

5. Kombinatorika

I. Feladatok

1. Hányféleképpen olvashatók ki az alábbi ábráról a PAPRIKAJANCSI, a FELADAT és a MATEMATIKASZAKKÖR szavak, ha mindig a bal felső sarokból kell indulnunk, és minden lépésünk csak jobbra vagy lefelé történhet?

P A P R I K A J	F E L A D A T	M A T E M A
A P R I K A J A	E L A D A T	A T E M A T
P R I K A J A N	L A D A T	T E M A T I
R I K A J A N C	A D A T	E M A T I K
I K A J A N C S	D A T	M A T I K A S Z A K K
K A J A N C S I	A T	S Z A K K Ö
	T	Z A K K Ö R

2. Hány olyan legfeljebb ötjegyű szám van, amelynek minden jegye különböző, és a számjegyei balról jobbra csökkenő sorrendben követik egymást?
3. Egy cukrászdában 15-féle sütemény kapható, mindegyikből kellően sok. Szeretnénk 10 db süteményt venni úgy, hogy ne legyen mind csupa különböző. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
4. Hányféleképpen írhatjuk fel a 2015-öt néhány (egy vagy több) pozitív egész szám összegeként, ha az összeadandók sorrendje is számít?
5. Hány téglatest található egy $3 \times 4 \times 5$ -ös kockarácsban?
6. Egy zsákban 10 különböző pár cipő található. Hányféleképpen vihetünk magunkkal a zsákból 6 darab cipőt úgy, hogy legyen közöttük összetartozó pár?
7. Egy macska egy 10 szintes lépcső legfelső szintjéről szeretne lejutni a talajra néhány ugrással. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha
- egyszerre bármekkora tud ugrani, de mindig csak lentebbi szintre?
 - egyszerre mindig csak 1, 2 vagy 3 szintet ugorhat lefelé?
 - egyszerre mindig csak 1 vagy 2 szintet ugorhat lefelé, de nem ugorhat rá az alulról 4. lépcsőre?
8. Legfeljebb hány pozitív egész számot adhatunk meg úgy, hogy semelyik kettő összege és különbsége se legyen osztható 2015-tel?
9. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben a számjegyek szorzata páros?
10. Felvettünk három párhuzamos síkon rendre 8, 9 és 10 pontot. Legfeljebb hány tetraédert határozhatnak meg ezek a pontok?
11. Hány olyan ötjegyű szám van, amely 16-ra végződik és 3-mal osztható?
12. Egy 52 lapos franciakártya-csomagot szétosztunk 4 játékos között. Hány olyan leosztás van, amelyben minden játékosnak jut legalább egy treff? (A francia kártyában 4-féle színű lap található, amely színek egyike a treff, és minden színből 13 lap fordul elő.)

13. 10 ember színházba ment, ahol mindegyikük leadta a kabátját a ruhatárba (a kabátok mind különbözőek). A szórakozott ruhatáros összecserélte a kiadott sorszámkat, és az előadás végén úgy adta vissza a kabátokat (minden embernek egyet-egyet), hogy senki sem a saját kabátját kapta vissza. Hányféle különböző módon kaphatták vissza a kabátokat? (A visszaadás sorrendje nem számít.)
14. Nyolc ember sorban áll a mozi jegypénztárában. A jegy 1000 Ft-ba kerül, a kasszában kezdetben nincsen váltópénz. Négy ember 1000 Ft-ossal, négy ember 2000 Ft-ossal fizet – ez utóbbiaknak csak akkor tud a pénztáros visszaadni, ha kellő számú 1000 Ft-ossal fizettek már. Hányféle sorrendben vehetnek jegyet az emberek úgy, hogy mindenki tudjon fizetni? (Az embereket nem különböztetjük meg.)
15. a) Hányféle sorrendben számíthatjuk ki a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ szorzat értékét, ha egy lépésben mindig csak két szomszédos számot szorozhatunk össze? (Egy lehetséges sorrend például, aláhúzással jelölve a lépéseket: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{20} \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 60 \cdot \underline{6} \cdot 7 = 2 \cdot 60 \cdot 42 = \underline{120} \cdot \underline{42} = 5040$.)
- b) Hányféle sorrendben számíthatjuk ki a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ szorzat értékét, ha egy lépésben mindig két tetszőleges számot szorozhatunk össze? (Egy lehetséges sorrend például, aláhúzással jelölve a lépéseket: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \underline{2} \cdot 18 \cdot 4 \cdot \underline{5} \cdot 7 = \underline{10} \cdot \underline{18} \cdot 4 \cdot 7 = 180 \cdot \underline{4} \cdot \underline{7} = \underline{180} \cdot \underline{28} = 5040$.)
- c) Hányféleképpen helyezhetünk el 5 zárójelpárt a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ szorzatban úgy, hogy a műveletek elvégzésekor mindig egy zárójelen belüli két tényezőt kell összeszoroznunk? (Az a) feladatban szereplő $2 \cdot 3 \cdot \underline{4 \cdot 5} \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{20} \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 60 \cdot \underline{6} \cdot 7 = \underline{2 \cdot 60} \cdot 42 = \underline{120} \cdot \underline{42} = 5040$ műveletsort például a $((2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot 5))) \cdot (6 \cdot 7))$ zárójelezéssel írhatjuk le.)
16. Hányféleképpen lehet egy konvex hatszöget egymást nem metsző átlóival háromszögekre bontani?
17. Esetleges zárójelek elhelyezésével hányféle eredménye lehet a $10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1$ kifejezésnek?
18. Határozzuk meg $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$ értékét zárt alakban.
19. Az $\{1; 2; 3; 4; \dots; 2015\}$ halmazból szeretnénk kiválasztani Annának egy A és Beának egy B nem üres részhalmazt úgy, hogy ezeknek ne legyen közös eleme. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
20. 5 matematikatanár 30 érettségi dolgozatot szeretne elosztani javításra egymás között úgy, hogy mindegyikük legalább egyet kijavítson. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
21. Hányféleképpen lehet úgy sorozatba rendezni az 1, 2, 3, ..., 10 számokat, hogy a kapott sorozat az elsőtől valahányadik eleméig monoton növekedő, onnantól pedig monoton csökkenő legyen? (A két részsorozat határa akár a sorozat első vagy utolsó eleme is lehet.)
22. Határozzuk meg azon 4×4 -es, nemnegatív egész számokat tartalmazó táblázatok számát, amelyekre teljesül, hogy minden sorban és minden oszlopban legfeljebb két nem nulla szám található, továbbá minden sorban és minden oszlopban az ott található számok összege 3.

23. Egy 5×3 -as rács bal felső sarkában ül egy egér (E), aki el akar jutni a jobb alsó sarokban található sajthoz (S). Emellett a rács bal alsó sarkában ül egy rák (R), aki pedig a jobb felső sarokban található algalevelet (A) szemlélte ki magának. A két állat egyszerre mozog a rácson: minden másodpercben az egér egy rácsnit halad jobbra vagy lefelé, a rák pedig egy rácsnit halad jobbra vagy felfelé. Hányféleképpen érhetik el a céljukat úgy, hogy útközben semelyik mezőn se találkozzanak?

E				A
R				S

Náboj Nemzetközi Matematika Csapatverseny 2014/2015.

24. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek néhány számjegyét a szám elejéről (ugyanolyan sorrendben) a szám végére helyezve visszakapható az eredeti szám? (Például az 1234 nem ilyen, mert a 2341, 3412, 4123 mind különböznek tőle.)

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2014/2015; kezdők, I-II. kategória, 1. forduló

25. Hány olyan legfeljebb négyjegyű természetes szám van, amelynek számjegyei között több 2-es szerepel, mint 1-es?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2014/2015; haladók, I. kategória, 1. forduló

26. Hányféle módon lehet felmenni egy 25 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha mindig csak 2-t vagy 3-at léphetünk felfelé? (Két feljutás különböző, ha van legalább egy olyan lépcsőfok, amelyre az egyik feljutásban rálépünk, de a másikban nem.)

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2014/2015; haladók, II. kategória, 1. forduló

27. Felvettünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesre. Minden pontot összekötöttünk minden másikkal, és a keletkező élek mindegyikét pirosra vagy kékre színeztük. Tudjuk, hogy így minden pontból pontosan 12 kék színű él indul ki. Nevezzük egyszínűnek azokat a háromszögeket, amelyeknek mindhárom csúcsa a 30 pont közül való, és mindhárom oldala ugyanolyan színű. Összesen hány egyszínű háromszög van az ábrán?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2011/2012; haladók, III. kategória, 1. forduló

28. Megrajzoltuk egy konvex nyolcszög összes átlójának egyenesét, majd ezen egyenesek összes metszéspontját. Legfeljebb hány metszéspont eshet a nyolcszögön kívülre?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2014/2015; haladók, III. kategória, 1. forduló

29. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege és szorzata egyaránt 24?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2011/2012; haladók, I. kategória, 2. forduló

30. Hány olyan sorrendje van a 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 számoknak, amelyben bármely négy egymást követő szám összege osztható 3-mal?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2012/2013; kezdők, II. kategória, döntő

31. Hány olyan tízjegyű természetes szám van, amelyben az 1, 2, 3 számjegyek mindegyike legalább kétszer szerepel, és ezeken a számjegyeken kívül más számjegy nincs a számban?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2013/2014; kezdők, II. kategória, döntő

32. Van 2012 darab (nem feltétlenül különböző) pozitív számunk: $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$, amelyek összege $2S$. A k természetes számot felezőnek nevezzük, ha az a_i számok közül kiválasztható k darab, amelyek összege éppen S . Legfeljebb hány különböző k természetes szám lehet egyszerre felező?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012; haladók, III. kategória, döntő

33. Hányféleképpen olvasható ki az ábrából a BUDAPEST szó, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk, és kettőnél többször nem léphetünk egymás után ugyanabba az irányba?

B U D A P E S T
U D A P E S T
D A P E S T
A P E S T
P E S T
E S T
S T
T

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2011. évi feladata alapján

34. Hányféleképpen juthatunk el a koordinátarendszer origójából a $(4; 2)$ pontba, ha 10 lépést tesszünk, minden lépésünk egységnyi hosszú és párhuzamos a tengelyek valamelyikével?

OKTV 2012/2013; II. kategória, 1. forduló

35. Hány olyan ötjegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 50-re végződik?

OKTV 2013/2014; II. kategória, 1. forduló

36. Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, amelyek csak az 5, 6, 7, 8 számjegyeket tartalmazzák, de mindegyiket legalább egyszer. Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege?

OKTV 2014/2015; II. kategória, 1. forduló

37. Hány olyan 150-jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye páratlan, és bármely két szomszédos jegy eltérése 2?

OKTV 2013/2014; II. kategória, 2. forduló

38. Jelölje r_n az $\{1; 2; \dots; n\}$ halmaz azon részhalmazainak számát, amelyek nem tartalmazzak szomszédos számokat, ahol az 1-et és az n -et is szomszédosnak tekintjük. Határozzuk meg r_{16} értékét.

OKTV 2010/2011; II. kategória, döntő

39. Legyen $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ és $B = \{1; 2; 3\}$. Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya A , és minden A -beli x esetén $f(x) \in A$. Hány $f(x)$ függvényre teljesül, hogy $\{f(f(x)) \mid x \in A\} = B$?

OKTV 2011/2012; II. kategória, döntő

A FELADAT szó esetében az F, E, L, A, D, A betűk bármelyikén állva 2-felé léphetünk tovább (jobbra vagy lefelé), így a lehetséges lépéssorozatok száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$.

A MATEMATIKASZAKKÖR szó esetében az S betű előtti A betű csak egy példányban fordul elő, ezen a mezőn tehát mindenképpen áthaladunk, amely két részre tagolja az útvonalat. E két részben a lehetőségek számát először külön-külön határozzuk meg. A PAPRIKAJANCSI szónál látottakat alkalmazva a MATEMATIKA kiolvasásához 5 jobbra és 4 lefelé lépés szükséges, ezt tehát $\binom{9}{4} = 126$ -féleképpen tehetjük meg, az ASZAKKÖR kiolvasásához pedig 5 jobbra és 2 lefelé

lépés szükséges, erre $\binom{7}{2} = 21$ -féle lehetőségünk van. Mivel az első téglalap bármelyik útvonalát a második téglalap bármelyik útvonalával folytathatjuk, így a lehetőségek száma összesen $\binom{9}{4} \cdot \binom{7}{2} = 126 \cdot 21 = 2646$.

- Hány olyan legfeljebb ötjegyű szám van, amelynek minden jegye különböző, és a számjegyei balról jobbra csökkenő sorrendben követik egymást?

Megoldás:

Ha meghatározzuk, hogy mely számjegyek szerepeljenek egy ilyen számban, azokat már csak egyféle sorrendben (csökkenő sorrendben) írhatjuk egymás mellé. Elég tehát azt megnéznünk, hányféleképpen választhatjuk ki a keresett számokban szereplő számjegyeket.

Ha a keresett szám ötjegyű, akkor a 10 számjegyből $\binom{10}{5}$ -féleképpen választhatunk ki 5-öt, így ennyi ötjegyű szám felel meg a feltételnek (0-val nem kezdődhet szám, de a kiválasztott 5 számjegyet legnagyobbika biztosan nem 0). Hasonlóképpen a keresett négyjegyű számokból $\binom{10}{4}$, a háromjegyűekből $\binom{10}{3}$, a kétjegyűekből pedig $\binom{10}{2}$ darabot találunk. Az egyjegyű számok esetében már figyelniük kell arra, hogy a 0-t nem választhatjuk, így ott $\binom{9}{1}$ lehetőséget kapunk.

Vagyis összesen $\binom{10}{5} + \binom{10}{4} + \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{9}{1} = 252 + 210 + 120 + 45 + 9 = 636$ szám felel meg a feltételeknek.

- Egy cukrászdában 15-féle sütemény kapható, mindegyikből kellően sok. Szeretnénk 10 db süteményt venni úgy, hogy ne legyen mind csupa különböző. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Megoldás:

Hagyjuk először figyelmen kívül azt a feltételt, hogy nem lehet mind a 10 sütemény különböző. Ekkor $n=15$ süteményből kell $k=10$ darabot vennünk úgy, hogy az ismétlődés megengedett, és nem számít a sütemények kiválasztásának sorrendje. Ezt az ismétléses kombináció képlete alapján

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{15+10-1}{10} = \binom{24}{10} \text{-féleképpen tehetjük meg.}$$

Ebből le kell vonnunk a rossz eseteket, amikor 10 különböző süteményt vettünk, ezt $\binom{15}{10}$ -féle módon tehetjük meg. Tehát a lehetőségek száma $\binom{24}{10} - \binom{15}{10} = 1961256 - 3003 = 1958253$.

