\ |a|(x+1), & \text{ha } x \geq -1. \end{cases}$$

$$|bx| = \begin{cases} -|b|x, & \text{ha } x < 0, \\ |b|x, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Alkalmazva az F függvényre:

$$F(x) = |a(x+1)| - |bx| + cx + d = \begin{cases} -|a|x - |a| + |b|x + cx + d & \text{ha } x < -1, \\ |a|x + |a| + |b|x + cx + d & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ |a|x + |a| - |b|x + cx + d & \text{ha } 0 \leq x. \end{cases}$$

A feladatban megadott hozzárendelési szabály csak akkor egyezhet meg minden valós számra ezzel az összefüggéssel, ha a megfelelő együtthatók azonosak:

$$\begin{aligned} -|a| + |b| + c &= 0 & -|a| + d &= -1 \\ |a| + |b| + c &= 3 & |a| + d &= 2 \\ |a| - |b| + c &= -2 & |a| + d &= 2 \end{aligned}$$

Először határozzuk meg $|a|$ -t és d -t: $|a| = \frac{3}{2}$ és $d = \frac{1}{2}$.

Ekkor

$$|b| + c = \frac{3}{2}$$

$$-|b| + c = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2},$$

innen $|b| = \frac{5}{2}; c = -1$.

Tehát a keresett függvények ebben az esetben (f -ben és g -ben egymástól függetlenül választható a $+$ vagy $-$ előjel):

$$f(x) = \pm \frac{3}{2}(x+1); \quad g(x) = \pm \frac{5}{2}x; \quad h(x) = -x + \frac{1}{2}.$$

A (2) esetben hasonlóan gondolkodva:

$$F(x) = |ax| - |b(x+1)| + cx + d = \begin{cases} -|a|x + |b|x + |b| + cx + d & \text{ha } x < -1, \\ -|a|x - |b|x - |b| + cx + d & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ |a|x - |b|x - |b| + cx + d & \text{ha } 0 \leq x. \end{cases}$$

A hozzárendelési szabállyal összehasonlítva:

$$\begin{aligned} -|a| + |b| + c &= 0 & |b| + d &= -1 \\ -|a| - |b| + c &= 3 & -|b| + d &= 2 \\ |a| - |b| + c &= -2 & -|b| + d &= 2 \end{aligned}$$

A második oszlop egyenleteiből $d = \frac{1}{2}$, $|b| = -\frac{3}{2}$ adódik, de egy szám abszolútértéke nem lehet negatív, így ebből az esetből nem kapunk újabb megoldást.

10. Jelölje $\mathbf{P}$ a prímszámok halmazát! Legyen $f: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \left\{ \frac{x^2-1}{24} \right\}$, ahol $\{z\}$ a z szám törtrészét jelöli, (azaz $\{z\} = z - [z]$ és $[z]$ a z egészrésze, vagyis az a legnagyobb egész szám, amely z -nél nem nagyobb)! Mi az f függvény értékkészlete?

*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2010/2011; kezdők, I-II. kategória, 2. forduló
III. kategória, 1. forduló*

Megoldás:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{8}; & f(3) &= \frac{1}{3} \\ f(x) &= \frac{(x-1)(x+1)}{24} \end{aligned}$$

Legyen x 3-nál nagyobb prímszám. Ekkor x nem osztható 2-vel, tehát $(x-1)$ és $(x+1)$ két szomszédos páros szám, így az egyik 4-gyel is osztható, szorzatuk pedig 8-cal. A 3-nál nagyobb x 3-mal sem osztható, tehát $(x-1)$ vagy $(x+1)$ osztható 3-mal. Ebből következik, hogy ilyen esetben $\frac{x^2-1}{24}$ egész, így a törtrésze 0, $f(x) = 0$.

Tehát a függvény értékkészlete a $\left\{0; \frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right\}$ halmaz.

11. A valós számok halmazán értelmezett másodfokú $f(x)$ függvény minden x számra eleget tesz a

$$3 \cdot f(x) + f(2-x) = x^2$$

egyenlőségnek.

Hány olyan, 2005-nél nem nagyobb természetes szám van, amelyre igaz, hogy

$$f(x) > \frac{13}{4} \quad ?$$

OKTV 2005/2006; I. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$, ahol $a \neq 0$; b, c valós számok. Ekkor

$$\begin{aligned} 3 \cdot (ax^2 + bx + c) + a(2-x)^2 + b(2-x) + c &= x^2 \\ 3 \cdot (ax^2 + bx + c) + a(x^2 - 4x + 4) + b(2-x) + c &= x^2 \end{aligned}$$

$$4a \cdot x^2 + (2b - 4a) \cdot x + 4a + 2b + 4c = x^2.$$

Ez csak akkor teljesülhet minden x -re, ha a megfelelő együtthatók a két oldalon egyelők:

$$4a = 1$$

$$2b - 4a = 0;$$

$$4a + 2b + 4c = 0 ;$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása:

$$a = \frac{1}{4}; \quad b = \frac{1}{2}; \quad c = -\frac{1}{2}.$$

Az alábbi egyenlőtlenséget oldjuk meg:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} > \frac{13}{4} \quad / \cdot 4$$

$$x^2 + 2x - 2 > 13$$

$$x^2 + 2x - 15 > 0$$

Az $x^2 + 2x - 15 = 0$ egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$; $x_2 = -5$, ezért az egyenlőtlenség megoldása:

$$x < -5 \quad \text{vagy} \quad x > 3.$$

A feltételeknek megfelelő természetes számok: 4; 5; 6; ...; 2003; 2004; 2005.

Ilyen szám $2005 - 3 = 2002$ darab van.

Megjegyzés:

A megfelelő f függvényt az alábbi ötlettel is megkaphatjuk:

Az eredeti összefüggés mellé írjuk fel azt is, amit úgy kapunk, hogy x helyébe $(2 - x)$ -et helyettesítünk.

$$\begin{aligned} 3 \cdot f(x) + f(2 - x) &= x^2 \\ 3 \cdot f(2 - x) + f(x) &= (2 - x)^2 \end{aligned}$$

Az első sor háromszorosából vonjuk ki a második sort:

$$\begin{aligned} 8 \cdot f(x) &= 3 \cdot x^2 - (2 - x)^2 \\ f(x) &= \frac{3x^2 - 4 + 4x - x^2}{8} = \frac{x^2 + 2x - 2}{4}. \end{aligned}$$

12. A minden valós számra értelmezett $f(x)$ függvényre $f(x + 1) + 3f(-x) = |x|$ teljesül. Adjuk meg az f zérushelyeit!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2008/2009; haladók, III. kategória, 2. forduló

Megoldás:

