3. Számelmélet

I. Feladatok

1. Hány négyzetszám osztója van a $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ számnak?

2. Az n pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van, az $n+1$-nek pedig pontosan három. Hány pozitív osztója van az $n+2012$ számnak?

OKTV 2012/2013; I. kategória, 1. forduló

3. Tudjuk, hogy $n = 2^{30} \cdot 3^{20}$. Hány olyan pozitív osztója van az n^2 számnak, amely kisebb n-nél és nem osztója n-nek?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 2. forduló

4. Melyek azok az N pozitív egész számok, amelyeknek prímtényezős felbontásában csak a 2 és a 3 hatványai szerepelnek, és N összes osztójának a száma harmadrésze N^2 osztói számának?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók, I. kategória, 1. forduló

5. Melyek azok a pozitív egész n számok, amelyeknek $\frac{n}{2}$ darab pozitív osztójuk van?

KöMaL, 1995. április, C.394.

6. Van-e olyan négyzetszám, amelynek ugyanannyi $3k+1$ alakú pozitív osztója van, mint $3k+2$ alakú?

KöMaL, 2000. március, B.3357.

7. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek osztóinak számát megkapjuk úgy, hogy a prímtényezős felbontásukban szereplő prímszámok szorzatából kivonjuk a hatványkitevők szorzatát. Ilyen például a 25 és a 600 is. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok ilyen szám van.

KöMaL, 2000. február, B.3344.

8. Az n pozitív egész számot egzotikusnak nevezzük, ha osztható a pozitív osztóinak számával. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) Ha egy egzotikus szám páratlan, akkor ez a szám négyzetszám.

b) Végtelen sok egzotikus szám van.

KöMaL, 2014. október, B.4651.

9. A pozitív egész n szám osztóit nagyság szerint növekedve felírtuk, az első volt az 1. A sorrendben a hatodik lett a 35. Keressük meg azt a legkisebb n értéket, amire ezek teljesülnek.

OKTV 2011/2012; II. kategória, 2. forduló

10. Egy egész számnak két prímosztója van. Osztóinak száma 6, osztóinak összege 28. Melyik ez a szám?

KöMaL, 2009. október, C.1001.

11. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van, és ezek összege 84?

OKTV 2006/2007; II. kategória, 1. forduló

12. Egy téglatest minden élének mérőszáma egész. A téglatest térfogatának, fél felszínének és az egyik csúcsba befutó élek hosszának mérőszámait összeadva 2000-et kapunk. Mekkorák a téglatest élei?

KöMaL, 2000. január, C.567.

13. Egy téglatest éleinek mérőszámai egészek. A téglatest térfogatának, fél felszínének, és az egy csúcsból kiinduló élek hosszának mérőszámait összeadva 2014-et kapunk. Mekkorák a téglatest élei?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2014/2015; haladók, I. kategória, 2. forduló

14. Melyek azok az a, b, c egész számok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség?

$$ab + bc + ca = a + b + c + abc$$

OKTV 2005/2006; I. kategória, 1. forduló

15. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1$ prímszám?

OKTV 2013/2014; I. kategória, 1. forduló

16. Melyek azok a pozitív p és q prímek, amelyekre a $p+q$, $p+q^2$, $p+q^3$, $p+q^4$ számok mindegyike prím?

OKTV 2013/2014; II. kategória, 1. forduló

17. Bizonyítsa be, hogy 9 darab egymást követő egész szám négyzetének összege

a) nem lehet prímszám,

b) nem lehet négyzetszám.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2009/2010; haladók, II. kategória, 1. forduló

18. Bizonyítsa be, hogy $n! + 2007$ egyetlen n pozitív egész szám esetén sem prímszám, és nem is négyzetszám.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2007/2008; haladók, II. kategória, 1. forduló

19. Bizonyítsa be, hogy $5^{2008} + 4$ összetett szám.

KöMaL, 2009. március, C.982.

20. Mutassa meg, hogy $65^{64} + 64$ összetett szám.

KöMaL, 2010. február, B.4243.

21. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek fele egy egész szám négyzete, ötöde pedig egy egész szám harmadik hatványa?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1998; 6. osztályosok versenye

22. Hány N pozitív egészre teljesül, hogy $N/5$ egy egész szám hetedik, $N/7$ pedig egy egész szám ötödik hatványa?

OKTV 2013/2014; III. kategória, 1. forduló

23. Adjuk meg azokat az egymást követő egész számokat, amelyeknek az összege 100.

KöMaL, 2005. május, C.811.

24. Hányféle módon állítható elő a 2008 néhány (egynél több) egymást követő pozitív egész szám összegeként?

OKTV 2008/2009; I. kategória, 1. forduló

25. Hányféleképpen kaphatunk összegül 2000-et, ha néhány darab (legalább kettő) közvetlenül egymást követő pozitív egész számot adunk össze?

OKTV 1999/2000; I. kategória, 2. forduló

26. Hányféleképpen írható fel 1999^{1999} egymás után következő pozitív egész számok összegeként?

KöMaL, 1999. december, B.3324.

27. Hányféleképpen bonthatjuk fel az 1995-öt egymás után következő pozitív páratlan számok összegére?

KöMaL, 1994. október, Gy.2935.

28. Ha $A = 1111111111$ és $B = 111111$, akkor mennyi A és B legnagyobb közös osztója?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2013/2014; haladók, I. kategória, 1. forduló

29. Mennyi a 13837 és a 14111 számok legnagyobb közös osztója?

30. Mennyi a legnagyobb közös osztója a $12^3 - 12$ és a $11^3 - 11$ számoknak?

31. Melyik az a legnagyobb *n* egész, amelyre $n + 10$ osztója az $n^3 + 100$ számnak?

32. Hány olyan *n* természetes szám van, amelyre $2016 + n$ osztható $(n+1)$-gyel?

33. Mely 1-nél nagyobb egész számok lehetnek két egymást követő $n^2 + 3$ alakú szám közös osztói?

OKTV 2014/2015; III. kategória, 1. forduló

34. Van-e olyan 1993-mal osztható szám, amelynek utolsó négy számjegye 1994?

Varga Tamás Matematikaverseny 1993/1994; 7. osztályosok versenye [átfogalmazott feladat]

35. Adja meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amellyel az 1999-et megszorozva a kapott szám utolsó négy jegye 2001.

KöMaL, 2000. március, C.576.

36. Egy hatjegyű számot úgy lehet hárommal szorozni, hogy az első jegyét hárommal csökkentjük, és a végére írunk egy hármast. Melyik ez a szám?

KöMaL, 2007. január, C.880.

37. Gondoltam egy hatjegyű számot. Az első számjegyét letöröltem és átírtam a végére, így az eredeti szám háromszorosát kaptam. Melyik számra gondoltam?

KöMaL, 2006. szeptember, B.3922.

38. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek utolsó számjegye 6, és ha az utolsó helyről a 6-os számjegyet az első helyre tesszük – miközben a többi számjegy változatlan marad –, akkor a szám 4-szeresét kapjuk?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1991; 5. osztályosok versenye
Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1962

II. Megoldások

1. Hány négyzetszám osztója van a $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ számnak?

Megoldás: A négyzetszám osztókban a prímkitevők párosak. A 2 kitevője 0, 2, 4 vagy 6 lehet; a 3 kitevője 0, 2 vagy 4; az 5 kitevője 0 vagy 2; a 7 kitevője 0 vagy 2. Így a négyzetszám osztókban a kitevők megválasztására $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ lehetőség van.

2. Az n pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van, az $n+1$-nek pedig pontosan három. Hány pozitív osztója van az $n+2012$ számnak?

OKTV 2012/2013; I. kategória, 1. forduló

Megoldás: A p prímszámoknak van pontosan két pozitív osztójuk: 1 és p.

A p prímek négyzetének, p^2-nek van pontosan három pozitív osztójuk: 1, p és p^2.

Ezek miatt $n = p$ és $n+1 = q^2$, ahol p és q prímszámok.

Az n és $n+1$ számok egyike páros, azaz p és q^2, és így p és q egyike páros. Egyetlen páros prím van, ez a 2.

Ha $p = 2$, akkor $n = 2$ és $n+1 = 3$, ám nincs olyan q prímszám, amelyre $3 = q^2$.

Ha $q = 2$, akkor $q^2 = 4 = n+1$, így $n = 3$, azaz $p = 3$. Ez megoldás, és ez az egyetlen megoldás.

$n + 2012 = 3 + 2012 = 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$.

Az $n + 2012 = 2015$-nek $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ osztója van.

3. Tudjuk, hogy $n = 2^{30} \cdot 3^{20}$. Hány olyan pozitív osztója van az n^2 számnak, amely kisebb n-nél és nem osztója n-nek?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 2. forduló

Megoldás: $n^2 = 2^{60} \cdot 3^{40}$ osztóinak száma $61 \cdot 41 = 2501$. Az n^2 szám egyik osztója az n. A többi 2500 osztó úgy sorolható osztópárokba ($ab = n^2$), hogy a és b közül az egyik kisebb mint n. Így az n^2 számnak $\frac{2500}{2} = 1250$ n-nél kisebb pozitív osztója van.

Ezen 1250 osztó közül el kell hagynunk azokat, amelyek osztói n-nek is, azaz az n szám összes osztóját, kivéve magát az n számot. Ezek száma: $31 \cdot 21 - 1 = 650$.

A keresett osztók száma: $1250 - 650 = 600$.

4. Melyek azok az N pozitív egész számok, amelyeknek prímtényezős felbontásában csak a 2 és a 3 hatványai szerepelnek, és N összes osztójának a száma harmadrésze N^2 osztói számának?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók, I. kategória, 1. forduló

Megoldás: Az N szám prímtényezős alakja $N = 2^a \cdot 3^b$. Az osztók számára fennálló feltétel szerint $(a+1)(b+1) = \frac{(2a+1)(2b+1)}{3}$. Innen a $3ab + 3a + 3b + 3 = 4ab + 2a + 2b + 1$ egyenlethez jutunk, azaz $ab - a - b - 2 = 0$.

Keressük az egyenlet megoldásait a pozitív egészek körében. Ha lehet, érdemes az összeget szorzattá alakítani.

$ab - a - b + 1 = 3$, azaz $(a-1)(b-1) = 3$. Ha $a \geq 1$, $b \geq 1$, akkor két lehetőség van: $1 \cdot 3 = 3$ és $3 \cdot 1 = 3$, így a megoldások $a = 2$, $b = 4$ és $a = 4$, $b = 2$.

Két olyan N szám van, amely megoldása a feladatnak: $N = 2^2 \cdot 3^4 = 324$ és $N = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

5. Melyek azok a pozitív egész n számok, amelyeknek $\frac{n}{2}$ darab pozitív osztójuk van?

KöMaL, 1995. április, C.394.

Megoldás: Egy pozitív szám osztóit párokba tudjuk állítani úgy, hogy egy-egy pár szorzata magát a számot adja. Például 12 esetén az osztópárok: $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$. (Négyzetszámok esetén az egyik osztópárban a két osztó ugyanaz, pl. 16 esetén a $(4, 4)$ párban.)

A szorzat tényezői közül az egyik értéke legfeljebb $\sqrt{n}$, különben mindkét tényező nagyobb lenne $\sqrt{n}$-nél, és a szorzatuk nagyobb lenne n-nél.

Ezek szerint $d(n) \leq 2\sqrt{n}$, ahol $d(n)$ jelöli az n szám osztóinak számát.

A feladat szerint most $d(n) = \frac{n}{2}$, és mint tudjuk, $\frac{n}{2} \leq 2\sqrt{n}$. Ebből az egyenlőtlenségből $n \leq 4\sqrt{n}$, azaz $n \leq 16$ adódik.

$\frac{n}{2}$ egész szám, azaz n páros, és $n \leq 16$, ezért elegendő az $n = 2$, 4, 6, 8, 10, 12, 14 és 16 számokat ellenőrizni. Csak a 8 és a 12 megoldása a feladatnak.

6. Van-e olyan négyzetszám, amelynek ugyanannyi $3k+1$ alakú pozitív osztója van, mint $3k+2$ alakú?

KöMaL, 2000. március, B.3357.

Megoldás: Egy szám osztóinak száma pontosan akkor páratlan, ha a szám négyzetszám. Ez például következik az osztók párokba állításából. Az osztópárokban az osztó és a társosztó szorzata magát a számot adja. Ha a szám négyzetszám, akkor az osztók párba állításánál egyetlen osztónak, a szám négyzetgyökének nem jut (tőle különböző) pár, így az osztók száma valóban páratlan.

Legyen a keresett négyzetszám N^2. Ennek páratlan számú osztója van, és ha ezek az osztók csak $3k+1$ és $3k+2$ alakúak lennének, akkor nem lehetne ugyanannyi mindegyikből.

Legyen $N = 3^a \cdot n$ alakú, ahol a pozitív egész szám, n pedig 3-mal nem osztható pozitív egész. Ekkor $N^2 = 3^{2a} \cdot n^2$, és N^2 $3k+1$ alakú és $3k+2$ alakú osztói együttesen éppen az n^2 osztóit adják. Ezek száma páratlan lévén, a $3k+1$ és $3k+2$ alakú osztók száma szükségképpen különböző.

7. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek osztóinak számát megkapjuk úgy, hogy a prímtényezős felbontásukban szereplő prímszámok szorzatából kivonjuk a hatványkitevők szorzatát. Ilyen például a 25 és a 600 is. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok ilyen szám van.

KöMaL, 2000. február, B.3344.

Megoldás: Mely számoknál legegyszerűbb kiszámolni a prímtényezős felbontásukban szereplő prímszámok szorzatának és a hatványkitevők szorzatának különbségét? Akkor, ha ez a szám egy prímnek a hatványa.

Tekintsünk egy páratlan prímszámot, legyen ez $p = 2k+1$, és vizsgáljuk a p^n számot.

A p^n szám osztóinak száma $n+1$.