4. Hányféleképpen írhatjuk fel a 2015-öt néhány (egy vagy több) pozitív egész szám összegeként, ha az összeadandók sorrendje is számít?

1. megoldás:

Próbálkozzunk először a 2015 helyett kisebb számokkal. Az 1-et 1-féleképpen írhatjuk fel (1), a 2-t 2-féleképpen ($2=1+1$), a 3-at 4-féleképpen ($3=1+2=2+1=1+1+1$). Innen megsejthetjük, hogy az n pozitív egész szám lehetséges felírásainak száma 2^{n-1} .

Sejtésünket teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás a fent látott módon igaz $n=1, 2, 3$ -ra. Tegyük fel most, hogy az állítás igaz valamilyen rögzített k -ra, majd lássuk be $k+1$ -re. Tudjuk tehát, hogy a k pozitív egész számot 2^{k-1} -féle összegként írhatjuk fel, és ennek segítségével be szeretnénk látni, hogy a $k+1$ számot 2^k -féleképpen (vagyis kétszer annyi módon) írhatjuk fel.

Tekintsük a k szám összegként történő felírásait. Minden ilyen felírásból képezhetjük a $k+1$ szám két különböző felírását: az egyiket úgy, hogy az utolsó összeadandót 1-gyel növeljük, a másikat pedig úgy, hogy még egy $+1$ tagot az összeg végére írunk. (Például $k=2$ esetén a 2-ből kapjuk így a 3 és a $2+1$ felírásokat, míg az $1+1$ -ből az $1+2$ és az $1+1+1$ felírásokat.) Így a k szám 2^{k-1} különböző felírásából a $k+1$ szám $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ db felírását kaptuk. Ezek mind különbözőek, továbbá a $k+1$ szám tetszőleges felírása előáll így, hiszen az eljárás visszafelé is egyértelmű (a $k+1$ szám egy adott felírásából megkaphatjuk a k szám egy felírását úgy, hogy ha az utolsó összeadandó 1, akkor ezt elhagyjuk, ellenkező esetben pedig 1-gyel csökkentjük). Tehát a $k+1$ számra 2^k lehetséges felírást kaptunk, ezzel az indukciós lépést beláttuk.

Vagyis a 2015-öt 2^{2014} -féleképpen írhatjuk fel néhány pozitív egész összegeként.

2. megoldás:

Tekintsünk egy 2015 cm hosszú szalagot, amely egész centiméterenként be van jelölve. A 2015 egy tetszőleges összegfelbontását megkaphatjuk úgy, hogy ezt a szalagot bizonyos bejelöléseknél elvágjuk, és a keletkező darabokat sorban megfeleltetjük az egyes összeadandóknak. (Például a $2015=15+1900+100$ felbontást úgy kapjuk, ha a szalagot balról számítva 15 cm-nél és 1915 cm-nél elvágjuk.)

Mivel 2014 jelölés van a szakaszon (1-től 2014-ig az egész centimétereknél), ezért 2014 helyen dönthetünk egymástól függetlenül arról, hogy elvágjuk-e a szalagot. Ez mindenütt 2 lehetőséget jelent, így összesen $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{2014} = 2^{2014}$ -féleképpen írhatjuk fel a 2015-öt a vizsgált módon.

5. Hány téglatest található egy $3 \times 4 \times 5$ -ös kockarácsban?

Megoldás:

Helyezzük el a kockarácsot egy térbeli koordináta-rendszerben úgy, hogy a rácsegyenesek párhuzamosak legyenek a tengelyekkel, és a rács két átlellenes sarka a $(0; 0; 0)$, illetve a $(3; 4; 5)$ pont legyen.

Ha a keresett téglatestek bármelyikét levetítjük az x , y , z tengelyekre, akkor mindhárom esetben egy-egy olyan szakaszt kapunk, amelynek végpontjai egész számok, mégpedig az x tengelyen 0 és 3 közötti, az y tengelyen 0 és 4 közötti, a z tengelyen 0 és 5 közötti értékek. Megfordítva, ha mindhárom tengelyen felvesszünk egy-egy ilyen szakaszt, akkor ezek egyértelműen kijelölnek egy megfelelő téglatestet, amelynek vetületei éppen az adott szakaszok. (Ha a szakaszok végpontjaiban merőleges síkokat állítunk a koordinátatengelyekre, akkor e 6 sík éppen a megfelelő téglatestet határozza meg.) Elegendő tehát azt meghatározni, hogy hányféleképpen választhatjuk ki ezt a három szakaszt az egyes koordinátatengelyeken.

Az x tengelyen a 0, 1, 2, 3 számok közül kell kiválasztanunk a szakasz két végpontját, ezt $\binom{4}{2}$ -féleképpen tehetjük meg. Az y tengelyen a 0, 1, 2, 3, 4 számok közül $\binom{5}{2}$ -féleképpen, míg a z tengelyen a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számok közül $\binom{6}{2}$ -féleképpen választhatunk. A választások egymástól függetlenek, így összesen $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 6 \cdot 10 \cdot 15 = 900$ téglatestet találunk a kockarácsban.

6. Egy zsákban 10 különböző pár cipő található. Hányféleképpen vihetünk magunkkal a zsákból 6 darab cipőt úgy, hogy legyen közöttük összetartozó pár?

Megoldás:

A jó esetek számát megkaphatjuk úgy, ha az összes eset számából kivonjuk a rossz esetek számát (ezt „összes – rossz” módszernek is nevezik). A zsákban lévő 20 cipő közül 6-ot összesen $\binom{20}{6}$ -féleképpen vehetünk ki. Ezek közül rossz esetnek számít, ha nincsen összetartozó pár a kivett cipők között, vagyis mind a 6 cipő különböző párból való. Erre $\binom{10}{6} \cdot 2^6$ lehetőségünk van, hiszen ki kell választanunk a 10 párból 6-ot, majd minden ilyen párból a bal vagy a jobb cipőt.

Tehát a kedvező esetek száma $\binom{20}{6} - \binom{10}{6} \cdot 2^6 = 38760 - 13440 = 25320$.

Megjegyzés: a rossz esetek számát a $\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10}{6!}$ képlettel is megkaphatjuk (az első kiválasztott cipő 20-féle lehet, a második már csak a fennmaradó 9 párból valamelyik, azaz 18-féle stb., majd leosztunk a lehetséges sorrendek számával, hiszen a magunkkal vitel során nem számít a 6 cipő kiválasztásának sorrendje).

7. Egy macska egy 10 szintes lépcső legfelső szintjéről szeretne lejutni a talajra néhány ugrással. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha
- egyszerre bármekkora tud ugrani, de mindig csak lentebbi szintre?
 - egyszerre mindig csak 1, 2 vagy 3 szintet ugorhat lefelé?
 - egyszerre mindig csak 1 vagy 2 szintet ugorhat lefelé, de nem ugorhat rá az alulról 4. lépcsőre?

Megoldás:

- a) A macska az alsó 9 szint mindegyikéről egymástól függetlenül eldöntheti, hogy ráugrik-e vagy sem. Ez szintenként 2-féle választást, összesen pedig $2^9 = 512$ -féle választási lehetőséget jelent.

Megjegyzés: a feladat úgy is átfogalmazható, hogy a 10-et szeretnénk néhány (egy vagy több) pozitív egész szám összegeként felírni, ahol az összeadandók sorrendje is számít. Ekkor az összeadandók az egyes ugrások hosszát jelölik, például a $10 = 3 + 6 + 1$ felbontás azt jelenti, hogy először 3-at, utána 6-ot, végül pedig 1-et ugrik a macska. A korábban látott feladat alapján ezt $2^{10-1} = 2^9$ -féleképpen lehet megtenni.

- b) Oldjuk meg a feladatot először kisebb esetekre. Jelöljük a_n -nel azt az értéket, ahányféleképpen az alulról n -edik lépcsőről lejuthat a talajra a macska ($1 \leq n \leq 10$, n egész szám). Nyilván $a_1 = 1$, hiszen az 1. lépcsőről 1 út vezet a talajra. Továbbá $a_2 = 2$ (vagy az 1. lépcsőn át jut le a macska, vagy rögtön a talajra ugrik), illetve $a_3 = 4$ (az 1. és a 2. lépcső mindegyikére vagy ráugrik, vagy nem). Idáig a lehetőségek megegyeznek az a) feladatrészen látottakkal. Azonban a 4. lépcsőről már nem ugorhat közvetlen a talajra, innentől tehát változik a megoldás. Ha a 4. lépcsőfokon áll, akkor három lehetőségből választhat: a 3., a 2., vagy az 1. lépcsőre ugorhat. Ezeket rendre a_3 , a_2 , illetve a_1 -féleképpen fejezheti be, azaz $a_4 = a_3 + a_2 + a_1 = 4 + 2 + 1 = 7$. Ez az összefüggés a következő értékekre is teljesül, azaz minden $n \geq 4$ esetén $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. Így $a_5 = 7 + 4 + 2 = 13$, $a_6 = 13 + 7 + 4 = 24$, $a_7 = 24 + 13 + 7 = 44$, $a_8 = 44 + 24 + 13 = 81$, $a_9 = 81 + 44 + 24 = 149$ és $a_{10} = 149 + 81 + 44 = 274$. Tehát összesen 274-féleképpen juthat le a macska.

Megjegyzés: Ha bevezetjük az $a_0 = 1$ és $a_{-1} = 0$ értékeket, akkor a megadott rekurzió már $n \geq 2$ esetén teljesül.

- c) Ha a b) rész mintájára b_n -nel jelöljük az n -edik lépcsőről való lejutások számát, akkor $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, továbbá $n \geq 3$ esetén $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, de $b_4 = 0$, hiszen a 4. lépcsőfokot nem érinthetjük. Ezek alapján $b_3 = 1 + 2 = 3$, $b_4 = 0$, $b_5 = 3 + 0 = 3$ és $b_6 = 0 + 3 = 3$. ($b_3 = b_5 = b_6$ azért is nyilvánvaló, mert az 5. lépcsőfokról csak a 3. lépcsőfokra, míg a 6. lépcsőfokról csak az 5. lépcsőfokra ugorhatunk.) Folytatva a sorozatot, $b_7 = 3 + 3 = 6$, $b_8 = 6 + 3 = 9$, $b_9 = 9 + 6 = 15$ és $b_{10} = 15 + 9 = 24$. Tehát összesen 24-féleképpen juthat le a macska.

Másképpen: ha a 4. lépcsőfok kihagyására vonatkozó feltételtől eltekintenénk, akkor éppen a Fibonacci-sorozat tagjait kapnánk: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Így összesen 89 útvonal lenne, amelyekből ki kell vonnunk a rossz – tehát a 4. lépcsőfokot érintő – utak számát. A 10. lépcsőfokról a 4. lépcsőfokig 6 lépcsőt kell megtenni, tehát itt éppen annyi út vezet, mint amennyi a 6. lépcsőfokról a talajra vezetne, vagyis az előbbi sorozat 6. tagja, ami a 13. A 4. lépcsőfokról a talajig 5 út vezet, így a 4. lépcsőfokot érintő útvonalak száma $13 \cdot 5 = 65$. Vagyis a jó útvonalak száma $89 - 65 = 24$.

8. Legfeljebb hány pozitív egész számot adhatunk meg úgy, hogy semelyik kettő összege és különbsége se legyen osztható 2015-tel?

Megoldás:

Két szám különbsége pontosan akkor osztható 2015-tel, ha ugyanannyi a 2015-ös maradékuk. Két szám összege pedig pontosan akkor osztható 2015-tel, ha vagy mindkét szám osztható 2015-tel, vagy az egyik 2015-ös maradéka n , a másiké $2015 - n$ (ahol $1 \leq n \leq 2014$).

Készítsünk 1008 db skatulyát a 2015-ös maradékok alapján a következőképpen: egy skatulyába kerüljenek a 0 maradékot adó számok, a következőbe az 1 vagy 2014 maradékot adók, a következőbe a 2 vagy 2013 maradékot adók, és így tovább – általában az n és a $2015 - n$ maradékot adó számok kerülnek azonos skatulyába –, végül az utolsóba az 1007 vagy 1008 maradékot adók. Ekkor pontosan abban az esetben lesz két szám összege vagy különbsége 2015-tel osztható, ha ezek ugyanabba a skatulyába kerülnek.

Az eddigiek alapján 1008-nál több számot biztosan nem tudunk megadni, hiszen ekkor a skatulyaelv miatt valamelyik skatulyába egynél több szám kerülne. 1008 számot viszont meg tudunk adni úgy, hogy mindegyik különböző skatulyába kerüljön, például az 1, 2, 3, ..., 1007, 2015 számok teljesítik ezt a feltételt.

Tehát legfeljebb 1008 számot adhatunk meg a kívánt módon.

9. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben a számjegyek szorzata páros?

Megoldás:

A számjegyek szorzata akkor páros, ha szerepel a számban páros számjegy. Egyszerűbb a rossz eseteket összeszámolnunk: a számjegyek szorzata akkor páratlan, ha minden számjegy páratlan. Mivel 5 páratlan számjegy van, ezért 5^6 ilyen hatjegyű szám képezhető. A hatjegyű számok száma $9 \cdot 10^5$, így az „összes – rossz” módszert alkalmazva $9 \cdot 10^5 - 5^6 = 900000 - 15625 = 884375$ olyan hatjegyű szám van, amelyben páros a számjegyek szorzata.

10. Felvettünk három párhuzamos síkon rendre 8, 9 és 10 pontot. Legfeljebb hány tetraédert határozhatnak meg ezek a pontok?

Megoldás:

A tér négy különböző pontja mindig tetraédert határoz meg, kivéve ha mind a négy pont egy síkba esik, vagy ha valamelyik három pont egy egyenesre esik. A lehető legtöbb tetraédert tehát akkor kapjuk, ha semelyik három pont nem esik egy egyenesre, és a megadott három párhuzamos síkon kívül nincs másik olyan sík, amelyre háromnál több esne a pontok közül. (A pontok megfelelő kiválasztásával ezek a feltételek elérhetők.)

A megadott $8 + 9 + 10 = 27$ pont közül $\binom{27}{4}$ -féleképpen választhatunk ki négyet. Ezek közül biztosan rosszak azok a választások, amikor mind a négy pont ugyanarra a síkra (az eredetileg megadott három párhuzamos sík valamelyikére) esik, ez $\binom{8}{4} + \binom{9}{4} + \binom{10}{4}$ lehetőség.

Tehát a pontok legfeljebb $\binom{27}{4} - \left(\binom{8}{4} + \binom{9}{4} + \binom{10}{4} \right) = 17550 - (70 + 126 + 210) = 17144$ tetraédert

határozhatnak meg.