Alkalmazzuk először az $u = x + 1$ helyettesítést, majd az $u = -x$ helyettesítést

$$\begin{cases} f(u) + 3f(1 - u) = |u - 1| \\ f(1 - u) + 3f(u) = |-u| = |u| \end{cases}$$

A második egyenlet 3-szorosából az első kivonva:

$$8f(u) = 3|u| - |u - 1| \Rightarrow f(u) = \frac{1}{8}(3|u| - |u - 1|).$$

Most az $u = x$ helyettesítést használva megkapjuk az f függvényt:

$$f(x) = \frac{1}{8}(3|x| - |x - 1|).$$

Az f függvény zérushelyeit a

$$3|x| - |x - 1| = 0 \Rightarrow 3|x| = |x - 1|$$

egyenlet megoldásai adják:

Ha $x < 0$, akkor $|x - 1| = 1 - x$; $|x| = -x$:

$$-3x = 1 - x \Rightarrow x = -0,5, \text{ ami megfelel az } x < 0 \text{ feltételnek.}$$

Ha $0 \leq x < 1$, akkor $|x - 1| = 1 - x$; $|x| = x$:

$$3x = 1 - x \Rightarrow x = 0,25, \text{ ami megfelel a } 0 \leq x < 1 \text{ feltételnek.}$$

Ha $x \geq 1$, akkor $|x - 1| = x - 1$; $|x| = x$:

$$3x = x - 1 \Rightarrow x = -0,5, \text{ ami nem felel meg az } x \geq 1 \text{ feltételnek.}$$

Az f függvény zérushelyei: $x_1 = -0,5$ és $x_2 = 0,25$.

13. Legyen f az $x = 1$ hely kivételével minden valós számra értelmezett olyan függvény, amely bármely $x \neq 0$ esetén eleget tesz az

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{cx}{x-1}$$

egyenletnek. Számítsuk ki a c valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5.$$

OKTV 1978; 2. forduló

Megoldás:

Ha $x \neq 0$ és $x \neq 1$, akkor x helyébe írhatunk $\frac{1}{x}$ -et:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{c \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{c}{1 - x}$$

Ennek az egyenletnek a háromszorosából kivonjuk az eredeti egyenlőséget:

$$8f(x) = \frac{3c}{1-x} - \frac{cx}{x-1} = \frac{3c+cx}{1-x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{c(x+3)}{1-x}.$$

Ekkor:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{c(x+3)}{1-x} = \frac{1}{8} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{c(1+0)}{0-1} = -\frac{c}{8}.$$

A feladat feltétele miatt

$$-\frac{c}{8} = 5 \Rightarrow c = -40.$$

Ha $x \neq 0; 1$, akkor $f(x) = \frac{5(x+3)}{x-1}$, aminek a határértéke a végtelenben valóban 5. A függvény az $x = 1$ helyen nincs értelmezve, az $x = 0$ és helyen pedig a feladat szempontjából tetszőleges értéket felvehet.

14. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi f függvény értelmezhető, és határozzuk meg a függvény értékészletét ezen az értelmezési tartományon.

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x - \sqrt{2 - x}}}.$$

OKTV 2008/2009; II. kategória, 2. forduló

Megoldás:

Csak nemnegatív szám négyzetgyökét értelmezzük a valós számok körében, ezért $\sqrt{2 - x}$ akkor van értelmezve, ha $x \leq 2$.

$\sqrt{x - \sqrt{2 - x}}$ miatt $x \geq \sqrt{2 - x}$. A négyzetgyök értéke mindig nagyobb vagy egyenlő mint nulla, ezért az $x \geq 0$ feltételnek is teljesülnie kell. Ekkor az egyenlőtlenséget négyzetre emelve az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$x^2 \geq 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) \geq 0.$$

A másodfokú kifejezés két zérushelye $x = 1$ és $x = -2$, a másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért az egyenlőtlenség megoldása: $x \leq -2$ vagy $x \geq 1$.

Az eddigi feltételek együttesen $1 \leq x \leq 2$ esetén teljesülnek. (1)

$\sqrt{1 - \sqrt{x - \sqrt{2 - x}}}$ értelmezéséhez még meg kell vizsgálni az $1 - \sqrt{x - \sqrt{2 - x}} \geq 0$ feltételt. Ekkor

$$1 \geq \sqrt{x - \sqrt{2 - x}}.$$

Mindkét oldal nemnegatív, ezért négyzetre emelhetünk:

$$1 \geq x - \sqrt{2 - x}$$

$$\sqrt{2 - x} \geq x - 1$$

Az $1 \leq x \leq 2$ feltétel mellett mindkét oldal nemnegatív, ezért újra négyzetre emelhetünk:

$$2 - x \geq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 0 \geq x^2 - x - 1.$$

Az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ezért az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Figyelembe véve az (1) feltételt a függvény értelmezési tartománya az $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ intervallum.

Felhasználva, hogy a $\sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton nő megmutatjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton csökken:

Ha $x_1 < x_2$, akkor $\sqrt{2-x_1} > \sqrt{2-x_2}$. Így $\sqrt{x_1 - \sqrt{2-x_1}} < \sqrt{x_2 - \sqrt{2-x_2}}$.

Ebből következik, hogy $\sqrt{1 - \sqrt{x_1 - \sqrt{2-x_1}}} > \sqrt{1 - \sqrt{x_2 - \sqrt{2-x_2}}}$.

Az f függvény folytonos, mert a négyzetgyökfüggvény az értelmezési tartomány pontjaiban folytonos, ezért az ilyen összetétellel kapott függvény is az.

A monotonitásból és a folytonosságból következik, hogy az értékkészlet az $\left[f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); f(1)\right]$ intervallum.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}}} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}} = \\ &= \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}}} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \sqrt{1-1} = 0, \\ f(1) &= \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{2-1}}} = 1, \end{aligned}$$

ezért az értékkészlet a $[0; 1]$ intervallum.

15. Mutassuk meg, hogy a valós számokon értelmezett

$$f(x) = \sin x + \sin(x \cdot \sqrt{2})$$

függvény sohasem veszi fel a $+2$ illetve -2 értékeket!