A p^n szám prímtényezős felbontásában egyetlen prím szerepel, ez $p = 2k+1$, és ha ebből kivonjuk a hatványkitevők szorzatát, azaz n-et, akkor $(2k+1)-n = k+1$-et, az osztók számát kapjuk, tehát $n = k$.

Azt kaptuk, ha $p = 2k+1$ prímszám, akkor a p^k számra kiszámolva a prímtényezős felbontásában szereplő prímszámok szorzatának és a hatványkitevők szorzatának különbségét, megkapjuk a p^k szám osztóinak számát. Mivel végtelen sok páratlan prímszám van, ezért végtelen sok, a feladat feltételének eleget tevő természetes szám van.

8. Az *n* pozitív egész számot egzotikusnak nevezzük, ha osztható a pozitív osztóinak számával. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) Ha egy egzotikus szám páratlan, akkor ez a szám négyzetszám.

b) Végtelen sok egzotikus szám van.

KöMaL, 2014. október, B.4651.

Megoldás: ***a)*** Ha egy n egzotikus szám páratlan, akkor $d(n) \mid n$ miatt $d(n)$ páratlan, tehát n négyzetszám. [Jól ismert – és korábban láttuk –, hogy egy szám osztóinak száma pontosan akkor páratlan, ha a szám négyzetszám.]

b) Sokféle konstrukcióval igazolható az állítás. Néhány ezekből:

- Az $n = 2^{2^n-1}$ számok egzotikusak, és ezek száma végtelen.
- Az $n = p^{p-1}$ számok egzotikusak, ahol *p* prímszám, hiszen az osztók száma *p*. A prímszámok száma végtelen, így az egzotikus számok száma is végtelen.
- Az $n = 8p$ számok egzotikusak, ahol $p \neq 2$ prímszám, hiszen az osztók száma 8. A prímszámok száma végtelen, így az egzotikus számok száma is végtelen.
- Az $n = 9p^2$ számok egzotikusak, ahol $p \neq 3$ prímszám, hiszen az osztók száma 9. A prímszámok száma végtelen, így az egzotikus számok száma is végtelen.
- Az $n = 36pq$ számok egzotikusak, ahol *p* és *q* különböző, 3-nál nagyobb prímszámok. $d(n) = 36$, tehát n egzotikus, és végtelen sok ilyen szám van.

9. A pozitív egész n szám osztóit nagyság szerint növekedve felírtuk, az első volt az 1. A sorrendben a hatodik lett a 35. Keressük meg azt a legkisebb *n* értéket, amire ezek teljesülnek.

OKTV 2011/2012; II. kategória, 2. forduló

Megoldás: Legyen az első hat osztó $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 = 35$. Ezek között szerepel az 5 és a 7 is. (Hiszen $35 = 5 \cdot 7$, $35 \mid n$, és az 5 és a 7 prímek, tehát 5 és 7 is osztója n-nek.)

Az első hat osztó között ott lehet-e a 2? Ha $2 \mid n$, akkor az n 35-nél kisebb osztói között ott van a 10 és a 14 is. Ekkor az 1, 2, 5, 7, 10, 14 mind osztók, ez pedig hat darab 35-nél kisebb osztó. Ami nem lehet, hiszen csak öt darab 35-nél kisebb osztó van. Tehát a 2 nem osztója n-

nek. Ugyanígy, ha az osztók között van a 3, akkor az 1, 3, 5, 7, 15, 21 is osztók, tehát a 3 sem osztója n-nek.

Ezek szerint $d_2 = 5,\ d_3 = 7$.

d_4 és d_5 vagy 7-nél nagyobb és 35-nél kisebb prím, vagy olyan összetett szám, melynek mindegyik prímtényezője 5. Ez utóbbi csak a 25 lehet.

A legkisebb n számot keressük. Ha a két legkisebb prím lesz a hiányzó két osztó, akkor n az 5, 7, 11, 13 számok legkisebb közös többszöröse, ami az 5005.

Ha a két hiányzó osztó közül az egyik a 25, a másik a 11, akkor n a 25, 7, 11 számok legkisebb közös többszöröse, ami az 1925.

A keresett n szám az 1925.

10. Egy egész számnak két prímosztója van. Osztóinak száma 6, osztóinak összege 28. Melyik ez a szám?

KöMaL, 2009. október, C.1001.

Megoldás: A keresett szám prímtényezős alakja: $n = p^a \cdot q^b$. Az osztók száma 6, tehát $(a+1)(b+1) = 6$, így az a és b kitevők 1 és 2, $n = p^2 \cdot q$.

n osztói 1, p, p^2, q, pq, p^2q; összegük: $(1 + p + p^2)(1+q) = 28$.

$1 + p + p^2$ értéke $p = 2$ esetén 7; $p = 3$-ra 13; és $p = 5$-re már 31, ez nagyobb 28-nál, így nem lehet osztója 28-nak. Csak $p = 2$ lehet megoldás, ekkor $(1 + 2 + 2^2)(1+q) = 28$, $q = 3$.

A keresett szám: $n = 2^2 \cdot 3 = 12$.

11. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van, és ezek összege 84?

OKTV 2006/2007; II. kategória, 1. forduló

Megoldás: Legyen n a keresett szám. A négy osztó között van az 1 és az n, és a másik két osztó a és b, $1 < a < b < n$, ahol $a = p$, $b = p^2$, és p prímszám, vagy a és b különböző prímek.

Ha $a = p$ és $b = p^2$ (p prímszám), akkor $1 + p + p^2 + p^3 = 84$. Ellenőrzés mutatja, hogy ennek az egyenletnek nincs megoldása a prímek körében. $p = 2$ vagy 3 esetén a bal oldali összeg kisebb 84-nél, míg $p = 5$-re és nagyobb prímekre az összeg nagyobb 84-nél.

Ha a és b különböző prímek, akkor $1 + a + b + n = 1 + a + b + ab = (1+a)(1+b) = 84$. (Felhasználtuk, hogy $ab = n$.) Ezek szerint a 84-et kell két egész szám szorzataként felírni.

A lehetséges szorzatok (az osztópárok alapján): $84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12$, és az innen adódó a és b értékek csak egy esetben lesznek prímek, ezek $a = 5$ és $b = 13$.

Tehát egy ilyen szám van, az $n = 5 \cdot 13 = 65$.

12. Egy téglatest minden élének mérőszáma egész. A téglatest térfogatának, fél felszínének és az egyik csúcsba befutó élek hosszának mérőszámait összeadva 2000-et kapunk. Mekkorák a téglatest élei?

KöMaL, 2000. január, C.567.

Megoldás: A téglatest élei a, b, c. A feltétel szerint $abc + ab + bc + ca + a + b + c = 2000$.

Keressük az egyenlet megoldásait a pozitív egészek körében. Ha lehet, érdemes az összeget szorzattá alakítani.

Növeljük meg mindkét oldalt 1-gyel: $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = 2001$.

Ekkor a bal oldal szorzattá alakítható: $(a+1)(b+1)(c+1) = 2001$.

$2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, és mindhárom tényező prímszám. Ezért az élek hosszai, azaz a, b, c értékei csak 2, 22, 28 lehetnek (valamilyen sorrendben).

