

# 1. Halmazok, számhalmazok, alapműveletek

## I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Határozza meg az  $(A \cap B) \setminus C$  halmaz elemszámát, ha  $A$  tartalmazza az összes 19-nél kisebb természetes számot, továbbá  $B$  a prímszámok halmaza és  $C$  a páros számok halmaza!

(A) 10

(B) 9

(C) 8

(D) 7

(E) 6

BME 2015.december 14. (14B)

### Megoldás:

Az  $A \cap B$  halmaz azokat a természetes számokat tartalmazza, amelyek 19-nél kisebbek és prímszámok, tehát  $A \cap B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$ . Ha ebből a halmazból a 2-t, mint páros számot elhagyjuk, akkor megkapjuk az  $(A \cap B) \setminus C = \{3; 5; 7; 11; 13; 17\}$  halmazt, aminek 6 eleme van.

A jó válasz az (E).

2. Egy matematika versenyen három feladatot tűztek ki. Az első feladatot a résztvevők 85 százaléka oldotta meg, a másodikat 80, a harmadikat pedig 75 százaléka. Állapítsuk meg, hogy a versenyzőknek legalább hány százaléka oldotta meg mind a három feladatot!

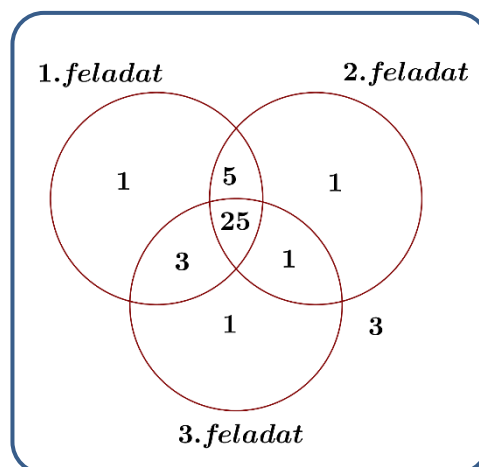
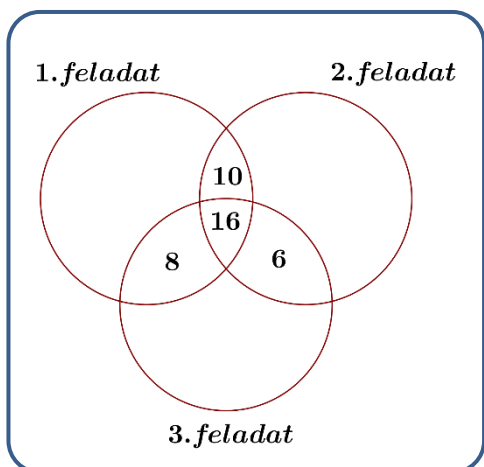
ELTE 2010. szeptember (matematika és fizika BSc)

### Megoldás:

$85\% + 80\% + 75\% = 240\%$ . Ebben mindenkit annyiszor számoltunk, ahány feladatot megoldott. Ha mindenki két feladattal foglalkozott volna sikeresen, akkor 200%-ot kaptunk volna. Ez azt jelenti, hogy a versenyzőknek legalább a 40%-a mind a három feladatot megoldotta.

### Megjegyzés:

A bal oldali ábra mutatja, hogy ez az eredmény például egy 40 fős osztályban hogyan valósulhat meg. Ha van olyan versenyző, aki egy feladatot oldott meg, vagy egyet sem, akkor a három feladatot megoldók aránya szükségszerűen nagyobb. Egy ilyen lehetséges esetet mutat a jobb oldali ábra:



3. Számítsa ki a következő kifejezés értékét:  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

(A)  $\frac{1}{2}$

(B)  $\frac{5}{12}$

(C)  $\frac{7}{12}$

(D)  $\frac{2}{3}$

(E)  $\frac{3}{4}$

BME 2013. február 15. (15A)

**Megoldás:**

A törtek közös nevezője 12. Közös nevezőre hozás után elvégezzük a műveleteket:

$$\frac{12}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

A jó válasz a (C).

4. Adjon meg két darab  $\frac{a}{b}$  alakú törtet, melyek biztosan  $\frac{4}{113}$  és  $\frac{5}{113}$  közé esnek (ahol  $a$  és  $b$  pozitív egészek)! Válaszát indokolja!

ELTE 2007. február (matematika BSc)

**Megoldás:**

Ha a törtet bővítjük, akkor a tört értéke nem változik. Mi most 5-tel bővítünk:

$$\frac{4}{113} = \frac{20}{565} \quad \frac{5}{113} = \frac{25}{565}$$

Így például megfelel a feladat feltételeinek az alábbi két tört:

$$\frac{22}{565} \quad \text{és} \quad \frac{23}{565}$$

5. Fényszűrő lemezeket raknak egymás mögé. Az első elnyeli a ráeső fényenergia 30%-át, a második a ráeső fényenergia 50%-át, a harmadik a ráeső fényenergia 20%-át. A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának hány százalékát nyeli el? Az eredményt kerekítsük egész százalékra!