OKTV 1984; speciális matematika tantervű osztályok versenye; 3. forduló feladat részlete

Megoldás:

$$\sin x \leq 1; \quad \sin(x \cdot \sqrt{2}) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x + \sin(x \cdot \sqrt{2}) \leq 2.$$

A 2 értéket csak akkor érhetné el, ha a két tag ugyanarra az x értékre venné fel a $+1$ értéket, tehát lenne olyan k és l egész szám és x valós szám, amelyre

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} + 2l\pi.$$

Ekkor

$$\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$$

$$\frac{\sqrt{2}\pi(4k+1)}{2} = \frac{\pi(4l+1)}{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{4l+1}{4k+1}$$

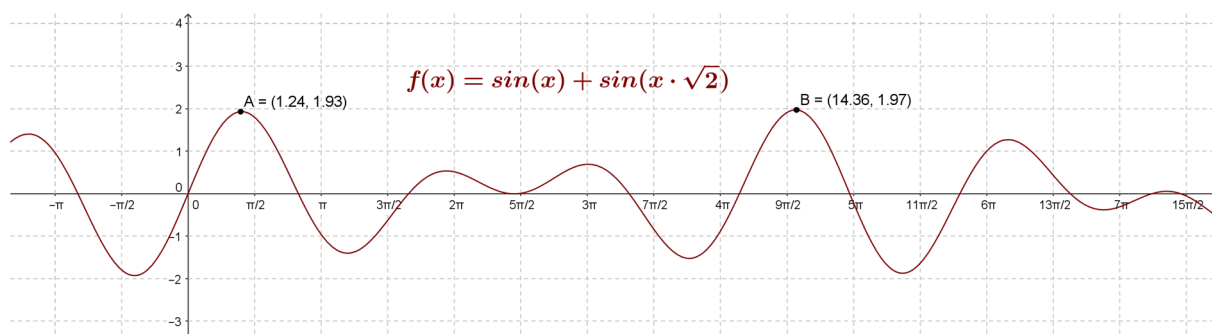
teljesülne valamilyen k, l egész számokra. Tudjuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális, tehát ilyen k, l nem létezik.

Ezzel beláttuk, hogy $\sin x + \sin(x \cdot \sqrt{2}) < 2$ minden valós x -re.

Hasonlóan belátható, hogy $\sin x + \sin(x \cdot \sqrt{2}) > -2$ minden valós x -re.

Megjegyzés:

Elkészítettük a függvény grafikonját GeoGebra programmal. Az ábra alapján az a sejtésünk, hogy a függvényértékek tetszőlegesen közel lehetnek a $+2$ -höz, illetve a -2 -höz, de azt sohasem érik el. Ez valóban igaz, de a bizonyítást csak a bátraknak ajánljuk.



16. Az f függvény értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, és a függvény értékei is pozitív egészek. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre teljesül, hogy minden pozitív egész n esetén

$$\sum_{i=1}^n f^3(i) = f^3(1) + f^3(2) + \dots + f^3(n) = (f(1) + f(2) + \dots + f(n))^2 = \left(\sum_{i=1}^n f(i) \right)^2$$

OKTV 2012/2013; II. kategória, 3. forduló

Megoldás:

Ismert, hogy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Ezért a pozitív egész számokra értelmezett $f(n) = n$ függvény megoldása a feladatnak.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy más függvény nem lehet megoldás.

Bizonyítunk $n = 1$ -re:

$$f^3(1) = (f(1))^2.$$

$(f(1))^2$ pozitív egész, ezért oszthatunk vele, tehát $f(1) = 1$.

Feltételezzük, hogy $k \leq n$ -re igaz az állítás:

$$f(k) = k.$$

Bizonyítunk $(n + 1)$ -re:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + f^3(n+1) = (1 + 2 + 3 + \dots + n + f(n+1))^2$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + f^3(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1)\right)^2$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + f^3(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot f(n+1) + f^2(n+1)$$

$$f^3(n+1) = n(n+1) \cdot f(n+1) + f^2(n+1)$$

$f(n+1) > 0$, ezért oszthatunk vele:

$$f^2(n+1) = n(n+1) + f(n+1)$$

$$f^2(n+1) - f(n+1) - n(n+1) = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$f(n+1) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4n(n+1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4n^2 + 4n + 1}}{2} = \frac{1 \pm (2n+1)}{2},$$

tehát $f(n+1) = n+1$ vagy $f(n+1) = -n$.

A függvény csak pozitív értékeket vehet fel, ezért csak az első eset lehetséges.

Így teljes indukcióval beláttuk, hogy az egyetlen függvény az $f(n) = n$ függvény.

17. Határozzuk meg azt az f függvényt, amely

- a) minden nemnegatív egészhez nemnegatív egész számot rendel hozzá, különböző egészekhez különböző egészeket;
- b) minden nemnegatív egész n -re kielégíti az

$$f^2(0) + f^2(1) + \dots + f^2(n) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

egyenlőtlenséget.

Nemzetközi Magyar Matematika Verseny 1995.

Megoldás:

Az első n pozitív egész szám négyzetének az összege $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ez alapján az a sejtésünk, hogy a feladat feltételének az $f(n) = n$ függvény felel meg.

Bizonyítunk $n = 0$ -ra:

A feladat feltétele szerint $f(0)$ nemnegatív egész és

$$f^2(0) \leq \frac{0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0,$$

Így $f(0)$ csak 0 lehet.

Feltételezzük, hogy $k \leq n$ -re igaz az állítás:

$$f(k) = k.$$

Bizonyítunk $(n+1)$ -re:

$$f^2(0) + f^2(1) + \dots + f^2(n) + f^2(n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + f^2(n+1) \leq \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Tehát $f(n+1)$ nemnegatív egész és:

$$\begin{aligned} f^2(n+1) &\leq \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6-2n^2-n)}{6} = (n+1)^2. \\ f(n+1) &\leq n+1. \end{aligned}$$

$f(n+1)$ már nem lehet $0; 1; 2; \dots; n$, hiszen ezeket a $k \leq n$ esetekre „elhasználtuk”, így

$$f(n+1) = n+1.$$

Teljes indukcióval beláttuk, hogy egyetlen függvény lehet, amely teljesíti a feladat feltételeit, az $f(n) = n$ függvény. Ez a függvény valóban megfelel a feltételeknek.

18. A természetes számok halmazán értelmezett f függvényre teljesül a következő egyenlőség:

$$f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3) + \dots + n^2 f(n) = n^3 f(n)$$

tetszőleges $n \geq 1$ esetén. Határozzuk meg $f(2008)$ értékét, ha $f(1) = 2008$!

Nemzetközi Magyar Matematika Verseny 2008.