13. Egy téglatest éleinek mérőszámai egészek. A téglatest térfogatának, fél felszínének, és az egy csúcsból kiinduló élek hosszának mérőszámait összeadva 2014-et kapunk. Mekkorák a téglatest élei?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2014/2015; haladók, I. kategória, 2. forduló

Megoldás: A feladat megoldása azonos az előzővel, csak 2000 helyett 2014-gyel számolunk.

Ha a téglatest élei a, b, c, akkor – az előző megoldás alapján – $(a+1)(b+1)(c+1) = 2015$. Mivel $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, és mindhárom tényező prímszám, így az élek hosszai csak 4, 12, 30 lehetnek (valamilyen sorrendben).

14. Melyek azok az a, b, c egész számok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség?

$$ab + bc + ca = a + b + c + abc$$

OKTV 2005/2006; I. kategória, 1. forduló

Megoldás: Az $ab + bc + ca = a + b + c + abc$ egyenlet megoldásait keressük az egészek körében. Ha lehet, érdemes az összeget szorzattá alakítani:

$abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) = 0$,

$abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 = -1$, és itt a bal oldal szorzattá alakítható:

$(a-1)(b-1)(c-1) = -1$.

A bal oldalon álló szorzat tényezői -1, -1, -1 vagy 1, 1, -1 (ezek tetszőleges sorrendben).

Így az egyenlet a, b, c megoldásai:

$a = 0,\ b = 0,\ c = 0$;

$a = 2,\ b = 2,\ c = 0$;

$a = 2,\ b = 0,\ c = 2$ és

$a = 0,\ b = 2,\ c = 2$.

15. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1$ prímszám?

OKTV 2013/2014; I. kategória, 1. forduló

Megoldás: $2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1 = 4 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n} + 1 = 4 \cdot 6^{2n} + 1$, és a 6 minden pozitív egész kitevős hatványa 6-ra végződik, ezért $4 \cdot 6^{2n} + 1$ utolsó számjegye 5, ha $n > 0$. Az 5-re végződő számok oszthatók 5-tel, és pozitív egész n-ekre $4 \cdot 6^{2n} + 1$ nagyobb 5-nél, tehát ez a szám összetett szám.

Ha $n = 0$, akkor $4 \cdot 6^{2n} + 1 = 5$, és ez prímszám.

Tehát egy olyan természetes szám van, amelyre $2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1$ értéke prímszám, és ez a 0.

16. Melyek azok a pozitív p és q prímek, amelyekre a $p+q$, $p+q^2$, $p+q^3$, $p+q^4$ számok mindegyike prím?

OKTV 2013/2014; II. kategória, 1. forduló

Megoldás: Ha p és q mindegyike páratlan prím, akkor $p+q$ páros összetett szám, ezért ilyen esetben nem találunk megoldást. p és q mindegyike nem lehet páros prím, azaz 2, mert ekkor $p+q=4$, és ez sem prím.

Ezek miatt p és q egyike páros (azaz 2), és a másik páratlan.

Nézzük azt az esetet, ha $p=2$. Ha $q=3$, akkor a $p+q$, $p+q^2$, $p+q^3$, $p+q^4$ számok mindegyike prím, ezek a számok 5, 11, 29, 83. Ha $q>3$, akkor két lehetőség van: $q=3k+1$ vagy $q=3k+2$, ahol k természetes szám. Az első esetben $p+q$ osztható 3-mal és nagyobb 3-nál, így összetett szám. A második esetben $p+q^2$ lesz 3-mal osztható összetett szám.

Nézzük azt az esetet, ha $q=2$. Ha $p=3$, akkor a $p+q$, $p+q^2$, $p+q^3$, $p+q^4$ számok mindegyike prím, ezek a számok 5, 7, 11, 19. Ha $p>3$, akkor most is két lehetőség van: $p=3k+1$ vagy $p=3k+2$, ahol k természetes szám. Az első esetben $p+q$ osztható 3-mal és nagyobb 3-nál, így összetett szám. A második esetben $p+q^2$ lesz 3-mal osztható összetett szám.

Azt kaptuk, hogy a feladat feltételeinek két $(p,\ q)$ számpár felel meg, a $(2,\ 3)$ és a $(3,\ 2)$.

17. Bizonyítsa be, hogy 9 darab egymást követő egész szám négyzetének összege

a) nem lehet prímszám,

b) nem lehet négyzetszám.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2009/2010; haladók, II. kategória, 1. forduló

Megoldás: a) Ha páratlan sok egymást követő egész számot vizsgálunk, akkor érdemes a középső számot választani sarokkőnek. Jelölje n a 9 darab egymást követő egész szám közül a középsőt. Ekkor az $(n-4)^2$, $(n-3)^2$, $(n-2)^2$, $(n-1)^2$, n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$, $(n+3)^2$, $(n+4)^2$ számok összege $9n^2+60$.

$9n^2+60=3(3n^2+20)$, és ez nem lehet prímszám, mert két 1-nél nagyobb egész szám szorzata.

b) Tegyük fel, hogy $N=9n^2+60$ értéke valamely n-re négyzetszám. N osztható 3-mal, és feltevésünk szerint négyzetszám, ezért 9-cel is oszthatónak kell lennie, ami nem teljesül. Ugyanis a $9n^2+60$ összeg első tagja osztható 9-cel, míg a második tag nem, így az összeg sem osztható 9-cel. Ez az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását.

18. Bizonyítsa be, hogy $n!+2007$ egyetlen n pozitív egész szám esetén sem prímszám, és nem is négyzetszám.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2007/2008; haladók, II. kategória, 1. forduló

Megoldás: 2007 osztható 3-mal, és $n!$ is osztható 3-mal, ha $n\geq 3$, így ezekre az n-ekre $n!+2007$ egy 3-mal osztható, 3-nál nagyobb szám, tehát összetett szám. $n=1$ esetén $n!+2007$ értéke 2008, $n=2$ esetén 2009, és mindkettő összetett ($2008=2\cdot 1004$, $2009=7\cdot 287$). Beláttuk, hogy $n!+2007$ értéke egyetlen n pozitív egész szám esetén sem lesz prímszám.

Ha $n \geq 5$, akkor az $n!$ szám osztható 10-zel, így 0-ra végződik. Emiatt ekkor az $n! + 2007$ szám utolsó számjegye 7, így ez nem lehet négyzetszám, mivel a négyzetszámok csak 0, 1, 4, 5, 6 és 9 számjegyekre végződhetnek. $n = 1, 2, 3, 4$ esetén $n! + 2007$ értéke rendre 2008, 2009, 2013, 2031, ám ezek egyike sem négyzetszám, mert $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$ és $46^2 = 2116$. Vizsgálataink azt mutatják, hogy $n! + 2007$ egyetlen *n* pozitív egész szám esetén sem lesz négyzetszám.

19. Bizonyítsa be, hogy $5^{2008} + 4$ összetett szám.

KöMaL, 2009. március, C.982.