(A) 3%

(B) 28%

(C) 72%

(D) 97%

(E) 100%

BME 2010. szeptember (16A)

**Megoldás:**

Az egyes fényszűrők az energia 70%-át, 50%, 80%-át engedik át. Ha  $E$  energiája van az eredeti fénysugárnak, akkor az első fényszűrő lemezen áthaladva az energia  $E \cdot 0,7$  lesz. Ez érkezik a második fényszűrőre, tehát ezen áthaladva  $E \cdot 0,7 \cdot 0,5$  energia megy tovább. A harmadik szűrő után  $E \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0,28 \cdot E$  energia halad tovább. Ez az eredeti érték 28%-a, tehát a három lemez együtt az energia 72%-át nyeli el.

A jó válasz a (C).

## II. Ismételjünk!

1. Halmazok, számhalmazok, műveletek halmazokkal

[https://users.itk.ppke.hu/itk\\_dekani/files/matematika/pdfs/01.pdf](https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/01.pdf)

1-4. oldal

2. Műveletek elvégzése különböző számhalmazokban
3. Arányos következtetések, százalékszámítás
4. Számegyenes, koordináta-rendszer használata

### III. Gyakorló feladatok

1. Legyen  $U = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x \leq 20\}$  az alaphalmaz,  $A = \{x \in U | x \text{ osztható } 5 - \text{tel}\}$ ;  $B = \{x \in U | |x - 12| = 3\}$ . Az elemek felsorolásával adja meg az alábbi halmazokat:

a)  $A \cup B$

b)  $A \cap B$

c)  $A \setminus B$

d)  $\bar{A}$

e)  $A \cap \bar{B}$

f)  $\overline{A \cup B}$

2. Hány olyan részhalmaza van az  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  halmaznak, amely tartalmazza a 6-os számot?
3. Egy 12 fős társaságban 8-an szeretik a csokifagyaltot, 7-en az epret és 5-en a vaníliát. Négy ember mindhárom fagyaltot szereti, a társaság egy tagja viszont egyáltalán nem szereti a fagyaltot. Hányan szeretnek pontosan kétfajta fagyaltot a csoki, az eper és a vanília közül?
4. Hány igaz állítás van az alábbi mondatok között?

a) A nulla nem természetes szám.

b) Van nullánál kisebb egész szám.

c) A  $-17$  racionális szám.

d) A  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$  irracionális szám.

e) A  $7 + \sqrt{2}$  racionális szám.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 5

5. Felírtuk a  $\frac{4}{7}$  tizedes tört alakját. Milyen számjegy áll a tizedes vessző után a 2018. helyen?

(A) 0

(B) 1

(C) 5

(D) 7

(E) 8

6.  $x = 13$ ;  $y = -36$ . Adja meg a következő kifejezések értékét!

$$-x ; |x + y| ; -(x - y); x + |y|$$

7. Számítsa ki! Vigyázzon a műveletek elvégzésének a sorrendjére!

a)  $-35 + (-7) \cdot 4$

b)  $36 : (-9) + (+9) \cdot 2$

c)  $21 : 7 - 15 \cdot (-74 + 54)$

d)  $(-64) : (-8) - (49 - (-11))$

e)  $(34 - 27 - 21) : (-7) \cdot 15 + (-14) : 2$

f)  $(-16) \cdot (46 - 48) : 8 + (-27) - 31 \cdot (-3)$

8. Milyen számjegyre végződik a  $2016122 \cdot 2017124 \cdot 2018126$  szorzat?

9. Írja fel a

a)  $4312_5$  számot tízes számrendszerben!

b)  $857$  tízes alapú számrendszerben magadott számot 6-os alapú számrendszerben!

10. Milyen alapú számrendszerben lesz a 2-es alapú számrendszerben felírt  $1011011$  szám alakja  $160$ ?

11. Adja meg a törtek értékét % alakban!

a)  $\frac{3}{5}$

b)  $\frac{17}{20}$

c)  $\frac{15}{8}$

d)  $\frac{2}{3}$

12. Adja meg az alábbi százalékokat egyszerűsített törtrész alakban!

a) 25%

b) 48%

c) 130%

d) 375%

13. Egy árú árát tavasszal 25%-al emelték, majd nyáron 10%-al csökkentették. Most 6300 Ft-ba kerül. Mennyi volt az eredeti ára? Ennek hány százaléka a nyári akciós ár?

14. Egy üzem kétféle minőségű terméket gyárt. Az I. osztályú termék gyártásából származik a bevétel 80%-a. Hogyan változik az üzem bevétele, ha az I. osztályú termék termelését 20%-kal növelik, a II. osztályú termék termelését 20%-kal csökkentik?

