

6. Gráfok

I. Feladatok

1. Egy országban minden városból legfeljebb három buszjárat indul, és bármely városból bármely városba eljuthatunk legfeljebb egy átszállással. (Ha két város között közlekedik buszjárat, akkor mindkét irányban közlekedik.) Legfeljebb hány város lehet ebben az országban?
2. Egy 12×12 -es pontrács mind a 144 rácspontját kékre vagy pirosra színeztük úgy, hogy a négy sarokban piros színű pont áll. A színezés után a pontok közül 50 kék színű, ezek közül 20 a rács valamelyik szélső sorában vagy oszlopában helyezkedik el. Az azonos sorban, illetve oszlopban lévő szomszédos pontokat szakaszokkal kötöttük össze: két egyforma színű pontot a színükkel megegyező szakasszal, két különböző színűt pedig fekete szakasszal. Tudjuk, hogy 130 piros szakasz keletkezett. Hány fekete szakaszt rajzoltunk?

Zrínyi/Gordiusz Matematikaverseny 2010; 12. osztály, megyei forduló

3. Egy esküvői vacsorán egy hatfős asztaltársaság tagjai közül néhányan ismerik egymást. A nász-nagy megkérdezi az asztaltársaság tagjait, hogy hány személyt ismernek az asztalnál ülők közül. Az első öt válaszadó által kimondott öt szám mindegyike különbözik egymástól. Hány embert ismerhet a hatodik személy az asztalnál ülők közül? (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.)

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 1. forduló

4. Adott n ember között hányféle olyan ismeretségi kapcsolatrendszer lehet, hogy mindenki páratlan sok másikat ismer? (Az ismeretség kölcsönös.)

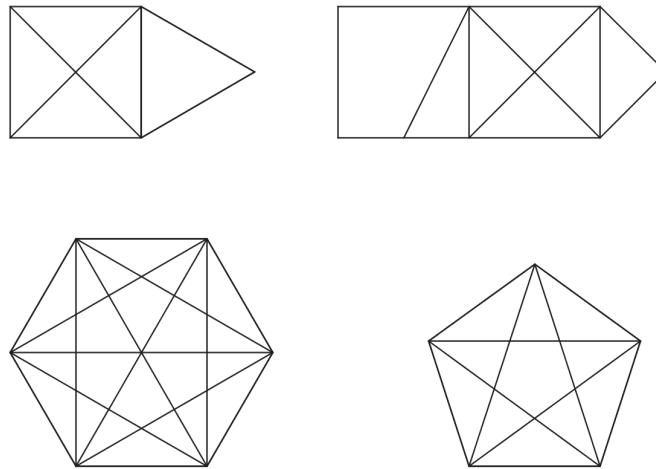
OKTV 2013/2014; III. kategória, 1. forduló

5. Bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő gráfban mindig van olyan pont, amelynek elhagyása esetén is összefüggő marad a gráf.
6. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?

BME Számítástudományi Tanszék, zárthelyi feladat

7. Egy 3×3 -as sakktábla négy sarkában két világos és két sötét huszár (ló) áll úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes mezőkön tartózkodnak. A huszárokkal a sakkban megszokott módon léphetünk, úgy, hogy egy mezőn sosem állhat egyszerre egynél több figura. Elérhető-e ilyen módon az, hogy a huszárok ismét a tábla négy sarkában álljanak, de az átellenes sarkokban különböző színű huszárok tartózkodjanak?
8. A törpék 100 fős falujában influenzajárvány ütötte fel a fejét. Az első napra néhány törpe megbetegedett. A betegség egy napig tart, a következő napon a törpe immunis (tehát nem fertőződik meg), a harmadik naptól kezdve pedig újra egészséges (de innentől újra megfertőződhet). Minden nap minden egészséges törpe meglátogatja minden beteg barátját (a barátság kölcsönös), és elkapja a betegséget (ezáltal ő a következő napon beteg lesz). Bizonyítsuk be, hogy véges sok nap elteltével minden törpe egészséges lesz.

9. Lerajzolhatók-e az alábbi ábrák egy vonallal, a ceruzánk felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalon pontosan egyszer haladhatunk át?



10. Egy egyszerű gráf minden csúcsából 4 él indul ki. Bizonyítsuk be: a gráf éleit ki lehet színezni piros és kék színnel úgy, hogy minden csúcsból pontosan 2 piros és 2 kék él induljon ki.
11. Felsorolhatóak-e az n -hosszú 0-1 sorozatok úgy, hogy mind a 2^n elemet pontosan egyszer írjuk le, és bármely elem utolsó $n-1$ karaktere megegyezzen a következő elem első $n-1$ karakterével?
12. Bejárható-e egy 4×4 -es, illetve egy 5×5 -ös sakktabla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőn pontosan egyszer járunk, és a végén visszaérjünk a kiindulópontba? Mi a helyzet akkor, ha a végén nem kötelező visszaérnünk a kiindulópontba?
13. Van-e olyan 4, 5, illetve 6 pontú egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével? (Két gráfot izomorfoknak nevezünk, ha csúcsaik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy két csúcs között pontosan akkor halad él az egyik gráfban, amikor az ezeknek megfelelő csúcsok között halad él a másik gráfban.)
14. Ketten a következő játékot játsszák: adott n pont, amelyek közül kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élt. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a második játékosnak van nyerő stratégiája, ha mindketten a lehető legügyesebben játszanak?
15. Egy fában csak két különböző foksám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két foksám?

BME Számítástudományi Tanszék, zárthelyi feladat

16. Igazoljuk, hogy ha egy fában van k -adfokú pont, akkor legalább k db elsőfokú pont van benne.
17. Egy internetszolgáltatónak öt város között négy egyenes vezetékszakaszból álló hálózatot kell kiépítenie úgy, hogy az elektromos jel a vezetéseken bármelyik városból bármelyik városba eljusson (a vezetékszakaszból mindig két várost kötnek össze). A városok elhelyezkedése olyan, hogy semelyik három nem esik egy egyenesbe. Hány különböző hálózat építhető, ha a szigetelt vezetékek keresztezhetik egymást?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2007; 7. osztály, megyei forduló

18. Egy cégnél 7 pályázó jelentkezett 6 üres munkahelyre (számozzuk ezeket 1-től 6-ig), közülük néhányan több helyre is: Aladár a 4-es, Béla a 3-as és 4-es, Csaba az 1-es, 2-es és 6-os, Dani a 2-es és 5-ös, Erzszi az 1-es, 3-as, 5-ös és 6-os, Feri a 3-as és 4-es, Géza pedig a 3-as munkahelyre. Legfeljebb hány munkahely tölthető be?
19. Legyen a G egyszerű gráf csúcsainak halmaza $\{1; 2; 3; \dots; 1023\}$. Az i és j (különböző) csúcsok között pontosan akkor vezessen él G -ben, ha i és j egyike osztója a másiknak. Határozzuk meg, legkevesebb hány különböző színnel tudjuk kiszínezni G csúcsait úgy, hogy semelyik él két végpontja se legyen azonos színű.
20. Az $1, 2, \dots, 100$ számoknak egy részhalmaza olyan tulajdonságú, hogy egyetlen elemének sem tartalmazza a háromszorosát. Legfeljebb hány elemű lehet egy ilyen részhalmaz?

Medve Szabadtéri Matematikaverseny 2011.

21. Artúr király udvarába hivatalos vendégségbe néhány lovag. Bármely két lovag vagy barát, vagy ellenség (a viszonyok kölcsönösek, és az idő múlásával nem változnak). Egy korábbi vendégség során ugyanezek a lovagok le tudtak ülni két asztal mellé úgy, hogy az egy asztalnál ülők mind barátai voltak egymásnak. A mostani vendégség során a vendégek egyesével érkeztek meg. Érkezésük után minden érkező leült az egyik olyan asztalhoz, ahol nem ült ellensége; az ilyen asztalok közül azt választva, ahol a legtöbb barátja ült (ha egyetlen megfelelő asztal sem volt, akkor az érkező természetesen új asztalhoz ült). Így összesen 12 asztal mellé ültek le lovagok. Legalább hány lovag érkezett a vendégségbe?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók, III. kategória, döntő

22. Egy tudományos kutatásban n tudós dolgozik együtt. Bármely két tudós előre megállapodik, hogy egymás közt milyen nyelven leveleznek a kutatás négy hivatalos nyelve közül. A levelezés oda-vissza ugyanazon a nyelven történik két tudós között. Egy tudóst akkor nevezünk szervezőnek, ha legalább 4 másikkal ugyanazon a nyelven levelezik. Legfeljebb mekkora lehet n , ha nincs köztük szervező?

OKTV 2014/2015; II. kategória, 2. forduló

23. Legyen G egy tetszőleges 6 pontú egyszerű gráf. Igaz-e, hogy G vagy G komplementere biztosan tartalmaz háromszöget?

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1947.

24. 17 tudós összesen 3 témáról folytat levelezést, bármely kettő pontosan egyről. Mutassuk meg, hogy van köztük három, akik páronként ugyanarról leveleznek.

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1964.

25. Anna társasjátékozni hívja 19 legjobb barátnőjét. Kissé csalódottan veszi észre: a 20 résztvevőből egyetlen négyfős csapatot sem tudnak úgy alakítani, hogy a kvartettben mindenki mindenkit ismerjen már korábról. Van-e biztosan négy olyan lány a társaságban, akik egyáltalán nem ismerték eddig egymást?

26. Egy konvex test mind a 6 csúcsában 4 egybevágó szabályos háromszöglap található. Tekintsük most azt a gráfot, amelynek csúcsai és élei a megadott test csúcsai, illetve élei. Ezt a gráfot szeretnénk úgy lerajzolni a síkba, hogy az élek csak csúcsokban találkozzanak, máshol ne keresztezzék egymást. Hány részre osztja a síkot az így lerajzolt élháló-gráf?

27. Egy 20 csúcú konvex poliédernek 12 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?
28. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög, és minden csúcsában pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
29. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan összefüggő, egyszerű, síkbarajzolható gráf létezik, amelynek minden csúcsa ötödfokú.

OKTV 1995/1996; III. kategória, 1. forduló

30. Medveföld városait 12 busztársaság járatai kötik össze (mindegyik társaság üzemeltet legalább egy járatot). Bármely két város között pontosan egy buszjárat közlekedik, és akárhogyan választunk ki három várost, a köztük lévő három buszjáratot vagy ugyanaz a társaság üzemelteti, vagy mindháromat különböző. Mutassuk meg, hogy Medveföldön a városok száma nem lehet több 121-nél.