11. Hány olyan ötjegyű szám van, amely 16-ra végződik és 3-mal osztható?

Megoldás:

Keressük a kérdéses számokat $\overline{abc16}$ alakban, ahol a , b és c egyjegyű számok, továbbá a nem lehet 0. A 3-mal oszthatóság feltétele, hogy $a + b + c + 1 + 6$ osztható legyen 3-mal. Válasszuk meg b és c értékét tetszőlegesen (ez $10 \cdot 10 = 100$) lehetőség, majd minden ilyen esetben vizsgáljuk meg a $b + c + 1 + 6$ összeg 3-as maradékát. Ha ez 0, akkor a értéke 3, 6 vagy 9 lehet. Ha a maradék 1, akkor a értéke 2, 5 vagy 8 lehet. Ha pedig a maradék 2, akkor a értéke 1, 4 vagy 7 lehet. Tehát minden esetben 3-féle értéket vehet fel a , így összesen $3 \cdot 100 = 300$ megfelelő ötjegyű szám létezik.

12. Egy 52 lapos franciakártya-csomagot szétosztunk 4 játékos között. Hány olyan leosztás van, amelyben minden játékosnak jut legalább egy treff? (A francia kártyában 4-féle színű lap található, amely színek egyike a treff, és minden színből 13 lap fordul elő.)

Megoldás:

Álljon a H alaphalmaz a kártyacsomag 4 játékos közötti összes lehetséges szétosztásából, továbbá legyenek ennek A_1 , A_2 , A_3 , A_4 részhalmazai azon szétosztások, amelyekben az 1., 2., 3., illetve 4. játékosnak nem jut treff. Feladatunk ekkor $|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)|$ meghatározása, amelyre a szita-módszert fogjuk alkalmazni.

Tudjuk, hogy $|H| = 4^{52}$, hiszen mind az 52 lapot egymástól függetlenül a 4 játékos bármelyikének adhatjuk. Azt is tudjuk, hogy $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 3^{13} \cdot 4^{39}$, mert ezen szétosztások esetében a 13 treffet mindig csak 3 játékos valamelyike kaphatja (például A_1 esetében csak a 2., 3. vagy 4. játékos), a fennmaradó 39 lapot pedig a 4 játékos bármelyike.

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 2^{13} \cdot 4^{39}$, hiszen ekkor a 13 treffet csak 2 játékos valamelyike kaphatja (például $A_1 \cap A_2$ esetében csak a 3. vagy 4. játékos), a fennmaradó 39 lapot pedig továbbra is bárki.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1^{13} \cdot 4^{39}$, hiszen ekkor a 13 treffet mindig csak egy játékos kaphatja (például $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ esetében csak a 4. játékos), a fennmaradó 39 lapot pedig továbbra is bárki.

Végül $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$, hiszen ekkor egyik játékos sem kaphatna treffet, ilyen szétosztás pedig nyilvánvalóan nem létezik.

A szita-módszer szerint $|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| =$

$$= |H| - (|A_1| + \dots) + (|A_1 \cap A_2| + \dots) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|,$$

ahol a $\dots$ rendre az összes ugyanannyi halmazból álló metszet felsorolását jelenti. A korábbi számításokat behelyettesítve a keresett mennyiség $4^{52} - 4 \cdot 3^{13} \cdot 4^{39} + 6 \cdot 2^{13} \cdot 4^{39} - 4 \cdot 1^{13} \cdot 4^{39} + 0 = 4^{39} \cdot (4^{13} - 4 \cdot 3^{13} + 6 \cdot 2^{13} - 4)$, tehát ennyi a megfelelő leosztások száma. (A végeredmény közelítő értéke $1,837 \cdot 10^{31}$.)

Megjegyzés: Egy jónak tűnő, ámde hibás gondolatmenet a következő: adjunk először minden játékosnak egy-egy treffet (ezt $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$ -féleféppen tehetjük meg), majd a fennmaradó lapokat osszuk szét tetszőlegesen (erre 4^{48} lehetőségünk van). A végeredmény tehát $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 4^{48}$. Ez a megoldás nyilvánvalóan rossz, hiszen a treffre vonatkozó feltétel nélkül is csak 4^{52} -féleféppen oszthatók szét a lapok, ám a kapott végeredmény ennél nagyobb. (A hibát ott követtük el, hogy ha egy játékos több treffet is kap, ezeket az eseteket többször számoltuk meg aszerint, hogy melyik treffet kapta elsőnek, és melyeket később.)

13. 10 ember színházba ment, ahol mindegyikük leadta a kabátját a ruhatárba (a kabátok mind különbözőek). A szórakozott ruhatáros összecserélte a kiadott sorszámokat, és az előadás végén úgy adta vissza a kabátokat (minden embernek egyet-egyet), hogy senki sem a saját kabátját kapta vissza. Hányféle különböző módon kaphatták vissza a kabátokat? (A visszaadás sorrendje nem számít.)

Megoldás:

Álljon a H alaphalmaz a 10 kabát 10 ember közötti összes lehetséges szétosztásából, továbbá legyenek ennek $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ részhalmazai azon szétosztások, amelyekben az 1., 2., ..., illetve 10. ember a saját kabátját kapja vissza. Feladatunk ekkor $|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10})|$ meghatározása, amelyre az előző feladatban is látott szita-módszert fogjuk alkalmazni.

Tudjuk, hogy $|H| = 10!$, továbbá $|A_i| = 9!$ (ahol $1 \leq i \leq 10$), hiszen ha az i -edik ember a saját kabátját kapja, akkor a fennmaradó 9 kabátot a többi 9 ember között $9!$ -féleféppen lehet kiosztani. Hasonlóképpen $|A_i \cap A_j| = 8!$ (ahol $1 \leq i, j \leq 10$ és $i \neq j$), illetve bármely k részhalmaz metszetének

elemszáma $(10-k)!$ (ahol $1 \leq k \leq 10$). Mivel k részhalmazt $\binom{10}{k}$ -féleféppen lehet kiválasztani,

így a szita-formulát felírva a keresett lehetőségek száma a következő:

$$10! - 10 \cdot 9! + \binom{10}{2} \cdot 8! - \binom{10}{3} \cdot 7! + \binom{10}{4} \cdot 6! - \binom{10}{5} \cdot 5! + \binom{10}{6} \cdot 4! - \binom{10}{7} \cdot 3! + \binom{10}{8} \cdot 2! - \binom{10}{9} \cdot 1! + \binom{10}{10} \cdot 0!$$

(ahol $0! = 1$ alapján az utolsó tag jelöli a 10 halmaz közös metszetét, vagyis azt az 1 lehetőséget, amikor mindenki a saját kabátját kapja vissza).

Felhasználva a $\binom{10}{k} \cdot (10-k)! = \frac{10!}{k! \cdot (10-k)!} \cdot (10-k)! = \frac{10!}{k!}$ összefüggést, az előző eredmény fel-

írható $10! \cdot \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} \right)$ alakban is, amelynek pontos értéke

1334961. (A zárójelben álló összeg értéke egyébként azt mutatja meg, hogy a $10!$ összes esetnek hányadrésze megfelelő számunkra.) Tehát 1334961-féleképpen kaphatták vissza a kabátokat.

Megjegyzés: Felsőbb matematikai módszerekkel belátható, hogy ha n értékét növeljük, akkor az $\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots \pm \frac{1}{n!}$ kifejezés értéke $\frac{1}{e} \approx 0,369$ -hez tart, tehát nagy n -ekre az összes lehetséges kiosztás kb. 36,9%-ában senki nem a saját kabátját kapja vissza.

14. Nyolc ember sorban áll a mozi jegypénztárában. A jegy 1000 Ft-ba kerül, a kasszában kezdetben nincsen váltópénz. Négy ember 1000 Ft-ossal, négy ember 2000 Ft-ossal fizet – ez utóbbiaknak csak akkor tud a pénztáros visszaadni, ha kellő számú 1000 Ft-ossal fizettek már. Hányféle sorrendben vehetnek jegyet az emberek úgy, hogy mindenki tudjon fizetni? (Az embereket nem különböztetjük meg.)

1. megoldás:

Jelöljük az 1000 Ft-ossal fizető embereket 1-essel, a 2000 Ft-ossal fizetőket 2-essel. Ekkor minden jegyvásárlási sorrend leírható az 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2 számok valamely sorrendjével. Ezeket közvetlenül egymás mellé fogjuk írni, például 11112222 jelöli azt a – nyilvánvalóan helyes – sorrendet, amikor először jöttek négyen 1000 Ft-ossal, majd utánuk négyen 2000 Ft-ossal.

Vegyük észre, hogy a pénztáros pontosan akkor nem tud visszaadni egy 2000 Ft-osból, ha a sor elejétől nézve – az éppen 2000 Ft-ossal fizető embert is beleszámítva – többen fizettek 2000 Ft-ossal, mint 1000 Ft-ossal. (Hiszen minden 2000 Ft-ossal fizetőnek vissza kell adni egy 1000 Ft-ost.) Például az 11212221 sorrend esetén az aláhúzással jelölt helyen nem lehetséges a visszaadás, hiszen amikor az illető 2000 Ft-ossal fizet, már nincs 1000 Ft-os a kasszában.

Átfogalmazva, egy sorrend pontosan akkor helyes, ha bármelyik tagjánál megállva, odáig (vagyis egy kezdőszeletben) legfeljebb annyi 2-es fordul elő, mint 1-es. (Ebből már az is következik, hogy a sor biztosan 1-essel kezdődik. Sőt, a sor biztosan 2-esre végződik, hiszen ha 1-esre végződne, akkor az első hét tagja között három 1-es és négy 2-es lenne, ami nem helyes.)

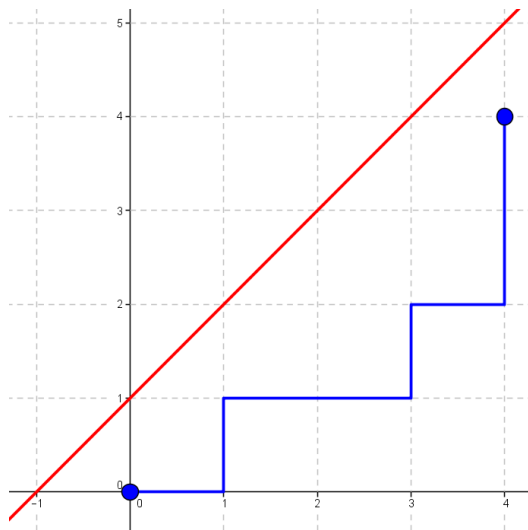
A helyes sorrendeket meghatározhatjuk egyesével felírva, például „növekvő” csoportosítás szerint (vagyis úgy, hogy ha minden sorrendet egy-egy nyolcjegyű számként tekintünk, akkor ezek a számok növekvő sorban kövessék egymást). Ezek pedig a következők (a megoldásokat aszerint tagoltuk, hogy hány darab 1-es található a szám elején):

11112222	11211222	12111222
	11212122	12112122
11121222	11212212	12112212
11122122	11221122	12121122
11122212	11221212	12121212

Összesen 14 megfelelő számot találtunk, tehát 14-féle sorrendben vehetnek jegyet az emberek.

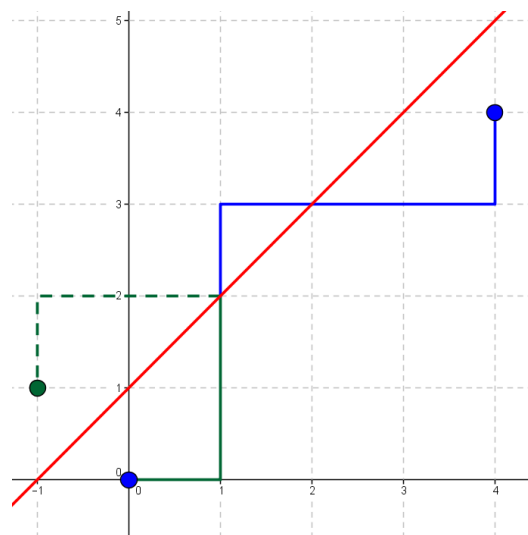
2. megoldás:

Helyezzük a feladatot a derékszögű koordináta-rendszerbe, mégpedig a következőképpen: minden egyes sorrend esetén induljunk az origóból, továbbá 1000 Ft-ossal fizető ember esetén lépünk egyet jobbra, 2000 Ft-ossal fizető ember esetén pedig lépünk egyet felfelé. Ekkor a sor végére a (4; 4) pontba kell eljutnunk, és amikor utunk során az (x; y) pontban járunk, ez azt jelenti, hogy az addigi sorban x ember fizetett 1000 Ft-ossal, y ember pedig 2000 Ft-ossal. Az előző megoldásból tudjuk, hogy minden egyes pillanatban teljesülnie kell az $y \leq x$ feltételnek. Mivel a lépéseket csak rácspontokban vizsgáljuk, feladatunkat így is megfogalmazhatjuk: a (0; 0)-ból el kell jutnunk a (4; 4)-be egységnyi jobbra és felfelé lépésekkel úgy, hogy közben nem érinthetjük az $y = x + 1$ egyenest (nevezzük ezt tiltott egyenesnek). A következő ábra az 12112122 lépéssorozatnak megfelelő útvonalat és a tiltott egyenest szemlélteti.



Hány ilyen útvonal létezik? Ezt az „összes – rossz” módszerrel számoljuk ki. Ha a tiltott egyenest nem kellene figyelembe vennünk (vagyis a kasszában lenne elegendő váltópénz), akkor tetszőlegesen léphetnénk jobbra és felfelé (vagyis az emberek tetszőleges sorrendben érkezhetnének), így 4 jobbra és 4 felfelé lépést összesen $\binom{4+4}{4} = \binom{8}{4} = 70$ -féleképpen tehetnénk meg. Ebből kell kivonnunk a rossz eseteket, vagyis az olyan útvonalakat, amelyek során érintjük a tiltott egyenest (nevezzük ezeket rossz útvonalaknak).

Ezek összeszámlálására alkalmazhatjuk a következő ötletet: bármely rossz útvonal esetén tekintjük az első olyan pillanatot, amikor rálépünk a tiltott egyenesre. Az origótól idáig terjedő útszakaszt tükrözzük tengelyesen a tiltott egyenesre (emiat tükrözési elvnek is hívják ezt a módszert), az út további részét pedig hagyjuk változatlanul. A következő ábrán a folytonos zöld vonallal jelölt útszakaszt tükröztük, a tükröképet szaggatott zöld vonallal jelöltük:



Mivel az origó tükröképe a $(-1; 1)$ pont, így a tükrözött útvonal, valamint az eredeti útvonal folytatása együttesen egy $(-1; 1)$ -ből $(4; 4)$ -be vezető útvonalat ad. Ugyanígy minden origóból induló rossz útvonalnak megfeleltethető egy olyan útvonal, amely a $(-1; 1)$ -ből a $(4; 4)$ -be vezet. Megfordítva, minden $(-1; 1)$ -ből $(4; 4)$ -be vezető útvonalnak is megfeleltethető egy origóból induló

rossz útvonal, hiszen a $(-1; 1)$ -ből a $(4; 4)$ -be csak úgy juthatunk el, hogy legalább egyszer érintjük a tiltott egyenest – ha pedig az első érintési pontig terjedő útszakaszt tükrözzük a tiltott egyenesre, akkor éppen az origóból induló rossz útvonalat kapjuk.