(A) 12%-kal nő    (B) 16%-kal nő    (C) 24%-kal nő    (D) 60%-kal nő    (E) nem változik

BME 2011. február 14. (18A)

15. Végezze el a műveleteket!

a)  $\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

b)  $\frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{2}{3}$

c)  $\frac{8}{5} : 4 - \frac{7}{15} + 1\frac{2}{3}$

d)  $\left(4\frac{3}{7} - \frac{5}{3}\right) \cdot 6 - \frac{11}{7}$

e)  $6\frac{1}{3} + \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right)$

f)  $\frac{5}{7} \cdot \left(-\frac{21}{25}\right) + \frac{8}{3} : 4 - \frac{2}{5} : 3$

g)  $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right)$

h)  $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{9}{10} + \frac{4}{15}\right)$

16. Határozza meg az emeletes törtek értékét!

a)  $\frac{\frac{2}{13}}{5}$

b)  $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{4}{21}}$

c)  $\frac{2 + \frac{3}{5}}{1 + \frac{2}{3}}$

d)  $\frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{5}}}$

17. Adja meg intervallumjelöléssel a számegeyeneseken jelölt halmazokat!

a)



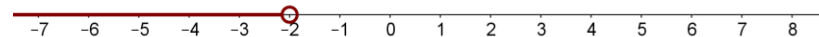
b)



c)



d)



e)



18. Ábrázolja számszerűen az alábbi halmazokat!

a)  $[-4; 1] \cup [-2; 3[$

b)  $]3; 7[ \cap [0; 5]$

c)  $[-6; 4[ \setminus ]1; 7]$

d)  $[-2; 6] \setminus ]1; 4[$

19. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok az  $(x; y)$  pontok, amelyekre az alábbi feltételek teljesülnek?

a)  $|x| = 7$

b)  $|y + 5| = 4$

Melyek azok a pontok a koordináta-rendszerben, amelyekre mindkét feltétel egyszerre teljesül?

20. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok az  $(x; y)$  pontok, amelyekre teljesül az alábbi két feltétel?

a)  $-x + 2y < 8$

b)  $y \geq |x + 4| - 2$

## IV. Megoldások:

1. Legyen  $U = \{x \in \mathbb{N} | 5 \leq x \leq 20\}$  az alaphalmaz,  $A = \{x \in U | x \text{ osztható } 5 - \text{tel}\}$ ;  $B = \{x \in U | |x - 12| = 3\}$ . Az elemek felsorolásával adja meg az alábbi halmazokat:

- |               |                     |                          |
|---------------|---------------------|--------------------------|
| a) $A \cup B$ | b) $A \cap B$       | c) $A \setminus B$       |
| d) $\bar{A}$  | e) $A \cap \bar{B}$ | f) $\overline{A \cup B}$ |

### Megoldás:

$$A = \{5; 10; 15; 20\}, B = \{9; 15\}.$$

- |  |
|--|
| a) $A \cup B = \{5; 9; 10; 15; 20\}$   |
| b) $A \cap B = \{15\}$   |
| c) $A \setminus B = \{5; 10; 20\}$   |
| d) $\bar{A} = \{6; 7; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 16; 17; 18; 19\}$  |
| e) $\bar{B} = \{5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 13; 14; 16; 17; 18; 19; 20\}$ , ezért $A \cap \bar{B} = \{5; 10; 20\}$ |
| f) $\overline{A \cup B} = \{6; 7; 8; 11; 12; 13; 14; 16; 17; 18; 19\}$ felhasználva az a) választ.             |
2. Hány olyan részhalmaza van az  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  halmaznak, amely tartalmazza a 6-os számot?

### Megoldás:

Amikor egy részhalmazt készítünk, akkor az 1, 2, 3, 4, 5 számok esetében két lehetőségünk van, vagy beletesszük a részhalmazba, vagy nem. A 6-os számot pedig mindenképpen beletesszük a részhalmazba. A választásainkat egymástól függetlenül végezzük, ezért  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$  esetet kapunk.

Tehát 32 olyan részhalmaz van, amelyik tartalmazza a 6-ost.

3. Egy 12 fős társaságban 8-an szeretik a csokifagyaltot, 7-en az epret és 5-en a vaníliát. Négy ember mindhárom fagyaltot szereti, a társaság egy tagja viszont egyáltalán nem szereti a fagyaltot. Hányan szeretnek pontosan kétfajta fagyaltot a csoki, az eper és a vanília közül?

### Megoldás:

11 ember szereti legalább az egyik fagyaltot.  $8 + 7 + 5 = 20$ , a 9 többlet az a kétféle fagyaltot kedvelők eggyel, a hármatot szeretők pedig kétfélével járultak hozzá. Így  $9 - 4 \cdot 2 = 1$  ember szeret pontosan kétféle fagyaltot a társaság tagjai közül.

4. Hány igaz állítás van az alábbi mondatok között?

- a) A nulla nem természetes szám.
- b) Van nullánál kisebb egész szám.
- c) A  $-17$  racionális szám.
- d) A  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$  irracionális szám.
- e) A  $7 + \sqrt{2}$  racionális szám.