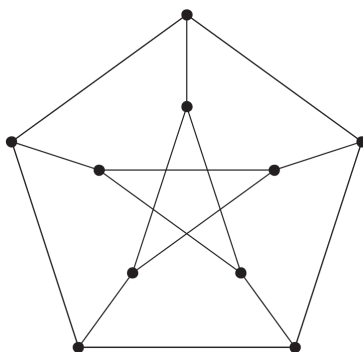
Medve Szabadtéri Matematikaverseny 2015. évi feladata alapján

II. Megoldások

1. Egy országban minden városból legfeljebb három buszjárat indul, és bármely városból bármely városba eljuthatunk legfeljebb egy átszállással. (Ha két város között közlekedik buszjárat, akkor mindkét irányban közlekedik.) Legfeljebb hány város lehet ebben az országban?

Megoldás:

A városok száma nem lehet 10-nél több, hiszen egy tetszőleges városból legfeljebb 3 másikba juthatunk el, ezek mindegyikéből pedig még további 2-2 újabb városba. Ennél több város esetén lenne olyan város, ahová a kiinduló városból nem jutnánk el legfeljebb egy átszállással. A maximum tehát összesen $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$ város. Ez meg is valósítható, mégpedig a következő ábrán látható módon (ellenőrizhetjük, hogy ez a gráf teljesíti a feltételeket):



Megjegyzés: A fenti gráf számos gráfelméleti feladatban megjelenik, amelyet megalkotója, Julius Petersen XIX-XX. századi matematikus után Petersen-gráfnak hívnak.

2. Egy 12×12 -es pontrács mind a 144 rácspontját kékre vagy pirosra színeztük úgy, hogy a négy sarkokban piros színű pont áll. A színezés után a pontok közül 50 kék színű, ezek közül 20 a rácsválsó sorában vagy oszlopában helyezkedik el. Az azonos sorban, illetve oszlopban lévő szomszédos pontokat szakaszokkal kötöttük össze: két egyforma színű pontot a színükkel megegyező szakasszal, két különböző színűt pedig fekete szakasszal. Tudjuk, hogy 130 piros szakasz keletkezett. Hány fekete szakaszt rajzoltunk?

Zrínyi/Gordiusz Matematikaverseny 2010; 12. osztály, megyei forduló

Megoldás:

Tekintsük azt a 144 pontú gráfot, amelynek pontjai a feladatban szereplő rácspontok, élei pedig az azonos sorban vagy oszlopban elhelyezkedő szomszédos rácspontok közötti szakaszok. A feladat szerint e gráf minden pontját kékre vagy pirosra színeztük, minden élet pedig kékre, pirosra vagy feketére színeztük. A kék pontok száma 50, így a piros pontok száma $144 - 50 = 94$.

Vizsgáljuk meg e gráfban a pontok fokszámait! A sarkokban álló 4 pont mindegyikének fokszáma 2. A szélső sorban vagy oszlopban, de nem sarkokban elhelyezkedő $4 \cdot 10 = 40$ pont mindegyikének fokszáma 3. Végül a nem szélső sorban vagy oszlopban elhelyezkedő $10 \cdot 10 = 100$ pont mindegyikének fokszáma 4. Így a fokszámok összege $4 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 100 \cdot 4 = 528$, vagyis a gráfnak $528 : 2 = 264$ éle van. Ezek közül 130 él piros színű, tehát a kék és fekete élek együttes száma $264 - 130 = 134$.

Vizsgáljuk most a piros pontok fokszámait! A 94 piros pont közül 4 pont fokszáma 2. A harmadfokú 40 pontból 20 kék, így a fennmaradó 20 piros. További $94 - (4 + 20) = 70$ piros pont fok-

száma 4. Tehát a piros pontok fokszámainak összege $4 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 70 \cdot 4 = 348$. (A korábbi eredményt felhasználva ekkor a kék pontok fokszámainak összege $528 - 348 = 180$.)

A 130 piros színű él mindkét végpontja piros, ez tehát $2 \cdot 130 = 260$ -at tesz ki a piros pontok fokszámainak összegében. A fennmaradó $348 - 260 = 88$ piros élvégződés egy piros és egy kék pont között halad, vagyis 88 fekete élt határoz meg.

Ellenőrzésként megállapíthatjuk, hogy a kék pontok fokszámainak összegéből 88-at levonva megkapjuk a kék színű élek számának kétszeresét, így a gráfban $(180 - 88) : 2 = 46$ kék él van. Ekkor a kék és fekete élek együttes számának összege $46 + 88 = 134$, ami megegyezik korábbi számításainkkal.

Tehát 88 fekete szakaszt rajzoltunk a pontrácson.

3. Egy esküvői vacsorán egy hatfős asztaltársaság tagjai közül néhányan ismerik egymást. A nász-nagy megkérdezi az asztaltársaság tagjait, hogy hány személyt ismernek az asztalnál ülők közül. Az első öt válaszadó által kimondott öt szám mindegyike különbözik egymástól. Hány embert ismerhet a hatodik személy az asztalnál ülők közül? (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.)

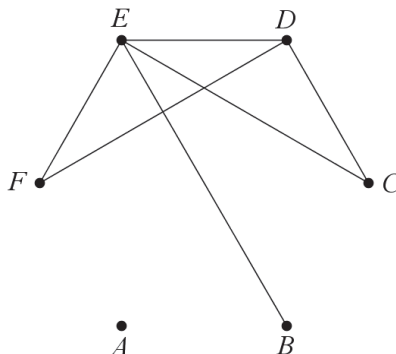
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

A kimondott számok mindegyike a 0, 1, 2, 3, 4, 5 értékek valamelyike lehet. Mivel az ismeretség kölcsönös, ezért a 0 és az 5 nem fordulhat elő egyszerre, hiszen nem lehetséges, hogy a társaságban egyszerre van olyan is, aki mindenkit ismer, és olyan is, aki senkit se.

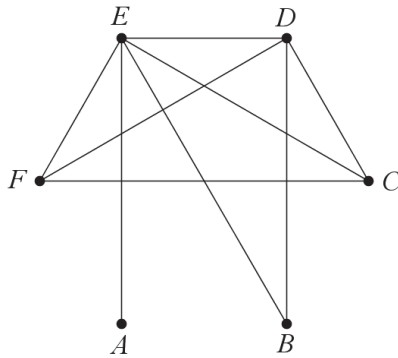
Az ismeretségeket gráffal szemléltethetjük: a gráf csúcsai a személyek, két csúcs pedig akkor van éllel összekötve, ha az adott két személy ismeri egymást. Ekkor a megadott válaszok a megfelelő csúcsok fokszámai. Jelöljük a válaszadókat az A, B, C, D, E betűkkel, a hatodik személyt pedig F -fel. Két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a 0 és az 5 közül melyik hiányzik a válaszok közül.

1. eset: A, B, C, D, E ismerőseinek száma rendre 0, 1, 2, 3, illetve 4. Ekkor A senkit nem ismer, így E -nek csak úgy lehet 4 ismerőse, ha mindenkit ismer A -n kívül. Emiatt B egyetlen ismerőse E . D -nek csak úgy lehet 3 ismerőse, ha A -n és B -n kívül mindenkit ismer. Emiatt C két ismerőse D és E . Ezek alapján F két személyt ismer: D -t és E -t.



2. eset: A, B, C, D, E ismerőseinek száma rendre 1, 2, 3, 4, illetve 5. Ekkor E mindenkit ismer, emiatt A egyetlen ismerőse E . Így D -nek csak úgy lehet 4 ismerőse, ha mindenkit ismer A -n kívül.

Emiatt B két ismerőse D és E . C -nek csak úgy lehet 3 ismerőse, ha A -n és B -n kívül mindenkit ismer. Ezek alapján F három személyt ismer: C -t, D -t és E -t.



Tehát a hatodik személy 2 vagy 3 embert ismerhet az asztalnál ülők közül.

4. Adott n ember között hányféle olyan ismeretségi kapcsolatrendszer lehet, hogy mindenki páratlan sok másikat ismer? (Az ismeretség kölcsönös.)

OKTV 2013/2014; III. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Tekintsük azt az n csúcú G gráfot, amelynek csúcsai az emberek, élei pedig az ismeretségek. A feladat azt kérdezi, hogy n különböző csúcson hány olyan gráf létezik, amelyben minden csúcs fokszáma páratlan.

Tudjuk, hogy n értéke nem lehet páratlan, hiszen ekkor a fokszámok összege (páratlan sok páratlan szám összege) páratlan lenne, ami nem lehetséges.

Ha n páros, akkor rögzítsük a gráf egy tetszőleges v csúcsát, majd húzzunk be a v -től különböző csúcsok közé tetszés szerint éleket. Mivel a $G \setminus v$ gráfnak $n-1$ csúcsa van, amelyek közé $\binom{n-1}{2}$

él húzható be, ezért ezt összesen $2^{\binom{n-1}{2}}$ -féleképpen tehetjük meg. Belátjuk, hogy bármely ilyen élhalmaz egyértelműen kiegészíthető egy megfelelő gráffá: ehhez v -t pontosan azokkal a $G \setminus v$ -beli csúcsokkal kössük össze, amelyeknek $G \setminus v$ -ben páros sok szomszédjuk van. Ezáltal minden $G \setminus v$ -beli csúcs G -beli fokszáma páratlan lesz. Hátra van még annak megmutatása, hogy v fokszáma is páratlan. Ez következik abból, hogy G -ben a fokszámok összege páros, és $n-1$ páratlan, emiatt a $G \setminus v$ -beli páratlan darab páratlan fokszámú csúcs fokszámösszege biztosan páratlan (vagyis v páratlan fokszámával kell kiegészíteni ahhoz, hogy az összeg páros legyen).

Tehát a keresett kapcsolatrendszerek száma páratlan n esetén 0, páros n esetén $2^{\binom{n-1}{2}} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő gráfban mindig van olyan pont, amelynek elhagyása esetén is összefüggő marad a gráf.

Megoldás:

Ha a vizsgált összefüggő gráf körmentes, akkor ez a gráf egy fa. Ha viszont van kör a vizsgált gráfban, akkor el tudunk belőle hagyni éleket úgy, hogy a gráf továbbra is összefüggő maradjon, de körmentes legyen (például úgy, hogy egy tetszőleges körből elhagyunk egy tetszőleges élt, és ezt ismétljük addig, amíg már nem marad kör a gráfban). Az így kapott gráf szintén fa lesz, amely

az eredeti gráf minden pontját, de nem minden élét tartalmazza. (Ezt a fát az eredeti gráf egy feszítőfájának nevezik.)

Tudjuk, hogy minden fában található elsőfokú pont. Ha most a kapott (feszítő)fa egyik elsőfokú pontját elhagyjuk, akkor a (feszítő)fa továbbra is összefüggő marad, így az adott pont elhagyásával az eredeti gráf is összefüggő marad. Ezzel az állítást beláttuk.

6. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?