Így a rossz útvonalak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a $(-1; 1)$ -ből $(4; 4)$ -be vezető útvonalaknak. Ez utóbbiakat pedig könnyen összeszámolhatjuk: összesen 5-ször kell jobbra lépünk, 3-szor felfelé, így az útvonalak száma $\binom{5+3}{3} = \binom{8}{5} = 56$.

Mivel összesen 70 útvonal van, amelyek közül 56 rossz, így a jó útvonalak – vagyis a nyolc ember helyes sorrendjeinek – száma $70 - 56 = 14$.

Megjegyzés: Ez utóbbi megoldás könnyen általánosítható arra az esetre, ha n ember fizet 1000 Ft-ossal és n ember 2000 Ft-ossal (n pozitív egész). Jelöljük a helyes sorrendek számát a_n -nel. Ekkor

az összes útvonal száma $\binom{2n}{n}$, a rossz útvonalaké pedig $\binom{2n}{n-1}$ – hiszen a $(-1; 1)$ -ből az $(n; n)$ pontba haladva összesen $n+1$ -szer kell jobbra lépni, felfelé pedig $n-1$ -szer, így a rossz utak száma $\binom{n+1+n-1}{n-1} = \binom{2n}{n-1}$. Vagyis a helyes sorrendek száma $a_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$. Algebrai alakítással ez az eredmény $a_n = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$ alakra is hozható.

15. a) Hányféle sorrendben számíthatjuk ki a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ szorzat értékét, ha egy lépésben mindig csak két szomszédos számot szorozhatunk össze? (Egy lehetséges sorrend például, aláhúzással jelölve a lépéseket: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 60 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 60 \cdot 42 = 120 \cdot 42 = 5040$.)
- b) Hányféle sorrendben számíthatjuk ki a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ szorzat értékét, ha egy lépésben mindig két tetszőleges számot szorozhatunk össze? (Egy lehetséges sorrend például, aláhúzással jelölve a lépéseket: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 18 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 10 \cdot 18 \cdot 4 \cdot 7 = 180 \cdot 4 \cdot 7 = 180 \cdot 28 = 5040$.)
- c) Hányféleképpen helyezhetünk el 5 zárójelpárt a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ szorzatban úgy, hogy a műveletek elvégzésekor mindig egy zárójelen belüli két tényezőt kell összeszoroznunk? (Az a) feladatban szereplő $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 60 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 60 \cdot 42 = 120 \cdot 42 = 5040$ műveletsort például a $((2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot 5))) \cdot (6 \cdot 7))$ zárójelezéssel írhatjuk le.)

Megoldás:

a) A szorzat kezdetben hattényezős, azaz 5 szorzásjel (vagyis 5 egymás melletti számpár) található benne. Ezek közül bármelyiket választhatjuk első lépésben. Az első szorzás elvégzése után öt tényező marad, 4 szorzásjellel, amelyek közül bármelyikkel folytathatjuk, és így tovább. A lehetőségek száma tehát $5! = 120$.

b) A szorzat kezdetben hattényezős, azaz 6 szám közül választhatjuk ki azt a kettőt, amelyeket először összeszorozunk. Erre $\binom{6}{2} = 15$ lehetőségünk van. Az első szorzás elvégzése után öt tényező

marad, tehát 5 szám közül választhatjuk ki a két összeszorozandót, ezt $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen tehet-

jük meg. Ezt folytatva, a lehetőségek száma $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{6 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2}{2^5} = 1350$.

c) Először is vegyük észre, hogy ez a kérdés különbözik az a)-ban szereplő kérdéstől. Ugyanis bár az a) feladat minden egyes sorrendje kijelöl egy zárőjelezést, ezek nem feltétlenül mind különbözők. (Megfordítva, ha adott egy zárőjelezés, akkor lehet, hogy az alapján akár többféle sorrendben is elvégezhető a szorzás.) Egy kisebb példán szemléltetve, a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ szorzat esetében a $\underline{2 \cdot 3} \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{6 \cdot 20} = 120$ és a $2 \cdot 3 \cdot \underline{4 \cdot 5} = \underline{2 \cdot 3} \cdot 20 = \underline{6 \cdot 20} = 120$ sorrend egyaránt ugyanahhoz a $((2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5))$ zárőjelezéshez vezet. Tehát a c) kérdésre adandó válasz kisebb, mint az a) kérdésben szereplő 120 lehetőség.

Vizsgáljuk meg a feladatot kisebb esetekre! Jelöljük b_n -nel azt az értéket, ahányféleképpen egy n -tényezős szorzatban $n-1$ zárójelpár elhelyezhető. Ekkor a feladatunk b_6 meghatározása.

Egy 1-tényezős szorzat 1-féleképp zárőjelezhető (úgy, hogy nem teszünk bele zárőjelet), így $b_1 = 1$.

Egy 2-tényezős szorzat is 1-féleképp zárőjelezhető: $(2 \cdot 3)$, így $b_2 = 1$.

Egy 3-tényezős szorzat 2-féleképp zárőjelezhető: $((2 \cdot 3) \cdot 4)$ és $(2 \cdot (3 \cdot 4))$, így $b_3 = 2$.

Egy 4-tényezős szorzat 5-féleképp zárőjelezhető: $((((2 \cdot 3) \cdot 4) \cdot 5)$, $((2 \cdot (3 \cdot 4)) \cdot 5)$, $((2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5))$, $(2 \cdot ((3 \cdot 4) \cdot 5))$ és $(2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot 5)))$, így $b_4 = 5$.

Megfigyelhetjük, hogy a legkülső zárójelpár mindig a művelet sor legelején és legvégén áll (hiszen az utolsó szorzás elvégzésekor már csak két tényező szerepel, és ez a zárójelpár ezeket határolja). Próbáljuk meg a 4-tényezős szorzat zárőjelezéseit visszavezetni a korábbi esetekre! Csoportosítsuk az eseteket aszerint, hogy melyik szorzást végezzük el legutoljára! A következőkben vastagítással jelöljük az utoljára elvégzett szorzás jelét, és ennek helye szerint tagoljuk oszlopokra az eseteket:

$$\begin{array}{ccc} (2 \bullet ((3 \cdot 4) \cdot 5)) & ((2 \cdot 3) \bullet (4 \cdot 5)) & (((2 \cdot 3) \cdot 4) \bullet 5) \\ (2 \bullet (3 \cdot (4 \cdot 5))) & & ((2 \cdot (3 \cdot 4)) \bullet 5) \end{array}$$

Vegyük észre, hogy ha az utolsó szorzásjel a 2 és a 3 közötti, akkor ennek elvégzése előtt egy 1-tényezős (2) és egy 3-tényezős ($3 \cdot 4 \cdot 5$) szorzatot kell egymástól függetlenül zárőjeleznünk. Ha az utolsó szorzásjel a 3 és a 4 közötti, akkor ennek elvégzése előtt egy 2-tényezős ($2 \cdot 3$) és egy másik 2-tényezős ($4 \cdot 5$) szorzatot kell egymástól függetlenül zárőjeleznünk. Ha pedig az utolsó szorzásjel a 4 és a 5 közötti, akkor ennek elvégzése előtt egy 3-tényezős ($2 \cdot 3 \cdot 4$) és egy 1-tényezős (5) szorzatot kell egymástól függetlenül zárőjeleznünk. Így a $b_4 = b_1 \cdot b_3 + b_2 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_1$ összefüggést kapjuk, vagyis $5 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$. Tehát a 4-tényezős szorzat zárőjelezhetőségeinek száma megkapható úgy, ha a 4-et felbontjuk két pozitív egész szám összegére az összes lehetséges módon ($1+3$, $2+2$, $3+1$), majd az összegekben szereplő sorszámu b_n értékeket páronként összeszorozzuk, és e szorzatokat összeadjuk.

Ugyanez a gondolatmenet továbbvihető a b_n sorozat következő néhány tagjának meghatározására:

$$b_5 = b_1 \cdot b_4 + b_2 \cdot b_3 + b_3 \cdot b_2 + b_4 \cdot b_1 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$$

$$b_6 = b_1 \cdot b_5 + b_2 \cdot b_4 + b_3 \cdot b_3 + b_4 \cdot b_2 + b_5 \cdot b_1 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$$

Tehát a feladatban szereplő 6-tényezős $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ szorzatban 42-féleképpen helyezhetünk el 5 zárójelpárt.

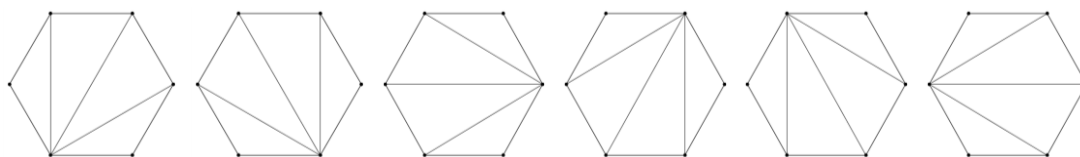
Megjegyzés: Észrevehetjük, hogy például $b_5 = 14$ megegyezik az előző feladatban szereplő $a_4 = 14$ értékkel. Igazolható, hogy ($a_0 = 1$ bevezetésével) minden természetes n számra teljesül az $a_n = b_{n+1}$ összefüggés, azaz egy $n+1$ -tényezős szorzatban ugyanannyiféleképpen helyezhetünk el n zárójelpárt, mint ahányféleképp $2n$ ember n db 1000 Ft-ossal és n db 2000 Ft-ossal fizethet az előző feladat feltételeinek megfelelően. Így a mostani feladatban rekurzív módon meghatározott $b_n = b_1 \cdot b_{n-1} + b_2 \cdot b_{n-2} + \dots + b_{n-2} \cdot b_2 + b_{n-1} \cdot b_1$ sorozatra is adható explicit képlet: $b_n = a_{n-1}$, vagyis $b_n = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}$. E sorozat tagjai (mind explicit, mind rekurzív formában megadva) az úgynevezett Catalan-számok (Eugène Charles Catalan XIX. századi belga matematikusról elnevezve). Az első néhány Catalan-szám: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429.

16. Hányféleképpen lehet egy konvex hatszöget egymást nem metsző átlóival háromszögekre bontani?

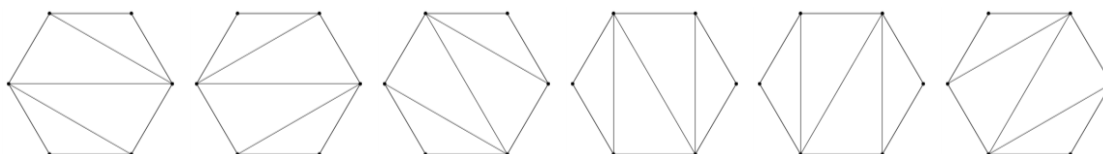
1. megoldás:

A hatszög háromszögekre bontásához 3 átlót kell behúznunk. Esetsztésválasztással kapjuk, hogy ezek lényegében háromféleképpen helyezkedhetnek el:

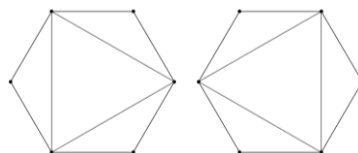
– egy csúcsból kiinduló három átló:



– három egymáshoz csatlakozó átló:



– három átló, amelyek egy háromszöget alkotnak:

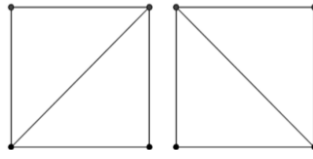


Ez összesen $6 + 6 + 2 = 14$ eset, tehát 14-féleképpen bontható háromszögekre egy hatszög.

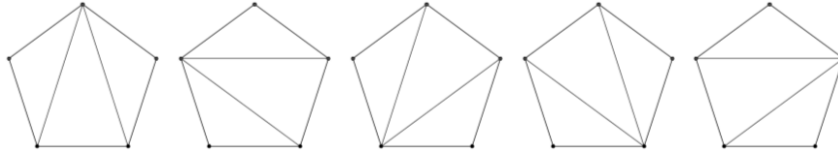
2. megoldás:

Vizsgáljuk meg a kérdést kisebb oldalszámú sokszögekre! Jelöljük c_n -nel azt az értéket, ahányféleképpen egy konvex n -szög ($n \geq 3$) egymást nem metsző átlóival háromszögekre bontható. Nyilván $c_3 = 1$, hiszen egy háromszöget nem kell tovább bontani, így az 1-féleképpen bontható háromszögekre.

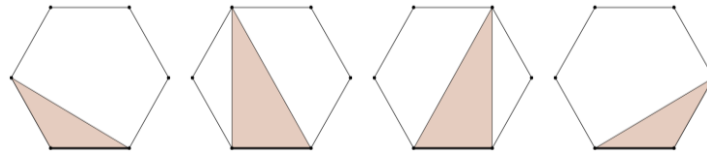
$c_4 = 2$, hiszen a négyszög 2-féleképpen bontható háromszögekre:



$c_5 = 5$, hiszen az ötszög 5-féleképpen bontható háromszögekre:



Az előző megoldásban már láttuk, hogy $c_6 = 14$, ezt azonban a közvetlen összeszámlálás helyett megpróbáljuk most a kisebb esetekre visszavezetni. Rögzítsük a hatszög egy tetszőleges oldalát (az ábránkon vastagítással jelöljük), és alkalmazzunk esetszétválasztást aszerint, hogy ez az oldal melyik háromszögnek lesz része:



Az első esetben a berajzolt háromszög mellett még egy ötszöget kell háromszögekre bontanunk, ezt tehát c_5 -féleképpen tudjuk folytatni. A második esetben egy háromszöget és egy négyszöget kell egymástól függetlenül háromszögekre bontanunk, itt tehát $c_3 \cdot c_4$ a lehetséges folytatások száma. A harmadik esetben hasonlóan egy négyszöget és egy háromszöget kapunk, a folytatások száma $c_4 \cdot c_3$. Végül a negyedik esetben újra egy ötszöget kapunk, amelyet c_5 -féleképpen tudunk befejezni.