Megoldás: Az állítást igazolhatjuk úgy, hogy belátjuk: az $5^{2008} + 4$ szám osztható valamely nem túl nagy *m* számmal (például 3-mal), de nem látni ilyen osztót. Egy másik lehetőség a bizonyításra, hogy az $5^{2008} + 4$ számot szorzattá alakítjuk. Ez a szám $a^4 + 4$ alakú, és

$$a^4 + 4 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2).$$

Most $a = 5^{502}$, így $5^{2008} + 4 = (5^{1004} + 2 \cdot 5^{502} + 2)(5^{1004} - 2 \cdot 5^{502} + 2)$, és itt mindkét tényező 1-nél nagyobb, ezzel beláttuk az állítást.

Megjegyzés: Az $a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$, illetve az $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ azonosság *Sophie Germain* (1776–1831) nevéhez kötődik (Sophie Germain-azonosság).

20. Mutassa meg, hogy $65^{64} + 64$ összetett szám.

KöMaL, 2010. február, B.4243.

Megoldás: A feladat hasonló az előzőhöz. A $65^{64} + 64$ szám $a^4 + 64$ alakú.

$$a^4 + 64 = (a^2 + 8)^2 - 16a^2 = (a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = (a^2 + 4a + 8)(a^2 - 4a + 8).$$

Ezért $65^{64} + 64 = (65^{32} + 4 \cdot 65^{16} + 8)(65^{32} - 4 \cdot 65^{16} + 8)$ két 1-nél nagyobb szám szorzata, azaz összetett szám.

Megjegyzés: Gyakorlásul lássuk be, hogy az $1023^{1024} + 1024$, $41^{40} + 1024$ számok összetett számok.

21. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek fele egy egész szám négyzete, ötöde pedig egy egész szám harmadik hatványa?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1998; 6. osztályosok versenye

Megoldás: Ha bízunk abban, hogy a keresett szám „nem olyan nagy”, akkor kereshetjük így is a megoldást: A keresett szám páros (hiszen a fele négyzetszám), és 5-szöröse egy köbszámnak. Ezért a köbszám páros. A köbszám 5-szörösének a fele négyzetszám, így ha a prímtényezőkre figyelünk, akkor látjuk, hogy a köbszám osztható 5-tel. A páros köbszámok közül az első 5-tel osztható a $10^3 = 1000$. Ennek 5-szörösének a fele 2500, és ez 50-nek a négyzete. Ezek alapján a keresett szám az 5000.

Oldjuk meg úgy is, hogy a szokásos eszköztárat használjuk.

A keresett szám N. A feltételek szerint $N = 2m^2$, $N = 5n^3$, ahol n, m pozitív egész szám. Ezek miatt N osztható 2-vel is, 5-tel is: $N = 2^a \cdot 5^b \cdot M$, ahol M relatív prím 2-höz, 5-höz és $a, b \geq 1$. A szám fele $N = 2^{a-1} \cdot 5^b \cdot M$ négyzetszám, ezért $a-1$ és b páros és M négyzetszám. A szám ötöde $N = 2^a \cdot 5^{b-1} \cdot M$ köbszám, ezért a és $b-1$ osztható 3-mal és M köbszám.

A legkisebb a szám, amely osztható 3-mal és $a-1$ páros, az $a = 3$.

A legkisebb b szám, amely páros és $b-1$ osztható 3-mal, a $b = 4$.

M-re az a megszorító feltétel, hogy négyzetszám és köbszám is, és azt várjuk, legyen a lehető legkisebb. Szerencsére a legkisebb pozitív egész ilyen: $M = 1$.

Ezek miatt a keresett szám $N = 2^3 \cdot 5^4 = 5000$.

22. Hány N pozitív egészre teljesül, hogy $N/5$ egy egész szám hetedik, $N/7$ pedig egy egész szám ötödik hatványa?

OKTV 2013/2014; III. kategória, 1. forduló

Megoldás: A keresett szám N. A feltételek szerint $N = 5n^7$, $N = 7k^5$, ahol n és k pozitív egészek. Ezek miatt N osztható 5-tel is, 7-tel is: $N = 5^a \cdot 7^b \cdot M$, ahol M relatív prím 5-höz és 7-hez, és $a, b \geq 1$. A szám ötöde $N = 5^{a-1} \cdot 7^b \cdot M$ hetedik hatvány, ezért $a-1$ és b is osztható 7-tel, és M hetedik hatvány. A szám hetede $N = 5^a \cdot 7^{b-1} \cdot M$ ötödik hatvány, ezért a és $b-1$ is osztható 5-tel, és M ötödik hatvány.

Az a kitevő osztható 5-tel és $a-1$ osztható 7-tel, ilyen szám például az $a = 15$.

A b kitevő osztható 7-tel és $b-1$ osztható 5-tel, ilyen szám például a $b = 21$.

Az M számról tudjuk, hogy ötödik hatvány és hetedik hatvány is, tehát $M = m^{35}$, ahol m pozitív egész.

Így végtelen sok olyan számot találtunk (és vannak még ezektől különböző számok is), amely teljesíti a feladat feltételeit, ezek $N = 5^{15} \cdot 7^{21} \cdot m^{35}$, ahol $(m, 35) = 1$, hiszen végtelen sok olyan m természetes szám van, amelyre $(m, 35) = 1$ teljesül. (Az $(m, 35) = 1$ feltétel elhagyható.)

23. Adjuk meg azokat az egymást követő egész számokat, amelyeknek az összege 100.

KöMaL, 2005. május, C.811.

Megoldás: Legyen a vizsgált n darab egymás utáni szám: $a+1, a+2, \ldots, a+n$.

Ekkor $(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+n) = 100$, $n \cdot a + \dfrac{n(n+1)}{2} = 100$, $n \cdot (2a+n+1) = 200$. Ha n páros, akkor $(2a+n+1)$ páratlan; n páratlan, akkor $(2a+n+1)$ páros.

n és $(2a+n+1)$ különböző párosságú, ezért az osztó-társosztó párokban az egyik osztó páratlan (a másik osztó páros lesz, hiszen a szorzatuk 200). A 200 páratlan osztói 1, 5 és 25; ezek társosztói 200, 40 és 8. A lehetséges megoldások: $n = 1$, 5, 8, 25, 40, 200. Az ezekhez tartozó $(a+1)$ értékek: 100, 18, 9, -8, -17, -99.

A feladat megoldásai:

n	Az n db egymást követő egész szám összege 100.
1	100
5	18, 19, 20, 21, 22
8	9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
25	-8, -7, -6, …, 6, 7, 8, 9, 10, …, 16
40	-17, -16, …, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
200	-99, -98, …, 98, 99, 100

24. Hányféle módon állítható elő a 2008 néhány (egynél több) egymást követő pozitív egész szám összegeként?

OKTV 2008/2009; I. kategória, 1. forduló

Megoldás: Legyenek az egymást követő pozitív egész számok: $a+1, a+2, \ldots, a+n$, $a \geq 0$, $n \geq 2$. Ekkor $(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+n)=2008$,

$$n \cdot a + \frac{n(n+1)}{2} = 2008,$$

$$n \cdot (2a+n+1) = 4016.$$

A két tényező különbsége $(2a+n+1)-n=2a+1$ páratlan, ezért a két tényező egyike páros, a másik páratlan.

