4. Vektorok

I. Feladatok

1. Milyen hosszú a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ vektor, ha $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $|\boldsymbol{c}| = 3$ és az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok által bezárt szög $60°$?

2. Mit állíthatunk az *ABCD* konvex négyszögről, ha
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0\,?$$

3. Igaz-e, hogy a sík tetszőleges *A, B, C, D* pontjára $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ teljesül?

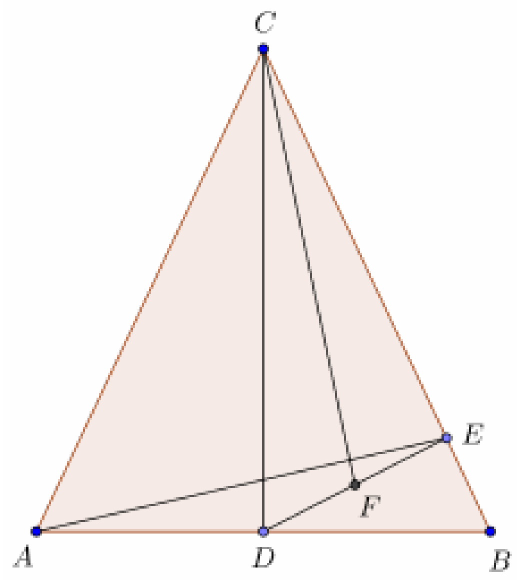
4. Adott a síkon az *ABCD* téglalap és egy tetszőleges *X* pont. Igazolja, hogy ekkor $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XD}$.

5. Az *ABC* háromszög *BC, CA, AB* oldalainak felezőpontja rendre *D, E, F*. Bizonyítsa be, hogy a sík tetszőleges *P* pontjára $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

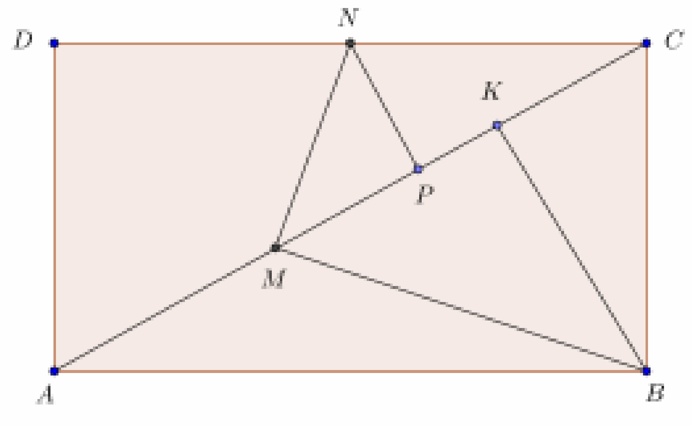
6. Az *O* középpontú kör *AB* és *CD* húrjai merőlegesek egymásra és metszéspontjuk *M*. Bizonyítsa be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$.

7. Bizonyítsa be, ha az *ABC* háromszögben $AB^2 = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

8. Az *ABC* háromszög egyenlő szárú, $AC = BC$, és az *AB* alap felezőpontja *D*. Az *E* pontot a *CB* oldalon úgy vesszük fel, hogy $DE \perp BC$, és a *DE* szakasz felezőpontja *F*. Bizonyítsa be, hogy $AE \perp CF$.



9. Az *ABCD* téglalap *AC* átlóján úgy vettük fel a *K* pontot, hogy *BK* merőleges az átlóra. *M* az *AK*, *N* a *CD* felezőpontja. Bizonyítsa be, hogy $BM \perp MN$.



10. Az *ABCD* konvex négyszögben az *AC, BD, AB* és *CD* szakaszok felezőpontjai *M, N, P* és *Q*. Igazolja, hogy ha $MN = PQ$, akkor $AD \perp BC$.

11. Az *ABC* hegyesszögű háromszög *M* magasságpontja a CC_1 magasságvonalon úgy helyezkedik el, hogy $CM : MC_1 = 3 : 1$. (C_1 a magasság talppontja.) Mekkora az $AFB\angle$, ha *F* a CC_1 szakasz felezőpontja?

OKTV 2009/2010; I. kategória, 1. forduló

12. Bizonyítsa be, hogy a kocka éléből, lapátlójából és testátlójából háromszög szerkeszthető, és ennek a háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala.

OKTV 2008/2009; I. kategória, 1. forduló

13. Mutassa meg, hogy az *a, b, c* oldalú háromszögben az *a* és *b* oldalakhoz tartozó súlyvonalak pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $a^2 + b^2 = 5c^2$.

14. Az *ABCDEF* hatszög *AB, BC, CD, DE, EF* és *FA* oldalainak felezőpontjai *M, N, P, Q, R* és *S*. Bizonyítsa be, hogy $MQ \perp PS$ pontosan akkor, ha $RN^2 = MQ^2 + PS^2$.

15. Az *ABCD* rombusz hegyesszöge $45°$. Mutassa meg, hogy a rombusz beírt körének tetszőleges *P* pontjára teljesül: $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \frac{5}{2} AB^2$.

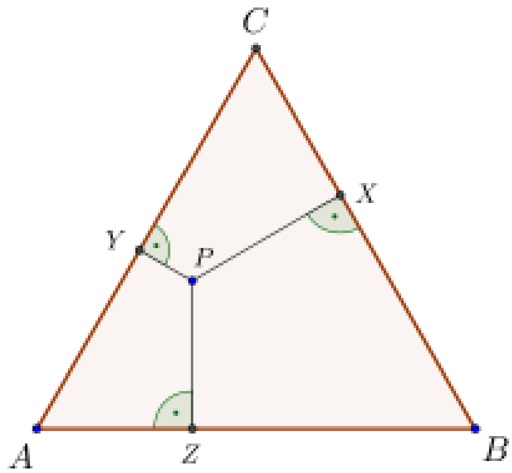
OKTV 2014/2015; I. kategória, 2. forduló

16. Egy konvex *ABCD* négyszög átlóinak metszéspontja *O*. Bizonyítsa be, hogy az $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2\right)$ összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha az *AC* és *BD* átlók merőlegesek, vagy ha egyiküknek a felezőpontja *O*.

KöMaL, 2009. március, B.4165.

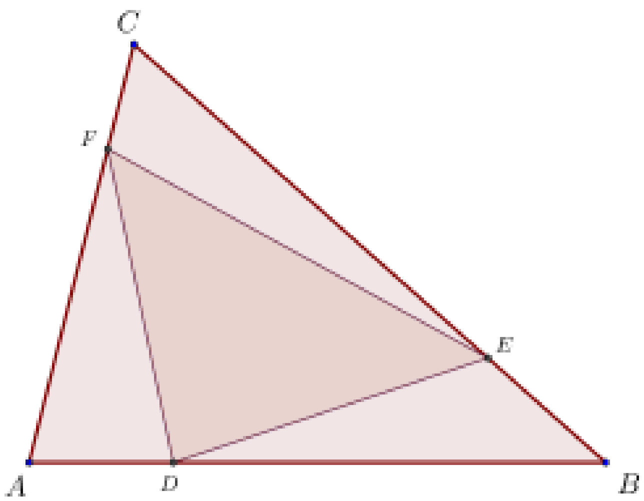
17. Bizonyítsa be, hogy a kocka minden háromszögmetszete hegyesszögű.

18. Az ABC szabályos háromszög egy belső pontja P. Ebből a pontból merőlegeseket állítunk az oldalakra, ezek talppontjai X, Y és Z, és ezek a pontok rendre a BC, CA, ill. AB oldalakra illeszkednek.



Mekkora lehet $\dfrac{BX+CY+AZ}{PX+PY+PZ}$ értéke?

19. Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain felvesszük a D, E, F pontokat úgy, hogy $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{CF}{FA}$.



Bizonyítsa be, hogy a DEF háromszög súlypontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával.

20. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Az AC átlót hosszabbítsuk meg az A-n túl MC hosszával, a BD átlót B-n túl MD hosszával, a kapott pontok E és F. Bizonyítsa be, hogy EF párhuzamos a négyszög egyik középvonalával.

KöMaL, 2010. szeptember, C.1044.

21. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O, magasságpontja M. Mutassa meg, hogy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

22. Az ABC háromszög oldalai a, b, c, köré írt körének a sugara r, magasságpontja M, $d = |OM|$. Mutassa meg, hogy $d^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

23. Az ABC háromszög oldalai a, b, c, köré írt körének a sugara r. Mutassa meg, hogy a háromszög pontosan akkor hegyes-, derék-, ill. tompaszögű, ha $a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2 > 0$, $= 0$, ill. < 0.

24. Az ABC háromszög C csúcsánál lévő szöge $120°$. A háromszög magasságpontja M, a körülírt körének középpontja O, a kör ACB ívének felezőpontja pedig F. Bizonyítsa be, hogy $MF = FO$.

KöMaL, 2010. április, B.4264.

25. Az $ABCD$ húrnégyszög ABC, BCD, CDA, DAB részháromszögeinek szerkesszük meg a magasságpontjait. Bizonyítsa be, hogy ezek a magasságpontok az $ABCD$ négyszöggel egybevágó négyszöget alkotnak.

26. Az ABC háromszög CC_1 súlyvonala a köré írt kört másodszor a D pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy $CA^2 + CB^2 = 2CC_1 \cdot CD$.