A középső két esetben a behúzott háromszög két oldalán egy-egy sokszög (háromszög és négyszög) keletkezett. Az első és az utolsó esetet is átfogalmazhatjuk így: ekkor a háromszög egyik oldalán ugyan nem keletkezett sokszög, azonban ha ezt a részt egy elfajuló sokszögnek (kétszögnek) tekintenénk, és bevezetnénk a $c_2 = 1$ jelölést (vagyis 1 esetnek tekintenénk e kétszög felbontását is), akkor a korábbról már ismerős $c_6 = c_2 \cdot c_5 + c_3 \cdot c_4 + c_4 \cdot c_3 + c_5 \cdot c_2$ összefüggést kapnánk, ahonnan $c_6 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$ adódik.

Megjegyzés: A most rekurzívan definiált $c_n = c_2 \cdot c_{n-1} + c_3 \cdot c_{n-2} + \dots + c_{n-2} \cdot c_3 + c_{n-1} \cdot c_2$ sorozatról belátható, hogy az megegyezik az előző két feladatban megjelenő Catalan-számokkal, mégpedig $c_n = b_{n-1} = a_{n-2}$ (például $14 = c_6 = b_5 = a_4$).

17. Esetleges zárójelek elhelyezésével hányféle eredménye lehet a $10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1$ kifejezésnek?

Megoldás:

Először megmutatjuk hogy az esetlegesen elhelyezett zárójelek felbontásával (és elhagyásával) a kifejezés $10 - 9 \pm 8 \pm 7 \pm 6 \pm 5 \pm 4 \pm 3 \pm 2 \pm 1$ alakúra hozható, sőt, minden ilyen alakú műveletsor előállítható az eredeti kifejezésből megfelelő zárójelezéssel. Ehhez elég azt megfigyelnünk, hogy tetszőleges zárójel elhagyásakor a zárójel előtti $-$ előjel megfordítja a zárójelben szereplő előjele-

ket, például $10 - (9 - 8 - 7) = 10 - 9 + 8 + 7$ vagy $8 - (7 + 6 - 5) = 8 - 7 - 6 + 5$. Tehát ha kívülről befelé haladva egyesével elhagyjuk a zárójeleket, akkor minden ilyen esetben felcserélődnek a $+$ és $-$ előjelek a zárójeles részben. Mivel az első zárójelet leghamarabb a 9-es elé tehetjük ki (a 10 elé nem érdemes, hiszen ez nem változtat a végeredményen), ezért a 9 előjele biztosan negatív marad, leghamarabb a 8 előjelét, legkésőbb pedig az 1 előjelét tudjuk megváltoztatni.

Most megmutatjuk, hogy a $10 - 9 \pm 8 \pm 7 \pm 6 \pm 5 \pm 4 \pm 3 \pm 2 \pm 1$ kifejezésben bárhogyan is választjuk meg az előjeleket, az így kapott művelet sor előállítható az eredetiből megfelelő zárójelezéssel. Ennek egyik lehetséges módja, hogy balról jobbra megvizsgáljuk az előjeleket, és ahol előjelváltás történik ($+$ után $-$ következik vagy fordítva), ott elkezdünk egy zárójelet (az előjelváltás előtt), amelyet a következő előjelváltás előtt bezárunk. Például a $10 - 9 + 8 + 7 + 6 - 5 - 4 + 3 + 2 - 1$ esetet a $10 - (9 - 8 - 7 - 6) - 5 - (4 - 3 - 2) - 1$ zárójelezéssel kaphatjuk. (Ugyanezt más zárójelezéssel is előállíthatnánk.)

Tehát feladatunk a $10 - 9 \pm 8 \pm 7 \pm 6 \pm 5 \pm 4 \pm 3 \pm 2 \pm 1$ lehetséges eredményeinek vizsgálatára egyszerűsödött. A kifejezés értékének minimuma $10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 10 - 45 = -35$, maximuma $10 - 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 1 + 36 = 37$. Vegyük észre, hogy a kifejezés értékének paritása állandó (jelen esetben mindig páratlan), hiszen ha egy tetszőleges $+a$ helyett $-a$ -t írunk, akkor az összeg $2a$ -val, azaz páros számmal csökkent (a fordított esetben pedig ugyanennyivel nőtt).

Megmutatjuk, hogy a kifejezés minden -35 és 37 közötti páratlan értéket felvehet. Ezt úgy igazoljuk, hogy a $10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = -35$ kifejezésben néhány $-$ előjelet $+$ -ra cserélünk úgy, hogy ezáltal 2-vel, 4-gyel, 6-tal, ..., 72-vel növeljük a végeredményt. Ha $2n$ -nel szeretnénk növelni a végeredményt, akkor ehhez összesen n -et kell adni azon (1 és 8 közötti) számok összegének, amelyek előjelét módosítottuk (ahol $1 \leq n \leq 36$). Az 1 és 36 közötti egész számok pedig mind előállíthatók az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számok közül néhány összegeként, például úgy, hogy a kívánt összegből mindig levonjuk a lehetséges legnagyobb számot, amelyik még rendelkezésünkre áll (a 19 esetében például $19 - 8 = 11$, $11 - 7 = 4$ és $4 - 4 = 0$, tehát $8 + 7 + 4 = 19$).

Mivel $37 = -35 + 72 = -35 + 36 \cdot 2$, ezért összesen 37 páratlan szám található -35 és 37 között (a határokat is beleértve). Vagyis összesen 37-féle eredménye lehet a kérdéses kifejezésnek.

18. Határozzuk meg $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$ értékét zárt alakban.

Megoldás:

Az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ összefüggést felhasználva a kifejezés a következő alakra hozható:

$$\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{n-1} + \binom{n}{2} \cdot \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{0}$$

Tekintsünk egy zsákban n piros és n kék golyót (az azonos színű golyókat megkülönböztetjük egymástól). Ha szeretnénk e $2n$ golyóból összesen n darabot kiválasztani, ezt egyrészt nyilván

$\binom{2n}{n}$ -féle módon tehetjük meg. Másrészt a választásokat csoportosíthatjuk aszerint is, hogy melyik színű golyóból hány darabot választottunk. Ha pirosból 0, kékből n darabot választottunk, ezt

$\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n}$ -féleképpen tehettük meg. Ha pirosból 1, kéköl $n-1$ darabot választottunk, akkor erre $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{n-1}$ lehetőségünk volt, és így tovább, i piros és $n-i$ kék golyó esetén a lehetséges választások száma éppen $\binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n-i}$, ahol $0 \leq i \leq n$. Ezek éppen a vizsgált összegben szereplő tagok.

Mivel ugyanazt a mennyiséget kétféleképpen is meghatároztuk (a módszert kettős leszámolásnak is nevezik), ezért a két eredmény szükségképpen egyenlő, így a kérdéses kifejezés értéke $\binom{2n}{n}$.

19. Az $\{1; 2; 3; 4; \dots; 2015\}$ halmazból szeretnénk kiválasztani Annának egy A és Beának egy B nem üres részhalmazt úgy, hogy ezeknek ne legyen közös eleme. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

1. megoldás:

Ha Annának egy n -elemű részhalmazt választunk (ahol $1 \leq n \leq 2014$), akkor Bea részhalmazába a fennmaradó $2015-n$ szám közül választhatunk. Mivel 2015 elem közül n -et $\binom{2015}{n}$ -féleképpen választhatunk, továbbá egy k -elemű halmaznak $2^k - 1$ nem üres részhalmaza van, ezért a lehetőségek száma felírható a következőképpen:

$$\binom{2015}{1} \cdot (2^{2014} - 1) + \binom{2015}{2} \cdot (2^{2013} - 1) + \dots + \binom{2015}{i} \cdot (2^{2015-i} - 1) + \dots + \binom{2015}{2014} \cdot (2^1 - 1)$$

Ebből átalakítás után kapjuk a következő kifejezést:

$$\binom{2015}{1} \cdot 2^{2014} + \binom{2015}{2} \cdot 2^{2013} + \dots + \binom{2015}{2014} \cdot 2^1 - \left(\binom{2015}{1} + \binom{2015}{2} + \dots + \binom{2015}{2014} \right)$$

Tudjuk, hogy $\binom{2015}{0} + \binom{2015}{1} + \dots + \binom{2015}{2015} = 2^{2015}$ (az egyenlőség mindkét oldalán egy 2015-elemű halmaz részhalmazait számoljuk össze, a bal oldalon elemszám szerinti bontásban). Azt is tudjuk, hogy a binomiális tétel alapján:

$$3^{2015} = (2+1)^{2015} = \binom{2015}{0} \cdot 2^{2015} \cdot 1^0 + \binom{2015}{1} \cdot 2^{2014} \cdot 1^1 + \binom{2015}{2} \cdot 2^{2013} \cdot 1^2 + \dots + \binom{2015}{2015} \cdot 2^0 \cdot 1^{2015}$$

E két összefüggést felhasználva a vizsgált kifejezés a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} 3^{2015} - \left[\binom{2015}{0} \cdot 2^{2015} \cdot 1^0 + \binom{2015}{2015} \cdot 2^0 \cdot 1^{2015} \right] - \left(2^{2015} - \left[\binom{2015}{0} + \binom{2015}{2015} \right] \right) = \\ = 3^{2015} - [2^{2015} + 1] - (2^{2015} - [1 + 1]) = 3^{2015} - 2 \cdot 2^{2015} + 1 \end{aligned}$$

Tehát a lehetséges kiválasztások száma $3^{2015} - 2 \cdot 2^{2015} + 1$.

2. megoldás:

Az alaphalmaz mind a 2015 elemét 3 különböző helyre tehetjük: az A részhalmazba, a B részhalmazba, illetve egyikbe sem. Ez 3^{2015} -féle szétosztást jelent, azonban ezek közül ki kell vonnunk azokat az eseteket, amikor A vagy B valamelyike (esetleg mindkettő) üres.

Ha az A részhalmaz üres, akkor mind a 2015 elemet két helyre tehetjük: a B részhalmazba, illetve egyikbe sem, ez 2^{2015} lehetőség. Ugyanígy 2^{2015} azon lehetőségek száma is, amikor a B részhalmaz üres. De ha A és B egyszerre üres, ezt az egy esetet mindkét alkalommal megszámoltuk. Tehát a rossz esetek száma $2 \cdot 2^{2015} - 1$, így a jó esetek száma $3^{2015} - 2 \cdot 2^{2015} + 1$.

20. 5 matematikatanár 30 érettségi dolgozatot szeretne elosztani javításra egymás között úgy, hogy mindegyikük legalább egyet kijavítson. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

Megoldás:

Álljon a H alaphalmaz a 30 érettségi dolgozat 5 tanár közötti összes lehetséges szétosztásából, továbbá legyenek ennek A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 részhalmazai azon szétosztások, amelyekben az 1., 2., 3., 4., illetve 5. tanárnak nem jut dolgozat. Feladatunk ekkor $|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)|$ meghatározása, amelyre a szita-módszert fogjuk alkalmazni.

Tudjuk, hogy $|H| = 5^{30}$, hiszen a 30 dolgozat mindegyikét az 5 tanár bármelyikének adhatjuk. Továbbá $|A_i| = 4^{30}$ (ahol $1 \leq i \leq 5$), hiszen ha az i -edik tanárnak nem jut dolgozat, akkor minden dolgozatot 4 tanár valamelyikének adhatunk. Hasonlóképpen $|A_i \cap A_j| = 3^{30}$ (ahol $1 \leq i, j \leq 5$ és $i \neq j$), illetve bármely k részhalmaz metszetének elemszáma $(5-k)^{30}$ (ahol $1 \leq k \leq 5$). Mivel k részhalmazt $\binom{5}{k}$ -féleképpen lehet kiválasztani, így a szita-formulát felírva a keresett lehetőségek száma $5^{30} - \binom{5}{1} \cdot 4^{30} + \binom{5}{2} \cdot 3^{30} - \binom{5}{3} \cdot 2^{30} + \binom{5}{4} \cdot 1^{30} - \binom{5}{5} \cdot 0^{30}$ (ahol az utolsó tag jelöli az 5 halmaz metszetét, amely nyilvánvalóan üres, hiszen ekkor egyik tanár se kaphatna dolgozatot).

A lehetséges szétosztások száma tehát $5^{30} - 5 \cdot 4^{30} + 10 \cdot 3^{30} - 10 \cdot 2^{30} + 5$. (A végeredmény közelítő értéke $9,256 \cdot 10^{20}$.)

21. Hányféleképpen lehet úgy sorozatba rendezni az 1, 2, 3, ..., 10 számokat, hogy a kapott sorozat az elsőtől valahányadik eleméig monoton növekedő, onnantól pedig monoton csökkenő legyen? (A két részsorozat határa akár a sorozat első vagy utolsó eleme is lehet.)

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy a növekedő és a csökkenő részsorozatot elválasztó elem csak a 10 lehet, hiszen ennél nagyobb elem nincs a megadott számok között. Így a sorozatban a 10 előtti elemeknek növekvő, a 10 utáni elemeknek csökkenő sorrendben kell következniük. Ezért minden ilyen sorozatot egyértelműen meghatároz a 10 előtti elemek halmaza (ezeket az elemeket növekvő sorrendben kell felsorolnunk, majd a 10 után a maradék elemeket csökkenő sorrendben).

Mivel az 1, 2, 3, ..., 9 számok mindegyikéről egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy a 10 előtt vagy után álljon, ezért a 10 előtti elemek halmaza $2^9 = 512$ -féle lehet. Ez az érték egyébként meg-

egyezik az $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$ halmaz részhalmazainak számával.

Vagyis 512-féle lehetséges sorozatba rendezés létezik.

22. Határozzuk meg azon 4×4 -es, nemnegatív egész számokat tartalmazó táblázatok számát, amelyekre teljesül, hogy minden sorban és minden oszlopban legfeljebb két nem nulla szám található, továbbá minden sorban és minden oszlopban az ott található számok összege 3.

Náboj Nemzetközi Matematika Csapatverseny 2014/2015.

Megoldás:

Bármely sorban, illetve oszlopban a megadott feltételek mellett csak kétféleképpen lehet 3 az összeg: vagy egy 1-es és egy 2-es szerepel benne (és két 0), vagy egy 3-as (és három 0). Ez utóbbit az előző lehetőség speciális eseteként is értelmezhetjük: ha ugyanazon mezőbe került egy 1-es és egy 2-es. Így (a 0-kat figyelmen kívül hagyva) biztosan állíthatjuk, hogy minden sor/oszlop pontosan egy 1-est és pontosan egy 2-est tartalmaz (esetleg ugyanabban a mezőben). Ez azt is jelenti (mivel két 2-es nem állhat ugyanazon sorban/oszlopban), hogy minden ilyen táblázat felbomlik két olyan 4×4 -es táblázat elemenkénti összegére, amelyek közül az egyik minden sorában és oszlopában pontosan egy 2-est tartalmaz, a másik pedig minden sorában és oszlopában pontosan egy 1-est. Megfordítva pedig, két ilyen táblázat összege nyilván minden esetben teljesíti a feladat feltételeit.