BME Számítástudományi Tanszék, zárthelyi feladat

Megoldás:

Két egész szám különbsége pontosan akkor páratlan, ha az egyik szám páros, a másik pedig páratlan. Emiatt a G gráf csúcsai két részre oszthatóak úgy, hogy minden él e két halmaz között vezet: ha $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ és $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, akkor minden él egyik végpontja A -ban, másik végpontja B -ben van. (Az ilyen gráfokat páros gráfoknak nevezik.) Az is igaz, hogy bármely A -beli és bármely B -beli csúcs között vezet él. (Az ilyen gráfokat teljes páros gráfoknak nevezik.)

Az eddigiek alapján G bármely 4 hosszú köre pontosan két páros és két páratlan sorszámú csúcsot tartalmaz, és ezek a körön felváltva követik egymást. Egy ilyen kör megalkotásakor $\binom{5}{2} = 10$ -

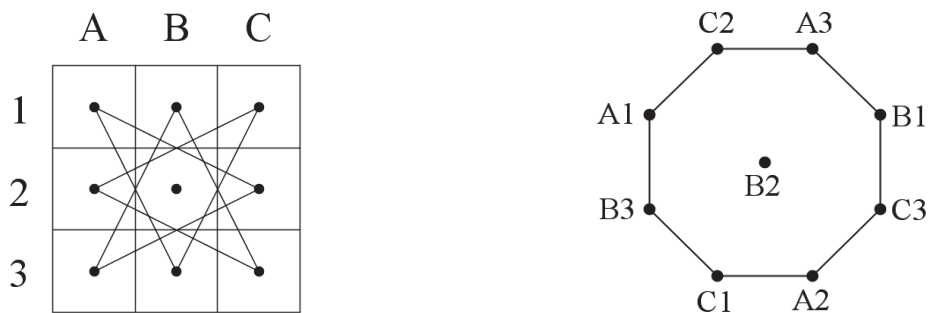
féleképpen választhatjuk ki a benne szereplő két páros sorszámú csúcsot, és szintén 10-féleképpen a két páratlan sorszámút. Ez idáig $10 \cdot 10 = 100$ lehetőség. Ha viszont már kiválasztottuk a két páros és a két páratlan sorszámú csúcsot, akkor a rajtuk áthaladó kör egyértelmű – például a páros sorszámú csúcsokat rögzítve a páratlanok esetleges felcserélése ugyanazt a kört eredményezi, csak ellenkező irányban körüljárva. (Ha például a páros sorszámú csúcsok közül a 2-t és a 8-at választjuk, a páratlanok közül pedig a 3-at és az 5-öt, akkor az ezeken áthaladó egyetlen megfelelő kör a 2-3-8-5-2 kör.)

Tehát a vizsgált G gráfnak 100 különböző 4 hosszú köre van.

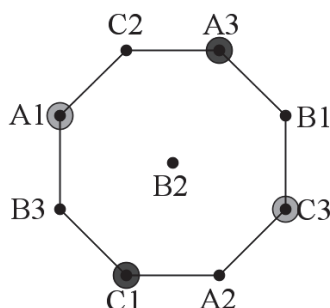
7. Egy 3×3 -as sakktábla négy sarkában két világos és két sötét huszár (ló) áll úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes mezőkön tartózkodnak. A huszárokkal a sakkban megszokott módon léphetünk, úgy, hogy egy mezőn sosem állhat egyszerre egynél több figura. Elérhető-e ilyen módon az, hogy a huszárok ismét a tábla négy sarkában álljanak, de az átellenes sarkokban különböző színű huszárok tartózkodjanak?

Megoldás:

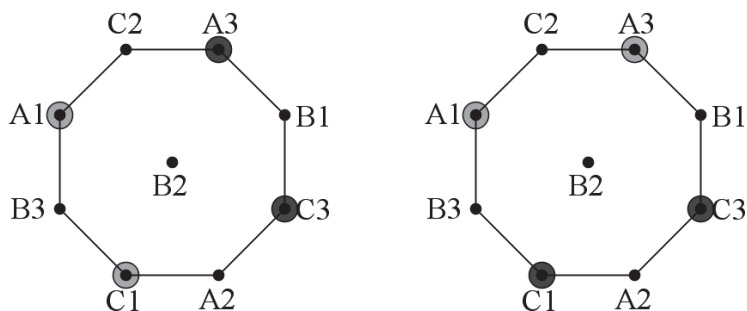
Készítsük el azt a gráfot, amelynek csúcsai a 3×3 -as sakktábla mezői, két csúcs között pedig pontosan akkor haladjon él, ha az ezeknek megfelelő két mező egyikéről a másikra át lehet ugrani a huszárral. A következő ábrák mutatják a sakktáblát és a belőle készített gráfot, illetve ugyanennek a gráfnak egy másik lerajzolását.



A fenti jobb oldali gráfon megfigyelhetjük, hogy az élek egy 8 hosszú kört alkotnak (továbbá a B2 mező izolált pont, hiszen ide egyik mezőről sem lehet ugrani, és innen se lehet sehová eljutni). A feladat szövege szerint kezdetben az A1 és C3 mezőkön, illetve az A3 és C1 mezőkön tartózkodnak az azonos színű huszárok (a két színt a következő ábrán a szürke szín kétféle árnyalatával jelöltük – ezek közül bármelyik jelentheti a világos, illetve a sötét huszárt, azzal a megköttéssel, hogy az azonos színű helyeken azonos színű huszárok állnak).



Az elérni kívánt állapotban az A1 és a C3 mezőkön különböző színű huszárnak kell állnia, illetve az A3 és a C1 mezőkön szintén. Ez kétféleképpen lehetséges: az A1 mezőn álló huszárral azonos színű másik huszár az A3, illetve a C1 mezőn állhat. Ezt a két lehetőséget szemlélteti a következő két ábra:



Megfigyelhetjük, hogy a kezdeti állapotban a gráfban szereplő kör mentén a színük szerint felváltva (világos – sötét – világos – sötét) követik egymást az egyes huszárok, míg az elérni kívánt állapotban (mindkét lehetőség esetében) a kör mentén a színük szerint szomszédos sorrendben (világos – világos – sötét – sötét) következnek a huszárok.

Mivel ugyanazon a mezőn egyszerre nem tartózkodhat egynél több huszár, ezért a kezdeti sorrend (világos – sötét – világos – sötét) menet közben nem változhat meg, hiszen a huszárok a kör mentén nem cserélhetnek helyet. Így nem érhető el a kívánt állapot.

8. A törpék 100 fős falujában influenzajárvány ütötte fel a fejét. Az első napra néhány törpe megbetegedett. A betegség egy napig tart, a következő napon a törpe immunis (tehát nem fertőződik meg), a harmadik naptól kezdve pedig újra egészséges (de innentől újra megfertőződhet). Minden nap

minden egészséges törpe meglátogatja minden beteg barátját (a barátság kölcsönös), és elkapja a betegséget (ezáltal ő a következő napon beteg lesz). Bizonyítsuk be, hogy véges sok nap elteltével minden törpe egészséges lesz.

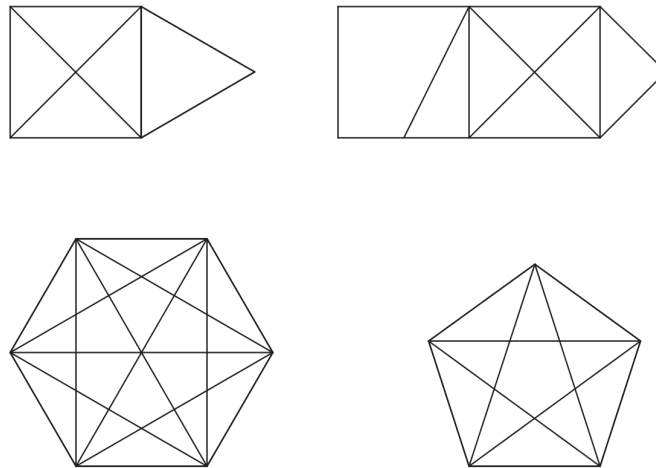
Megoldás:

Legyen B_1 a kezdetben beteg törpék halmaza. A többi törpét osszuk be a B_2, B_3, \dots halmazokba aszerint, hogy az ismeretségi gráfban hány élből áll a legrövidebb út az adott törpe és egy B_1 -beli törpe között. Vagyis a B_1 -beli törpék még be nem osztott szomszédjai kerüljenek B_2 -be, majd a B_2 -beli törpék még be nem osztott szomszédjai B_3 -ba stb. Mivel 100 törpe van, ezért legfeljebb 100 halmazra lesz így szükségünk (az utolsó, B_{100} halmaz csak akkor nem üres, ha a barátságok gráfja egy 99 élből álló út).

Belátjuk, hogy minden $1 \leq k \leq 100$ esetén a B_k -beli törpék pontosan a k -edik napon betegek (és az összes többi napon egészségesek). Valóban, a B_1 -beli törpék az 1. napon betegek, majd a 2. napra meggyógyulnak. A 2. napra a B_2 -beli törpék elkapják a betegséget, de B_1 -beli barátaik nem fertőződnek vissza, hiszen ők a 2. napon még immunisak. Innen az állítás indukcióval igazolható: $1 < k$ esetén a B_k -beli törpék a $(k-2)$. napig egészségesek, a $(k-1)$. napon meglátogatják B_{k-1} -beli beteg barátaikat, akiktől a k . napra megfertőződnek, majd a $(k+1)$. napra meggyógyulnak, így aznap meglátogathatják B_{k+1} -beli beteg barátaikat, akik nem fertőzik vissza őket.

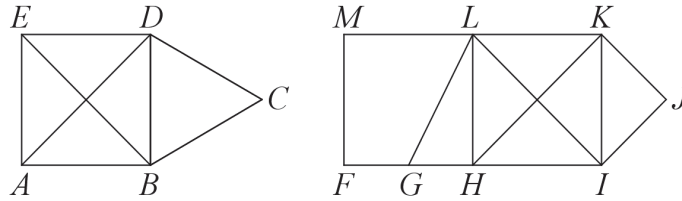
A leírtakból következik, hogy amennyiben B_{100} -ba is került törpe, ő is végérvényesen meggyógyul a 101. napra, vagyis 101 nap elteltével biztosan minden törpe egészséges lesz.

9. Lerajzolhatók-e az alábbi ábrák egy vonallal, a ceruzánk felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalon pontosan egyszer haladhatunk át?



Megoldás:

Tekintsük az ábrákat gráfoknak, amelyeknek élei a megrajzolt szakaszok, csúcsai pedig a szakaszok végpontjai. A felső két ábra csúcsait betűzzük meg a következő ábrán látható módon.



(Megjegyzés: az AD és BE szakaszok metszéspontját, illetve a HK és IL szakaszok metszéspontját is elnevezhetnénk önálló csúcsnak, de mivel megoldásunkban itt nem akarunk irányt változtatni, ezért megtehetjük, hogy ezeket nem tekintjük a gráfok csúcsainak, csupán két élük kereszteződésének.)