(A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 5

**Megoldás:**

- a) Hamis, mert a nulla természetes szám.
- b) Igaz, például  $-3$  nullánál kisebb egész szám.
- c) Igaz.  $-17 = \frac{-17}{1}$ , felírható két egész szám hányadosaként, ahogy minden egész szám, tehát racionális szám.
- d) Hamis.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ , tehát racionális szám.
- e) Hamis. Ha  $7 + \sqrt{2}$  racionális lenne, akkor  $(7 + \sqrt{2}) - 7 = \sqrt{2}$  is racionális lenne, de tudjuk, hogy  $\sqrt{2}$  irracionális.

Az állítások között két igaz van, tehát (C) a helyes választás.

5. Felírtuk a  $\frac{4}{7}$  tizedes tört alakját. Milyen számjegy áll a tizedes vessző után a 2018. helyen?

(A) 0                      (B) 1                      (C) 5                      (D) 7                      (E) 8

**Megoldás:**

$\frac{4}{7} = 0,571428571 \dots = 0,5\dot{7}1428$ , végtelen szakaszos tizedes tört, hat számjegy ismétlődik.  $2018 = 336 \cdot 6 + 2$ , ezért a 2018-adik számjegy egy hatos periódus második jegye, azaz 7.

A jó válasz a (D).

6.  $x = 13$ ;  $y = -36$ . Adja meg a következő kifejezések értékét!

$$-x ; |x + y| ; -(x - y); x + |y|$$

**Megoldás:**

$$-x = -13$$

$$|x + y| = |13 + (-36)| = |-23| = 23$$

$$-(x - y) = -(13 - (-36)) = -(13 + 36) = -49$$

$$x + |y| = 13 + |-36| = 13 + 36 = 49$$

7. Számítsa ki! Vigyázzon a műveletek elvégzésének a sorrendjére!

- a)  $-35 + (-7) \cdot 4$
- b)  $36 : (-9) + (+9) \cdot 2$
- c)  $21 : 7 - 15 \cdot (-74 + 54)$
- d)  $(-64) : (-8) - (49 - (-11))$
- e)  $(34 - 27 - 21) : (-7) \cdot 15 + (-14) : 2$
- f)  $(-16) \cdot (46 - 48) : 8 + (-27) - 31 \cdot (-3)$



**Megoldás:**

Először a zárójelben lévő műveleteket végezzük el, ezt követi a szorzások és osztások elvégzése balról jobbra haladva, végül az összeadásokat és kivonásokat végezzük el szintén balról jobbra haladva. Figyeljünk az előjelszabályokra is.

$$a) \quad -35 + (-7) \cdot 4 = -35 - 28 = -63$$

$$b) \quad 36 : (-9) + (+9) \cdot 2 = -4 + 18 = 14$$

$$c) \quad 21 : 7 - 15 \cdot (-74 + 54) = 3 - 15 \cdot (-20) = 3 + 300 = 303$$

$$d) \quad (-64) : (-8) - (49 - (-11)) = 8 - (49 + 11) = 8 - 60 = -52$$

$$e) \quad (34 - 27 - 21) : (-7) \cdot 15 + (-14) : 2 = (-14) : (-7) \cdot 15 + (-7) = \\ = 2 \cdot 15 - 7 = 23$$

$$f) \quad (-16) \cdot (46 - 48) : 8 + (-27) - 31 \cdot (-3) = (-16) \cdot (-2) : 8 - 27 + 93 = \\ = 32 : 8 - 27 + 93 = 4 - 27 + 93 = 70$$

8. Milyen számjegyre végződik a  $2016122 \cdot 2017124 \cdot 2018126$  szorzat?

**Megoldás:**

A szorzat végződése csak a végződések szorzatától függ.  $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ , tehát a szorzat 8-ra végződik.

9. Írja fel a

a)  $4312_5$  számot tízes számrendszerben!

b)  $857$  tízes alapú számrendszerben magadott számot 6-os alapú számrendszerben!

**Megoldás:**

a) Az 5-ös alapú számrendszerben az  $1; 5; 5^2 = 25; 5^3 = 125 \dots$  helyiértékeket használjuk, ezért:

$$4312_5 = 4 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 582_{10}$$

b) Az 6-os alapú számrendszerben az  $1; 6; 6^2 = 36; 6^3 = 216 \dots$  helyiértékeket használjuk.

$$857 = 3 \cdot 216 + 209$$

$$209 = 5 \cdot 36 + 29$$

$$29 = 4 \cdot 6 + 5$$

Tehát:

$$857 = 3 \cdot 216 + 5 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 5 = 3545_6.$$

10. Milyen alapú számrendszerben lesz a 2-es alapú számrendszerben felírt  $1011011_2$  szám alakja 160?

**Megoldás:**

$$1011011_2 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91_{10}.$$

Ha a keresett alapszámot  $x$ -el jelöljük:  $160_x = x^2 + 6x = 91$ .

$$x^2 + 6x - 91 = 0.$$

A másodfokú egyenlet két gyöke: 7 és  $-13$ . Számunkra csak a pozitív megoldás megfelelő. Így 7-es számrendszerben teljesül a feladat feltétele.