27. Legyenek egy háromszög csúcsai A_1, A_2, A_3, a súlypontja S. Messék az A_1S, A_2S, A_3S egyenesek a háromszög köré írt kört másodszor a B_1, B_2, B_3 pontokban. Igazolja, hogy $SB_1 + SB_2 + SB_3 \geq A_1S + A_2S + A_3S$.

OKTV 1987; IV. kategória, 2. forduló

28. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mutassa meg, hogy $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$.

29. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mutassa meg, hogy $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$.

30. Mennyi $2\cos\alpha + 6\cos\beta + 3\cos\gamma$ minimuma, ha $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ és $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$?

OKTV 2008/2009; III. kategória, 1. forduló

II. Megoldások

1. Milyen hosszú a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ vektor, ha $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $|\boldsymbol{c}| = 3$ és az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok által bezárt szög $60°$?

Megoldás: Használjuk a skaláris szorzás tulajdonságait. $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}^2}$. Az $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ feltétel miatt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, továbbá $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$, így $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$. Mivel az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok által bezárt szög $60°$, így $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \cos 60° = 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Ezek alapján: $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^2} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}$, azaz $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{1 + 4 + 9 - 3} = \sqrt{11}$.

Megjegyzés. Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok közötti szögek miatt a három vektor nem egy síkban fekszik.

2. Mit állíthatunk az *ABCD* konvex négyszögről, ha

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0?$$

Megoldás: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) =$
$= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = 0$.

Válasszunk egy külső vonatkoztatási pontot. Minden pontba a megfelelő kisbetűs vektor mutasson. Ekkor:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c},$$

tehát $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, ezért $\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)^2 = 0$. Tehát $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC}$, azaz az *ABCD* konvex négyszög paralelogramma.

3. Igaz-e, hogy a sík tetszőleges *A, B, C, D* pontjára $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ teljesül?

Megoldás: Válasszunk egy külső vonatkoztatási pontot. Minden pontba a megfelelő kisbetűs vektor mutasson. Ekkor:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) =$$
$$= \boldsymbol{bd} - \boldsymbol{bc} - \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc} - \boldsymbol{cd} - \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{cd} - \boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ab} = \underline{0}.$$

Tehát igaz az állítás.

Megjegyzés. A következő állítást nyertük:

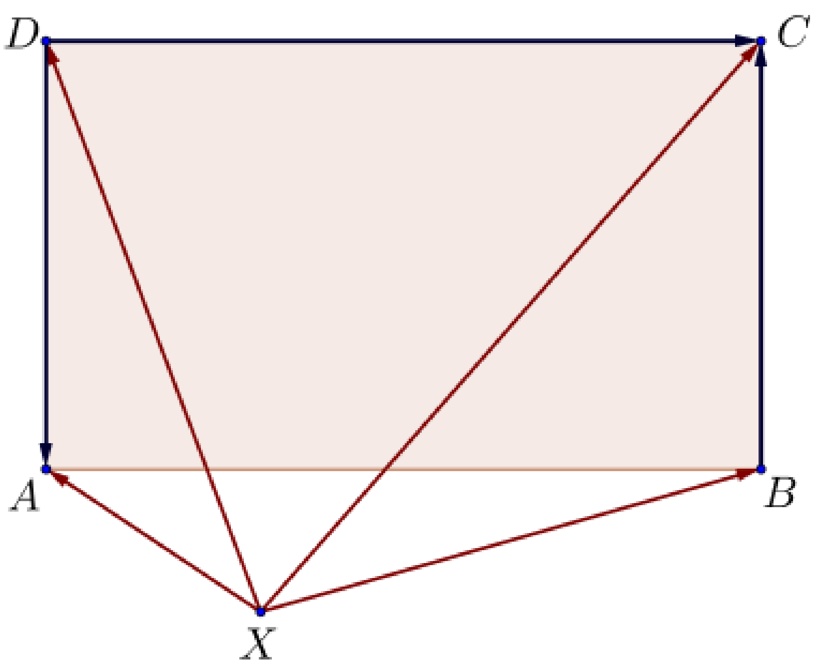
Tetszőleges *ABCD* négyszögben $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Vezesse le ebből, hogy az *ABCD* húrnégyszögben $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (Lásd: Ptolemaiosz-tétel.)

4. Adott a síkon az *ABCD* téglalap és egy tetszőleges *X* pont. Igazolja, hogy ekkor $\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XD}$.

Megoldás: Bontsunk fel egy-egy vektort két vektor összegére:

$$\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{DA}\,,\ \overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BC}\,.$$



Ekkor

$$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XC}=\left(\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{DA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} \qquad (1)$$

A téglalap szemben lévő oldalai párhuzamosak és egyenlők, ezért:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DA}\,,$$

tehát

$$\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}\cdot\left(-\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{DA}\cdot\left(\overrightarrow{DX}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\underline{0},$$

mert a téglalap szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.

Ezt az (1) összefüggésben felhasználva megkapjuk a bizonyítandó állítást.

5. Az *ABC* háromszög *BC, CA, AB* oldalainak felezőpontja rendre *D, E, F*. Bizonyítsa be, hogy a sík tetszőleges *P* pontjára $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

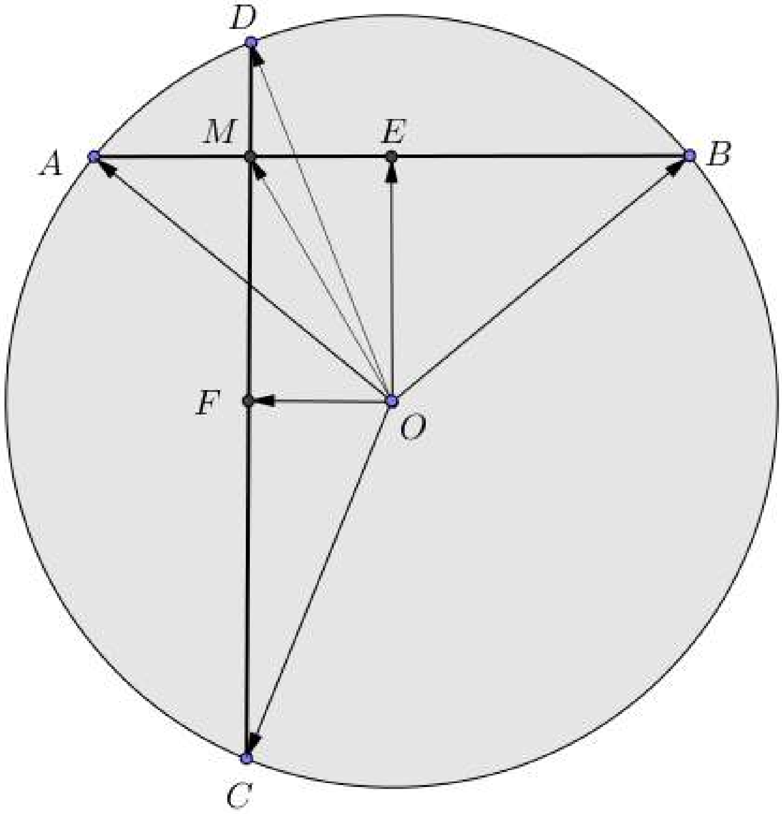
Megoldás: $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{AB}=$

$$=\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2}\cdot\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\right)+\frac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}}{2}\cdot\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\right)+\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\cdot\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(PC^2-PB^2+PA^2-PC^2+PB^2-PA^2\right)=0\,.$$

6. Az O középpontú kör AB és CD húrjai merőlegesek egymásra és metszéspontjuk M. Bizonyítsa be, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$.

Megoldás: Legyen E és F az AB és CD húrok felezőpontja. Tudjuk, hogy $OE\perp AB$, $OF\perp CD$ és $AB\perp CD$, tehát $OEMF$ téglalap.



Ezért $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}$, így $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

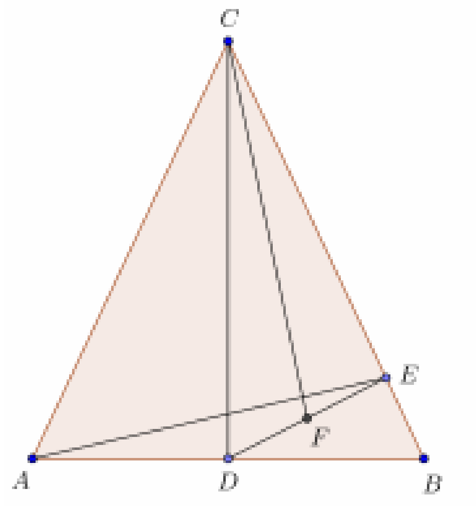
7. Bizonyítsa be, ha az ABC háromszögben $AB^2=2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy $AC=BC$. Az AB oldal felezőpontját D-vel jelöljük.
$AB^2=2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, azaz $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right)=0$, így

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}-\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}=\overrightarrow{CD}$.

Ez azt jelenti, hogy CD merőleges az AB oldalra, ahol D az AB oldal felezőpontja. Tehát a C csúcsból induló magasság felezi a szemközti oldalt, ezért a háromszög egyenlő szárú.

8. Az ABC háromszög egyenlő szárú, $AC = BC$, és az AB alap felezőpontja D. Az E pontot a CB oldalon úgy vesszük fel, hogy $DE \perp BC$, és a DE szakasz felezőpontja F. Bizonyítsa be, hogy $AE \perp CF$.



Megoldás: Azt kell belátnunk, hogy $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$.