Mindkét fenti ábra lerajzolható a kívánt módon, például a következő útvonalon haladva:

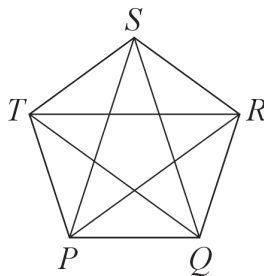
$$A - B - C - D - E - A - D - B - E$$

$$G - L - M - F - G - H - I - J - K - L - H - K - I - L$$

A keresett lerajzolás a gráfok nyelvén azt jelenti, hogy a vizsgált gráf éleit fel tudjuk sorolni olyan sorrendben, amelyben az egymást követő élek csatlakoznak egymáshoz, és minden él pontosan egyszer szerepel a felsorolásban. (Az első gráf esetében ez a felsorolás a következő: $AB, BC, CD, DE, EA, AD, DB, BE$.)

Az eredeti alsó ábrák közül a bal oldali (egy szabályos hatszög oldalaiból és átlóiból álló gráf) nem rajzolható le a kért módon. Ugyanis a hatszög minden csúcsából 5 szakasz indul ki, viszont amikor egy csúcson áthaladunk (azaz oda beérkezünk, majd onnan kimegyünk), akkor az adott csúcsra illeszkedő szakaszokból mindig 2-t használunk el. Így a lerajzolás kezdő- és végpontját leszámítva (amennyiben ezek egymástól különböző csúcsok) a hatszög minden további csúcsából páros számú szakasznak kellene kiindulnia. Mivel ez nem teljesül, így nem létezik a kívánt lerajzolás.

Az eredeti alsó ábrák közül a jobb oldali (egy szabályos ötszög oldalaiból és átlóiból álló gráf) lerajzolható a kívánt módon. Ehhez betűzzük meg a csúcsokat a következőképpen:



Egy lehetséges útvonal: $P - Q - R - S - T - P - R - T - Q - S - P$.

Megjegyzés: Egy gráf éleinek ilyen módon történő felsorolását (azaz egymáshoz csatlakozó élek olyan sorozatát, amelyben a gráf minden éle pontosan egyszer szerepel) a gráf Euler-sétájának nevezik. A mostani feladatban az utolsó Euler-séta ugyanott végződött, ahonnan indult (ezt zárt Euler-sétának nevezik), míg az első kettő esetében a kezdő- és a végpont különbözött (ezeket nyílt Euler-sétának nevezik). Megfigyelhetjük, hogy a nyílt Euler-séták esetében a kezdőpont és a végpont fokszáma páratlan, míg a többi köztes pont fokszáma páros; a zárt Euler-séta esetében pedig minden pont fokszáma páros.

10. Egy egyszerű gráf minden csúcsából 4 él indul ki. Bizonyítsuk be: a gráf éleit ki lehet színeznii piros és kék színnel úgy, hogy minden csúcsból pontosan 2 piros és 2 kék él induljon ki.

Megoldás:

Feltételezhetjük, hogy a gráf összefüggő (amennyiben több komponensből állna, akkor komponensenként végezzük el a színezést az itt leírt módon).

Belátható, hogy ha egy összefüggő gráfban minden pont fokszáma páros, akkor mindig létezik a gráfban zárt Euler-séta (lásd az előző feladatot). Ennek vázlatos bizonyítása a következő: Induljunk a gráf egy tetszőleges csúcsából, majd haladjunk tetszőleges módon az egymáshoz csatlakozó, korábban még fel nem használt éleken, ameddig csak lehet. Utunk során a köztes csúcsok fokszáma mindig 2-vel csökken (hiszen a rá illeszkedő élek közül az egyiket beérkeztünk a csúcsba, egy másikon pedig kimentünk onnan), azaz végig páros marad. Ha már nem tudunk így tovább haladni, akkor egy olyan pontba érkeztünk, amelynek a beérkezés után csökkent 0-ra a fokszáma, így ez csak a kiindulópont lehet. Ha eddigre már az összes élen áthaladtunk, akkor készen vagyunk, különben pedig a fennmaradó élek alkotta gráfban is minden fokszám páros (de ez a gráf már nem feltétlenül összefüggő), így a fennmaradó élekből alkotott kisebb „körök” beilleszthetők az eredeti útvonalunk megfelelő helyeire.

Mivel a most vizsgált gráfban minden pont fokszáma páros (4), ezért ebben az összefüggő gráfban létezik zárt Euler-séta. Színezzük e séta mentén felváltva pirosra és kékre az éleket! Ha most vesszünk egy tetszőleges csúcsot, akkor ezt a csúcsot a séta kétszer érinti – mindkét esetben két élt használ el, amelyek közül az egyik piros, a másik pedig kék. Ezzel beláttuk, hogy minden csúcsból 2 piros és 2 kék indul ki, tehát a színezés megfelelő.

11. Felsorolhatóak-e az n -hosszú 0-1 sorozatok úgy, hogy mind a 2^n elemet pontosan egyszer írjuk le, és bármely elem utolsó $n-1$ karaktere megegyezzen a következő elem első $n-1$ karakterével?

Megoldás:

Igen, felsorolhatóak. Ennek bizonyításához tekintsünk egy 2^{n-1} csúcsú irányított gráfot, amelynek csúcsai az $n-1$ hosszúságú 0-1 sorozatok. Az n hosszú 0-1 sorozatok lesznek a gráf élei, mégpedig úgy, hogy az él kezdőpontja az adott sorozat első $n-1$ karakterének megfelelő csúcs, végpontja pedig az adott sorozat utolsó $n-1$ karakterének megfelelő csúcs lesz. (Például $n=5$ esetén a 01101 sorozatnak a 0110-ból 1101-be mutató irányított él felel meg.)

Megmutatjuk, hogy az így kapott gráfban létezik zárt Euler-séta. A gráf összefüggő, hiszen bármely u csúcsból bármely v csúcsba eljuthatunk legfeljebb $n-1$ lépésben (például úgy, hogy egymás mellé írjuk u és v sorozatát, majd „egyesével” átlépünk az egyikről a másikra). Továbbá minden csúcs esetén a beérkező és a kiinduló élek száma egyaránt 2, hiszen bármely $n-1$ hosszú 0-1 sorozat az elején is, illetve a végén is kétféleképpen egészíthető ki n hosszú 0-1 sorozattá.

A korábbi állítás irányított gráfokra vonatkozó megfelelője a következő: egy összefüggő irányított gráfban pontosan akkor létezik zárt Euler-séta, ha minden csúcs esetén a beérkező és a kiinduló élek száma megegyezik. Ez a mostani feladatban teljesül, így létezik a zárt Euler-séta, amely mentén az éleknek megfelelő sorozatokat leírva éppen egy kívánt sorrendet kapunk.

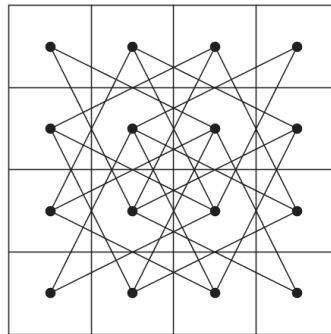
Megjegyzés: A séta zártsága miatt a sorozatok egy körvonalra is felírhatók a feltételeknek megfelelően, vagyis a legutolsó elem is illeszkedik a legelsőhöz.

12. Bejárható-e egy 4×4 -es, illetve egy 5×5 -ös sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőn pontosan egyszer járunk, és a végén visszaérjünk a kiindulópontba? Mi a helyzet akkor, ha a végén nem kötelező visszaérnünk a kiindulópontba?

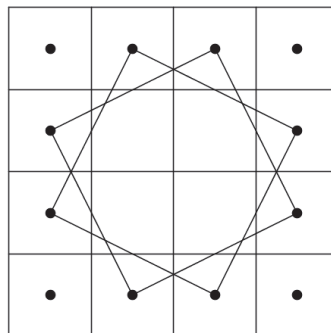
Megoldás:

Először megmutatjuk, hogy a 4×4 -es sakktábla nem járható be így, már akkor sem, ha nem kötelező visszaérnünk a kiindulópontba. (Ekkor nyilván úgy sem járható be, ha a végén vissza kell érünk a kiindulópontba.)

Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a 4×4 -es sakktábla mezői, két csúcs között pedig pontosan akkor haladjon él, ha az ezeknek megfelelő két mező egyikéről a másikra át lehet ugrani a lóval. Ez a gráf a következő:



Megfigyelhetjük, hogy ha a középső 4 csúcsot elhagyjuk ebből az összefüggő gráfból (a belőlük kiinduló élekkel együtt), akkor a megmaradó gráf 6 komponensből áll (4 izolált csúcsból és 2 körből):



Tegyük fel, hogy az eredeti gráfban létezik a 16 csúcsnak olyan felsorolása, amelyben minden csúcs pontosan egyszer szerepel, és a szomszédos csúcsok között halad él (ez a 15 él egy utat alkot az eredeti gráfban). Ha ebből a felsorolásból elhagyjuk a tábla közepén szereplő 4 csúcsot, akkor ez az út legfeljebb 5 részre eshet szét (5-nél kevesebb részre akkor, ha az úton szomszédos csúcsokat is elhagytunk). Viszont így a középső 4 csúcs törlése után megmaradó gráf nem állhat 6 komponensből, ami ellentmond a korábbi megállapításunknak.

Tehát a 4×4 -es sakktábla nem járható be a feltételeknek megfelelően, akár vissza kell érni az út végén a kiindulópontba, akár nem. (Amennyiben a végén vissza kellene érni a kiindulópontba, akkor egy 16 élű körből hagynánk el a 4 csúcsot, amely kör legfeljebb csak 4 részre eshetne szét, így ezen eset lehetetlensége a fenti bizonyításból is következik.)

Az 5×5 -ös sakktábla az egyik színű mezőből 12-t, a másik színűből 13-at tartalmaz, viszont a ló minden ugrásánál színt vált (fekete mezőről fehérre, illetve fehér mezőről feketére ugrik). Így 25 mező biztosan nem járható körbe a megadott módon, hiszen az 1., 3., 5., ..., 25. mező színe meg-egyezik, emiatt a 25. mezőről nem ugorhatna vissza a ló az 1. mezőre.

Amennyiben az út végén nem kell visszaérni a kiindulópontba, akkor az 5×5 -ös sakktábla bejárható a kívánt módon, például a következőképpen (az útvonal mezőit az 1, 2, ..., 25 számokkal jelöltük):

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	23	4	21
18	25	6	11	16
7	12	17	22	5

Megjegyzés: Egy gráf valamennyi csúcsán áthaladó utat Hamilton-útnak, valamennyi csúcsán áthaladó kört Hamilton-körnek nevezik.