11. Adja meg a törtek értékét % alakban!

a)  $\frac{3}{5}$

b)  $\frac{17}{20}$

c)  $\frac{15}{8}$

d)  $\frac{2}{3}$

**Megoldás:**

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01. \text{ Ennek alapján:}$$

a)  $\frac{3}{5} = 0,60 = 60\%$

b)  $\frac{17}{20} = \frac{85}{100} = 85\%$

c)  $\frac{15}{8} = 1,875 = 187,5\%$

d)  $\frac{2}{3} = 0,6 \approx 67\%$

12. Adja meg az alábbi százalékokat egyszerűsített tört rész alakban!

a) 25%

b) 48%

c) 130%

d) 37,5%

**Megoldás:**

a)  $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b)  $48\% = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$

c)  $130\% = \frac{130}{100} = \frac{13}{10}$

d)  $37,5\% = \frac{37,5}{100} = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$

13. Egy árú árát tavasszal 25%-al emelték, majd nyáron 10%-al csökkentették. Most 6300 Ft-ba kerül. Mennyi volt az eredeti ára? Ennek hány százaléka a nyári akciós ár?

**Megoldás I:**

Ha az árát 25%-al emelték, akkor az új ár az eredetinek a 125%-a, 1,25 szorososa lesz. Ha az ár 10%-al csökken, akkor az új ár 90% lesz, tehát 0,9 szoros.

Ha az eredeti ár  $x$  Ft, akkor:

$$x \cdot 1,25 \cdot 0,9 = 6300$$

$$x \cdot 1,125 = 6300$$

$$x = 6300 : 1,125 = 5600$$

$$6300 : 5600 = 1,125 = 112,5\%$$

Az eredeti ár 5600 Ft. A nyári akciós ár ennek a 112,5%-a.

**Megoldás II:**

Az eredeti árat megadhatjuk következtetéssel is:

$$90\% \quad 6300 \text{ Ft} \Rightarrow 10\% \quad 700 \text{ Ft} \Rightarrow 100\% \quad 7000 \text{ Ft}$$

A tavaszi áremelés után 7000 Ft-ba került az árú.

$$125\% \quad 7000 \text{ Ft} \Rightarrow 25\% \quad 7000:5 = 1400 \text{ Ft} \Rightarrow 100\% \quad 1400 \cdot 4 = 5600 \text{ Ft}$$

Tehát az eredeti ár 5600 Ft.

700 Ft-al, az ár  $1/8$ -ával nagyobb a nyári ár. Ez 12,5%, így az akciós ár 112,5%-a az eredeti árnak.

14. Egy üzem kétféle minőségű terméket gyárt. Az I. osztályú termék gyártásából származik a bevétel 80%-a. Hogyan változik az üzem bevétele, ha az I. osztályú termék termelését 20%-kal növelik, a II. osztályú termék termelését 20%-kal csökkentik?

- (A) 12%-al nő      (B) 16%-al nő      (C) 24%-al nő      (D) 60%-al nő      (E) nem változik

BME 2011. február 14. (18A)

**Megoldás:**

Legyen a bevétel  $x$ . Ekkor az I. osztályú termék gyártásából származó bevétel  $0,8x$ , a II. osztályú termék gyártásából származó  $0,2x$ .

Az I. osztályú termék gyártása 20%-kal nő, a bevétel ebből  $1,2 \cdot 0,8x = 0,96x$  lesz.

A II. osztályú termék gyártása 20%-kal csökken, a bevétel ebből  $0,8 \cdot 0,2x = 0,16x$  lesz.

Az összes bevétel ekkor  $0,96x + 0,16x = 1,12x$ . Ez azt jelenti, hogy  $0,12x$ -el több, tehát 12%-al nő a bevétel.

A jó válasz (A).

15. Végezze el a műveleteket!

a)  $\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

c)  $\frac{8}{5} : 4 - \frac{7}{15} + 1\frac{2}{3}$

e)  $6\frac{1}{3} + \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right)$

g)  $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right)$

b)  $\frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{2}{3}$

d)  $\left(4\frac{3}{7} - \frac{5}{3}\right) \cdot 6 - \frac{11}{7}$

f)  $\frac{5}{7} \cdot \left(-\frac{21}{25}\right) + \frac{8}{3} : 4 - \frac{2}{5} : 3$

h)  $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{9}{10} + \frac{4}{15}\right)$