Megoldás:

Alkalmazzuk az összefüggést n -re és $(n-1)$ -re ($n \geq 2$):

$$f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3) + \dots + (n-1)^2 f(n-1) + n^2 f(n) = n^3 f(n).$$

$$f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3) + \dots + (n-1)^2 f(n-1) = (n-1)^3 f(n-1)$$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat:

$$n^2 f(n) = n^3 f(n) - (n-1)^3 f(n-1).$$

Átrendezve:

$$(n-1)^3 f(n-1) = (n^3 - n^2) f(n)$$

$$(n-1)^3 f(n-1) = n^2 (n-1) f(n)$$

$n \geq 2$, ezért oszthatunk $(n-1)$ -gyel:

$$(n-1)^2 f(n-1) = n^2 f(n)$$

$$f(n) = \frac{(n-1)^2}{n^2} f(n-1).$$

Alkalmazzuk ezt a rekurzív összefüggést:

$$f(n) = \frac{(n-1)^2}{n^2} f(n-1) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-3)^2}{(n-2)^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2^2} \cdot f(1) = \frac{1}{n^2} \cdot f(1) = \frac{2008}{n^2}.$$

Ez alapján

$$f(2008) = \frac{2008}{2008^2} = \frac{1}{2008}.$$

19. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden $(x; y)$ valós számpárra kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(x) \leq x$$

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden valós x -re $f(x) = x$.

A Kürschák József Matematikai Tanulmányverseny 1979. évi 2. feladata

Megoldás:

Válasszuk először az $x = 0$ értéket, ekkor az első egyenlőtlenség alapján $f(0) \leq 0$.

Ha a második egyenlőtlenségben $y = 0$ -t veszünk, akkor $f(x) \leq f(x) + f(0)$, tehát $0 \leq f(0)$. Ez a két feltétel csak $f(0) = 0$ esetén teljesül.

Az első egyenlőtlenség alapján:

$$f(x) \leq x \text{ és } f(-x) \leq -x, \text{ tehát } f(x) + f(-x) \leq 0.$$

Alkalmazzuk a második egyenlőtlenséget $y = -x$ -re:

$$0 = f(0) = f(x - x) \leq f(x) + f(-x)$$

E két összefüggésből $f(x) + f(-x) = 0$, azaz $f(-x) = -f(x)$ adódik.

Az első egyenlőtlenséget $-x$ -re felírva:

$$-f(x) = f(-x) \leq -x,$$

Az egyenlőtlenséget (-1) -gyel szorozva: $f(x) \geq x$.

Az $f(x) \leq x$ feltételnek is teljesülnie kell, ez csak akkor lehetséges, ha $f(x) = x$. Erre a függvényre a feladat feltételei teljesülnek.

20. A $g(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{x-9}{|x-9|}$ függvény értelmezési tartománya: $\mathbf{R} \setminus \{0; 9\}$, értékkészlete:

$$(A) \{0\} \quad (B) \{2\} \quad (C) \{0; 2\} \quad (D) \{-2; 2\} \quad (E) \{-2; 0; 2\}$$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2000; 9. osztály, megyei forduló

Megoldás:

Ha $x < 0$, akkor $|x| = -x$, $|x - 9| = 9 - x$, tehát

$$g(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{x-9}{|x-9|} = \frac{x}{-x} + \frac{x-9}{9-x} = -2.$$

Ha $0 < x < 9$, akkor $|x| = x$, $|x - 9| = 9 - x$, tehát

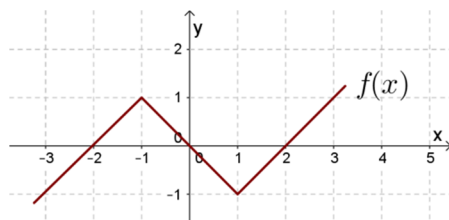
$$g(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{x-9}{|x-9|} = \frac{x}{x} + \frac{x-9}{9-x} = 0.$$

Ha $9 < x$, akkor $|x| = x$, $|x - 9| = x - 9$, tehát

$$g(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{x-9}{|x-9|} = \frac{x}{x} + \frac{x-9}{x-9} = 2.$$

A g függvény értékkészlete ez alapján $\{-2; 0; 2\}$. Így a helyes válasz **E**.

21. Az ábrán az $f(x)$ függvény grafikonja látható. Hány megoldása van az $||f(x)| - 1| = \frac{1}{2}$ egyenletnek a $[-2; 2]$ intervallumon?

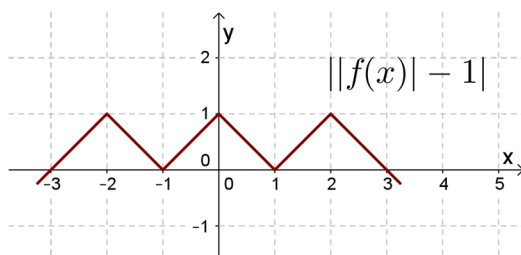
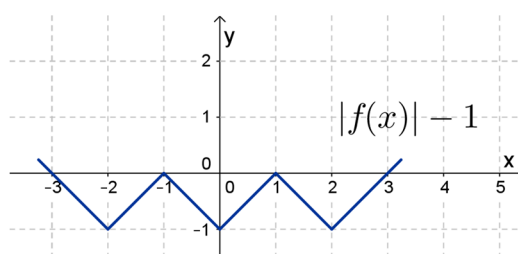
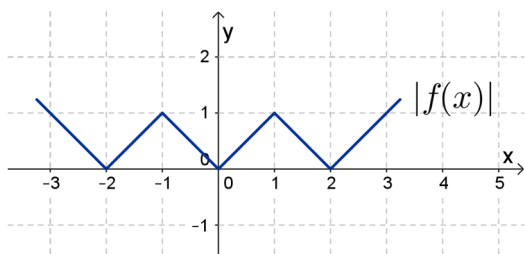


- (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

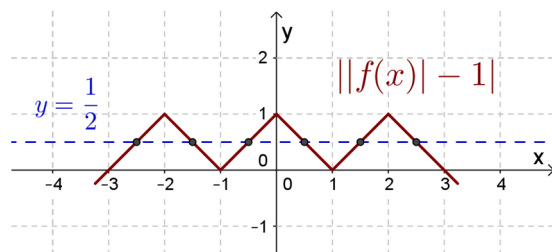
Gordiusz Matematika Tesztverseny 2011; 10. osztály, megyei forduló

Megoldás:

Függvénytranszformációk segítségével lépésenként ábrázolunk az alábbi ábrákon látható módon:



Az alábbi ábráról pedig leolvasható, hogy az $||f(x)| - 1| = \frac{1}{2}$ egyenletnek az ábrázolt intervallumon 6 megoldása van, de ezek közül csak 4 esik a $[-2; 2]$ intervallumba, ezért a **B** a helyes válasz.



22. Melyik az a legnagyobb valós szám, amelyre az $f(g(x)) \leq g(f(x))$ egyenlőtlenség igaz, ha $f(x) = 3^x - 1$ és $g(x) = 3x + 2$?

- (A) -2 (B) -0,5 (C) 0 (D) 0,5 (E) Nincs ilyen szám.