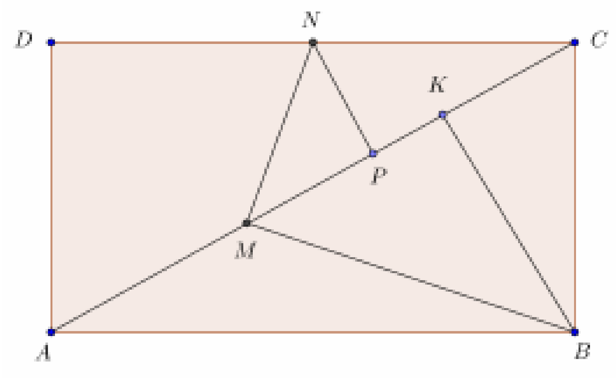
Ekkor $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BE} =$

$= 0 + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}\right) + \overrightarrow{DF} \cdot 2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} \cdot 2\overrightarrow{DB} =$

$= 0 + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Ezért $AE \perp CF$.

9. Az $ABCD$ téglalap AC átlóján úgy vettük fel a K pontot, hogy BK merőleges az átlóra. M az AK, N a CD felezőpontja. Bizonyítsa be, hogy $BM \perp MN$.



Megoldás: Felhasználjuk, hogy az NPC és az ABK derékszögű háromszögek hasonlóak, a hasonlóság aránya $1:2$.

$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}\right) = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{PN} =$

$= 0 + \overrightarrow{BK} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{MP} + 0 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KC} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2 = 0$

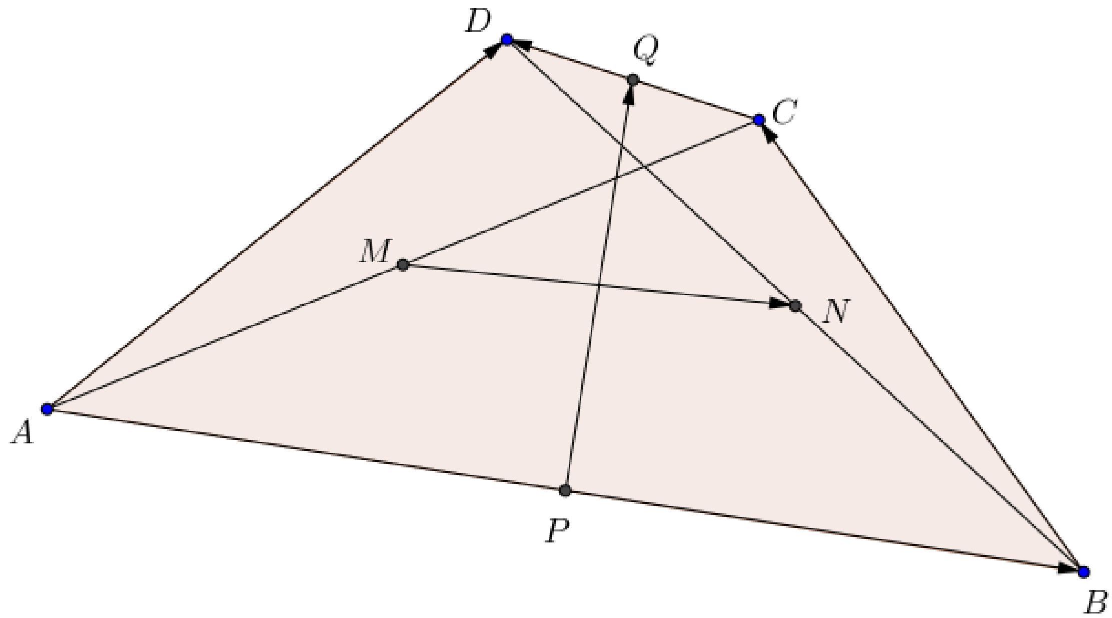
Az előző átalakítások során használtuk, hogy a hasonlóság miatt: $PC = \frac{1}{2}AK = AM = MK$, azaz $PC = MK$, így $MP = KC$; továbbá az ABC háromszögben a magasságtételt.

10. Az $ABCD$ konvex négyszögben az AC, BD, AB és CD szakaszok felezőpontjai M, N, P és Q. Igazolja, hogy ha $MN = PQ$, akkor $AD \perp BC$.

Megoldás: $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, azaz

$2\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, így

$\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$.



$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$, $\quad \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$, és $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$, így

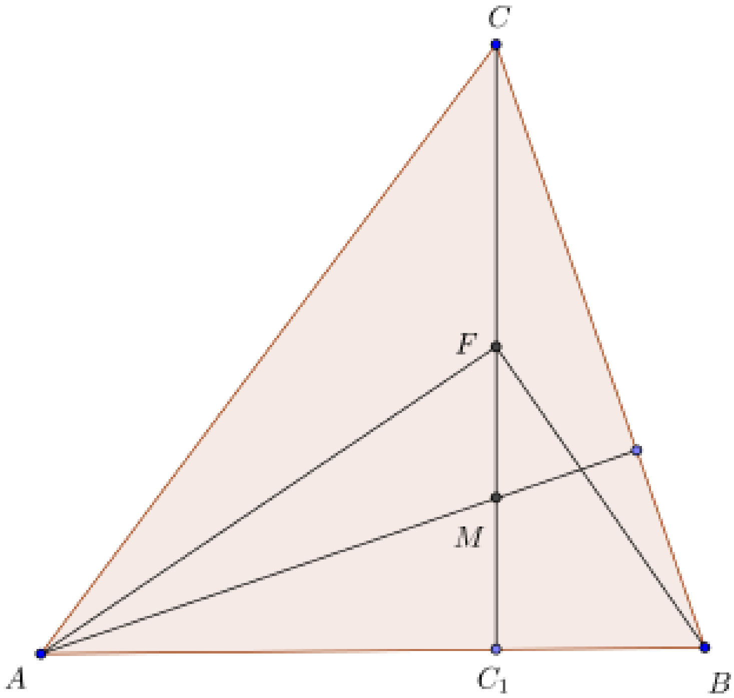
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NB}\right) = \overrightarrow{AB} - \left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right)$.

A feltétel szerint $MN = PQ$, azaz $MN^2 = PQ^2$, $\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)\right]^2$. Innen rendezés után az $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ egyenlőséghez jutunk, azaz $AD \perp BC$.

11. Az ABC hegyesszögű háromszög M magasságpontja a CC_1 magasságvonalon úgy helyezkedik el, hogy $CM : MC_1 = 3:1$. (C_1 a magasság talppontja.) Mekkora az $AFB\angle$, ha F a CC_1 szakasz felezőpontja?

OKTV 2009/2010; I. kategória, 1. forduló

Megoldás: Sejthető, hogy $AFB\angle = 90°$. Ellenőrizzük a sejtést. Vajon igaz-e, hogy $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$?



A feltételekből $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, azaz

$0 = \left(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1M}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC_1} + 4\overrightarrow{C_1M}\right) = \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{AC_1} \cdot 4\overrightarrow{C_1M} + \overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{C_1M} \cdot 4\overrightarrow{C_1M} =$

$= \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} + 0 + 0 + \overrightarrow{C_1M} \cdot 4\overrightarrow{C_1M}$, tehát $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{C_1M} \cdot 4\overrightarrow{C_1M} = 0$.

Számoljuk ki a kérdéses $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB}$ szorzatot.

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB} = \left(\overrightarrow{AC_1} + 2\overrightarrow{C_1M}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1B}\right) =$

$= \overrightarrow{AC_1} \cdot 2\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} + 2\overrightarrow{C_1M} \cdot 2\overrightarrow{MC_1} + 2\overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0 + \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} + 2\overrightarrow{C_1M} \cdot 2\overrightarrow{MC_1} + 0 =$

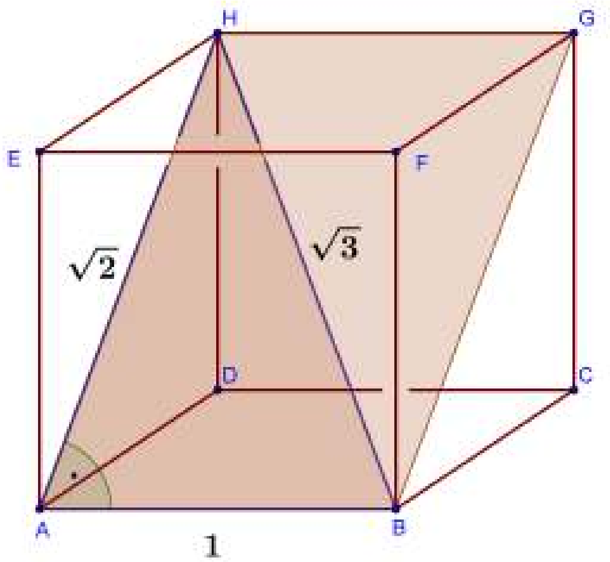
$= \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{C_1M} \cdot 4\overrightarrow{C_1M}$, és mint tudjuk, ez $= 0$.

Tehát a sejtésünk igaznak bizonyult, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$, azaz $AFB\angle = 90°$.

12. Bizonyítsa be, hogy a kocka éléből, lapátlójából és testátlójából háromszög szerkeszthető, és ennek a háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala.