**Megoldás:**

a)  $\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{24+15-20}{30} = \frac{19}{30}$

b)  $\frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{2}{3} = 1\frac{1}{4} + 2 = 3\frac{1}{4}$

c)  $\frac{8}{5} : 4 - \frac{7}{15} + 1\frac{2}{3} = \frac{2}{5} - \frac{7}{15} + 1\frac{2}{3} = \frac{6}{15} - \frac{7}{15} + 1\frac{10}{15} = 1\frac{9}{15} = 1\frac{3}{5}$

d)  $\left(4\frac{3}{7} - \frac{5}{3}\right) \cdot 6 - \frac{11}{7} = \left(4\frac{9}{21} - \frac{35}{21}\right) \cdot 6 - \frac{11}{7} = \left(\frac{93}{21} - \frac{35}{21}\right) \cdot 6 - \frac{11}{7} = \frac{58}{21} \cdot 6 - \frac{11}{7} =$   
 $= \frac{58}{7} \cdot 2 - \frac{11}{7} = \frac{116 - 11}{7} = \frac{105}{7} = 15$

$$e) 6\frac{1}{3} + \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 6\frac{11}{3} + \frac{7}{3} = 6\frac{18}{3} = 12$$

$$f) \frac{5}{7} \cdot \left(-\frac{21}{25}\right) + \frac{8}{3} : 4 - \frac{2}{5} : 3 = \frac{1}{1} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2}{3} - \frac{2}{15} = -\frac{9}{15} + \frac{10}{15} - \frac{2}{15} = -\frac{1}{15}$$

$$g) \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right) = \frac{3+2}{4} \cdot \frac{7-10}{12} = \frac{5}{4} \cdot \frac{-3}{12} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16}$$

$$h) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{9}{10} + \frac{4}{15}\right) = \frac{4-3}{6} : \frac{27+8}{30} = \frac{1}{6} : \frac{35}{30} = \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

16. Határozza meg az emeletes törtek értékét!

a)  $\frac{\frac{2}{13}}{5}$

b)  $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{4}{21}}$

c)  $\frac{2+\frac{3}{5}}{1+\frac{2}{3}}$

d)  $\frac{1}{1+\frac{\frac{2}{2}}{1+\frac{2}{5}}}$

**Megoldás:**

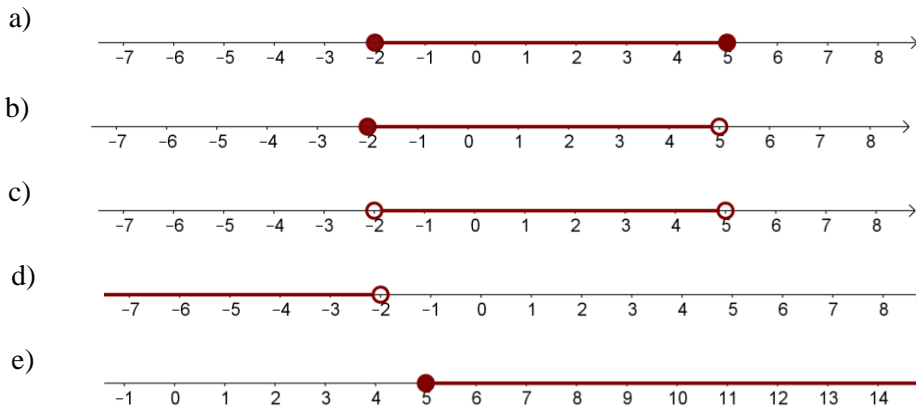
a)  $\frac{\frac{2}{13}}{5} = \frac{2}{13 \cdot 5} = \frac{2}{65}$

b)  $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{4}{21}} = \frac{6}{7} \cdot \frac{21}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

c)  $\frac{2+\frac{3}{5}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{5}{3}} = \frac{13}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{39}{25} = 1\frac{14}{25}$

d)  $\frac{1}{1+\frac{\frac{2}{2}}{1+\frac{2}{5}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{7}} = \frac{1}{1+2\frac{5}{7}} = \frac{1}{1+\frac{10}{7}} = \frac{1}{\frac{17}{7}} = \frac{7}{17}$

17. Adja meg intervallumjelöléssel a számegegyeneseken jelölt halmazokat!



**Megoldás:**

a)  $[-2; 5]$

b)  $[-2; 5[$

c)  $] -2; 5[$

d)  $] -\infty; -2[$

e)  $[5; \infty[$

**Megjegyzés:**

A  $[-2; 5[$  jelölést így olvassuk ki: "balról zárt, jobbról nyitott mínusz kettő öt intervallum."

18. Ábrázolja számegyenesen az alábbi halmazokat!