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007; 11. osztály, megyei forduló

Megoldás:

$f(g(x)) = 3^{3x+2} - 1$ és $g(f(x)) = 3 \cdot (3^x - 1) + 2$, ezért az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$3^{3x+2} - 1 \leq 3 \cdot (3^x - 1) + 2$$

$$3^{3x+2} - 1 \leq 3^{x+1} - 1$$

$$3^{3x+2} \leq 3^{x+1}$$

A 3-as alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért:

$$3x + 2 \leq x + 1$$

$$x \leq -0,5$$

$x = -0,5$ a legnagyobb valós szám, amelyre az egyenlőtlenség teljesül. tehát a **B** a jó válasz.

23. A valós számokon értelmezett $f(x)$ függvényre bármely $x \neq 0$ esetén igaz, hogy $2 \cdot f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + 4$. Jelölje S azon valós x -ek összegét, amelyekre $f(x) = 2007$. Melyik az S -hez legközelebbi egész szám?

(A) -1 (B) 0 (C) 602 (D) 5014 (E) 6021

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007; 12. osztály, döntő

Megoldás:

Írjuk fel az összefüggést x -re és $\frac{1}{x}$ -re is:

$$2 \cdot f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + 4$$

$$2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} + 4$$

Az első egyenlet kétszereséből kivonjuk a második egyenletet:

$$3 \cdot f(x) = 10x + 8 - 5 \cdot \frac{1}{x} - 4 = 10x - \frac{5}{x} + 4$$

Ebből megkapjuk az f függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = \frac{10x^2 + 4x - 5}{3x}.$$

Azokat az x -eket keressük, amelyre:

$$f(x) = \frac{10x^2 + 4x - 5}{3x} = 2007,$$

azaz

$$10x^2 + 4x - 5 = 6021x$$

$$10x^2 - 6017x - 5 = 0$$

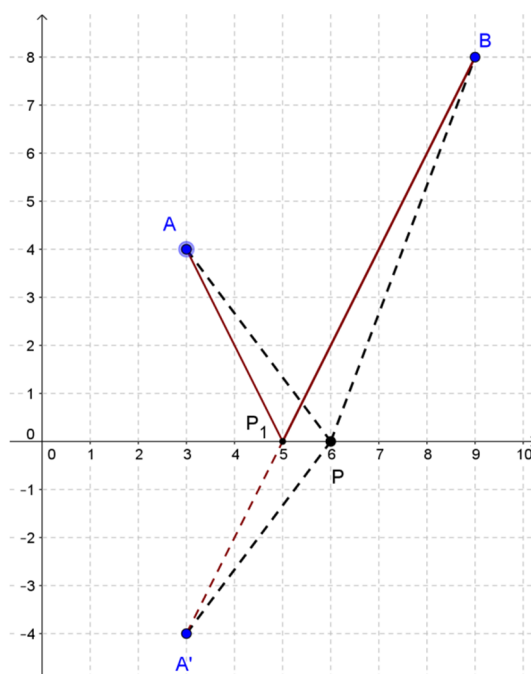
Ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa pozitív ($6017^2 + 200$), ezért két valós megoldása van az egyenletnek. Ekkor a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján a két gyök összege $S = 601,7$. Az S -hez legközelebbi egész szám a 602, tehát a jó válasz **C**.

24. Legyen $f(x) = \sqrt{16 + (3 - x)^2} + \sqrt{64 + (9 - x)^2}$. Határozzuk meg a függvény minimumhelyét és a minimum értékét!

Megoldás:

A négyzetgyökös kifejezésekhez hasonló kifejezéssel számoljuk ki két pont távolságát koordináta-geometriai feladatokban. Megpróbálunk ennek ismeretében szemléletes jelentést adni az $f(x)$ függvénynek.

Vegyük az $A(3; 4)$ és $B(9; 8)$ pontokat. Az x -tengely mely $P(x; 0)$ pontjára lesz a $PA + PB$ távolság a legkisebb? Ekkor a $PA + PB = \sqrt{16 + (3 - x)^2} + \sqrt{64 + (9 - x)^2}$ kifejezés minimumát keressük.



Ha az A pontot tükrözzük az x -tengelyre, akkor az A' pontot kapjuk és $A'P = AP$.

A feladatunk most az, hogy A' és B között a legrövidebb utat megadjuk. Ha $A'B$ és az x -tengely metszéspontja P_1 , akkor egy tetszőleges $P(x; 0)$ pont esetében a háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$$AP + PB = A'P + PB \geq A'B = AP_1 + P_1B.$$

Így a P_1 pont esetében lesz a legkisebb a keresett távolság.

Az A' és B pontokon átmenő egyenes egyenlete $y = 2x - 10$, ezért az x -tengelyt a $P_1(5; 0)$ pontban metszi.

Ezzel beláttuk, hogy a kifejezés a minimumát az $x = 5$ értékre veszi fel, ekkor a minimum értéke

$$\sqrt{16 + 4} + \sqrt{64 + 16} = 6\sqrt{5}.$$

25. Határozzuk meg azt az $f: R \rightarrow R$; $f(x) = x^2 + bx + c$ (b és c valós állandók) alakú másodfokú függvényt, amelyhez van olyan p számérték, amelyre

$$f(p) = 2p^2, \quad f(2p) = 3p^2 + 1, \quad f(3p) = 4p^2 + 4$$

egyidejűleg teljesül! Mennyi a p értéke?

Írásbeli felvételi feladat a műszaki főiskolák nulladik évfolyamai számára; 1998

Megoldás:

Behelyettesítjük a megfelelő értékeket:

$$p^2 + bp + c = 2p^2 \quad (1)$$

$$4p^2 + 2bp + c = 3p^2 + 1 \quad (2)$$

$$9p^2 + 3bp + c = 4p^2 + 4 \quad (3)$$

Vonjuk ki a második egyenletből az első, a harmadikból a másodikat:

$$3p^2 + bp = p^2 + 1 \quad (4)$$

$$5p^2 + bp = p^2 + 3 \quad (5)$$

(5) – (4) alapján:

$$2p^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad p = \pm 1.$$

Még meg kell néznünk, hogy ezekhez a p értékekhez van-e megfelelő b, c .

Ha $p = 1$, akkor az (1) és (2) egyenlet:

$$b + c = 1$$

$$2b + c = 0$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása (amelyre (3) is teljesül):

$$b = -1; c = 2, \quad \text{akkor} \quad f(x) = x^2 - x + 2.$$

Ha $p = -1$, akkor az (1) és (2) egyenlet:

$$-b + c = 1$$

$$-2b + c = 0$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása (amelyre (3) is teljesül):

$$b = 1; c = 2, \quad \text{akkor} \quad f(x) = x^2 + x + 2.$$

Tehát p lehet $+1$ és -1 is.