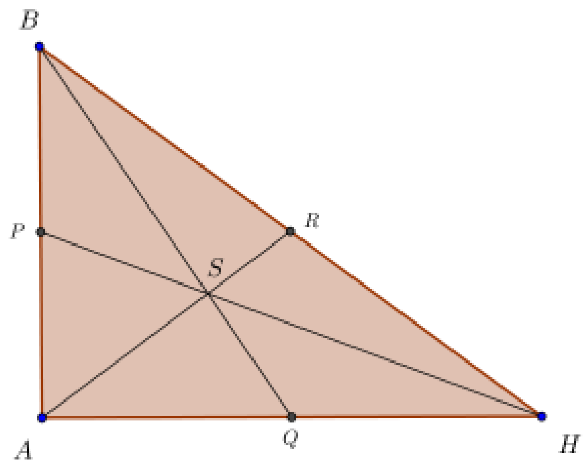
OKTV 2008/2009; I. kategória, 1. forduló

Megoldás: Válasszuk a kocka élét 1 egységnek, ekkor a lapátló $\sqrt{2}$, a testátló $\sqrt{3}$ egység. Az ábrán az *A, B, H* csúcsokat választva egy megfelelő háromszöget kapunk. *AB* merőleges az *ADHE* síkra, ezért annak minden egyenesére, tehát *AH*-ra is. Ezért az *ABH* háromszög derékszögű.



A háromszög oldalainak hossza: $AB = 1,\ AH = \sqrt{2},\ HB = \sqrt{3}$.

Lássuk be, hogy a *BAH* háromszög két súlyvonala merőleges: $AR \perp BQ$, azaz $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$.



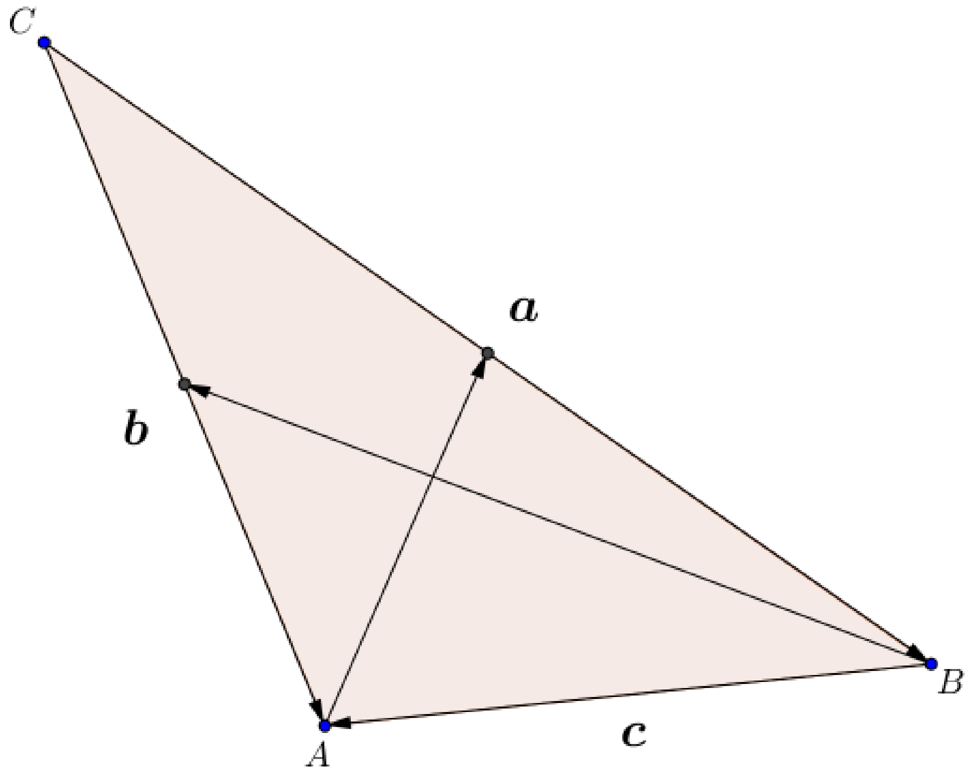
$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right),\ \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.$$

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - 0 + 0 - \frac{1}{2} \cdot 2\right) = 0.$$

13. Mutassa meg, hogy az a, b, c oldalú háromszögben az a és b oldalakhoz tartozó súlyvonalak pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Megoldás: A háromszögben $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, ennek négyzete $c^2 = a^2 + b^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.



Az ábrán látható két súlyvonal $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ és $\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

A két súlyvonal pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla:

$$0 = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\right) = \frac{5}{4}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}, \text{ azaz } 2a^2 + 2b^2 - 5\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

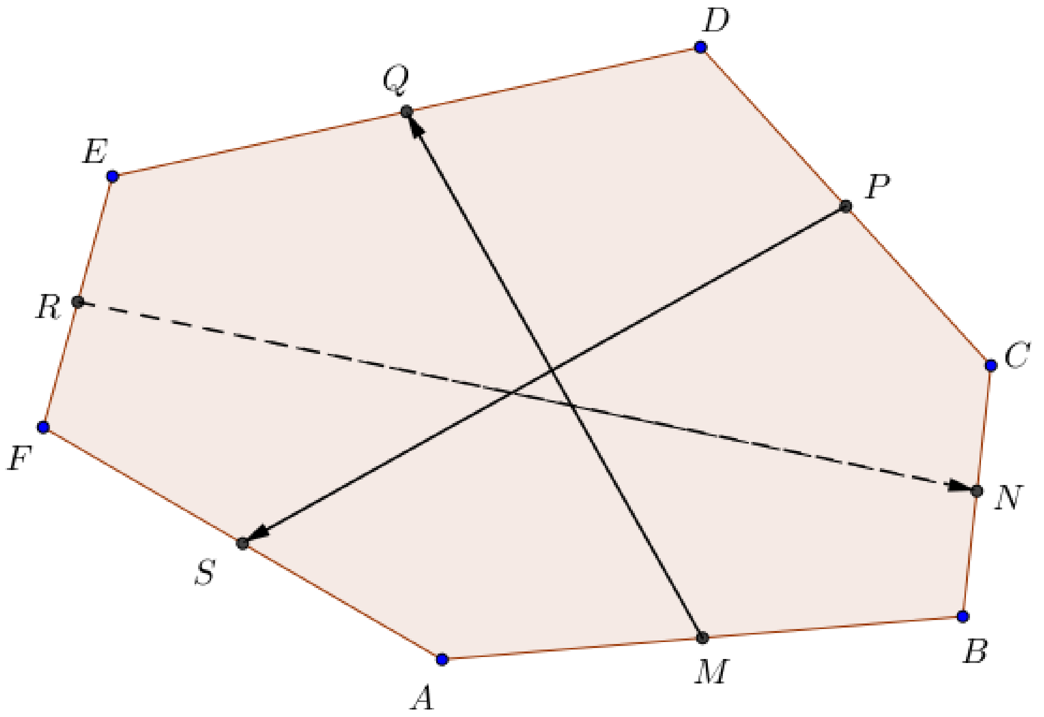
Tudjuk, hogy $c^2 = a^2 + b^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, így

$$5c^2 = 5a^2 + 5b^2 - 10\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^2 + b^2 + \left(4a^2 + 4b^2 - 10\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\right) = a^2 + b^2 + 2\left(2a^2 + 2b^2 - 5\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\right),$$

azaz $5c^2 = a^2 + b^2$ pontosan akkor teljesül, ha $2a^2 + 2b^2 - 5\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, azaz a két súlyvonal merőleges egymásra.

14. Az *ABCDEF* hatszög *AB, BC, CD, DE, EF* és *FA* oldalainak felezőpontjai *M, N, P, Q, R* és *S*. Bizonyítsa be, hogy $MQ \perp PS$ pontosan akkor, ha $RN^2 = MQ^2 + PS^2$.

Megoldás: $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$, illetve $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$. Adjuk össze a két egyenlőséget, és vegyük figyelembe, hogy az ellentett vektorok összege nullvektor: $2\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}$.



Hasonlóan kapjuk, hogy $2\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ és $2\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$.

Összeadjuk a három egyenlőséget és csoportosítunk: $2\left(\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS}\right) =$
$= \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DE}\right) + \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AF}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EF}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\right) = \underline{0}$.

Tehát $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS} = \underline{0}$, $\overrightarrow{RN} = -\left(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS}\right)$, ennek négyzete
$RN^2 = MQ^2 + PS^2 - 2\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{PS}$.

Ezért pontosan akkor teljesül, hogy $RN^2 = MQ^2 + PS^2$, ha $\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$, azaz $MQ \perp PS$.

Megjegyzés. Az $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS} = \underline{0}$ állítás egyszerűbben kijön, ha egy külső pontból induló helyvektorokat használunk (ha egy feladatban felezőpontok vannak, szinte mindig érdemes ezt használni).