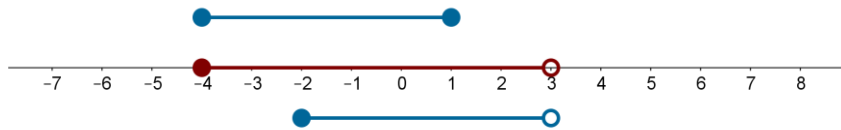
- a)  $[-4; 1] \cup [-2; 3[$   
 c)  $[-6; 4[\setminus]1; 7]$

- b)  $]3; 7[ \cap [0; 5]$   
 d)  $[-2; 6[\setminus]1; 4[$

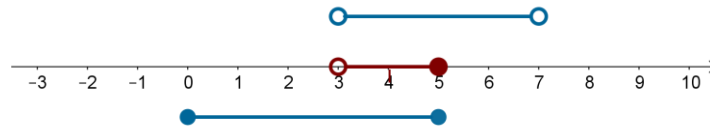
**Megoldás:**

- a) Ha  $x \in [-4; 1] \cup [-2; 3[$ , akkor  $-4 \leq x \leq 1$  vagy  $-2 \leq x < 3$ , tehát  $-4 \leq x < 3$ . Ezért :  
 $[-4; 1] \cup [-2; 3[ = [-4; 3[$ .

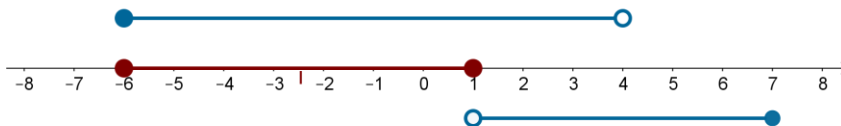
Az ábrán a számegyenes felett és alatt a kiindulási intervallumokat, a számegyenesen pedig a megoldást láthatjuk:



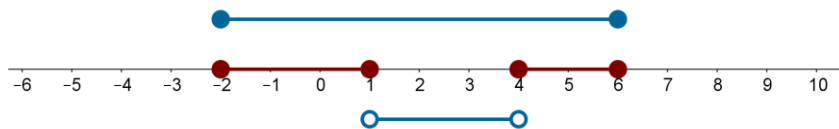
- b) Ha  $x \in ]3; 7[ \cap [0; 5]$ , akkor  $3 < x < 7$  és  $0 \leq x \leq 5$ , azaz  $3 < x \leq 5$ , így:  
 $]3; 7[ \cap [0; 5] = ]3; 5]$ .



- c) Ha  $x \in [-6; 4[\setminus]1; 7]$ , akkor  $-6 \leq x < 4$  és  $(x \leq 1$  vagy  $x > 7)$ , így  $-6 \leq x \leq 1$ :  
 $[-6; 4[\setminus]1; 7] = [-6; 1]$



- d) Hasonlóan gondolkodva, ha  $x \in [-2; 6[\setminus]1; 4[$ , akkor  $x$  az első intervallumnak eleme, de másodiknak nem. A halmazművelet eredménye két különálló intervallum lesz, ahogyan az ábra mutatja. (Két intervallum uniója:  $[-2; 1] \cup [4; 6[$ ):



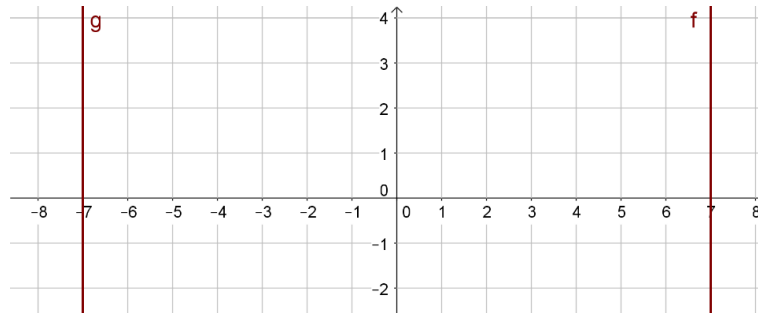
19. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok az  $(x; y)$  pontok, amelyekre az alábbi feltételek teljesülnek:

- a)  $|x| = 7$   
 b)  $|y + 1| = 4$

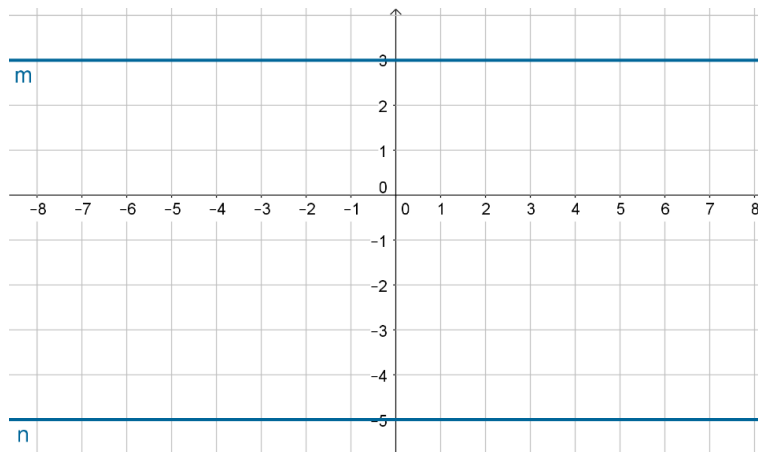
Melyek azok a pontok a koordináta-rendszerben, amelyekre mindkét feltétel egyszerre teljesül?