26. a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb H halmazát, amelyen a $\log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x)^2$ kifejezés értelmezhető!
- b) Mi a fenti H halmazon az $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x)^2$ képlettel definiált f függvény értékkészlete?
- c) Hol monoton növekedő ez az f függvény?

Írásbeli érettségi-felvételi feladat; 2001

Megoldás:

- a) A logaritmusfüggvény csak pozitív számokra van értelmezve, $(\sin x + \cos x)^2 \geq 0$. Így azokat az értékeket kell kizárnunk, amelyekre $\sin x + \cos x = 0$.

Ekkor $\sin x = -\cos x$, azaz $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Tehát $H = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\right\}$.

- b) $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1 + \sin 2x$. Egy szög szinusza -1 és $+1$ közötti értékeket vehet fel, ezért

$$0 \leq 1 + \sin 2x \leq 2,$$

de az értelmezési tartományból a 0 értéket kizártuk, így

$$0 < 1 + \sin 2x \leq 2.$$

A két határ között a kifejezés minden valós értéket felvesz, ha $x \in H$.

Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért

$$-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2 \leq \log_{\frac{1}{2}} (\sin x + \cos x)^2.$$

A $(\sin x + \cos x)^2$ tetszőlegesen megközelítheti a 0 -t, így $\log_{\frac{1}{2}} (\sin x + \cos x)^2$ tetszőlegesen nagy valós értéket felvehet.

A függvény értékkészlete $[-1; \infty[$.

- c) Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért az $\log_{\frac{1}{2}} (\sin x + \cos x)^2$ függvény ott lesz monoton növekedő, ahol az $1 + \sin 2x$ függvény, azaz a $\sin 2x$ függvény monoton csökkenő. Ez pedig

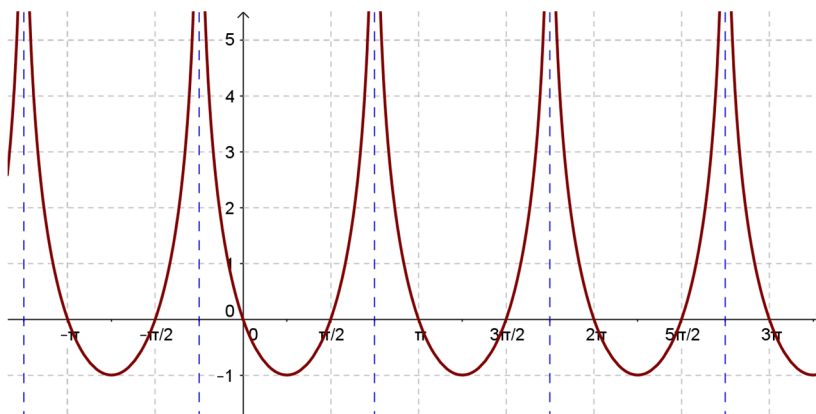
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

esetén teljesül.

Az értelmezési tartományt figyelembe véve a függvény monoton nő, ha:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

A függvény grafikonját GeoGebra programmal elkészítve az alábbi ábrát kapjuk.



27. Határozza meg a következő függvény értelmezési tartományát:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 13x + 3}{-x^2 + 3x + 10}}.$$

Nemzetközi Előkészítő Intézet vizsgadolgozatának feladata; 1981

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, ezért

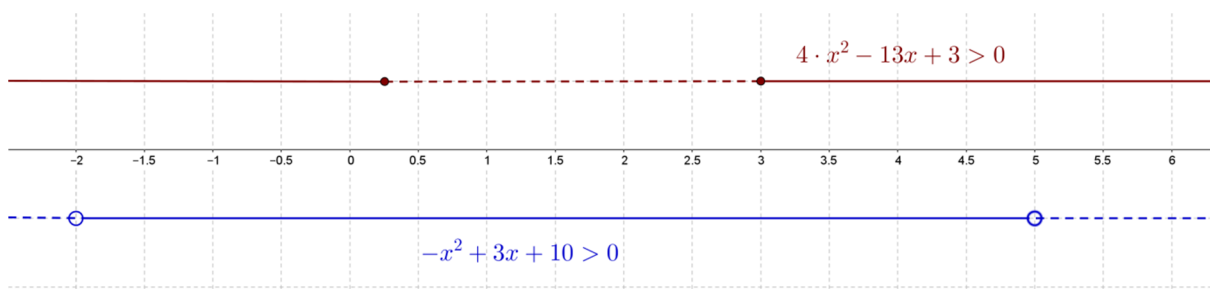
$$-x^2 + 3x + 10 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -2; 5.$$

A négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért:

$$\frac{4x^2 - 13x + 3}{-x^2 + 3x + 10} \geq 0.$$

$$4x^2 - 13x + 3 = 0, \text{ ha } x = 3 \text{ vagy } x = 0,25.$$

A másodfokú függvény zérushelyei alapján eldönthetjük, hogy mely tartományokban vesz fel pozitív, illetve negatív értéket. Az alábbi számegyenesen látható a számláló és a nevező előjele az egyes tartományokban.



Egy tört akkor nulla, ha a számláló nulla, és akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

Így az f függvény akkor értelmezhető, ha

$$-2 < x \leq 0,25 \quad \text{vagy} \quad 3 \leq x < 5 \quad x \in \mathbb{R}.$$

28. Állapítsa meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetőek! Adja meg a kifejezések legnagyobb és legkisebb értékét!

a) $\log_2 0,5^{\sin x};$

b) $\sqrt{1 - \sin^2 x};$

c) $\log_2 0,5^{\sin x} \sqrt{1 - \sin^2 x}.$

Közgazdaságtudományi egyetemekre és főiskolákra felvételizők írásbeli érettségi-felvételi feladata; 1992

Megoldás:

a) $0,5^{\sin x} > 0$ mindig teljesül, ezért $\log_2 0,5^{\sin x}$ mindig értelmezhető.

$\log_2 0,5^{\sin x} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = \log_2 2^{-\sin x} = -\sin x$, ezért a kifejezés legnagyobb értéke $+1$, a legkisebb értéke -1 . A maximumot $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a minimumot $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ esetén veszi fel, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

b) $1 - \sin^2 x = \cos^2 x \geq 0$, ezért a négyzetgyökös kifejezés mindig értelmezhető.