Elegendő tehát az ilyen táblázatpárok darabszámát meghatároznunk. Mivel egy 4×4 -es táblázat $4!$ -féleképpen tölthető ki (például 2-essel) úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy mezőbe kerüljön szám, ezért a vizsgált lehetőségek száma $(4!)^2 = 24^2 = 576$.

23. Egy 5×3 -as rács bal felső sarkában ül egy egér (E), aki el akar jutni a jobb alsó sarokban található sajthoz (S). Emellett a rács bal alsó sarkában ül egy rák (R), aki pedig a jobb felső sarokban található algalevelet (A) szemlélte ki magának. A két állat egyszerre mozog a rácson: minden másodpercben az egér egy rácnyit halad jobbra vagy lefelé, a rák pedig egy rácnyit halad jobbra vagy felfelé. Hányféleképpen érhetik el a céljukat úgy, hogy útközben semelyik mezőn se találkozzanak?

E				A
R				S

Náboj Nemzetközi Matematika Csapatverseny 2014/2015.

Megoldás:

A két állat csak a középső sorban tud összetalálkozni (hiszen ha például a felső sorban találkoznának, akkor az egér eddig a pillanatig csak jobbra mozoghatna, de a ráknak ugyanannyi jobbra lépés mellett még felfelé is kellene haladnia, ami több időbe telne). Ha ismerjük mindkét állat esetében, hogy a középső sorban mely (szomszédos) mezőkön haladt át, ebből már a teljes útvonalukat meg tudjuk határozni. Mivel a középső sor bármely mezőjére mindkét állat pontosan ugyanannyi idő alatt tud csak eljutni (balról jobbra rendre 1, 2, 3, 4, illetve 5 másodperc alatt), ezért akkor és csak akkor nem találkoznak, ha a középső sorban megtett útvonalrészleteik nem metszik egymást. Vagyis azt kell megszámolnunk, hogy a középső sorból hányféleképpen választhatunk ki két diszjunkt „szakaszt” (szakasz alatt most egy vagy több szomszédos négyzetet értünk).

A következő példában E és R betűkkel szemléltetjük az egér és a rák egy-egy lehetséges útvonalát (az RE jelzésű mezőkön mindketten áthaladtak, de különböző időben: előbb a rák, majd az egér), valamint a középső sorban vastag vonallal kiemeljük a két diszjunkt „szakasz” függőleges határvonalait.

E			R	R
E	E		R	
R	RE	RE	RE	E

Ha a két szakasz nem közvetlenül határos, akkor ezeket összesen 4 függőleges négyzetoldal határolja (mindkét szakaszt 2-2). Mivel a középső sorban összesen 6 függőleges négyzetoldal található,

ezért két szakaszt sorrendben $2 \cdot \binom{6}{4}$ -féleképpen választhatunk ki. Ugyanis először ki kell választanunk a 4 határoló négyzetoldalt, majd sorba kell raknunk a két állatot: az 1. állat az első két kiválasztott oldal közötti négyzeteken fog áthaladni, a 2. állat az utolsó két kiválasztott oldal közöttieken.

Ha a két szakasz közvetlenül határos, akkor ezeket összesen csak 3 függőleges négyzetoldal határolja. Ezeket az előzőekhez hasonlóan $2 \cdot \binom{6}{3}$ -féleképpen választhatjuk ki.

Tehát a megengedett célba érések száma összesen $2 \cdot \binom{6}{4} + 2 \cdot \binom{6}{3} = 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 70$.

24. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek néhány számjegyét a szám elejéről (ugyanolyan sorrendben) a szám végére helyezve visszakapható az eredeti szám? (Például az 1234 nem ilyen, mert a 2341, 3412, 4123 mind különböznek tőle.)

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2014/2015; kezdők, I-II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Legyen a keresett szám $\overline{abcd}$ alakú, és csoportosítsuk a megoldásokat aszerint, hogy legkevesebb hány számjegyet kell a szám elejéről a végére helyezni, amíg visszakapjuk az eredeti számot.

Ha egy számjegyet kell áthelyeznünk, akkor $\overline{abcd} = \overline{bcda}$, amiből $a = b = c = d$ következik. Mivel $a \neq 0$, ezért a bármilyen egyjegyű pozitív egész lehet, tehát ebben az esetben 9 számot kapunk.

Ha két számjegyet kell áthelyeznünk, akkor $\overline{abcd} = \overline{cdab}$, amiből $a = c$ és $b = d$ következik. Ez $9 \cdot 10 = 90$ számot jelentene, de ezek közül az $a = b = c = d$ esetben egy számjegy áthelyezése is elegendő (és így ezeket már számoltuk az előző lehetőségnél), tehát itt $90 - 9 = 81$ számot kapunk.

Ha három számjegyet kell áthelyeznünk, akkor $\overline{abcd} = \overline{dabc}$, amiből $a = b = c = d$ következik. Ezeket az eseteket már megszámloltuk (hiszen ilyenkor egy számjegy áthelyezése is elegendő), itt tehát nem kaptunk újabb megoldást.

Vagyis összesen 90 megfelelő szám van.

25. Hány olyan legfeljebb négyjegyű természetes szám van, amelynek számjegyei között több 2-es szerepel, mint 1-es?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2014/2015; haladók, I. kategória, 1. forduló

1. megoldás:

A vizsgált számok mindegyikét tekinthetjük négyjegyűnek úgy, hogy a szám elejére esetlegesen nullákat írunk (például a 12-ből 0012 lesz). Esetszétválasztás végzünk a számban szereplő 1-esek és 2-esek száma szerint:

- egy 2-es és nulla 1-es: $4 \cdot 8^3 = 2048$ szám (a 2-es 4 helyen állhat, a fennmaradó 3 hely mindegyikére pedig 8-féle számot írhatunk);
- két 2-es és nulla 1-es: $\binom{4}{2} \cdot 8^2 = 384$ szám;
- két 2-es és egy 1-es: $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 8 = 96$ szám;
- három 2-es és nulla 1-es: $\binom{4}{3} \cdot 8 = 32$ szám;
- három 2-es és egy 1-es: $\binom{4}{3} = 4$ szám;
- négy 2-es és nulla 1-es: 1 szám.

Ez összesen $2048 + 384 + 96 + 32 + 4 + 1 = 2565$ megfelelő szám.

2. megoldás:

A vizsgált számok mindegyikét tekinthetjük négyjegyűnek úgy, hogy a szám elejére esetlegesen nullákat írunk (például a 12-ből 0012 lesz). Így összesen $10^4 = 10000$ számot kell vizsgálnunk. Először meghatározzuk azon számok számát, amelyekben ugyanannyi 1-es és 2-es szerepel:

- nulla 1-es és nulla 2-es: $8^4 = 4096$ szám;
- egy 1-es és egy 2-es: $4 \cdot 3 \cdot 8^2 = 768$ szám;
- két 1-es és két 2-es: $\binom{4}{2} = 6$ szám.

Tehát a vizsgált számok közül összesen $4096 + 768 + 6 = 4870$ olyan van, amelyben ugyanannyi 1-es és 2-es szerepel. A fennmaradó $10000 - 4870 = 5130$ szám mindegyikében vagy az 1-esek száma több a 2-esekénél, vagy fordítva. Ezeket a számokat kölcsönösen egyértelműen párba állíthatjuk úgy, hogy a számban szereplő 1-eseket és 2-eseket megcseréljük (például az 1123 párja a 2213 lesz, a 20=0020 párja a 0010=10). Mivel minden számban szerepel legalább egy 1-es vagy 2-es, így az összes számnak lesz párja, és egy szám pontosan egy párba kerül. A pároknak pontosan az egyik tagja tartalmaz több 2-est, mint 1-est, így ezen számok száma $5130 : 2 = 2565$.

26. Hányféle módon lehet felmenni egy 25 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha mindig csak 2-t vagy 3-at léphetünk felfelé? (Két feljutás különböző, ha van legalább egy olyan lépcsőfok, amelyre az egyik feljutásban rálépünk, de a másikban nem.)

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2014/2015; haladók, II. kategória, 1. forduló

1. megoldás:

Jelöljük a_i -vel (ahol $1 \leq i \leq 25$ és i egész szám) az i -edik lépcsőfokra történő összes lehetséges feljutás számát. Ekkor feladatunk a_{25} meghatározása. Tudjuk, hogy $a_1 = 0$ (mivel az első lépcsőfokra nem léphetünk rá), valamint $a_2 = 1$ és $a_3 = 1$ (mivel a második és a harmadik lépcsőfokra csak egyféleképpen: a talajról juthatunk). Minden $i \geq 3$ esetén az i -edik lépcsőfokra az $i-2$. és az $i-3$. lépcsőfokról érkezhünk, vagyis $a_i = a_{i-2} + a_{i-3}$. Ezen rekurzív összefüggés alapján az a_i értékeket egyesével meghatározhatjuk:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
a_i	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114	151	200	265	351	465

Tehát $a_{25} = 465$ -féleképpen juthatunk fel a lépcsőn.

2. megoldás:

Jelöljük a -val azt, hogy hányszor léptünk 2-t, b -vel pedig azt, hogy hányszor léptünk 3-at. Ekkor teljesülnie kell a $2a + 3b = 25$ összefüggésnek, ahol a és b természetes számok. Mivel $2a$ páros, ezért $3b$ páratlan, így b is páratlan, emiatt b értéke csak 1, 3, 5 vagy 7 lehet. Az ezekhez tartozó a -értékek rendre 11, 8, 5 és 2. A négy esethez a következő megoldások tartoznak:

- $b = 1$ és $a = 11$ esetén a 12 lépésből 11 egyforma, ez $\frac{12!}{11!} = 12$ lehetőség;
- $b = 3$ és $a = 8$ esetén a 11 lépésből 3 és 8 egyforma, ez $\frac{11!}{3! \cdot 8!} = 165$ lehetőség;
- $b = 5$ és $a = 5$ esetén a 10 lépésből 5 és 5 egyforma, ez $\frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$ lehetőség;
- $b = 7$ és $a = 2$ esetén a 9 lépésből 7 és 2 egyforma, ez $\frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$ lehetőség.

Tehát összesen $12 + 165 + 252 + 36 = 465$ -féleképpen juthatunk fel a lépcsőn.

27. Felvettünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesre. Minden pontot összeköttöttünk minden másikkal, és a keletkező élek mindegyikét pirosra vagy kékre színeztük. Tudjuk, hogy így minden pontból pontosan 12 kék színű él indul ki. Nevezzük egyszínűnek azokat a háromszögeket, amelyeknek mindhárom csúcsa a 30 pont közül való, és mindhárom oldala ugyanolyan színű. Összesen hány egyszínű háromszög van az ábrán?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2011/2012; haladók, III. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Jelöljük az egyszínű háromszögek számát x -szel, a nem egyszínűekét y -nal. Ha a 30 pont minde-

gyikét minden másikkal összekötjük, akkor összesen $\binom{30}{3} = 4060$ háromszög keletkezik, amelyek mindegyike vagy egyszínű, vagy nem egyszínű, tehát $x + y = 4060$.

Minden pontból pontosan 12 kék és 17 piros él indul ki. Megszámoljuk minden egyes pont esetében, hogy az onnan kiinduló azonos színű élpárok hány háromszöget alkotnak (attól függetlenül, hogy például két kiinduló kék él végpontjai között kék vagy piros él halad, és így a háromszög egyszínű vagy nem egyszínű lesz). Minden pontból $\binom{12}{2} = 66$ kék élpár és $\binom{17}{2} = 136$ piros élpár indul ki, vagyis minden pont $66 + 136 = 202$ olyan háromszögnek valamelyik csúcsa, amelynek az adott csúcsban két azonos színű éle találkozik. Ez a 30 pont esetében $30 \cdot 202 = 6060$ háromszöget jelent.

Ebben az összegben minden háromszöget annyszor számoltunk meg, ahány azonos színű élpár kiválasztható az oldalai közül. Az egyszínű háromszögek esetében ez 3-féleképpen lehetséges (hiszen bármely két oldaluk azonos színű), míg a nem egyszínű háromszögek esetében pontosan 1-féleképpen (hiszen két oldaluk azonos színű, a harmadik pedig ezekről különböző, így ezeket a háromszögeket a két azonos oldal közös végpontjában számoltuk meg). Tehát $3x + y = 6060$.

Az $x + y = 4060$ és a $3x + y = 6060$ egyenletrendszer megoldva kapjuk, hogy $x = 1000$ és $y = 3060$. Tehát összesen 1000 egyszínű háromszög van az ábrán.

A feladatnak megfelelő színezés valóban elő is állítható, például úgy, hogy a pontokat egy tetszőleges sorrendben beszámozzuk 1-től 30-ig, és minden pontból kék színű éleket indítunk a megelőző 6 sorszámú és a rákövetkező 6 sorszámú pontba (tehát az i -edik pontot az $i-6$., $i-5$., ..., $i-1$., $i+1$., $i+2$., ..., $i+6$. sorszámú pontokkal kötjük össze kék színű éllel, ahol a 30. pont után újra az 1. következik), a többi pontpárt pedig piros színnel kötjük össze. Ekkor valóban minden pontból pontosan 12 kék színű él fog kiindulni.

28. Megrajzoltuk egy konvex nyolcszög összes átlójának egyenesét, majd ezen egyenesek összes metszéspontját. Legfeljebb hány metszéspont eshet a nyolcszögön kívülre?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2014/2015; haladók, III. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Az átlóegyeneseknek akkor keletkezik a legtöbb metszéspontja, ha közülük semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem metszi egymást ugyanabban a pontban. (Ilyen konvex nyolcszöget például úgy rajzolhatunk, ha a pontokat egymás után ugyanazon kör kerületén vesszük fel, és mindig figyelünk a két szabályra: a keletkező átlóegyenese ne legyenek párhuzamosak a korábbiakkal, és ne metsszék azokat korábbi metszéspontban. Mindkét szabály véges sok lehetőséget zár ki a kör kerületén, így mindig találunk olyan pontot, amely teljesíti a feltételeket.)

Feltételezhetjük tehát, hogy az átlók között nincsenek párhuzamosak, és a nyolcszög csúcsain kívül nincs olyan pont, amelyen kettőnél több átlóegyenes átmegy. Először összeszámoljuk az összes metszéspontot, majd ezek számából levonjuk a nyolcszög kerületére és belsejébe eső metszéspontok számát.