A 4016 prímtényezős felbontása: $4016 = 2^4 \cdot 251$.

Így az $n \cdot (2a+n+1) = 4016$ bal oldala kétféleképpen lehet egy páros és egy páratlan (1-nél nagyobb) szám szorzata: $16 \cdot 251$ és $251 \cdot 16$, tehát két esetet kell vizsgálni.

Ha $n=16$, akkor $2a+n+1=251$, $2a+17=251$, $a=117$. Megtaláltuk a 2008 egyik előállítását: $118+119+120+\ldots+133=2008$.

Ha $n=251$, akkor $2a+n+1=16$, $2a+252=16$, $a=-118$. Most is találtunk olyan egymást követő számokat, melyek összege 2008: $(-117)+(-116)+(-115)+\ldots+133=2008$, csak most nem teljesül, hogy az összeadandók mindegyike pozitív szám.

Tehát a 2008 számot csak egyféleképpen tudjuk egynél több egymás utáni pozitív egész összegeként előállítani.

25. Hányféleképpen kaphatunk összegül 2000-et, ha néhány darab (legalább kettő) közvetlenül egymást követő pozitív egész számot adunk össze?

OKTV 1999/2000; I. kategória, 2. forduló

Megoldás: A feladat hasonló az előzőhöz.

Legyenek az egymást követő pozitív egész számok: $a+1, a+2, \ldots, a+n$, $a \geq 0$, $n \geq 2$. Ekkor $(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+n)=2000$, $n \cdot (2a+n+1)=4000$, és mint tudjuk, a két tényező egyike páros, a másik páratlan.

A 4000 prímtényezős felbontása: $4000 = 2^5 \cdot 5^3$. A 4000 páratlan osztói 1, 5, 25 és 125.

Ezek miatt az $n \cdot (2a+n+1)=4000$ egyenlőség bal oldalán álló lehetséges szorzatok: $1 \cdot 4000$, $5 \cdot 800$, $25 \cdot 160$, $125 \cdot 32$, $4000 \cdot 1$, $800 \cdot 5$, $160 \cdot 25$, $32 \cdot 125$.

Mind a nyolc szorzat alapján találunk néhány egymást követő egész számot, melyek összege 2000. Ezekben az esetekben az egymást követő egész számok száma: $n=1$, 5, 25, 125, 4000, 800, 160, illetve 32; és az egymást követő egész számok közül az első: 2000, 398, 68, -46, -1999, -397, -67, 47.

Ezen megoldások közül néhányat kizárunk a feladat feltételei miatt. $n=1$ esetén egyetlen számból áll az összeg, így ez a feladatnak nem megoldása. Kizárjuk az előzőek közül azokat, amikor nem csak pozitív számokat adunk össze.

Három megoldás maradt: $n=5$ esetén $398+399+400+401+402=2000$, $n=25$ esetén $68+69+70+\ldots+92=2000$, és az $n=32$ esethez tartozó $47+48+49+\ldots+78=2000$.

26. Hányféleképpen írható fel 1999^{1999} egymás után következő pozitív egész számok összegeként?

KöMaL, 1999. december, B.3324.

Megoldás: A 1999^{1999} szám nagy szám, nézzük meg helyette kisebb számra, hogy az hányféleképpen áll elő egymást követő pozitív egész számok összegeként.

Vizsgáljuk meg, hányféleképpen áll elő az 5 egymást követő **egész** számok összegeként.

A pozitív számok körében két megoldás van: $5=5$ és $2+3=5$.

Mindegyiknek van még egy párja.

$5=5$ párja: $((-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4)+5=5$,

$2+3=5$ párja: $((-1)+0+1)+2+3=5$.

Az 5 egymást követő egész számok összegeként 4-féle módon állítható elő.

Azt látjuk, hogy ha az n számot előállítjuk egymást követő egész számok összegeként az összes lehetséges módon, akkor az előállítások párokba rendezhetők. Egy pozitív összeadandókból álló előállításhoz tartozik egy olyan összeg, amelyben van nemnegatív összeadandó is. (Ugyanis, ha a pozitív összeadandókból álló összegben a legkisebb összeadandó a, akkor az összeget egészítsük ki az $(a-1), (a-2), \ldots, -(a-1)$ számokkal.) Ha az összegben van nempozitív összeadandó, akkor a nagyság szerint egymás után következő számokból elhagyható az első néhány úgy, hogy az elhagyottak összege nulla, és a megmaradó összeadandók pozitívak.) Tehát az egész számok körében történő előállításoknak a fele olyan, amely összegekben csak pozitív egészek vannak.

Hányféleképpen írható fel 1999^{1999} egymás után következő **egész** számok összegeként?

Legyenek az egymást követő egész számok: $a+1,\ a+2,\ \ldots,\ a+n$. Ekkor

$(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+n)=1999^{1999}$, $n\cdot(2a+n+1)=2\cdot 1999^{1999}$.

Mivel 1999 prímszám, így $2\cdot 1999^{1999}$-nek 4000 osztója van, és bármely osztó-társosztó párban az egyik osztó páros, a másik páratlan, így minden osztóhoz tartozik egy megoldás, azaz néhány egymást követő egész szám, amelyek összege 1999^{1999}. Ezért 4000-féle módon lehet megadni néhány egymást követő egész számot, amelyek összege 1999^{1999}.

Ahogyan láttuk, az esetek fele olyan, amikor az összeadandók pozitív számok. Tehát $4000/2=2000$ olyan összeg van, melyben az összeadandók egymást követő **pozitív egészek**, és az összeg értéke 1999^{1999}.

27. Hányféleképpen bonthatjuk fel az 1995-öt egymás után következő pozitív páratlan számok összegére?

KöMaL, 1994. október, Gy.2935.

Megoldás: Legyenek az egymás után következő pozitív páratlan számok: $a+2$, $a+4$, …, $a+2n$, ahol $a \geq 1$ páratlan szám.

Ekkor $(a+2)+(a+4)+\ldots+(a+2n)=1995$,

$n \cdot a + n \cdot (n+1) = 1995$, $n \cdot (a+n+1) = 1995$. Annyiféle felbontás van, ahányféleképpen az 1995-öt két egész szám szorzatára bonthatjuk. Az a kérdés, hány olyan n pozitív egész van, amely osztója 1995-nek. $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, így 1995 osztóinak száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Ezért az 1995-öt 16-féleképpen bonthatjuk fel egymás után következő páratlan számok összegére.

Ezen összegek között nincs olyan, melynek a legkisebb tagja az 1, hiszen az 1, 3, 5, ..., $(2k-1)$ számok összege négyzetszám ($=k^2$), és az 1995 nem négyzetszám: $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$.

Így az előző feladat megoldásában tapasztaltak szerint minden pozitív összeadandókból álló összeg kiegészíthető negatív tagokkal (pl. a 3, 5, 7 számok összege ugyanannyi, mint a -1, 1, 3, 5, 7 számok összege). Ugyanakkor a negatív számokat tartalmazó összegből elhagyható néhány tag úgy, hogy az elhagyottak összege nulla, és a megmaradó összeadandók pozitív számok.