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},\ \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2},\ \boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{2},\ \boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}}{2},\ \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}}{2},\ \boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{a}}{2}.$$

$$\overrightarrow{RN} = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2} - \frac{\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}}{2},\ \overrightarrow{MQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}}{2} - \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},\ \overrightarrow{PS} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{a}}{2} - \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{2}.$$

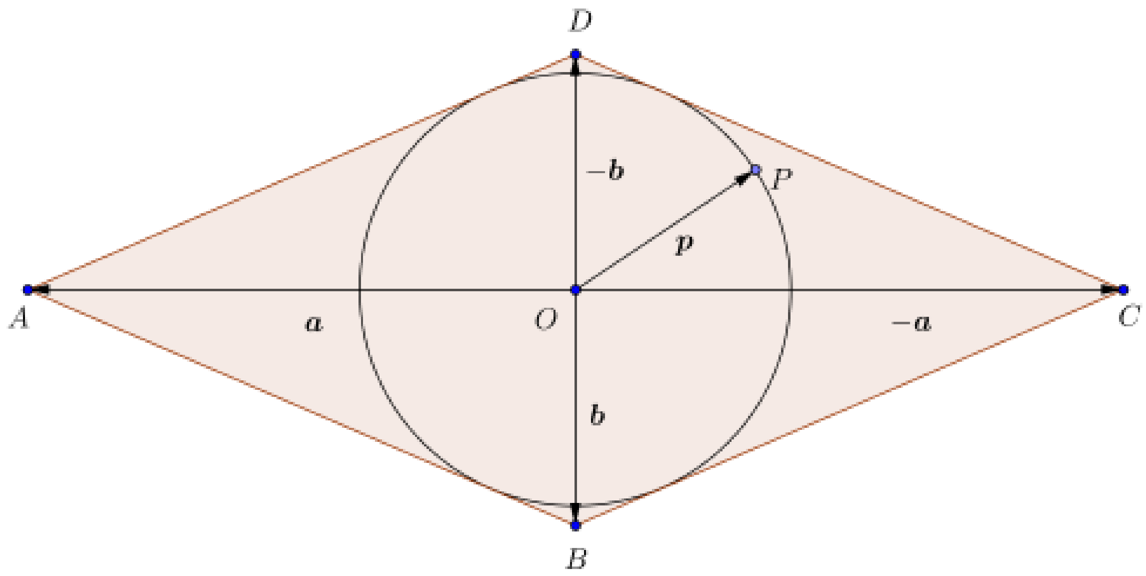
Ezeket az egyenleteket összeadva: $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS} = \underline{0}$.

15. Az $ABCD$ rombusz hegyesszöge $45°$. Mutassa meg, hogy a rombusz beírt körének tetszőleges P pontjára teljesül: $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \frac{5}{2}AB^2$.

OKTV 2014/2015; I. kategória, 2. forduló

Megoldás: Irányítsunk vektorokat az O pontból a rombusz csúcsaiba és a P pontba az ábra szerint. Legyen $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ és $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{p}$.

A rombusz átlói felezik egymást, így $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = -\boldsymbol{a}$, továbbá $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} = -\boldsymbol{b}$.



A PA szakasz hosszának négyzete a $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p})$ vektor önmagával vett skaláris szorzata, emiatt $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p})^2 + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p})^2 + (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})^2 = 4\boldsymbol{p}^2 + 2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2$.

A Pitagorasz-tétel miatt $2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2 = 2 \cdot AB^2$.

Írjuk fel a rombusz területét kétféleképpen: $T = AB \cdot AD \cdot \sin 45° = AB \cdot AB \cdot \sin 45°$, valamint $T = 4 \cdot \frac{AB \cdot p}{2}$ (ez annak a négy háromszög területének összege, melyekre a rombuszt a két átlója bontja).

Ezek miatt $AB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2p$, $AB^2 \cdot \frac{1}{2} = 4p^2$.

Az eddigiek alapján $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4\boldsymbol{p}^2 + 2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2AB^2 = \frac{5}{2}AB^2$.

16. Egy konvex *ABCD* négyszög átlóinak metszéspontja *O*. Bizonyítsa be, hogy az $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2\right)$ összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha az *AC* és *BD* átlók merőlegesek, vagy ha egyiküknek a felezőpontja *O*.

KöMaL, 2009. március, B.4165.

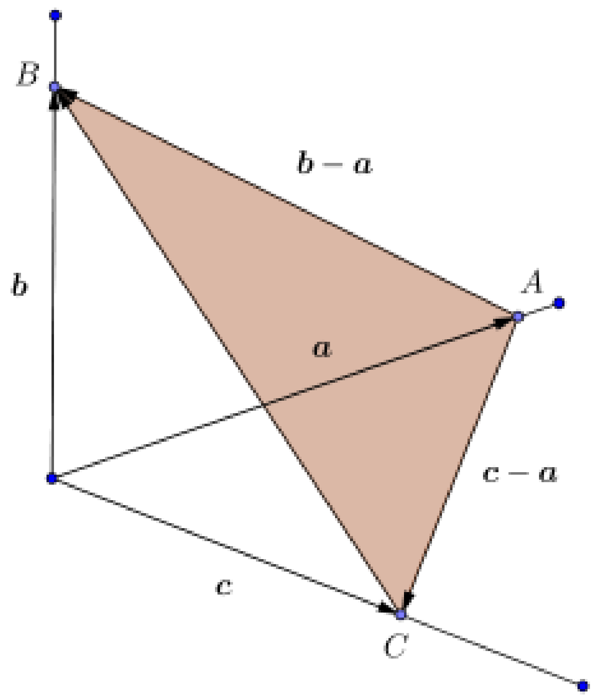
Megoldás: Legyen $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{d}$. A skaláris szorzat segítségével a szóban forgó összefüggést $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d})^2 = 2\left(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{d}^2\right)$ alakban írhatjuk fel.

Ezt átrendezve kapjuk: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{a} = 0$, ami ekvivalens az $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}) = 0$ összefüggéssel.

Ez pedig azt jelenti, hogy vagy $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \underline{0}$, vagyis $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{c}$, tehát *O* az *AC* átló felezőpontja, vagy $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} = \underline{0}$, tehát *O* a *BD* átló felezőpontja; vagy pedig az *AC* átlóval párhuzamos $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \neq \underline{0}$ vektor merőleges a *BD* átlóval párhuzamos $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} \neq \underline{0}$ vektorra, azaz a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

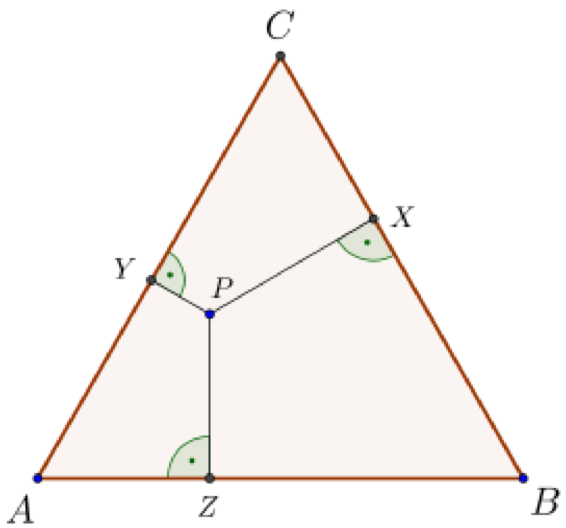
17. Bizonyítsa be, hogy a kocka minden háromszögmetszete hegyesszögű.

Megoldás: Az elmetszett három él közös csúcsából a háromszögcsúcsokhoz vezető vektorok legyenek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Válasszuk ki a metszetháromszög tetszőleges szögét, az ezt közrezáró oldalvektorok legyenek $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$.



Azt kell igazolnunk, hogy ezek skaláris szorzata pozitív:
$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 - 0 - 0 + a^2 = a^2 > 0$, és ez valóban pozitív.

18. Az ABC szabályos háromszög egy belső pontja P. Ebből a pontból merőlegeseket állítunk az oldalakra, ezek talppontjai X, Y és Z, és ezek a pontok rendre a BC, CA, ill. AB oldalakra illeszkednek.



Mekkora lehet $\dfrac{BX+CY+AZ}{PX+PY+PZ}$ értéke?

Megoldás: Jelölje a háromszög oldalainak hosszát a. A háromszög területét kétféleképpen számolva a $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{a}{2}\cdot(PX+PY+PZ)$ összefüggést kapjuk, tehát $PX+PY+PZ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

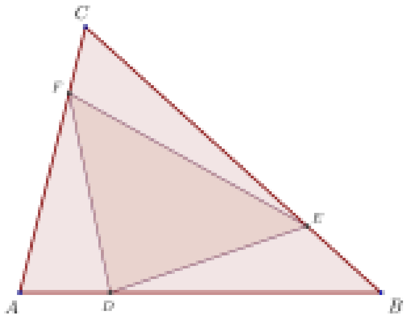
Másrészt $a\cdot BX=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}$, $a\cdot CY=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$, $a\cdot AZ=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$, így

$$a\cdot(BX+CY+AZ)=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=$$
$$=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\right)+\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)=$$
$$=\overrightarrow{BP}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=$$
$$=\overrightarrow{BP}\cdot\underline{0}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=0+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=a^2\cdot\frac{1}{2}+a^2=\frac{3}{2}a^2,$$ ahonnan

$$BX+CY+AZ=\frac{3}{2}a.$$

Eredményeinkből: $\dfrac{BX+CY+AZ}{PX+PY+PZ}=\dfrac{\frac{3}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\sqrt{3}$.

19. Az *ABC* háromszög *AB, BC, CA* oldalain felvesszük a *D, E, F* pontokat úgy, hogy $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA}$.



Bizonyítsa be, hogy a *DEF* háromszög súlypontja egybeesik az *ABC* háromszög súlypontjával.