A nyolcszögnek $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ átlója van, amelyek egyeneseiből $\binom{20}{2} = 190$ pár alkotható (ezen párok alapján fogjuk meghatározni a metszéspontok számát). A nyolcszög kerületét bármelyik átlója va-

lamelyik csúcsban metszi, a 8 csúcs mindegyikében $\binom{5}{2} = 10$ átlópár találkozik, ez összesen $8 \cdot 10 = 80$ pár. Ha pedig a nyolcszög belsejében metszi egymást két átló, akkor ez a metszéspont kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető annak a konvex négyszögnek, amelyet a két átló négy végpontja határoz meg. Az ilyen négyszögek – és így a belső metszéspontok – száma $\binom{8}{4} = 70$.

Tehát a lehetséges 190 átlópár közül 80 a nyolcszög területén metszi egymást, 70 pedig a nyolcszög belsejében. Így legfeljebb $190 - 80 - 70 = 40$ metszéspont eshet a nyolcszögön kívülre (és ez el is érhető, például a megoldás elején ismertetett konstrukcióval).

29. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege és szorzata egyaránt 24?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2011/2012; haladók, I. kategória, 2. forduló

Megoldás:

A szorzatra vonatkozó feltétel alapján a keresett számokban csak az 1, 2, 3, 4, 6, 8 számjegyek fordulhatnak elő. A 24 lehetséges szorzattá bontásait (csökkenő sorrendben felsorolva) 1-esekkel kiegészítve elérhetjük, hogy a tényezők összege is 24 legyen, a következő módokon:

$$8, 3 \text{ és } 13 \text{ db } 1\text{-es (15 tényező): } \frac{15!}{13!} = 210 \text{ lehetőség}$$

$$6, 4 \text{ és } 14 \text{ db } 1\text{-es (16 tényező): } \frac{16!}{14!} = 240 \text{ lehetőség}$$

$$6, 2, 2 \text{ és } 14 \text{ db } 1\text{-es (17 tényező): } \frac{17!}{2! \cdot 14!} = 2040 \text{ lehetőség}$$

$$4, 3, 2 \text{ és } 15 \text{ db } 1\text{-es (18 tényező): } \frac{18!}{15!} = 4896 \text{ lehetőség}$$

$$3, 2, 2, 2 \text{ és } 15 \text{ db } 1\text{-es (19 tényező): } \frac{19!}{3! \cdot 15!} = 15504 \text{ lehetőség}$$

Összesen tehát $210 + 240 + 2040 + 4896 + 15504 = 22890$ szám felel meg a feltételeknek.

30. Hány olyan sorrendje van a 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 számoknak, amelyben bármely négy egymást követő szám összege osztható 3-mal?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2012/2013; kezdők, II. kategória, döntő

Megoldás:

Legyen a hét szám egy megfelelő sorrendje $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. A megadott számok helyett elég azok hármas maradékait vizsgálnunk, amelyek rendre a következők: 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0. Ezek összege osztható 3-mal, tehát $3 \mid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7)$.

Mivel $3 \mid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ és $3 \mid (a_4 + a_5 + a_6 + a_7)$, így $3 \mid (a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 + a_6 + a_7)$, ahonnan a hét szám összegére vonatkozó feltétel alapján $3 \mid a_4$ adódik. Emiatt a_4 értékét 3-féleképpen választhatjuk meg. Ebből $3 \mid (a_1 + a_2 + a_3)$ is következik, ami csak úgy teljesülhet, ha

az első három szám hármás maradéka páronként különböző (a $0+0+0$ nem fordulhat elő, mert a_4 hármás maradéka is 0). Tehát az első három szám hármás maradékai 0, 1, 2 valamilyen sorrendben. Ezeket (a_4 rögzítése után) $3! \cdot 2^3$ -féleképpen választhatjuk ki (a maradékok sorrendje $3!$ -féle lehet, míg az egyes helyekre rendre 2-2 megfelelő szám kerülhet).

Mivel $3 \mid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ és $3 \mid (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$, ezért a_1 és a_5 hármás maradéka megegyezik, illetve hasonlóképpen a_2 és a_6 hármás maradékai, valamint a_3 és a_7 hármás maradékai is egyenlők, tehát az első három szám egyértelműen meghatározza az utolsó hármat.

Vagyis a feltételeknek megfelelő sorrendek száma $3 \cdot 3! \cdot 2^3 = 3 \cdot 6 \cdot 8 = 144$.

31. Hány olyan tízjegyű természetes szám van, amelyben az 1, 2, 3 számjegyek mindegyike legalább kétszer szerepel, és ezeken a számjegyeken kívül más számjegy nincs a számban?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2013/2014; kezdők, II. kategória, döntő

1. megoldás:

A három különböző számjegy gyakorisága (valamilyen sorrendben) négyféle lehet: $6+2+2$, $5+3+2$, $4+4+2$, illetve $4+3+3$. Ha az egyik számjegy 6-szor, a másik kettő 2-szer fordul elő, akkor 3-féleképpen választhatjuk ki a 6-szor előforduló számjegyet (ez meghatározza a 2-szer előforduló jegyeket is), így összesen $3 \cdot \frac{10!}{6! \cdot 2! \cdot 2!} = 3780$ számot kapunk. Hasonlóan a $4+4+2$ eset-

ben $3 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 9450$, a $4+3+3$ esetben $3 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 12600$ számot kapunk. Az $5+3+2$ esetben 3!-féleképpen választhatjuk meg, hogy melyik számjegy hányszor forduljon elő, így ekkor $3! \cdot \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 15120$ számot kapunk. Tehát összesen $3780 + 9450 + 12600 + 15120 = 40950$ ilyen szám van.

2. megoldás:

Álljon a H alaphalmaz az 1, 2, 3 számjegyekből alkotható összes tízjegyű természetes számból, továbbá legyenek ennek A_1 , A_2 , A_3 részhalmazai azon számok, amelyekben rendre az 1, 2, illetve 3 számjegy legfeljebb egyszer fordul csak elő. Feladatunk ekkor $|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$ meghatározása, amelyre a szita-módszert fogjuk alkalmazni.

Tudjuk, hogy $|H| = 3^{10} = 59049$. Az A_1 halmazba tartozó számok legfeljebb egy 1-est tartalmaznak, azaz vagy nincs bennük 1-es (ez 2^{10} db szám), vagy egy 1-es van bennük (ez $10 \cdot 2^9$ db szám). Tehát $|A_1| = 2^{10} + 10 \cdot 2^9 = 6144$, illetve a szimmetria miatt $|A_2| = |A_3| = 6144$.

Az $A_1 \cap A_2$ halmazba tartozó számok legfeljebb egy 1-est és legfeljebb egy 2-est tartalmaznak. Ez négyféleképp fordulhat elő: vagy nincs bennük se 1-es, se 2-es (1 db szám); vagy van bennük egy 1-es, de nincs 2-es (10 db szám); vagy van bennük egy 2-es, de nincs 1-es (10 db szám); vagy van bennük egy 1-es és egy 2-es ($10 \cdot 9 = 90$ db szám). Tehát $|A_1 \cap A_2| = 1 + 10 + 10 + 90 = 111$, és hasonlóan $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 111$. Továbbá $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$.

A szita-formula alapján $|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 59049 - 3 \cdot 6144 + 3 \cdot 111 - 0 = 40950$, tehát a kere-

sett számok száma 40950.

32. Van 2012 darab (nem feltétlenül különböző) pozitív számunk: $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$, amelyek összege $2S$. A k természetes számot felezőnek nevezzük, ha az a_i számok közül kiválasztható k darab, amelyek összege éppen S . Legfeljebb hány különböző k természetes szám lehet egyszerre felező?

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2011/2012; haladók, III. kategória, döntő

Megoldás:

Ha a megadott számok közül néhánynak az összege S , akkor a fennmaradó számok összege is S . Ebből következik, hogy n pontosan akkor felező, ha $2012 - n$ is felező.

Ha az 1 felező (és így a 2011 is), akkor e két számon kívül más felező szám nem lehet, hiszen ha az 1 felező, akkor az egyik szám éppen S , így ezen kívül csak úgy kaphatunk S -et összegként, ha az összes többi számot felhasználjuk.

Most megadunk olyan $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$ számokat, amelyek esetében a $k = 2, 3, \dots, 2010$ számok mindegyike felező lesz. (Az előző megállapítással együtt ebből következik, hogy e 2009 darab k szám adja a keresett maximumot.)

Legyenek az $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$ számok: $1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \dots, 2^{1004}, 2^{1004}$. E számok összege $2S = 2 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{1004}) = 2 + 2 \cdot (2^{1005} - 1) = 2^{1006}$, tehát $S = 2^{1005}$. A következőkben megadjuk $k = 2, 3, 4, \dots, 2010$ esetén a megfelelő összegeket:

$$k = 2 \text{ esetén } S = 2^{1004} + 2^{1004}$$

$$k = 3 \text{ esetén } S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1003}$$

$$k = 4 \text{ esetén } S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1002} + 2^{1002}$$

...

$$k = 1006 \text{ esetén } S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1002} + 2^{1001} + \dots + 2^1 + 1 + 1$$

$k = 1007, 1008, \dots, 2010$ esetén pedig az előző konstrukciókból kimaradó számok adják a megfelelő összegeket, hiszen ha n felező, akkor $2012 - n$ is felező.

Tehát egyszerre legfeljebb 2009 különböző szám lehet felező.

33. Hányféleképpen olvasható ki az ábrából a BUDAPEST szó, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk, és kettőnél többször nem léphetünk egymás után ugyanabba az irányba?

```

B U D A P E S T
U D A P E S T
D A P E S T
A P E S T
P E S T
E S T
S T
T

```

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2011. évi feladata alapján

1. megoldás:

Jelöljük a jobbra lépést J betűvel, a lefelé lépést L betűvel. Mivel összesen 7-et kell lépnünk, ezek közül legfeljebb 5 történhet ugyanabba az irányba, hiszen három egymás utáni lépés nem lehet egyforma (ha például minél többet szeretnénk jobbra lépni, és minél kevesebbet lefelé, akkor a JJLJJLJ útvonalon 5 jobbra és 2 lefelé lépést teszünk). Ebből következik, hogy a lefelé lépések száma 2 és 5 közötti, tehát csak az alábbi ábrán szürkével jelölt T betűkön végződhet a kiolvasás:

```

B U D A P E S T
U D A P E S T
D A P E S T
A P E S T
P E S T
E S T
S T
T

```

A legfelső szürke T-betűhöz 3-féleképpen juthatunk el: JJLJJLJ, JJJLJJ, JLJJLJJ. Szimmetriai okok miatt ugyanennyi út vezet a legalsó szürke T-betűhöz is (LLJLLJL, LLJLJLL, LJLLJLL).

A negyedik sorban lévő szürke T-betűhöz 4 jobbra és 3 lefelé lépés vezet. A 4 db J és 3 db L betűt összesen $\binom{7}{3} = 35$ -féleképpen lehet sorba rakni, ezek közül azonban nem jók azok az elrendezések, amelyekben 3 vagy 4 J, illetve 3 L betű következik egymás után. A rossz esetek tehát a következők:

- 4 szomszédos J és 3 szomszédos L: 2 db (JJJJLLL, LLLJJJJ);
- 3 szomszédos J és 3 szomszédos L: 2 db (JJJJLLJ, JLLLJJJ);
- 4 szomszédos J: 2 db (LJJJJLL, LLJJJJL);
- 3 szomszédos J: 10 db (LLJJLJ, LJJJLL, JJJLJLL, LLJLJJ, LJLJJL, JLJJLL, LJJJLLJ, JJLLJL, LJLLJJ, JLLJJL);
- 3 szomszédos L: 1 db (JJLLLJJ).

Tehát a negyedik sorban lévő szürke T-betűhöz $35 - (2 + 2 + 2 + 10 + 1) = 18$ -féle út vezet. Szimmetriai okokból (a J és L betűk megcserélésével) ugyanennyi út vezet az ötödik sorban lévő szürke T-betűhöz is.

Tehát összesen $3+18+18+3=42$ -féleképpen olvasható ki a BUDAPEST szó a feltételeknek megfelelően.

2. megoldás:

Minden lehetséges kiolvasást kódolhatunk a következő módon is: megadjuk, hogy az első lépés jobbra vagy lefelé történik-e, majd ezután azt jelezzük, hogy a haladás során rendre 1 vagy 2 lépést teszünk ugyanabban az irányban. (Például az LLJLLJL sorozat kódja az L 21211 jelsorozat lesz, mert egymás után rendre 2, 1, 2, 1, majd ismét 1 azonos betű következik.) Minden ilyen kódban az első betűt követő számok összege 7.

Megfordítva, ha felírunk egy tetszőleges olyan kódot, amely L vagy J betűvel kezdődik, majd utána 1-es és 2-es számjegyek következnek, amelyek összege 7, akkor ez a kód egyértelműen meghatároz egy kiolvasást. Elegendő tehát az ilyen kódok számát meghatároznunk.

A 7-et összegalakban a következőképpen írhatjuk fel:

- 7 db 1-es: 1-féleképpen;
- 5 db 1-es és 1 db 2-es: $\frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6$ -féleképpen;
- 3 db 1-es és 2 db 2-es: $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ -féleképpen;
- 1 db 1-es és 3 db 2-es: $\frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$ -féleképpen.

Ez idáig $1+6+10+4=21$ -féle lehetséges számsorozat. Minden ilyen sorozat kezdődhet L vagy J betűvel, tehát összesen $2 \cdot 21=42$ -féle kód adható meg, így a lehetséges kiolvasások száma is 42.

34. Hányféleképpen juthatunk el a koordinátarendszer origójából a $(4; 2)$ pontba, ha 10 lépést teszünk, minden lépésünk egységnyi hosszú és párhuzamos a tengelyek valamelyikével?

OKTV 2012/2013; II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Jelöljük a lépéseket a B (balra), J (jobbra), F (fel) és L (le) betűkkel. Ekkor 10 lépés után pontosan akkor érünk a $(4; 2)$ pontba, ha az útvonalon 4-gyel több J szerepel, mint B, továbbá 2-vel több F, mint L. Ez – például a J betűk száma szerinti esetszétválasztással – a következő 3 módon lehetséges:

- 4 db J, 0 db B, 4 db F, 2 db L
- 5 db J, 1 db B, 3 db F, 1 db L
- 6 db J, 2 db B, 2 db F, 0 db L

Az első esetben a J, J, J, J, F, F, F, F, L, L betűk lehetséges sorrendjeinek számát a $\frac{10!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 3150$ képlettel kapjuk (vagy más módon felírva, a $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2}$ kifejezés is erre az eredményre vezet).

A J, J, J, J, J, B, F, F, F, L betűk lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{10!}{5! \cdot 3!} = 5040$.