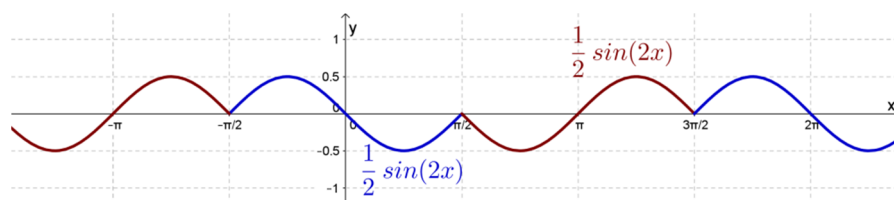
$\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$, így a kifejezés 0 és 1 közötti értékeket vesz fel. A minimumot, 0 -t $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetén, a maximumot, 1 -et $x = k\pi$ esetén ($k \in \mathbf{Z}$).

c) az a) és b) pont szerint $\log_2 0,5^{\sin x} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sin x \cdot |\cos x|$ mindig értelmezhető.

$$-\sin x \cdot |\cos x| = \begin{cases} -\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{2} \sin 2x, & \text{ha } \cos x \geq 0, \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, & \text{ha } \cos x < 0. \end{cases}$$

$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}$, ezért a kifejezés értékkészlete a $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ intervallum.

A függvény grafikonja segít a minimum- és maximumhelyek megadásában:



minimumhelyek:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z},$$

maximumhelyek:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z}.$$

29. Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetőek:

a) $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

b) $x \mapsto \sqrt{\operatorname{tg} x}$

c) $x \mapsto \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

Írásbeli érettségi-felvételi feladatok; 1998

Megoldás:

a) A tört nevezője nem lehet 0 , ezért $\operatorname{tg} x \neq 0$, a függvény értelmezési tartománya:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbf{Z}\right\}$$

b) Négyzetgyök alatt nem lehet negatív szám, ezért $\operatorname{tg} x \geq 0$, a függvény értelmezési tartománya:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbf{Z}\right\}$$

c) A négyzetgyök miatt $x \geq 0$, a tangens értelmezése miatt

$$\sqrt{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2; k \in \mathbf{N}.$$

Ezek alapján a függvény értelmezési tartománya

$$\mathbf{R}_0^+ \setminus \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2; k \in \mathbf{N} \right\}.$$

30. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$.

- Számítsa ki a $\int_0^2 f(x) dx$ határozott integrál értékét, ha $p = 3$!
- Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek!
- Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2012. május 8.

Megoldás:

a) $p = 3$ esetén a függvény $f(x) = -3x^3 + 9x - 6$. Ekkor

$$\int_0^2 (-3x^3 + 9x - 6) dx = [-0,75x^4 + 4,5x^2 - 6x]_0^2 = -12 + 18 - 12 = -6.$$

b) Ha $x = 1$ -et helyettesítünk a függvénybe, nulla értéket kell kapnunk:

$$-3 + p - 3 + p^2 - 6 = 0 \Rightarrow p^2 + p - 12 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk:

$$p = 3 \text{ vagy } p = -4.$$

c) $f'(x) = -9x^2 + 2(p-3)x + p^2$, $f'(1) = -9 + 2(p-3) + p^2 = p^2 + 2p - 15$.

A $p^2 + 2p - 15 > 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk. A $p^2 + 2p - 15 = 0$ egyenlet megoldásai $p = 3$; $p = -5$. Az egyenlőtlenség megoldása így $p < -5$ vagy $p > 3$.

31. Legyen $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $x \in \mathbf{R}$.

- Igazolja, hogy $\int_0^a f(x) dx = -a^3 + a$.
- Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x) dx \geq 0$?
- Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma?

Emelt szintű érettségi vizsga; 2010. május 4.

Megoldás:

$$a) \int_0^a -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a dx = \left[-\frac{x^4}{a} + \frac{x^3}{a} + \frac{x^2}{a} - ax \right]_0^a = -\frac{a^4}{a} + \frac{a^3}{a} + \frac{a^2}{a} - a^2 = -a^3 + a.$$

- b) A $-a^3 + a \geq 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk. A feladat feltétele szerint $a > 0$, így az egyenlőtlenséget oszthatjuk a -val: $-a^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow (a+1)(a-1) \leq 0$.

$a+1$ pozitív, ezért az egyenlőtlenség $a-1 \leq 0$, azaz $a \leq 1$ esetén teljesül.

Tehát az integrál akkor lesz nemnegatív, ha $0 < a \leq 1$.

- c) A g függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.

$$g'(x) = -3x^2 + 1 = 0.$$

Pozitív valós számok között ez csak $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ -ra teljesül. Ebben a pontban

$$g''(x) = -6x = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0,$$

ezért ebben a pontban a függvénynek lokális maximumhelye van.

32. a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a $[-3; 4]$ intervallumon az $x \mapsto x^2 - 2|x| - 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!
- b) Legyen az f, g és h függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3; \quad g(x) = x - 3; \quad h(x) = |x|.$$

Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = x^2 - 2x - 6.$$

Készítse el – a fenti példának megfelelően – az f, g és h függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket!
Sorolja fel valamennyit!

(A $(g \circ f)(x)$ függvényt nem szükséges újra felírni.)

- c) Keressen példát olyan p és t , a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre

$$(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x) !$$

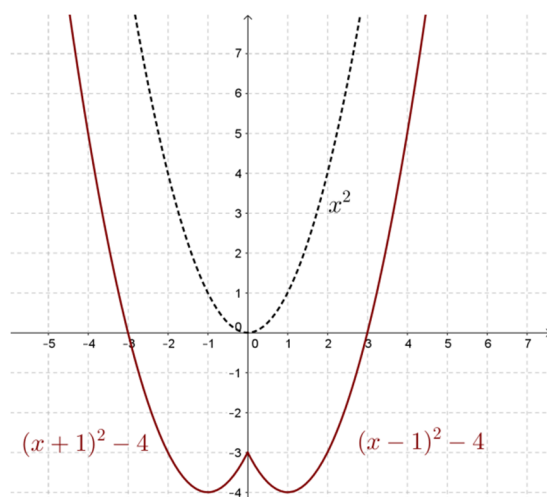
Adja meg a p és t függvény hozzárendelési szabályát!

Emelt szintű érettségi vizsga; 2006. május 9.

Megoldás:

$$a) \quad x^2 - 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4, & \text{ha } x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A függvény grafikonját az $x \rightarrow x^2$ függvény transzformációjával kapjuk meg.



b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x-3)^2 - 2(x-3) - 3 = x^2 - 8x + 12;$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = |x|^2 - 2|x| - 3 = x^2 - 2|x| - 3;$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = x^2 - 2x - 6;$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = |x| - 3;$$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = |x^2 - 2x - 3|;$$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = |x - 3|.$$

c) Például: $p(x) = x^2; t(x) = x^3$. Ekkor

$$(p \circ t)(x) = p(t(x)) = (x^3)^2 = x^6.$$

$$(t \circ p)(x) = t(p(x)) = (x^2)^3 = x^6.$$

33. a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} \text{ kifejezés értelmezhető!}$$

b) Ábrázolja a $[-5; 8]$ intervallumon értelmezett $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt!