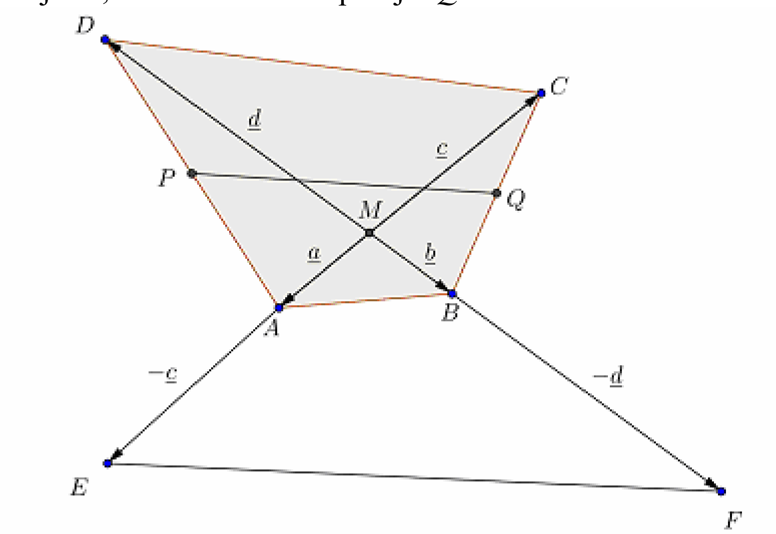
Megoldás: Használjuk fel, hogy *S* akkor és csak akkor súlypontja az *ABC* háromszögnek, ha $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \underline{0}$. (Hiszen, ha $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \underline{0}$, akkor egy tetszőleges *O* pontot választva $\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right) + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\right) = \underline{0}$, így $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$, tehát $S \equiv P$.)

Mivel $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BE} = k \cdot \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CF} = k \cdot \overrightarrow{FA}$, felírható, hogy
$\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SF} = \left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BE}\right) + \left(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CF}\right) = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + k \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \underline{0}$,
így *S* a *DEF* háromszögnek is súlypontja.

20. Az *ABCD* konvex négyszög átlóinak metszéspontja *M*. Az *AC* átlót hosszabbítsuk meg az *A*-n túl *MC* hosszával, a *BD* átlót *B*-n túl *MD* hosszával, a kapott pontok *E* és *F*. Bizonyítsa be, hogy *EF* párhuzamos a négyszög egyik középvonalával.

KöMaL, 2010. szeptember, C.1044.

Megoldás: Az *M* pontból az *A, B, C, D* csúcsokba mutató vektorok $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Jelölje az *AD* oldal felezőpontját *P*, a *BC* oldal felezőpontját *Q*.



$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d})$, $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, így $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$.

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$. Ezekből $\overrightarrow{FE} = 2 \cdot \overrightarrow{QP}$, tehát $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{QP}$.

21. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O, magasságpontja M. Mutassa meg, hogy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Megoldás: Jelölje P azt a pontot, amelyre $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$. Belátjuk, hogy $P \equiv M$.
$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ és $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, hiszen
$\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = OB^2 - OC^2 = r^2 - r^2 = 0$,
ahol r az ABC háromszög köré írt körének sugara.
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, azaz $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, vagyis $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CB}$.

Célba értünk! Az AP egyenes merőleges a háromszög BC oldalára, tehát P illeszkedik az A-ból induló magasságvonalra.

Ugyanígy láthatjuk, hogy P illeszkedik a B-ből induló magasságvonalra, illetve a C-ből induló magasságvonalra. Azaz P mindhárom magasságvonalon rajta van, tehát P a háromszög magasságpontja.

22. Az ABC háromszög oldalai a, b, c, köré írt körének a sugara r, magasságpontja M, $d = \left|OM\right|$. Mutassa meg, hogy $d^2 = 9r^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Megoldás: Az előző feladatból tudjuk, ha az ABC háromszög köré írt körének középpontja O, magasságpontja M, akkor $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Mindkét oldalt szorozzuk meg önmagával:
$OM^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}\right)$, azaz
$d^2 = r^2 + r^2 + r^2 + 2\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}\right)$.

Ki kell számolnunk a zárójelben lévő skaláris szorzatokból álló összeget.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, így $AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, azaz $c^2 = r^2 + r^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, tehát $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2r^2 - c^2$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2r^2 - a^2$ és $2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 2r^2 - b^2$.

Ezekből $d^2 = r^2 + r^2 + r^2 + 2\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}\right) =$
$= 3r^2 + \left(2r^2 - c^2\right) + \left(2r^2 - a^2\right) + \left(2r^2 - b^2\right) = 9r^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Tehát $d^2 = 9r^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Megjegyzés: Az állításból $a^2 + b^2 + c^2 \le 9r^2$ is következik, hiszen $d^2 \ge 0$.

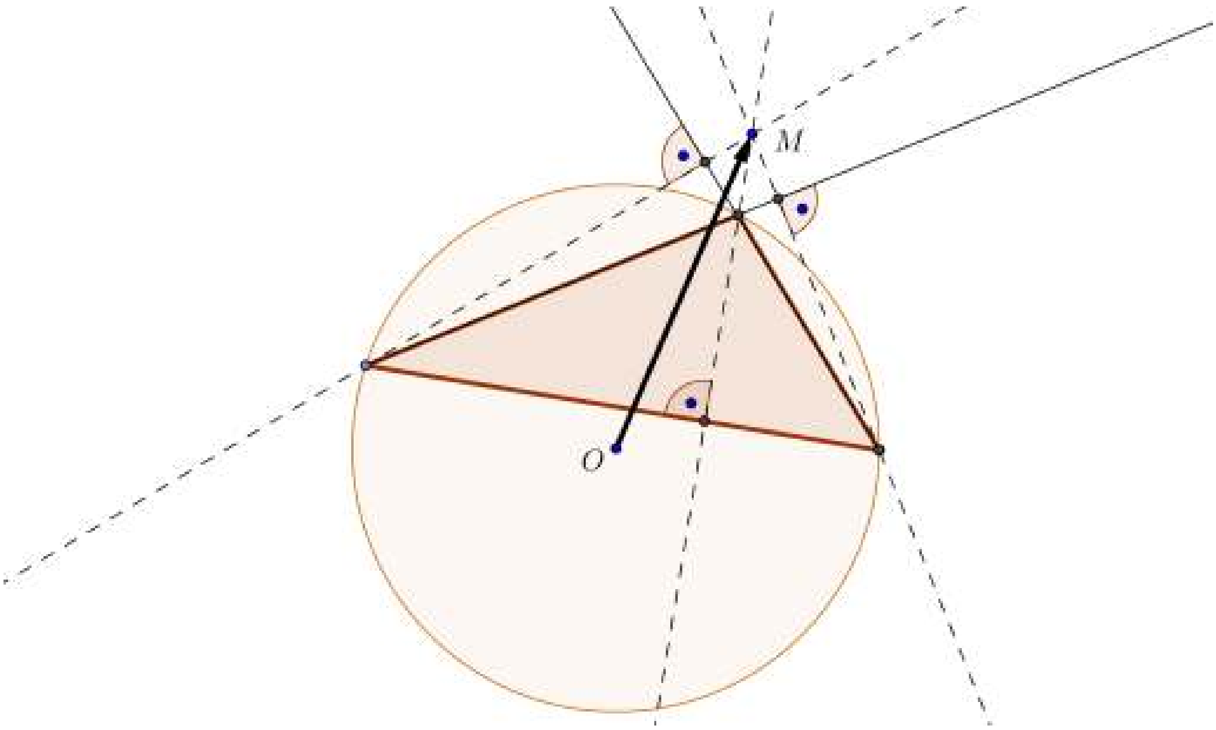
23. Az *ABC* háromszög oldalai *a, b, c*, köré írt körének a sugara *r*. Mutassa meg, hogy a háromszög pontosan akkor hegyes-, derék-, ill. tompaszögű, ha $a^2+b^2+c^2-8r^2>0$, $=0$, ill. <0.

Megoldás: Hogyan tudjuk jellemezni azt, hogy egy háromszög hegyesszögű, derékszögű vagy tompaszögű? Például azzal, hogy ezekben az esetekben a háromszög magasságpontja a háromszög köré írt körének belsejében van, a körön van, illetve a körön kívül helyezkedik el.

Hegyesszögű háromszög magasságvonalai a háromszög belsejében vannak, így a magasságpont is a háromszög belsejében van, emiatt a magasságpontja a háromszög köré írt körének belsejében van.

Derékszögű háromszög magasságpontja a háromszög derékszögű csúcsa, és ez a háromszög köré írt körön van.

Tompaszögű háromszög esetén nézzük a háromszög magasságvonalait.



A tompaszögű csúcshoz tartozó magasságvonalat a másik két magasságvonal a háromszögön kívül (a csúcs „fölött”) metszi, így a magasságpont a körön kívül van.

Ha a háromszög hegyesszögű, akkor a magasságpont a kör belsejében van, így $d^2<r^2$, azaz $9r^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)<r^2$, vagyis $0<a^2+b^2+c^2-8r^2$.