Végül a J, J, J, J, J, J, B, B, F, F betűk lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{10!}{6! \cdot 2! \cdot 2!} = 1260$.

Tehát a lehetséges eljutások száma $3150 + 5040 + 1260 = 9450$.

35. Hány olyan ötjegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 50-re végződik?

OKTV 2013/2014; II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Ha egy szám 50-re végződik, akkor osztható $50 = 2 \cdot 5^2$ -nal, de nem osztható $100 = 2^2 \cdot 5^2$ -nal. Tehát a vizsgált szorzat prímtényezős felbontásában pontosan egy darab 2-es és legalább két darab 5-ös szerepel. Ez azt is jelenti, hogy az ötjegyű szám számjegyei között pontosan egy páros jegy szerepel (amely csak 2 vagy 6 lehet), illetve legalább két 5-ös számjegy. (A szorzat nem lehet 0, tehát a jegyek között nem szerepelhet a 0.) Innentől esetszétválasztást végzünk az ötjegyű számban szereplő 5-ös számjegyek száma szerint:

- Ha a számban pontosan két 5-ös szerepel, akkor a fennmaradó jegyek egyike 2 vagy 6, a másik kettő pedig az 1, 3, 7, 9 valamelyike. Erre $\binom{5}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 = 960$ lehetőségünk van (a két 5-ös helyét $\binom{5}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki, a páros jegy 2-féle lehet, a páros jegy helye 3-féle, míg a fennmaradó két helyre egymástól függetlenül 4-4 számjegy kerülhet).
- Ha a számban pontosan három 5-ös szerepel, akkor az előzőekhez hasonlóan a lehetőségek száma $\binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 160$ (először az 5-ösök helyét, majd a páros jegyet, a páros jegy helyét, végül a fennmaradó számjegyet választjuk ki).
- Ha a számban pontosan négy 5-ös szerepel, akkor hasonlóképpen $\binom{5}{4} \cdot 2 = 10$ lehetőségünk adódik (először az 5-ösök helyét, majd a páros jegyet választjuk ki).

Vagyis összesen $960 + 160 + 10 = 1130$ szám felel meg a feltételeknek.

36. Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, amelyek csak az 5, 6, 7, 8 számjegyeket tartalmazzák, de mindegyiket legalább egyszer. Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege?

OKTV 2014/2015; II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Mivel 4-féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik számjegy szerepeljen kétszer a számban, majd ezt követően $\frac{5!}{2} = 60$ -féleképpen rendezhetjük sorba a kiválasztott számjegyeket (a 0 nem szerepel közöttük, így az első helyiérték ugyanúgy viselkedik, mint a többi), ezért összesen $4 \cdot 60 = 240$ ilyen ötjegyű szám van. Megmutatjuk, hogy ezekben minden helyiértéken mind a négyfajta szám-

jegy ugyanannyiszor (azaz 60-szor) fordul elő. Valóban, ha például az egyik helyiértéken rögzítjük az 5-ös számjegyet, akkor a fennmaradó négy helyiérték kitöltésére a következő lehetőségeink vannak:

- ha az 5-ös szerepel kétszer a számban, akkor a fennmaradó helyekre az 5, 6, 7, 8 számjegyet $4! = 24$ -féleképpen írhatjuk be;
- ha nem az 5-ös szerepel kétszer a számban, akkor 3-féleképpen választhatjuk ki az ismétlődő számjegyet, majd a maradék négy helyre négy olyan számjegy kerül, amelyek közül kettő azonos, így ebben az esetben $3 \cdot \frac{4!}{2} = 36$ lehetőségünk van.

E két eset együtt valóban $24 + 36 = 60$ lehetőséget ad (és ugyanígy gondolkodhatunk akkor is, ha nem az 5-ös számjegyet rögzítjük).

Végezzük el a 240 szám összeadását helyiértékenként. Mivel az egyes helyiértéken az 5, 6, 7, 8 számjegyek mindegyike 60-szor szerepel, ezért az egyesek összege $60 \cdot (5 + 6 + 7 + 8) = 60 \cdot 26$. Hasonlóan a tízesek összege $60 \cdot (50 + 60 + 70 + 80) = 60 \cdot 10 \cdot (5 + 6 + 7 + 8) = 60 \cdot 10 \cdot 26$, a százaké $60 \cdot 100 \cdot 26$, az ezreseké $60 \cdot 1000 \cdot 26$, míg a tízezekeké $60 \cdot 10000 \cdot 26$. Így a vizsgált számok összege $60 \cdot 11111 \cdot 26 = 17333160$.

37. Hány olyan 150-jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye páratlan, és bármely két szomszédos jegy eltérése 2?

OKTV 2013/2014; II. kategória, 2. forduló

Megoldás:

A feladatot először kevesebb jegyű számokra vizsgáljuk meg. Tekintsük azokat az n -jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egészeket, amelyeknek minden számjegye páratlan, és bármely két szomszédos jegy eltérése 2. Jelölje ezek közül az 1-re vagy 9-re végződők számát a_n , a 3-ra vagy 7-re végződők számát b_n , az 5-re végződők számát pedig c_n . Feladatunk $a_{150} + b_{150} + c_{150}$ meghatározása. Tudjuk, hogy $n = 1$ esetén $a_1 = 2$, $b_1 = 2$ és $c_1 = 1$.

Mivel $n + 1$ -jegyű 1-re vagy 9-re végződő számot csak egyféleképpen kaphatunk (n -jegyű 3-ra vagy 7-re végződő számból), ezért $a_{n+1} = b_n$. Ez igaz az 5-re végződőkre is, így $c_{n+1} = b_n$. Mivel 3-ra vagy 7-re végződő számot egyféleképpen kaphatunk 1-re vagy 9-re végződő számból, de kétféleképpen kaphatunk 5-re végződőből (az 5 után 3-at vagy 7-et írhatunk), ezért $b_{n+1} = a_n + 2c_n$. Eből $n = 2$ -re az $a_2 = 2$, $b_2 = 4$ és $c_2 = 2$ értékeket kapjuk. (A megfelelő számok: 31, 79 / 13, 53, 57, 97 / 35, 75.)

Írjuk fel a rekurzió segítségével a sorozatok első néhány értékét:

n	1	2	3	4	5	5
a_n	2	2	4	6	12	18
b_n	2	4	6	12	18	36
c_n	1	2	4	6	12	18

Az első néhány elemből megsejthetjük, hogy $a_{2n} = c_{2n} = 2 \cdot 3^{n-1}$ és $b_{2n} = 4 \cdot 3^{n-1}$. A sejtést teljes indukcióval bizonyítjuk, $n = 1$ -re a sorozatok megfelelő elemeinek kiszámolásával már beláttuk.

Tegyük fel tehát, hogy valamely n -re $a_{2n} = c_{2n} = 2 \cdot 3^{n-1}$ és $b_{2n} = 4 \cdot 3^{n-1}$ teljesül, majd ennek segítségével lássuk be az állítást $n+1$ -re is. A következő sorok mindegyikében az első két egyenlőség-nél a rekurzív összefüggést, a harmadiknál az indukciós feltevést használjuk:

$$a_{2(n+1)} = c_{2(n+1)} = b_{2n+1} = a_{2n} + 2c_{2n} = 2 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$$

$$b_{2(n+1)} = a_{2n+1} + 2c_{2n+1} = b_{2n} + 2b_{2n} = 4 \cdot 3^{n-1} + 8 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^n$$

Ezzel a sejtést beláttuk, így $a_{150} + b_{150} + c_{150} = 2 \cdot 3^{74} + 4 \cdot 3^{74} + 2 \cdot 3^{74} = 8 \cdot 3^{74}$. Tehát $8 \cdot 3^{74}$ darab 150-jegyű szám teljesíti a feladat feltételeit.

Megjegyzés: Bár a feladatban az a_n , b_n , c_n sorozatoknak csak a páros indexű tagjait használjuk, hasonló módon adható zárt képlet a páratlan indexűekre is: minden pozitív egész n szám esetén $a_{2n+1} = c_{2n+1} = 4 \cdot 3^{n-1}$ és $b_{2n+1} = 2 \cdot 3^n$.

38. Jelölje r_n az $\{1; 2; \dots; n\}$ halmaz azon részhalmazainak számát, amelyek nem tartalmaznak szomszédos számokat, ahol az 1-et és az n -et is szomszédosnak tekintjük. Határozzuk meg r_{16} értékét.

OKTV 2010/2011; II. kategória, döntő

Megoldás:

Nevezzük a feladat feltételeit teljesítő részhalmazokat megfelelőnek. Először kisebb n -ekre meghatározzuk r_n értékét.

$r_1 = 2$, a megfelelő részhalmazok $\emptyset$ és $\{1\}$.

$r_2 = 3$, a megfelelő részhalmazok $\emptyset$, $\{1\}$ és $\{2\}$.

$r_3 = 4$, a megfelelő részhalmazok $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ és $\{3\}$.

$r_4 = 7$, a megfelelő részhalmazok $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1; 3\}$ és $\{2; 4\}$.

$r_5 = 11$, a megfelelő részhalmazok $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{3; 5\}$, $\{1; 4\}$ és $\{2; 5\}$.

Az első néhány értékből azt sejtethetjük, hogy $n \geq 2$ esetén $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$. Ehhez három részre bontjuk az $n+2$ elemű halmaz megfelelő részhalmazait:

- Ha a részhalmaz nem tartalmazza $n+2$ -t, továbbá nem tartalmazza egyszerre 1-et és $n+1$ -et, akkor éppen az első $n+1$ elem megfelelő részhalmazait kapjuk, ezek száma r_{n+1} .
- Ha a részhalmaz nem tartalmazza $n+2$ -t, de tartalmazza 1-et és $n+1$ -et is, akkor biztosan nem tartalmazza n -et. Ha elhagyjuk ezen részhalmazokból $n+1$ -et, akkor megkapjuk az első n elem olyan megfelelő részhalmazait, amelyek tartalmazzák 1-et.
- Ha a részhalmaz tartalmazza $n+2$ -t, akkor nem tartalmazza 1-et és $n+1$ -et. Ha elhagyjuk ezen részhalmazokból $n+2$ -t, akkor megkapjuk az első n elem olyan megfelelő részhalmazait, amelyek nem tartalmazzák 1-et. Az előző esettel együtt ezen megfelelő részhalmazok száma r_n .

Ezzel beláttuk az $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$ összefüggést. A kapott rekurzió alapján sorra kiszámíthatjuk az r_n értékeket:

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
r_n	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207

Vagyis $r_{16} = 2207$.

Megjegyzés: A sorozat ugyanazt a rekurzív összefüggést teljesíti, mint a Fibonacci-számok sorozata, de más kezdőértékekről, ezért a sorozat tagjai is mások lesznek, mint a Fibonacci-számok.

39. Legyen $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ és $B = \{1; 2; 3\}$. Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya A , és minden A -beli x esetén $f(x) \in A$. Hány $f(x)$ függvényre teljesül, hogy $\{f(f(x)) \mid x \in A\} = B$?

OKTV 2011/2012; II. kategória, döntő

Megoldás:

Először megmutatjuk, hogy a keresett f függvény az 1, 2, 3 számok egyikéhez sem rendelhet sem 4-et, sem 5-öt. Ezt az $f(1) = 4$ példán szemléltetjük. Mivel $f(f(x))$ értékkészlete B , ezért van olyan $y \in A$, amelyre $f(f(y)) = 1$. Legyen ekkor $f(y) = z$ (ahol $z \in A$), de így $f(f(z)) = f(1) = 4$ lenne, ami nem eleme B -nek, és így nem lehetséges. Hasonlóan bizonyítható az állítás többi része is.

Most megvizsgáljuk, hogy mi lehet $f(4)$ és $f(5)$ értéke. Nem lehet $f(4) = 4$, hiszen ekkor $f(f(4)) = 4$ lenne, ami nem eleme B -nek. Ugyanígy $f(5) = 5$ sem lehetséges. Innentől két esetet különböztetünk meg:

- (a) $f(4)$ és $f(5)$ is B -beli elem.
- (b) $f(4)$ és $f(5)$ közül (legalább) az egyik nem B -beli, azaz $f(4) = 5$ vagy $f(5) = 4$. Ekkor $f(4) = 5$ esetén $f(f(4)) \in B$ miatt $f(5) \in B$; míg $f(5) = 4$ esetén $f(4) \in B$.

A továbbiakban a keresett függvényeket három csoportra osztva számoljuk össze.

1. csoport: $f(1)$, $f(2)$ és $f(3)$ értéke az 1, 2, 3 számok valamely permutációja, továbbá $f(4)$ és $f(5)$ értéke (a) szerint B -beli. Ekkor a permutáció $3!$ -féle lehet, míg $f(4)$ és $f(5)$ értéke egymástól függetlenül $3 \cdot 3$ -féle lehet, tehát ilyen függvényből $3! \cdot 3 \cdot 3 = 54$ darab van.

2. csoport: $f(1)$, $f(2)$ és $f(3)$ értéke az 1, 2, 3 számok valamely permutációja, továbbá $f(4)$ és $f(5)$ értéke (b) szerint alakul. Ekkor a permutáció $3!$ -féle lehet. Ezután ki kell választanunk, hogy 4 vagy 5 képe legyen B -beli (erre 2 lehetőségünk van), majd a kép értéke 3 -féle lehet. Tehát az ilyen függvények száma $3! \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

3. csoport: $f(1)$, $f(2)$ és $f(3)$ értéke úgy kerül ki az 1, 2, 3 számok közül, hogy vannak közöttük azonos értékek. Először megmutatjuk, hogy nem lehet mindhárom érték azonos. Ha ugyanis $f(1) = f(2) = f(3)$ lenne, akkor $f(f(x))$ értékkészletében (a) esetén csak egy, (b) esetén csak két szám állna. Vagyis a 3. csoportban $f(1)$, $f(2)$ és $f(3)$ értéke közül kettő azonos (jelölje ezt

k), egy pedig ezektől különböző (jelölje ezt l). Az (a) eset nem lehetséges, hiszen ekkor $f(f(x))$ értékkészlete csak két számból állna. A (b) esetben $f(4)$ és $f(5)$ valamelyike B -beli, mégpedig B -nek a k -tól és l -től különböző m eleme, hiszen csak így lesz $f(f(x))$ értékkészlete a teljes B . Az ilyen függvények esetén l értéke 3-féle lehet, m értéke 2-féle. Továbbá 3-féle választásunk van, hogy az 1, 2, 3 számok közül melyikhez rendeljük l -et, és 2-féle választásunk, hogy a (b) esetben a 4-hez vagy az 5-höz rendeljük m -et. Vagyis ebbe a csoportba összesen $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ függvény tartozik.

Így összesen $54 + 36 + 36 = 126$ függvény teljesíti a feladat feltételeit.