13. Van-e olyan 4, 5, illetve 6 pontú egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével? (Két gráfot izomorfának nevezünk, ha csúcsaik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy két csúcs között pontosan akkor halad él az egyik gráfban, amikor az ezeknek megfelelő csúcsok között halad él a másik gráfban.)

Megoldás:

Tudjuk, hogy egy gráf és a komplementere együtt egy teljes gráfot alkot, amelynek n pont esetén $\binom{n}{2}$ éle van. Annak, hogy két gráf izomorf legyen, szükséges (de nem elégséges) feltétele, hogy ugyanannyi élük legyen. Ekkor a két gráf éleinek együttes száma biztosan páros szám.

Mivel $\binom{6}{2} = 15$, ezért a 6 pontú teljes gráfnak 15 éle van, amelyek nem oszthatók két egyenlő számú részre. Így olyan 6 pontú egyszerű gráf nem létezhet, amely izomorf a komplementerével.

4 és 5 pontú gráfokból viszont létezik ilyen, például a következők:



A fenti ábrákon folytonos vonallal jelöltük az eredeti gráf éleit, szaggatott vonallal pedig a komplementer gráf éleit. A 4 pontú esetben mindkét gráf egy-egy 3 hosszú utat alkot (amelyek nyilván izomorfak), az 5 pontú esetben pedig mindkét gráf egy-egy 5 hosszú kört alkot (amelyek szintén izomorfak).

14. Kettő a következő játékot játsszák: adott n pont, amelyek közül kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élt. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a második játékosnak van nyerő stratégiája, ha mindketten a lehető legügyesebben játszanak?

Megoldás:

Mivel mindkét játékos el akarja kerülni, hogy kör keletkezzen, ezért feltételezhetjük, hogy az adott n ponton a behúzott élek által alkotott gráf a játék során végig (a vesztes pillanatát leszámítva) körmentes. Ameddig a gráf nem összefüggő, addig mindig lehet úgy behúzni egy újabb élt, hogy a körmentesség megmaradjon (hiszen ha két pont különböző komponensben található, akkor a közéjük behúzott él biztosan nem hoz létre kört). Viszont attól a pillanattól kezdve, amikor az adott körmentes gráf összefüggővé válik (azaz fa lesz), már nem lehet újabb élt behúzni úgy, hogy ne keletkezzen kör. Vagyis az a játékos nyer, akinek a lépése után a behúzott élék (az n pont mind-egyikét tartalmazó) fát alkotnak, hiszen ekkor a másik játékos a következő él behúzásával biztosan elveszíti a játékot.

Mivel egy n pontú fának $n-1$ éle van, ezért – feltételezve, hogy mindketten a lehető legügyesebben játszanak – az a játékos nyer, aki az $(n-1)$. élt behúzza. Páros n esetén ez a kezdő játékos, páratlan n esetén pedig a második játékos.

15. Egy fában csak két különböző foksám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két foksám?

BME Számítástudományi Tanszék, zárthelyi feladat

Megoldás:

A vizsgált fának $9 + 92 = 101$ csúcsa van, így éleinek száma $101 - 1 = 100$, vagyis a fában szereplő foksámok összege $2 \cdot 100 = 200$. Tudjuk, hogy minden fában van elsőfokú pont, ezért az egyik előforduló foksám biztosan az 1. A másik foksámot jelölje a . Két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy az 1 és az a közül melyik fordul elő 9-szer, illetve melyik 92-szer.

Ha az 1 fordul elő 9-szer, az a pedig 92-szer, akkor a foksámok összege $9 \cdot 1 + 92 \cdot a = 200$, ahonnan $a = \frac{199}{92}$ adódna, ami nem egész szám. Ez tehát nem lehetséges.

Ha az 1 fordul elő 92-szer, az a pedig 9-szer, akkor a foksámok összege $92 \cdot 1 + 9 \cdot a = 200$, ahonnan $a = \frac{108}{9} = 12$ adódik. Ilyen fa valóban létezik: ha elhelyezünk egy egyenes mentén 9 pontot, amelyek közül a szomszédosakat összekötjük egymással, továbbá a két szélső pontot még 11-11 másik, a hét köztes pontot még 10-10 másik elsőfokú ponttal összekötjük, akkor a kapott fában valóban 9 db 12-fokú, illetve $2 \cdot 11 + 7 \cdot 10 = 92$ db 1-fokú pont lesz.

Vagyis a keresett két foksám az 1 és a 12.

16. Igazoljuk, hogy ha egy fában van k -adfokú pont, akkor legalább k db elsőfokú pont van benne.

Megoldás:

Legyen A egy k -adfokú pont a fában, szomszédjai pedig $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Ha elhagyjuk a fából az A pontot (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ pontok mindegyike különböző komponensbe kerül (ellenkező esetben az eredeti gráf tartalmazna kört). Ezen komponensek mindegyike összefüggő és körmentes, azaz fa. Ha az A_i -t tartalmazó komponens egy egy pontú fa, akkor az A_i pont az eredeti gráfban elsőfokú (mivel csak A -val szomszédos). Ha pedig az A_i -t tartalmazó komponens egy legalább kétpontú fa, akkor tartalmaz legalább két elsőfokú pontot (pél-

dául a fában szereplő (egyik) leghosszabb út két végpontját), amelyek egyike biztosan különbözik A_i -től. Ez a pont az eredeti gráfban is elsőfokú.

Vagyis az A pont minden szomszédjának „irányában” található legalább egy elsőfokú pont, így összesen legalább k db elsőfokú pont van a fában.

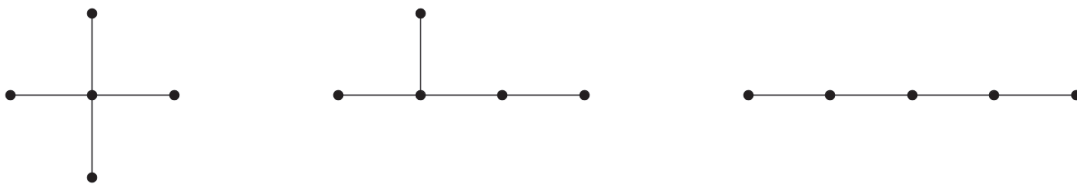
17. Egy internetszolgáltatónak öt város között négy egyenes vezetékszakaszból álló hálózatot kell kiépítenie úgy, hogy az elektromos jel a vezetékeken bármelyik városból bármelyik városba eljusson (a vezetékszakaszkok mindig két várost kötnek össze). A városok elhelyezkedése olyan, hogy semelyik három nem esik egy egyenesbe. Hány különböző hálózat építhető, ha a szigetelt vezetékek keresztezhetik egymást?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2007; 7. osztály, megyei forduló

Megoldás:

A feladat a gráfok nyelvén fogalmazva arra kérdez rá, hogy 5 különböző (egymástól megkülönböztetett) pont közé hányféleképpen húzható be 4 él úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. Mivel egy n pontú, $n - 1$ élű összefüggő gráf mindig fa, ezért a kérdés az, hogy ez az 5 különböző pont hányféleképpen alakítható fává.

Ha a pontokat nem különböztetnénk meg egymástól, akkor 5 ponton izomorfia erejéig a következő háromféle fát tudnánk megadni:



(A fenti ábrák nem a városok tényleges elhelyezkedését mutatják – hiszen a feladatban szerepelt, hogy semelyik három város nem esik egy egyenesbe –, hanem annak a gráfnak egy-egy lehetséges lerajzolását, amely a városokból és a közöttük haladó vezetékekből áll.)

Mivel most megkülönböztetjük a pontokat egymástól (legyen az öt pont A, B, C, D és E), ezért a keresett fák számát megkaphatjuk úgy, ha nem a rögzített 5 különböző pont közé húzunk be éleket, hanem a fenti három fa pontjaihoz helyezzük el az A, B, C, D, E betűket.

Az első esetben ezt izomorfia erejéig 5-féleképpen tehetjük meg, hiszen csak az számít, hogy a középső (negyedfokú) ponthoz A, B, C, D, E közül melyik kerül.

A második esetben a pontok elhelyezésére $\frac{5!}{2} = 60$ lehetőségünk van, hiszen az A, B, C, D, E betűket 5!-féleképpen helyezhetjük el tetszőlegesen a pontokhoz, de a bal szélső és a felső elsőfokú ponthoz tartozó betűt egymás között megcserélve izomorf megoldást kapunk.

A harmadik esetben szintén $\frac{5!}{2} = 60$ -féle lehetséges elhelyezés adódik, hiszen 5!-féle tetszőleges kitöltés létezik, ám egy elhelyezést az ábra középső pontján átmenő, függőleges szimmetriatengelyre tükrözve vele izomorf megoldást kapunk (például az $A-B-C-D-E$ és az $E-D-C-B-A$ utak izomorfák).

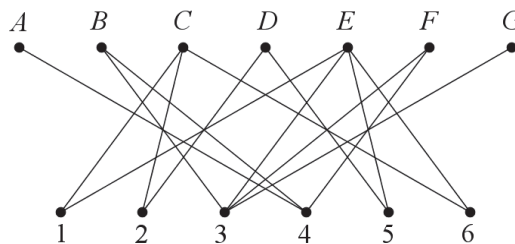
Vagyis összesen $5 + 60 + 60 = 125$ -féle fa létezik, így 125 különböző hálózat építhető.

Megjegyzés: A feladatban azt kaptuk, hogy $n = 5$ különböző pont 125-féleképpen alakítható fává. A problémát más n értékekre megvizsgálva kapjuk, hogy 2 különböző pont 1-féleképpen, 3 különböző pont 3-féleképpen, 4 különböző pont 16-féleképpen, 6 különböző pont 1296-féleképpen alakítható fává. Észrevehetjük, hogy $4 \leq n$ esetén a kapott értékek mind hatványszámok, mégpedig 4 pont esetén 4^2 , 5 pont esetén 5^3 , 6 pont esetén 6^4 a lehetőségek száma. (Ez a szabály a kisebb értékekre is működik: 2 pont esetén 2^0 , 3 pont esetén 3^1 lehetőséget kapunk.) A gráfelméletben Cayley tételeként ismert az az állítás, amely szerint n különböző pont n^{n-2} -féleképpen alakítható fává.

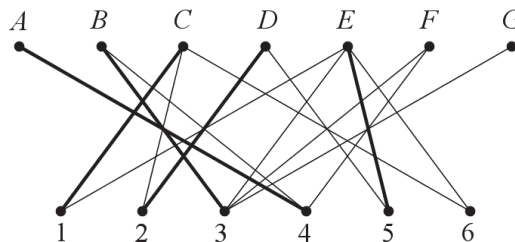
18. Egy cégnél 7 pályázó jelentkezett 6 üres munkahelyre (számozzuk ezeket 1-től 6-ig), közülük néhányan több helyre is: Aladár a 4-es, Béla a 3-as és 4-es, Csaba az 1-es, 2-es és 6-os, Dani a 2-es és 5-ös, Erzsi az 1-es, 3-as, 5-ös és 6-os, Feri a 3-as és 4-es, Géza pedig a 3-as munkahelyre. Legfeljebb hány munkahely tölthető be?