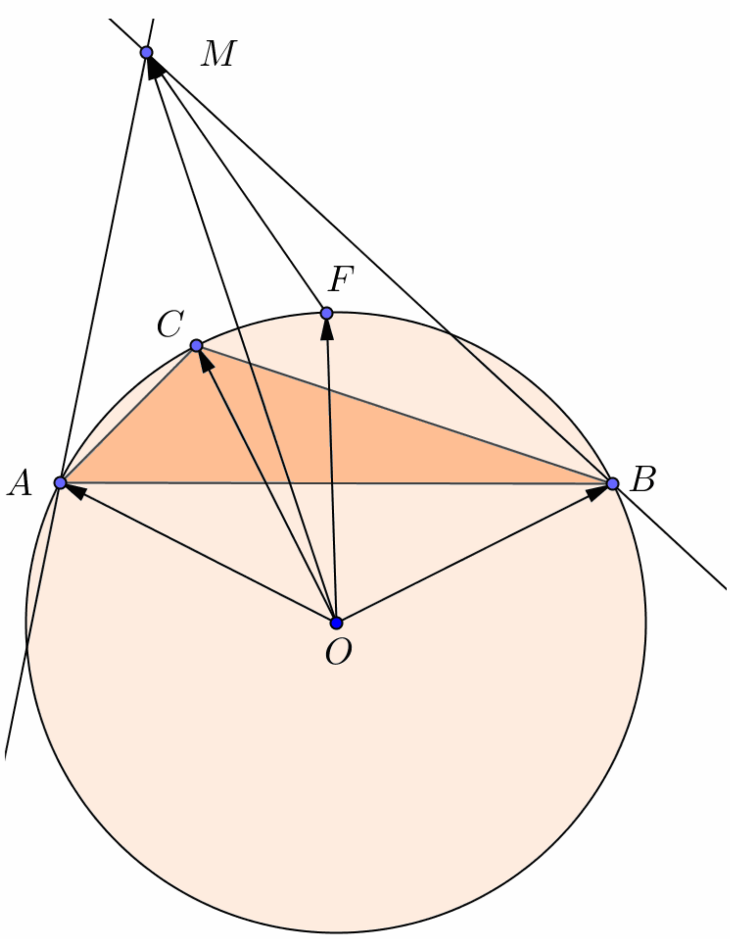
Ha a háromszög derékszögű, akkor a magasságpont a körön, azaz $d^2=r^2$, ezért $9r^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=r^2$, vagyis $a^2+b^2+c^2-8r^2=0$.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor a magasságpont a körön kívül helyezkedik el, így $d^2>r^2$, azaz $9r^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)>r^2$, vagyis $a^2+b^2+c^2-8r^2<0$.

24. Az ABC háromszög C csúcsánál lévő szöge $120°$. A háromszög magasságpontja M, a körülírt körének középpontja O, a kör ACB ívének felezőpontja pedig F. Bizonyítsa be, hogy $MF = FO$.

KöMaL, 2010. április, B.4264.

Megoldás: Korábbi feladatból már tudjuk, ha az ABC háromszög köré írt körének középpontja O, magasságpontja M, akkor $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.



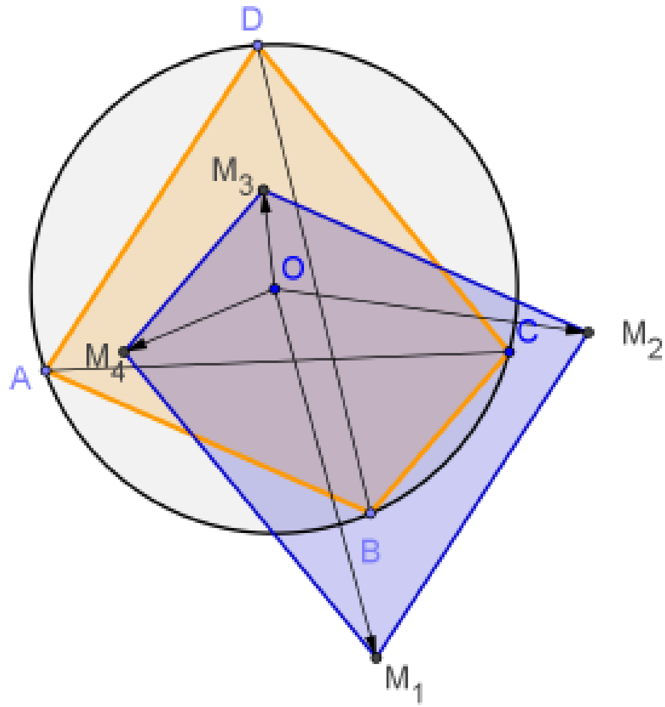
Vegyük észre, hogy az $AOBF$ négyszög rombusz. $AOB\angle = 120°$, és a kerületi és középponti szögek közötti kapcsolat miatt $AFB\angle = \dfrac{360° - 120°}{2} = 120°$. Az AOB és az AFB egyenlőszárú háromszögek szárszöge egyenlő, és a háromszögek alapja közös, így a két háromszög egybevágó, az $AOBF$ négyszög rombusz.

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, és $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM}$, ezekből $\overrightarrow{OM} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{FM}$.

Mivel $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, így $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{OC}$, ezért $FM = OC$. Továbbá $OC = OF$, tehát $FM = OF$.

25. Az *ABCD* húrnégyszög *ABC, BCD, CDA, DAB* részháromszögeinek szerkesszük meg a magasságpontjait. Bizonyítsa be, hogy ezek a magasságpontok az *ABCD* négyszöggel egybevágó négyszöget alkotnak.

Megoldás: A húrnégyszög köré írt körének középpontja legyen *O*. Az *O* pontból az *A, B, C, D* csúcsokba mutató vektorok $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$.



Felhasználjuk azt, hogy egy háromszög köré írt körének közepéből a csúcsokba mutató vektorok összege a magasságpontba mutat.

Az *O* pontból az *ABC, BCD, CDA, DAB* háromszögek magasságpontjaiba mutató vektorok $\overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OM_2} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$, $\overrightarrow{OM_3} = \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OM_4} = \boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

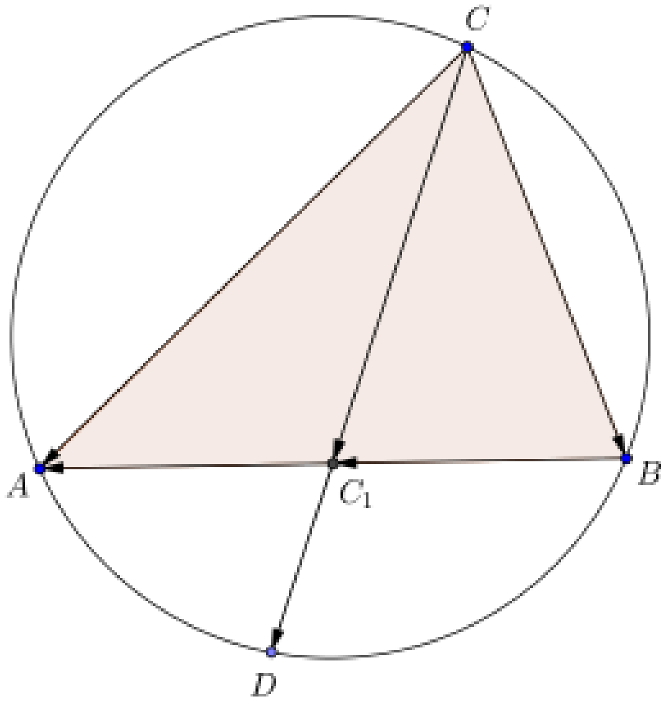
Az eredeti négyszög és a magasságpontok által meghatározott négyszög oldalvektorai megegyeznek, például: $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ és $\overrightarrow{M_3M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_3} = (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

Ebből következik, hogy a két négyszög oldalai és szögei páronként megegyeznek, tehát egybevágóak.

26. Az *ABC* háromszög CC_1 súlyvonala a köré írt kört másodszor a *D* pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy $CA^2 + CB^2 = 2CC_1 \cdot CD$.

Megoldás: $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1A}$, ennek négyzete $CA^2 = CC_1^2 + C_1A^2 + 2\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{C_1A}$.

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CC_1}$, ám $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{C_1A}$, így $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{CC_1}$, azaz $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{C_1A}$, ezért $CB^2 = CC_1^2 + C_1A^2 - 2\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{C_1A}$.



Ezek összege $CA^2 + CB^2 = CC_1^2 + C_1A^2 + 2\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{C_1A} + CC_1^2 + C_1A^2 - 2\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{C_1A} =$
$= 2\left(CC_1^2 + C_1A^2\right)$.

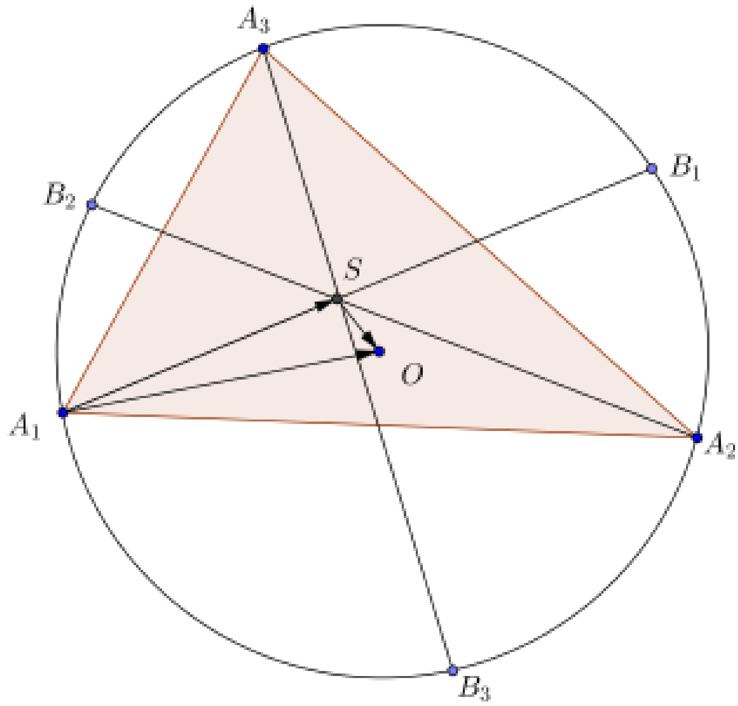
Már csak azt kell belátnunk, hogy $CC_1^2 + C_1A^2 = CC_1 \cdot CD$, azaz $C_1A^2 = CC_1 \cdot (CD - CC_1)$, és ez a szelőszakaszok szorzatára ismert összefüggés miatt igaz: $C_1A \cdot BC_1 = CC_1 \cdot C_1D$, mivel $C_1A \cdot BC_1 = C_1A^2$.