Ezek szerint a 16-féle felbontás felében, azaz 8 esetben teljesül az, hogy az összegek tagjai pozitív számok. Azt kaptuk, hogy az 1995-öt 8-féleképpen bonthatjuk fel egymás után következő pozitív páratlan számok összegére. (Ezek között van egy 1-tagú összeg is.)

28. Ha $A = 1111111111$ és $B = 111111$, akkor mennyi A és B legnagyobb közös osztója?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2013/2014; haladók, I. kategória, 1. forduló

Megoldás: Ha d osztója mind a két számnak, akkor osztója a két szám különbségének is.

$A - B = 1111000000$, tehát $d \mid 1111000000$. A d osztó páratlan, nem osztható 5-tel és osztója 1111000000-nak, így $d \mid 1111$.

Mivel $d \mid 111\,111$ és $d \mid 1111$, ezért d osztója a két szám különbségének is.

$111111 - 1111 = 110000$, így $d \mid 110000$. A d osztó páratlan, nem osztható 5-tel és osztója 110000-nek, így $d \mid 11$.

Így a d közös osztó osztója a 11-nek, ezért $d = 1$ vagy $d = 11$. A 11-es oszthatósági szabály miatt 11 osztója A-nak és osztója B-nek is.

Az A és B számok legnagyobb közös osztója 11.

29. Mennyi a 13837 és a 14111 számok legnagyobb közös osztója?

Megoldás: Ha d osztója mind a két számnak, akkor osztója a két szám különbségének is. $14111 - 13837 = 274$. A keresett közös osztó páratlan és osztója 274-nek. $274 = 2 \cdot 137$, ezért a keresett legnagyobb közös osztó osztója a 137-nek: vagy 1, vagy 137. Ellenőrzés mutatja, hogy a 137 osztója mindkét számnak, így az előzőek szerint ez a legnagyobb közös osztó.

Megjegyzés: A két szám prímtényezős felbontása:
$13837 = 13700 + 137 = 137 \cdot (100+1) = 137 \cdot 101$ és $14111 = 137 \cdot 103$.

30. Mennyi a legnagyobb közös osztója a $12^3 - 12$ és a $11^3 - 11$ számoknak?

Megoldás: Az $a^3 - a$ kifejezést szorzattá alakítjuk:
$a^3 - a = a \cdot (a^2 - 1) = a \cdot (a-1) \cdot (a+1) = (a-1) \cdot a \cdot (a+1)$.
Így $12^3 - 12 = 11 \cdot 12 \cdot 13$ és $11^3 - 11 = 10 \cdot 11 \cdot 12$.
$(10, 13) = 1$, ezért a $10 \cdot 11 \cdot 12$ és $11 \cdot 12 \cdot 13$ számok legnagyobb közös osztója $11 \cdot 12 = 132$.

31. Melyik az a legnagyobb *n* egész, amelyre $n + 10$ osztója az $n^3 + 100$ számnak?

Megoldás: $n + 10$ osztója az $n^3 + 10n^2 = n^2 \cdot (n+10)$-nek, így
$(n^3 + 10n^2) - (n^3 + 100) = 10n^2 - 100$-nak is.

Osztója $10n(n+10) = 10n^2 + 100n$-nek is,
ezért osztója $(10n^2 + 100n) - (10n^2 - 100) = 100n + 100$-nak.

Osztója $100(n+10) = 100n + 1000$-nek, emiatt $(100n + 1000) - (100n + 100) = 900$-nak is.

$n + 10$ osztója 900-nak, tehát $n + 10 \le 900$, $n \le 890$, és az $n = 890$ teljesíti is az $n + 10 \mid n^3 + 100$ oszthatóságot: $890 + 10 = 900$ és $890^3 + 100 = (900 - 10)^3 + 100$, továbbá $(900 - 10)^3 + 100 = 900A - 10^3 + 100 = 900A - 900$, azaz $890 + 10 \mid 890^3 + 100$.

32. Hány olyan *n* természetes szám van, amelyre $2016 + n$ osztható $(n+1)$-gyel?

Megoldás: $2016 + n = k(n+1)$, $k > 0$ egész, emiatt $2015 = k(n+1) - (n+1) = (k-1)(n+1)$, és $n + 1 \ge 1$. A $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ számnak $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ pozitív osztója van, így $n + 1$-nek összesen 8 különböző értéke lehet, emiatt 8 olyan *n* természetes szám van, amelyre $2016 + n$ osztható $(n+1)$-gyel.

33. Mely 1-nél nagyobb egész számok lehetnek két egymást követő $n^2 + 3$ alakú szám közös osztói?

OKTV 2014/2015; III. kategória, 1. forduló

Megoldás: Legyen $d > 1$ olyan szám, amely osztója valamely *n*-re az $n^2 + 3$ és az $(n+1)^2 + 3$ számoknak. Ekkor d osztója a különbségüknek is, osztója $2n + 1$-nek.

Ezért d osztója $4(n^2 + 3) - (2n+1)(2n-1) = 13$-nak is, tehát d csak 13 lehet, ha találunk erre példát.

A $13 \mid 6^2 + 3 = 39$ és $13 \mid 7^2 + 3 = 52$ oszthatóságok mutatják, hogy van két olyan szomszédos $n^2 + 3$ alakú szám, amelynek osztója a 13.

A keresett 1-nél nagyobb közös osztó egyedül a 13 lehet.

34. Van-e olyan 1993-mal osztható szám, amelynek utolsó négy számjegye 1994?

Varga Tamás Matematikaverseny 1993/1994; 7. osztályosok versenye [átfogalmazott feladat]

Megoldás: 1993-mal osztható számot keresünk, azaz 1993 egyik többszörösét. Így nézve a feladatot, az a kérdés, mivel szorozzuk meg az 1993-at, hogy a szorzat 1994-re végződjön.

Írjuk fel a várható szorzást! A szorzó utolsó jegye 8 lesz, mert a szorzat csak így végződhet 4-re. A második részletszorzatnak 5-re kell végződnie, mert így lehet a tízesek helyén az eredményben 9 és így tovább.

1993 · 8	1993 · 58	1993 · 858	1993 · 4858
			7972
		15944	15944
	9965	9965	9965
15944	15944	15944	15944
1994	1994	1994	9681994

Ezután a szorzó utolsó előtti jegyét tudjuk meghatározni, majd az azelőttit és így tovább. Az így kapott szorzat: $1993 \cdot 4858 = 9681994$. Tehát van olyan 1993-mal osztható szám, amelynek utolsó négy számjegye 1994, a legkisebb ilyen szám a 9681994.

35. Adja meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amellyel az 1999-et megszorozva a kapott szám utolsó négy jegye 2001.

KöMaL, 2000. március, C.576.

Megoldás: A feladat hasonló az előzőhöz. Kezdjük el az írásbeli szorzást! Ismerjük a szorzandót és a szorzat utolsó számjegyeit.