Megoldás:

A jelentkezéseket ábrázolhatjuk egy olyan gráffal, amelynek csúcsai két részre oszthatók: pályázókra és munkahelyekre, élt pedig akkor húzunk be két csúcs közé, ha az adott pályázó jelentkezett az adott munkahelyre. (A kapott gráf egy páros gráf lesz, hiszen a csúcsok két részre oszthatók úgy, hogy minden él e két rész között vezet.) Jelöljük a pályázókat nevük kezdőbetűjével (A, B, C, D, E, F, G), a munkahelyeket pedig sorszámukkal (1, 2, 3, 4, 5, 6). Ekkor a jelentkezési gráf a következő:



Mivel az A, B, F, G csúcsok szomszédjai között csak a 3, 4 csúcsok szerepelnek, ezért biztos, hogy e négy személy (Aladár, Béla, Feri és Géza) közül kettőnek nem jut munkahely, hiszen négyük között legfeljebb csak a 3-as és a 4-es munkahely osztható szét. Emiatt a 7 emberből legfeljebb 5-nek juthat munkahely. Ez meg is valósítható, például a következőképpen (az ábrán vastagon jelöltük, hogy kinek melyik munkahely jut):



A fenti elrendezésben Aladárnak a 4-es, Bélának a 3-as, Csabának az 1-es, Daninak a 2-es, Erzsi-nek az 5-ös munkahely jutott. Korábban beláttuk, hogy 5-nél több embernek egyszerre nem juthat munkahely, így legfeljebb 5 munkahely tölthető be.

Megjegyzés: Ez a feladat a gráfelmélet azon területéhez kapcsolódik, amely a gráfok (azon belül is a páros gráfok) párosításaival foglalkozik. A párosítás élek egy olyan részhalmaza, amelyben minden csúcsból legfeljebb egy él indul ki (azaz minden csúcsnak legfeljebb egy „párja” van). Pá-

ros gráfok esetében a fenti megoldást általánosítja az úgynevezett Hall-feltétel, amely kimondja, hogy ha nem jut minden csúcshoz pár (azaz nem létezik teljes párosítás), akkor mindig található csúcsoknak egy olyan k elemű halmaza, hogy a velük szomszédos csúcsok halmaza k -nál kisebb elemszámú.

19. Legyen a G egyszerű gráf csúcsainak halmaza $\{1; 2; 3; \dots; 1023\}$. Az i és j (különböző) csúcsok között pontosan akkor vezessen él G -ben, ha i és j egyike osztója a másiknak. Határozzuk meg, legkevesebb hány különböző színnel tudjuk kiszínezni G csúcsait úgy, hogy semelyik él két végpontja se legyen azonos színű.

Megoldás:

Tekintsük a 10 elemű $\{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512\}$ halmazt! Mivel ennek bármelyik két elemét kiválasztva az egyik osztója lesz a másiknak, ezért e 10 elemnek megfelelő csúcsok között nem lehet két azonos színű. Vagyis a gráfban már pusztán e 10 csúcs kiszínezéséhez 10 különböző színre van szükség.

Megmutatjuk, hogy 10 szín elegendő a színezéshez. Színezzük az 1. színnel az 1-et, a 2. színnel a $\{2; 3\}$ -at, a 3. színnel a $\{4; 5; 6; 7\}$ -et, és így tovább, a 10. színnel az $\{512; 513; \dots; 1023\}$ halmaz elemeit. Ekkor a k -adik színnel a $[2^{k-1}; 2^k - 1]$ halmazban szereplő egész számokat színeztük. Ha kivesszünk ebből a halmazból két tetszőleges különböző egész számot, akkor a nagyobbik biztosan kisebb, mint a kisebbik 2-szerese (hiszen már 2^{k-1} duplája sem szerepel ebben az intervallumban), emiatt a kisebb nem lehet osztója a nagyobbaknak. Tehát ez a színezés megfelelő, hiszen az azonos színű pontok között nem vezet él a gráfban.

Vagyis legkevesebb 10 színnel tudjuk kiszínezni a G gráf csúcsait.

Megjegyzés: Azt a legkisebb számot, ahány színnel egy gráf csúcsai ilyen módon kiszínezhetők, a gráf kromatikus számának nevezik.

20. Az 1, 2, ..., 100 számoknak egy részhalmaza olyan tulajdonságú, hogy egyetlen elemének sem tartalmazza a háromszorosát. Legfeljebb hány elemű lehet egy ilyen részhalmaz?

Medve Szabadtéri Matematikaverseny 2011.

Megoldás:

Osszuk az 1, 2, ..., 100 számokat csoportokba úgy, hogy minden csoportban az egymás után következő számok rendre az előző szám háromszorosai legyenek. Ekkor a következő csoportokat kapjuk:

5 elemű csoport: 1, 3, 9, 27, 81 (1 db)

4 elemű csoport: 2, 6, 18, 54 (1 db)

3 elemű csoport: 4, 12, 36 / 5, 15, 45 / 7, 21, 63 / 8, 24, 72 / 10, 30, 90 / 11, 33, 99 (6 db)

2 elemű csoport: 13, 39 / 14, 42 / 16, 48 / 17, 51 / 19, 57 / 20, 60 / 22, 66 /
23, 69 / 25, 75 / 26, 78 / 28, 84 / 29, 87 / 31, 93 / 32, 96 (14 db)

1 elemű csoport: 34 / 35 / 36 / ... / 100 (45 db)

Az 5 elemű csoportból legfeljebb 3 elemet választhatunk be a részhalmazba (1, 9, 81). A 4 elemű csoportból legfeljebb 2 elemet választhatunk be (2, 18, illetve 6, 54). A 3 elemű csoportokból leg-

feljebb 2-2 elemet választhatunk be (4, 36 / 5, 45 / 7, 63 / 8, 72 / 10, 90 / 11, 99). A 2 elemű csoportokból legfeljebb 1-1 elemet választhatunk be (például mindegyikből a kisebbet). Végül az 1 elemű csoportok mindegyikét beválaszthatjuk.

Így a vizsgált részhalmazba legfeljebb $3 + 2 + 6 \cdot 2 + 14 + 45 = 76$ elemet választhatunk be.

Megjegyzés: Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai az $\{1; 2; \dots; 100\}$ számok, és két csúc között pontosan akkor vezet él, ha az egyik háromszorosa a másiknak. A fenti feladatban ebben a gráfban akartunk minél több olyan csúcsot kiválasztani, hogy semely két kiválasztott csúc között ne fusson él (a csúcsok ilyen tulajdonságú részhalmazát független csúcshalmaznak nevezik). Amennyiben a gráf csúcsait kiszínezzük az előző feladatban szereplő módon (tehát úgy, hogy semelyik él két végpontja se legyen azonos színű), akkor minden egyes szín esetében az azonos színű csúcsok független csúcshalmazt alkotnak.

21. Artúr király udvarába hivatalos vendégségbe néhány lovag. Bármely két lovag vagy barát, vagy ellenség (a viszonyok kölcsönösek, és az idő múlásával nem változnak). Egy korábbi vendégség során ugyanezek a lovagok le tudtak ülni két asztal mellé úgy, hogy az egy asztalnál ülők mind barátai voltak egymásnak. A mostani vendégség során a vendégek egyesével érkeztek meg. Érkezésük után minden érkező leült az egyik olyan asztalhoz, ahol nem ült ellensége; az ilyen asztalok közül azt választva, ahol a legtöbb barátja ült (ha egyetlen megfelelő asztal sem volt, akkor az érkező természetesen új asztalhoz ült). Így összesen 12 asztal mellé ültek le lovagok. Legalább hány lovag érkezett a vendégségbe?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók, III. kategória, döntő

Megoldás:

Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a lovagok, és két csúc között pontosan akkor vezet él, ha a megfelelő lovagok ellenségek. Tudjuk, hogy e gráf csúcsai két színnel kiszínezhetők úgy, hogy semelyik él két végpontja se legyen azonos színű (a két szín a korábbi vendégség két asztalának feleltethető meg), vagyis az említett gráf egy páros gráf. Legyenek az első színnel színezett csúcsok (vagyis a korábban az első asztalnál ülő lovagok) E_1, E_2, \dots, E_a , a második színnel színezett csúcsok (vagyis a korábban a második asztalnál ülő lovagok) pedig M_1, M_2, \dots, M_b . Ekkor a gráf minden éle egy E -beli és egy M -beli csúc között halad.

Először megmutatjuk, hogy a gráf csúcsainak száma (vagyis $a + b$ értéke) lehet 22. Ehhez legyen $a = b = 11$, és minden $1 \leq i, j \leq 11, i \neq j$ esetén vezessen él E_i és M_j között, továbbá húzzuk be még az $E_{11}M_{11}$ élt is. (Ekkor ez a gráf majdnem egy teljes páros gráf, csupán az E_iM_i élek hiányoznak belőle $1 \leq i \leq 10$ esetén.) Ha a lovagok $E_1 - M_1 - E_2 - M_2 - \dots - E_{10} - M_{10} - E_{11} - M_{11}$ sorrendben érkeznek, akkor az ültetés a következő lesz:

- E_1 és M_1 az első asztalhoz ül.
- E_2 és M_2 a második asztalhoz ül, hiszen mindkettőjüknek van ellensége az első asztalnál, viszont egymásnak barátai.
- E_3 és M_3 a harmadik asztalhoz ül, hiszen mindkettőjüknek van ellensége az első két asztal mindegyikénél, viszont egymásnak barátai.
- Ez így ismétlődik egészen addig, amíg E_{10} és M_{10} a tizedik asztalhoz ül, hiszen mindkettőjüknek van ellensége az első kilenc asztal mindegyikénél, viszont egymásnak barátai.

- E_{11} a tizenegyedik asztalhoz ül, hiszen az első tíz asztal mindegyikénél van ellensége.
- M_{11} a tizenkettedik asztalhoz ül, hiszen az első tizenegy asztal mindegyikénél van ellensége.

Ezzel beláttuk, hogy $a + b$ értéke lehet 22.

Most megmutatjuk, hogy $a + b \geq 22$. Legyen a tizenkettedik asztalhoz leülő egyik lovag például E -beli (amennyiben M -beli, a bizonyítás hasonlóan működik). Mivel a tizenkettedik asztalhoz ült le, ezért az első 11 asztal mindegyikénél ül M -beli lovag, vagyis $b \geq 11$. Így a tizenegyedik asztalnál is ül M -beli lovag, emiatt az első 10 asztal mindegyikénél kell ülnie E -beli loagnak, akik a tizenkettedik asztalnál ülő E -beli lovaggal együtt már szintén legalább 11-en vannak, azaz $a \geq 11$. Tehát $a + b$ értéke mindig legalább 22.