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti f függvényre vonatkozóan?

A: Az f értékkészlete: $[0; 5]$.

B: Az f függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.

C: Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4; 8]$ intervallumon.

d) Határozza meg az $\int_{-3}^3 (x^2 - 6x + 9) dx$ értékét!

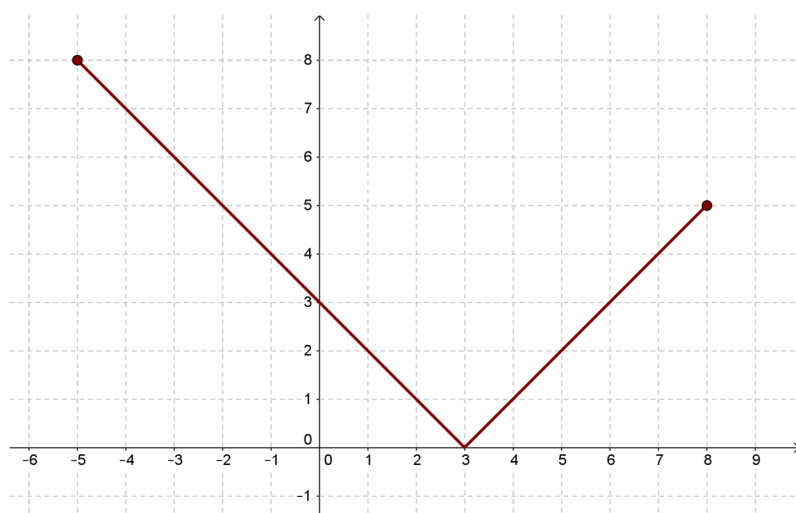
Emelt szintű érettségi vizsga; 2007. május 8.

Megoldás:

a) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0$, ezért a függvény a valós számok halmazán értelmezhető.

b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|.$

Az f függvény grafikonja:



- c) A grafikonról leolvasható, hogy az értékkészlet a $[0; 8]$ intervallum, a függvény a minimumát az $x = 3$ helyen veszi fel, és szigorúan monoton nő a $[3; 8]$ intervallumon. Így az **A** és **B** állítás hamis, a **C** igaz.

d) $\int_{-3}^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_{-3}^3 = (9 - 27 + 27) - (-9 - 27 - 27) = 72.$

34. Az $f(x) = 3x^2 + b$ függvény grafikonjának az $x = 2$ helyhez tartozó érintője áthalad az origón.

- Hol metszi ez az érintő a parabola vezéregyenesét?
- Számítsuk ki a függvénygörbe, az érintő és az y tengely által közbezárt terület nagyságát.

KöMaL 2010. december; emelt szintű gyakorló feladatsor 7. feladat

Megoldás:

Az érintő meredekségét a függvény deriváltja határozza meg: $f'(x) = 6x$. Az $x = 2$ pontban a derivált $f'(2) = 12$.

$f(2) = 12 + b$, ezért az érintési pont $E(2; f(2)) = (2; b + 12)$, az érintő egyenlete:

$$y - b - 12 = 12(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 12x + b - 12.$$

Ez az egyenes akkor megy át az origón, ha $b = 12$, $f(x) = 3x^2 + 12$, az érintő egyenlete $y = 12x$.

- Ha a parabola paramétere p , akkor $3 = \frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{1}{6}$, ekkor a parabola vezéregyenesének egyenlete $y = 12 - \frac{p}{2} = 12 - \frac{1}{12} = \frac{143}{12}$.

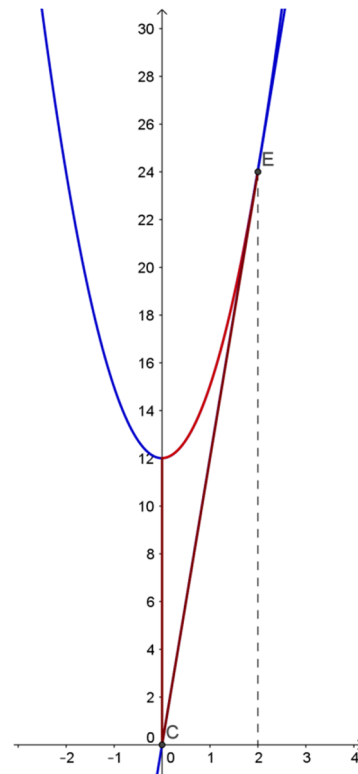
Meghatározzuk az érintő és a vezéregyenes metszéspontját:

$$12x = \frac{143}{12} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{143}{144}.$$

A metszéspont $\left(\frac{143}{144}; \frac{143}{12}\right)$.

- b) A függvénygörbe, az érintő és az y tengely által közbezárt területet a megfelelő határozott integrál kiszámításával adjuk meg:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^2 (3x^2 + 12) dx - \int_0^2 12x dx = \\ &= \int_0^2 (3x^2 - 12x + 12) dx = \\ &= \left[3 \cdot \frac{x^3}{3} - 12 \cdot \frac{x^2}{2} + 12 \cdot x \right]_0^2 = 8 - 24 + 24 - 0 = 8. \end{aligned}$$



35. Adott a valós számokon értelmezett

$$I(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$$

függvény, és tudjuk, hogy $f(t) = 3t^2 + 4t - 1$. Határozzuk meg az $I(x)$ zérushelyeit, és azokat az intervallumokat, melyeken konvex, illetve konkáv a függvény.

KöMaL 2012. november; emelt szintű gyakorló feladatsor 3. feladat

Megoldás:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-2}^x f(t) dt = \int_{-2}^x (3t^2 + 4t - 1) dt = [t^3 + 2t^2 - t]_{-2}^x = \\ &= x^3 + 2x^2 - x - (-8 + 8 + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = \\ &= x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Ennek a függvénynek a zérushelyei: $x = -2$; -1 ; $+1$.

A függvény konvexitását a második derivált vizsgálatával határozzuk meg:

$$I'(x) = 3x^2 + 4x - 1; \quad I''(x) = 6x + 4.$$

A második derivált $x = -\frac{2}{3}$ esetén 0. Ha $x < -\frac{2}{3}$, akkor a második derivált negatív, az $I(x)$ függvény konkáv a $\left[-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ intervallumon. Ha $x > -\frac{2}{3}$, akkor a második derivált pozitív, az $I(x)$ függvény konvex a $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right]$ intervallumon. Az $x = -\frac{2}{3}$ pontban a függvénynek inflexiós pontja van.