27. Legyenek egy háromszög csúcsai A_1, A_2, A_3, a súlypontja *S*. Messék az A_1S, A_2S, A_3S egyenesek a háromszög köré írt kört másodszor a B_1, B_2, B_3 pontokban. Igazolja, hogy $SB_1 + SB_2 + SB_3 \geq A_1S + A_2S + A_3S$.

OKTV 1987; IV. kategória, 2. forduló

Megoldás: Jelölje a köré írt kör közepét *O*, sugarát *r*.

Keressünk összefüggést az A_iS és SB_i szakaszok között. A szelőszakaszok szorzatára vonatkozó összefüggés szerint az $A_iS \cdot SB_i$ ($i = 1, 2, 3$) szorzatok egyenlők, és ezek a szorzatok egyenlők az $(r + SO)(r - SO)$ szorzattal is. Szükségünk lesz az *SO* szakaszra is, és ehhez használhatjuk az $\overrightarrow{A_iO} = \overrightarrow{A_iS} + \overrightarrow{SO}$ kapcsolatot.



Mivel $3r^2 = \overrightarrow{A_1O}^2 + \overrightarrow{A_2O}^2 + \overrightarrow{A_3O}^2$ és $\overrightarrow{A_iO} = \overrightarrow{A_iS} + \overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{A_iO}^2 = \overrightarrow{A_iS}^2 + \overrightarrow{SO}^2 + 2\overrightarrow{A_iS} \cdot \overrightarrow{SO}$, így $3r^2 = \overrightarrow{A_1O}^2 + \overrightarrow{A_2O}^2 + \overrightarrow{A_3O}^2 = \overrightarrow{A_1S}^2 + \overrightarrow{A_2S}^2 + \overrightarrow{A_3S}^2 + 3 \cdot \overrightarrow{SO}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{SO} \cdot \left(\overrightarrow{A_1S} + \overrightarrow{A_2S} + \overrightarrow{A_3S}\right)$.

De $\overrightarrow{A_1S} + \overrightarrow{A_2S} + \overrightarrow{A_3S} = \underline{0}$, így azt kapjuk, hogy $r^2 - \overrightarrow{SO}^2 = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A_1S}^2 + \overrightarrow{A_2S}^2 + \overrightarrow{A_3S}^2\right)$.

Nyilván $\overrightarrow{SO}^2 = SO^2$, másrészt az S ponton áthaladó szelők szakaszainak szorzata megegyezik, tehát $r^2 - \overrightarrow{SO}^2 = r^2 - SO^2 = (r + SO)(r - SO) = A_iS \cdot SB_i$, innen $SB_i = \frac{1}{A_iS}\left(r^2 - SO^2\right)$.

Ezért $SB_1 + SB_2 + SB_3 = \left(\frac{1}{A_1S} + \frac{1}{A_2S} + \frac{1}{A_3S}\right) \cdot \left(r^2 - SO^2\right) =$

$= \left(\frac{1}{A_1S} + \frac{1}{A_2S} + \frac{1}{A_3S}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(A_1S^2 + A_2S^2 + A_3S^2\right)$.

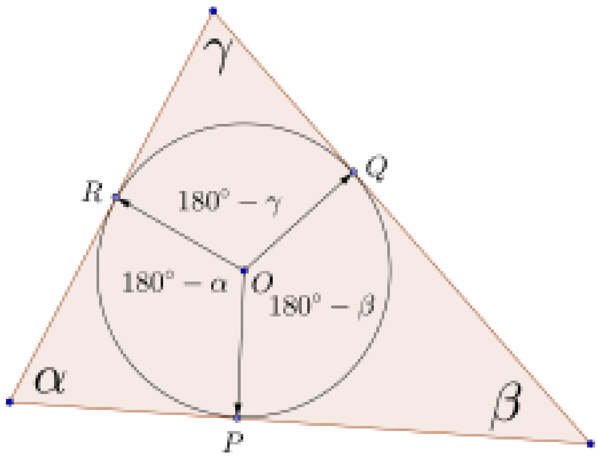
A kapott $SB_1 + SB_2 + SB_3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{A_1S} + \frac{1}{A_2S} + \frac{1}{A_3S}\right) \cdot \left(A_1S^2 + A_2S^2 + A_3S^2\right)$ összefüggésben a jobb oldal becslésére használjuk fel a harmonikus, a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \ge \frac{a + b + c}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

$$SB_1 + SB_2 + SB_3 = \left(\frac{1}{A_1S} + \frac{1}{A_2S} + \frac{1}{A_3S}\right) \cdot \frac{A_1S^2 + A_2S^2 + A_3S^2}{3} \ge$$

$$\ge \frac{9}{A_1S + A_2S + A_3S} \cdot \left(\frac{A_1S + A_2S + A_3S}{3}\right)^2 \ge A_1S + A_2S + A_3S.$$

28. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mutassa meg, hogy $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$.

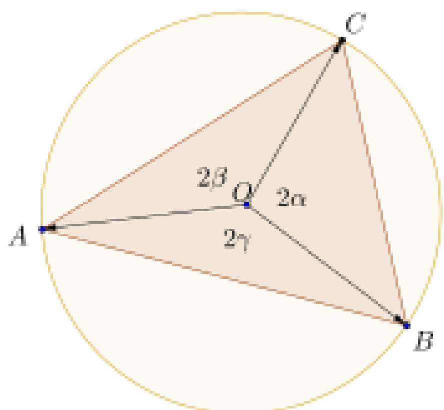
Megoldás: A háromszög *O* középpontú, *r* sugarú beírt köre az oldalakat a *P, Q, R* pontokban érinti.



$\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right)^2 \ge 0$, azaz $OP^2 + OQ^2 + OR^2 + 2\left(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OP}\right) \ge 0$,
$r^2 + r^2 + r^2 + 2r^2\left(\cos(180° - \alpha) + \cos(180° - \beta) + \cos(180° - \gamma)\right) \ge 0$,
$3r^2 - 2r^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \ge 0$, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$.

29. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mutassa meg, hogy $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \ge -\frac{3}{2}$.

Megoldás: Az *ABC* háromszög szögei α, β, γ, körül írt körének középpontja *O*, sugara *R*. A kerületi és középponti szögek közti kapcsolat miatt a kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok egymással $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ szögeket zárnak be.

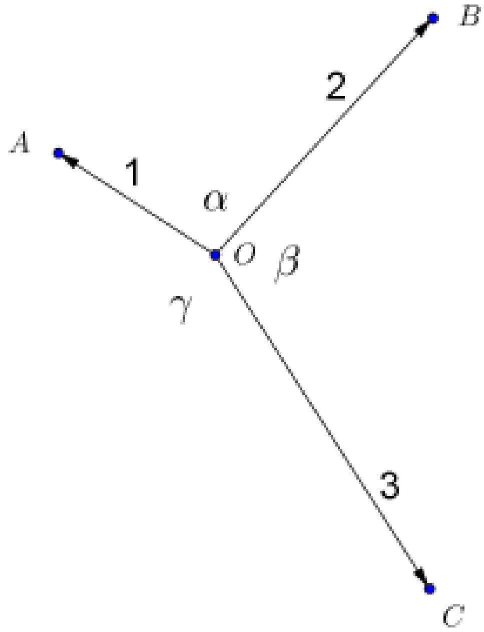


$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \ge 0$, azaz $OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}\right) \ge 0$,
$R^2 + R^2 + R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) \ge 0$, $3R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) \ge 0$,
$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \ge -\frac{3}{2}$.

30. Mennyi $2\cos\alpha + 6\cos\beta + 3\cos\gamma$ minimuma, ha $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ és $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$?

OKTV 2008/2009; III. kategória, 1. forduló

Megoldás: Tekintsük az ábrát.



$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$, azaz

$OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}\right) \geq 0$,

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 2(1 \cdot 2 \cdot \cos\alpha + 2 \cdot 3 \cdot \cos\beta + 3 \cdot 1 \cdot \cos\gamma) \geq 0$,

$14 + 2(2\cos\alpha + 6\cos\beta + 3\cos\gamma) \geq 0$,

$2\cos\alpha + 6\cos\beta + 3\cos\gamma \geq -7$.

Tehát $2\cos\alpha + 6\cos\beta + 3\cos\gamma$ értéke legalább -7.

Ezzel beláttuk, hogy a kifejezés értéke legalább -7. Most belátjuk, hogy ezt a minimumot el is tudjuk érni.

A nagyobb együtthatójú szögeket válasszuk úgy meg, hogy a koszinuszuk a lehető legkisebb legyen: $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \pi$; ekkor $2\cos 0 + 6\cos\pi + 3\cos\pi = 2 + (-6) + (-3) = -7$.

Azt kaptuk, hogy $2\cos\alpha + 6\cos\beta + 3\cos\gamma$ minimuma -7.