Vagyis legalább 22 lovag érkezett a vendégségbe.

22. Egy tudományos kutatásban n tudós dolgozik együtt. Bármely két tudós előre megállapodik, hogy egymás közt milyen nyelven leveleznek a kutatás négy hivatalos nyelve közül. A levelezés oda-vissza ugyanazon a nyelven történik két tudós között. Egy tudóst akkor nevezünk szervezőnek, ha legalább 4 másikkal ugyanazon a nyelven levelezik. Legfeljebb mekkora lehet n , ha nincs köztük szervező?

OKTV 2014/2015; II. kategória, 2. forduló

Megoldás:

Tekintsük azt az n pontú teljes gráfot, amelynek csúcsai a tudósok, élei pedig négy rögzített szín valamelyikével vannak színezve aszerint, hogy a megfelelő két tudós melyik nyelvet használja az egymás közti levelezésben. Ha nincs a tudósok között szervező, akkor minden csúcsból legfeljebb 3 azonos színű él indulhat ki. Emiatt minden csúcs foka legfeljebb $4 \cdot 3 = 12$ lehet, azaz n értéke nem lehet 13-nál nagyobb.

Ha $n = 13$ lenne, akkor minden csúcsból mind a négy színű élből pontosan 3-3 indulna. Ekkor, ha csak az egyik színű éleket vizsgáljuk, az adott színre vonatkozóan 13 db harmadfokú csúcsa lenne a gráfnak, ami nem lehetséges, hiszen így a foksámösszeg $13 \cdot 3 = 39$, ami páratlan. Tehát n értéke nem lehet 13.

Megmutatjuk, hogy $n = 12$ lehetséges, így ez lesz a válasz a feladat kérdésére. A gráf csúcsai legyenek $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4$. Az A betűs csúcsok közötti élek legyenek pirosak, a B betűsek közöttiek kékek, a C betűsek közöttiek pedig sárgák. Ha két csúcs betűjele különböző, de indexe azonos, akkor legyen a közöttük futó él színe zöld. Ha pedig $i \neq j$, akkor legyen az $A_i B_j$ él sárga, az $A_i C_j$ él kék, míg a $B_i C_j$ él piros. Ekkor minden pontból 2 zöld él, továbbá 3-3 piros, kék, illetve sárga él indul, ez tehát jó megoldás.

Vagyis n értéke legfeljebb 12 lehet.

23. Legyen G egy tetszőleges 6 pontú egyszerű gráf. Igaz-e, hogy G vagy G komplementere biztosan tartalmaz háromszöget?

Kürschák József Matematikai Tanulmányverseny 1947.

Megoldás:

A feladat átfogalmazható a következőképpen: Egy 6 pontú teljes gráf minden élét pirosra vagy kékre színeztük. Igaz-e, hogy biztosan tartalmaz a gráf olyan háromszöget, amelynek minden oldala azonos színű? (A teljes gráfban színezzük pirosra az eredeti feladatban szereplő G gráf éleit, kékre pedig a G gráfból hiányzó éleket, vagyis a G komplementerében szereplő éleket.)

Megmutatjuk, hogy az állítás igaz. Vegyük a teljes gráf egy tetszőleges A csúcsát. Ebből 5 él indul ki, amelyek között a skatulya-elv miatt biztosan található 3 egyforma színű. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek az AB , AC és AD élek, és piros színűek. Tekintsük most a B , C és D pontok között futó éleket! Ha ezek bármelyike piros színű, akkor a gráfban van piros háromszög (ha például a BD él piros, akkor az ABD háromszög minden oldala piros). Ha viszont egyik sem piros színű, akkor mindegyik kék, és így a gráfban van kék háromszög (a BCD háromszög). Ezzel beláttuk, hogy a feladat állítása mindig teljesül.

Megjegyzés: 5 pontú gráf esetén az állítás még nem feltétlenül teljesül: egy 5 pontú kör komplementere is 5 pontú kör, és e két gráf egyike sem tartalmaz háromszöget. Tehát a 6 a legkisebb olyan szám, ahány pontú gráfra teljesül az állítás.

Megjegyzés: Ez a feladat az úgynevezett Ramsey-tételekhez kapcsolódik. $R(a, b)$ -vel jelöljük azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy ha egy n pontú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezzük piros és kék színnel, akkor a kapott színezésben biztos lesz egy a pontú teljes piros részgráf vagy egy b pontú teljes kék részgráf. A mostani feladatban azt bizonyítottuk be, hogy $R(3, 3) \leq 6$, az utána következő megjegyzést felhasználva pedig $R(3, 3) = 6$ adódik.

24. 17 tudós összesen 3 témáról folytat levelezést, bármely kettő pontosan egyről. Mutassuk meg, hogy van köztük három, akik páronként ugyanarról leveleznek.

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1964.

Megoldás:

Tekintsük azt a 17 pontú teljes gráfot, amelynek pontjai az egyes tudósok, élei pedig háromféle színűek, annak megfelelően, hogy az adott két tudós melyik témáról levelezik (legyenek a színek például piros, kék és zöld). Feladatunk megmutatni, hogy ebben a gráfban tetszőleges színezés esetén található egyszínű háromszög.

Vegyük a gráf egy tetszőleges A csúcsát. Ebből 16 él indul ki, amelyek között a skatulya-elv miatt biztosan található 6 egyforma színű. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek az AB , AC , AD , AE , AF és AG élek, és piros színűek. Tekintsük most a B , C , D , E , F és G pontok között futó éleket! Ha ezek bármelyike piros színű, akkor a gráfban van piros háromszög (ha például a BD él piros, akkor az ABD háromszög minden oldala piros). Ha viszont egyik sem piros színű, akkor a B , C , D , E , F , G pontok között futó élek mindegyike kék vagy zöld színű. E hat pontra alkalmazva az előző feladat eredményét, azt kapjuk, hogy ekkor közöttük biztosan lesz kék vagy zöld háromszög. Ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzés: A Ramsey-témakörben e feladat eredményét $R(3, 3, 3) \leq 17$ módon jelölik. Belátható, hogy 16 pontú teljes gráfra még nem feltétlenül teljesül az állítás, amiből $R(3, 3, 3) = 17$ is következik.

25. Anna társasjátékozni hívja 19 legjobb barátnőjét. Kissé csalódottan veszi észre: a 20 résztvevőből egyetlen négyfős csapatot sem tudnak úgy alakítani, hogy a kvartettben mindenki mindenkit ismerjen már korábról. Van-e biztosan négy olyan lány a társaságban, akik egyáltalán nem ismerték eddig egymást?

Megoldás:

Tekintsük azt a 20 pontú teljes gráfot, amelynek pontjai a játékdélután résztvevői, élei pedig kétféle színűek, annak megfelelően, hogy az adott két résztvevő ismeri-e egymást (ezt jelölje piros színű él) vagy nem (ezt jelölje kék színű él). Tudjuk, hogy ebben a gráfban nincs 4 pontú piros teljes részgráf. A feladat azt kérdezi, hogy ekkor van-e benne biztosan 4 pontú kék teljes részgráf.

Megmutatjuk, hogy ilyen részgráf biztosan van a gráfban. A feladatot általánosabban látjuk be: azt igazoljuk, hogy ha egy 20 pontú teljes részgráf éleit tetszőlegesen pirossal és késsel színezzük, akkor valamelyik színből lesz benne 4 pontú teljes részgráf. (Ebből már következik a bizonyítandó állítás, hiszen ha valamelyik színből szerepel 4 pontú teljes részgráf, de tudjuk, hogy piros színből nem, akkor kék színből nyilván igen.)

Vegyük a gráf egy tetszőleges A csúcsát. Ebből 19 él indul ki, amelyek között a skatulya-elv miatt biztosan található 10 egyforma színű. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek az élek piros színűek. Az élek A -tól különböző végpontjait jelölje A_1, A_2, \dots, A_{10} . Feladatunk megmutatni, hogy az A_1, A_2, \dots, A_{10} pontok által meghatározott teljes részgráfban szerepel 4 pontú kék teljes részgráf vagy 3 pontú piros teljes részgráf (ez utóbbi esetben ez a 3 pont az A ponttal együtt egy 4 pontú teljes részgráfot alkot).

Vizsgáljuk meg e részgráfban az A_1 pontból kiinduló 9 élt! Két esetet fogunk megkülönböztetni:

(1) A_1 -ből kiindul legalább 4 piros él. Ekkor, ha ezen élek végpontjai között vezet piros él (például az A_1A_2 és az A_1A_3 piros élek A_2 és A_3 végpontjai között), akkor e két végpont A_1 -gyel együtt (az előbbi példában A_1, A_2 és A_3) egy 3 pontú piros teljes részgráfot alkot.

(2) A_1 -ből legfeljebb 3 piros él, vagyis legalább 6 kék él indul ki. Ekkor a kék élek végpontjai által meghatározott, legalább 6 pontú teljes részgráfban – a korábbi feladatok eredménye alapján – biztosan van egyszínű 3 pontú teljes részgráf. Amennyiben ez piros színű, az nekünk elegendő. Amennyiben ez kék színű, akkor e három pont A_1 -gyel együtt egy 4 pontú kék teljes részgráfot alkot.

Ezzel az állítást beláttuk, így Anna játékdélutánján biztosan van négy olyan lány, akik addig még nem ismerték egymást.

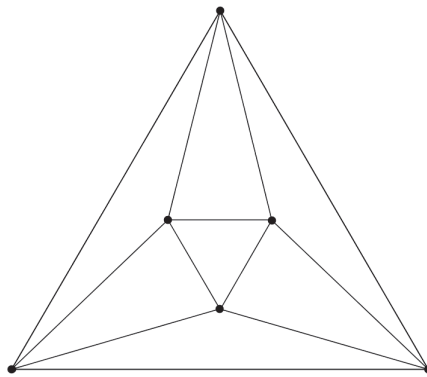
Megjegyzés: A Ramsey-témakörben e feladat eredményét $R(4, 4) \leq 20$ módon jelölik. Belátható, hogy a 18 pontú teljes gráf a legkisebb gráf, amelyre teljesül az állítás, így $R(4, 4) = 18$.

26. Egy konvex test mind a 6 csúcsában 4 egybevágó szabályos háromszöglap található. Tekintsük most azt a gráfot, amelynek csúcsai és élei a megadott test csúcsai, illetve élei. Ezt a gráfot szeretnénk úgy lerajzolni a síkba, hogy az élek csak csúcsokban találkozzanak, máshol ne keresztezzék egymást. Hány részre osztja a síkot az így lerajzolt élháló-gráf?