A szorzat utolsó jegye 1, és ezt csak úgy kaphatjuk, ha a szorzó utolsó számjegye 9.

1999 · 9	1999 · 99	1999 · 999	1999 · 5999
			9995
		17991	17991
	17991	17991	17991
17991	17991	17991	17991
2001	2001	2001	11992001

Ezután a szorzó utolsó előtti jegyét tudjuk meghatározni, majd az azelőttit és így tovább. Az így kapott szorzat: $1999 \cdot 5999 = 1199\,2001$. Tehát az 5999 a legkisebb pozitív egész, amellyel az 1999-et szorozva a kapott szám utolsó 4 jegye 2001.

36. Egy hatjegyű számot úgy lehet hárommal szorozni, hogy az első jegyét hárommal csökkentjük, és a végére írunk egy hármast. Melyik ez a szám?

KöMaL, 2007. január, C.880.

Megoldás: A keresett hatjegyű számot írjuk $100\,000a + b$ alakban, ahol $3 \le a \le 9$, a b pedig ötjegyű egész szám. A szöveg szerint:

$3 \cdot (100\,000a + b) = 1\,000\,000 \cdot (a-3) + 10b + 3$, innen

$b = \dfrac{2\,999\,997 - 700\,000a}{7} = 428571 - 100000a$.

Csak $a = 4$ esetén kapunk b-re ötjegyű pozitív egész számot: $b = 28571$. Így a keresett hatjegyű szám 428571, és valóban $3 \cdot 428571 = 1285713$.

Másképp is megoldhatjuk. Kövessük az írásbeli szorzás lépéseit.

Egy – most még – ismeretlen hatjegyű számot 3-mal szorozva a szorzat 3-ra végződik. Ezért a szorzandó csak 1-re végződhet, így lesz a szorzat utolsó jegye 3. Tudjuk, hogy a szorzat utolsó jegye (a 3-as) előtt a szorzandó számjegyei sorakoznak (kivéve a szorzandó első számjegyét), így a szorzandó 1-es számjegyét a szorzat 3-as számjegye elé írjuk.

$$\begin{array}{r} \underline{\qquad\quad} \cdot 3 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{\qquad 1} \cdot 3 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{\qquad 1} \cdot 3 \\ 13 \end{array}$$

A szorzat utolsó előtti jegye úgy lesz 1-es, ha a szorzandó utolsó előtti jegye 7. Ezt a 7-est beírjuk a szorzatba is.

$$\begin{array}{r} \underline{\quad 71} \cdot 3 \\ 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{\quad 71} \cdot 3 \\ 713 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{\quad 571} \cdot 3 \\ 713 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{\quad 571} \cdot 3 \\ 5713 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{\quad 8571} \cdot 3 \\ 5713 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{\quad 8571} \cdot 3 \\ 85713 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{\quad 28571} \cdot 3 \\ 85713 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{\quad 28571} \cdot 3 \\ 285713 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{428571} \cdot 3 \\ 285713 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{428571} \cdot 3 \\ 1285713 \end{array}$$

A szorzás lépéseit így folytatva sorra felgöngyölítjük a számjegyeket. (Ennek lépéseit látjuk az ábrákon.)

37. Gondoltam egy hatjegyű számot. Az első számjegyét letöröltem és átírtam a végére, így az eredeti szám háromszorosát kaptam. Melyik számra gondoltam?

KöMaL, 2006. szeptember, B.3922.

Megoldás: A feltételek szerint: $\overline{abcdef} \cdot 3 = \overline{bcdefa}$.

Legyen $A = \overline{bcdef}$, ekkor $(100\,000a + A) \cdot 3 = 10A + a$, azaz $299\,999a = 7A$, $A = 42857a$.

A legfeljebb ötjegyű szám. Így az a (nemnulla) értéke 1 vagy 2 lehet (3-nál már hatjegyű számot kapnánk).

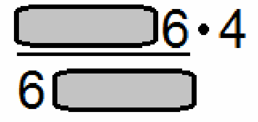
Ha $a = 1$, akkor a gondolt szám $142\,857$, ha pedig $a = 2$, akkor $A = 42857 \cdot 2 = 85714$, ekkor a gondolt szám $285\,714$.

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ezek a számok megfelelnek a követelményeknek.

38. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek utolsó számjegye 6, és ha az utolsó helyről a 6-os számjegyet az első helyre tesszük – miközben a többi számjegy változatlan marad –, akkor a szám 4-szeresét kapjuk?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1991; 5. osztályosok versenye
Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1962

Megoldás: A feltételek szerinti írásbeli szorzást az ábra mutatja. A befestett keretben mindkét helyen ugyanaz a szám áll.



Kezdjük el az írásbeli szorzást. A szorzat utolsó jegye 4, és mint tudjuk, a szorzandóban is ugyanazok a számjegyek állnak, tehát ezt a 4-est a szorzandóban a 6-os elé írjuk. Ezt a két lépést ismételjük: kiszámoljuk a szorzat következő számjegyét, majd ezt a számjegyet leírjuk a szorzandóba is. Ezeket a lépéseket látjuk az ábrákon.

$$\begin{array}{r}\underline{\quad 6\cdot 4}\\ \end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{\quad 46\cdot 4}\\ 4\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{\quad 46\cdot 4}\\ 84\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{\quad 846\cdot 4}\\ 84\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\underline{\quad 846\cdot 4}\\ 384\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{\quad 3846\cdot 4}\\ 384\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{\quad 3846\cdot 4}\\ 5384\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{\quad 53846\cdot 4}\\ 5384\end{array}$$

Addig folytatjuk az eljárást, amíg a szorzandóban fel nem bukkan a 6-os számjegy úgy, hogy az akkori szorzásnál nem keletkezik átvitel.

$$\begin{array}{r}\underline{\quad 53846\cdot 4}\\ 15384\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{153846\cdot 4}\\ 15384\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{153846\cdot 4}\\ 615384\end{array}$$

Megtaláltuk a keresett számot: 153846.

Oldjuk meg a feladatot egyenlet segítségével is.

A feltételek szerint: $\overline{abc\ldots pq6}\cdot 4=\overline{6abc\ldots pq}$.

Legyen $A=\overline{abc\ldots pq}$, ekkor $(10A+6)\cdot 4=6\cdot 10^n+A$, ahol n az A számjegyeinek száma.

$39A=6\cdot 10^n-24$, vagyis $13A=2\cdot 10^n-8$, $A=\dfrac{2\cdot\left(10^n-4\right)}{13}$. Ennek a törtnek az értéke egész szám. Keressük a legkisebb olyan n pozitív egész számot, amelyre $13\,|\,10^n-4$.

Kezdjük el vizsgálni a 6, 96, 996, 9996, 99996, … számokat, keressük az első 13-mal osztható számot.

$99996=13\cdot 7692$, így $A=\dfrac{2\cdot\left(10^5-4\right)}{13}=2\cdot 7692=15384$.

A keresett legkisebb szám $10A+6=153846$.

Ha nem a legkisebb számot keressük, akkor megkapjuk a további megoldásokat a 153846 szám többszöri egymás után írásával: 153846153846, 153846153846153846, …