Megoldás:

Ha a vizsgált test d háromszöglapból áll, akkor – mivel minden háromszöglapot 3 oldal határol – e lapokat összesen $3d$ él határolja. Ám ekkor minden élt kétszer számoltunk, vagyis a test éleinek száma $\frac{3d}{2}$. A test mind a 6 csúcsába 4 él fut be, így ezeket csúcsonként megszámlolva $6 \cdot 4 = 24$ -et kapunk, ami az élek számának kétszerese (hiszen minden élt mindkét végpontjánál megszámloltunk). Tehát $\frac{3d}{2} = \frac{24}{2}$, innen $d = 8$ darab szabályos háromszöglap határolja a testet, éleinek száma pedig 12. Ez a test éppen a szabályos oktaéder. (A konvex, sokszöglapokkal határolt testekre igaz Euler poliéder-tétele, amely szerint a csúcsok és a lapok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál. Ezt a mostani esetre is ellenőrizhetjük: $6 + 8 = 12 + 2$.)

A testből készített gráf lerajzolását megkaphatjuk például úgy, hogy a testet az egyik háromszöglapjára állítjuk, amelyet kellően felnagyítunk, majd a többi élt a felnagyított lap síkjába vetítjük. Így a következő ábrán látható lerajzolást kapjuk.



Megfigyelhetjük, hogy a keletkező gráfban az egyes síkrészek megfelelnek az oktaéder egy-egy lapjának (beleértve a külső, végtelen síktartományt is, amelyet az oktaéder felnagyított lapjának feltethetünk meg). Így a 8 lapú konvex testből készített gráf lerajzolása éppen 8 részre osztja a síkot.

Megjegyzés: Az olyan gráfokat, amelyek lerajzolhatóak a síkba éleik keresztezése nélkül, síkbarajzolható gráfoknak nevezik, a keletkező síkrészeket pedig tartományoknak vagy lapoknak hívják. Belátható, hogy minden összefüggő síkbarajzolható gráfra is igaz Euler tétele: a csúcsok és a lapok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál.

Megjegyzés: Minden konvex poliéder (sokszöglapokkal határolt test) síkbarajzolható gráfot határoz meg, így amikor ezen poliéderek csúcsairól, éleiről, lapjairól beszélünk, akkor gondolhatunk a megfelelő síkbarajzolt gráf csúcsaira, éleire, lapjaira is.

27. Egy 20 csúcsú konvex poliédernek 12 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?

Megoldás:

Euler tételéből tudjuk, hogy a csúcsok és a lapok számának összege 2-vel több az élek számánál, így a poliédernek $20 + 12 - 2 = 30$ éle van. Ha minden lap d oldalú sokszög, akkor a határoló oldalakat laponként megszámlolva $12d$ -t kapunk. Ekkor minden élt kétszer számoltunk (hiszen minden él két szomszédos lapot határol), vagyis $12d = 60$, ahonnan $d = 5$. Tehát a test minden lapja öt-

szöglet. Ilyen test valóban létezik, például a szabályos dodekaéder, amelyet 12 darab szabályos ötszög határol.

28. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög, és minden csúcsában pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?

Megoldás:

Jelölje a test csúcsainak számát n , éleinek számát e , lapjainak számát l . A négyszöglapok számát jelölje a , a nyolcszöglapok számát pedig b (vagyis $l = a + b$). Ha minden lapon megszámoljuk a határoló oldalakat, akkor a test minden élét kétszer számoltuk, vagyis $2e = 4a + 8b$. Ha minden csúcsban megszámoljuk az ott végződő éleket, akkor is minden élt kétszer számoltunk, vagyis $2e = 3n$. Az eddigiekből azt kapjuk, hogy $e = 2a + 4b$, illetve $n = \frac{2}{3}e = \frac{4}{3}a + \frac{8}{3}b$.

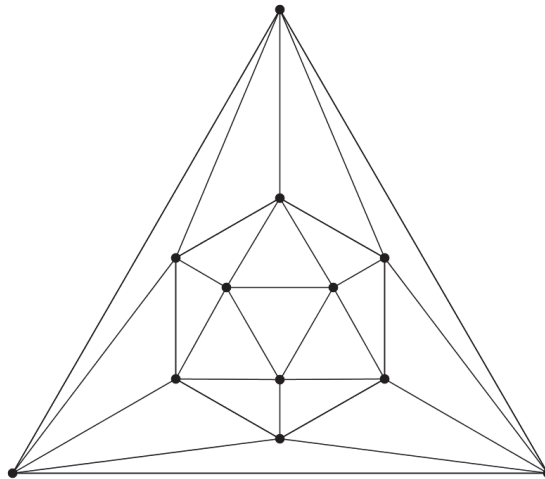
Euler tétele alapján tudjuk, hogy $n + l = e + 2$, vagyis $\frac{4}{3}a + \frac{8}{3}b + a + b = 2a + 4b + 2$. Innen rendezés és beszorzás után $7a + 11b = 6a + 12b + 6$, majd pedig $a - b = 6$ adódik. Tehát a testnek 6-tal több négyszöglapja van, mint nyolcszöglapja. Ilyen test valóban létezik, erre példa egy szabályos nyolcszög alapú hasáb, amelynek minden éle azonos hosszúságú.

29. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan összefüggő, egyszerű, síkbarajzolható gráf létezik, amelyek minden csúcsa ötödfokú.

OKTV 1995/1996; III. kategória, 1. forduló

Megoldás:

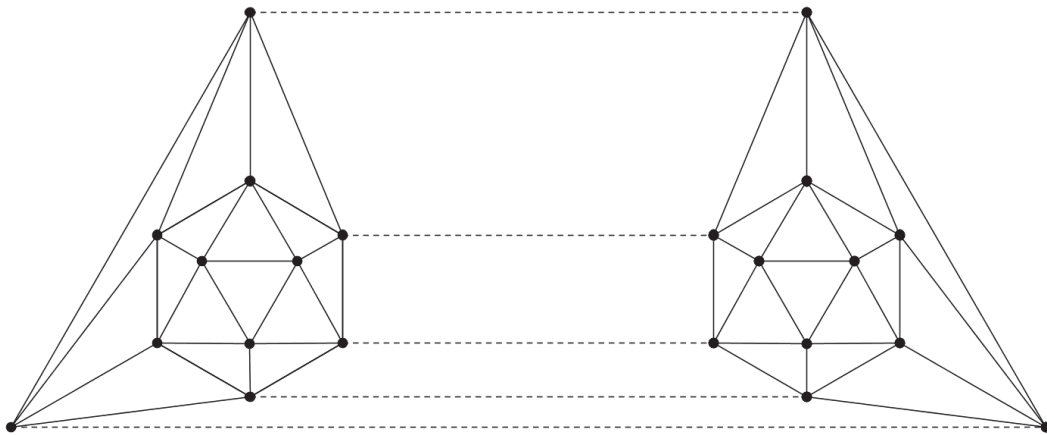
Egy ilyen megfelelő gráfot kaphatunk például az ikozaéder élhálójának alábbi síkbarajzolásával:



Ha két ugyanilyen gráfot egymás mellé teszünk, egy-egy „külső” csúcsukat és annak környékét levágjuk, továbbá az ott végződő 5-5 élt egyesével „összevarrjuk”, akkor egy nagyobb ilyen tulajdonságú gráfot kapunk. Az „összevarrást” a következő két ábra szemlélteti:



A nagyobb gráf pedig a következő:



Az eljárást tetszőleges számban megismételve valóban végtelen sok megfelelő gráfot kapunk.

30. Medveföld városait 12 busztársaság járatai kötik össze (mindegyik társaság üzemeltet legalább egy járatot). Bármely két város között pontosan egy buszjárat közlekedik, és akárhogyan választunk ki három várost, a köztük lévő három buszjáratot vagy ugyanaz a társaság üzemelteti, vagy mindháromat különböző. Mutassuk meg, hogy Medveföldön a városok száma nem lehet több 121-nél.

Medve Szabadtéri Matematikaverseny 2015. évi feladata alapján

Megoldás:

Ha Medveföldön n város van, akkor feladatunk egy n csúcsú teljes gráf éleit 12 színnel úgy kiszínezni, hogy bármely három csúcsot választjuk is ki, az általuk meghatározott háromszögnek vagy mindhárom oldala azonos, vagy mindhárom oldala különböző színű legyen.

Megmutatjuk, hogy $n \geq 122$ esetén nem létezhet ilyen színezés. Tegyük fel ugyanis, hogy G egy legalább 122 csúcsú teljes gráf, amelynek élei a feltételeknek megfelelően ki vannak színezve. Legyen a gráf egyik csúcsa A . Mivel A -ból legalább 121 él indul ki, amelyek 12 színnel vannak színezve, így a skatulya-elv miatt van olyan szín, amelyik legalább 11-szer fordul elő az A -ból kiinduló élek között. Tegyük fel, hogy ez a szín a piros, és legyenek az A -ból kiinduló piros élek végpontjai B_1, B_2, \dots, B_{11} (amennyiben 11-nél több piros él indulna ki A -ból, akkor elég közülük tetszőleges 11 rögzített élt vizsgálunk). A feltételek miatt ekkor a B_1, B_2, \dots, B_{11} pontok közötti élek is piros színűek (hiszen például az AB_1B_2 háromszögben az AB_1 és az AB_2 élek pirosak, így a B_1B_2 élnek is pirosnak kell lennie), vagyis az $A, B_1, B_2, \dots, B_{11}$ pontok a piros színű élekre nézve egy 12 pontú teljes részgráfot alkotnak.

Tudjuk, hogy A -ból indul ki nem piros él is (ellenkező esetben a G gráf összes éle piros lenne, ami nem lehetséges). Tegyük fel, hogy C olyan csúcs, amelyre az AC él nem piros, hanem például kék. Ekkor az $AB_1C, AB_2C, \dots, AB_{11}C$ háromszögek mindegyikének van egy piros és egy kék oldala, emiatt a harmadik oldaluk nem lehet se piros, se kék. Tehát a $B_1C, B_2C, \dots, B_{11}C$ élek se nem pirosak, se nem kékek. Állítjuk, hogy a $B_1C, B_2C, \dots, B_{11}C$ élek színe egymástól is különböző. Valóban, ha például B_1C és B_2C azonos színű (mondjuk zöld) lenne, akkor a B_1B_2C háromszögnek két zöld és egy piros éle lenne, ami nem lehetséges. Tehát a $B_1C, B_2C, \dots, B_{11}C$ élek mind különböző színűek, ez 11 olyan különböző színt jelent, amelyek a pirostól és a kéktől is különböznek. De ekkor a gráf éleinek színezéséhez már legalább 13 színt használtunk volna, ami nem lehetsé-

ges. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $n \geq 122$ esetén nem létezik a kívánt színezés, vagyis a városok száma nem lehet több 121-nél.

Megjegyzés: Felsőbb matematikai eszközökkel (például az úgynevezett 11 elemű véges testben számolva) adható megfelelő színezés $n = 121$ esetén, vagyis a városok száma lehet 121.