**Megoldás:**

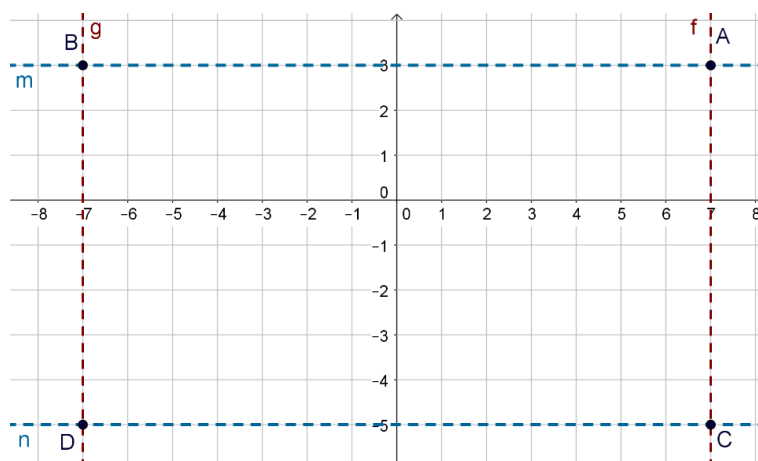
- a) Ha  $|x| = 7$ , akkor  $x = 7$  vagy  $-7$ .  $y$  pedig tetszőleges valós szám lehet. Ezek a pontok két, az  $y$ -tengellyel párhuzamos egyenesen vannak ( $f$  és  $g$ ):



- b) Ha  $|y + 1| = 4$ , akkor  $y + 1 = \pm 4$ , tehát  $y = 3$  vagy  $y = -5$ , és most  $x$  választható a valós számok közül tetszőlegesen. A keresett pontok az  $x$ -tengellyel párhuzamos egyeneseken vannak ( $m$  és  $n$ ):



Mindkét feltétel azokra a pontokra teljesül, amelyek az egyenesek metszéspontjaiban vannak:



$$A(7; 3); B(-7; 3); C(7; -5); D(-7; -5).$$

20. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok az  $(x; y)$  pontok, amelyekre teljesül az alábbi két feltétel:

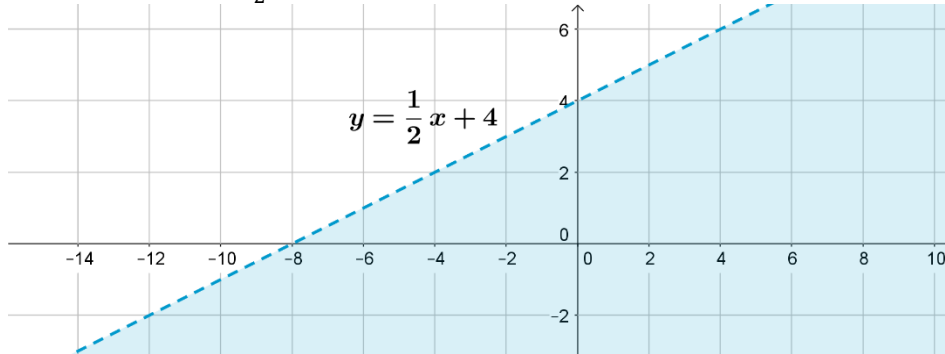
- a)  $-x + 2y < 8$   
b)  $y \geq |x + 4| - 2$

**Megoldás:**

- a) Az egyenlőtlenségből fejezzük ki  $y$ -t:

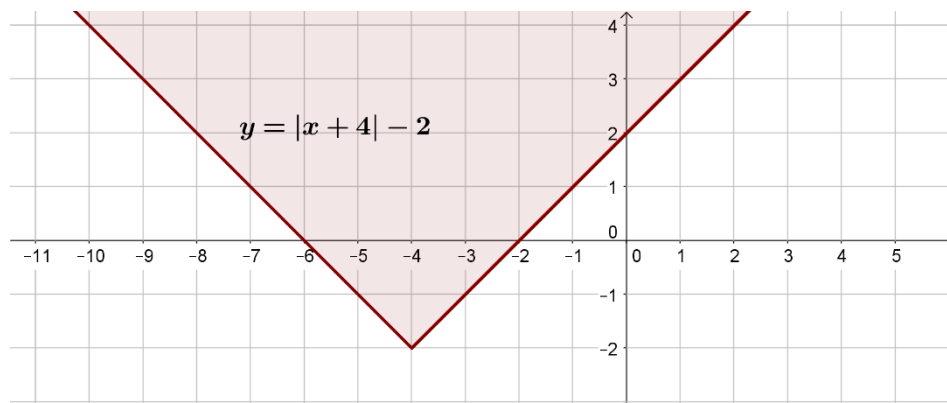
$$y < \frac{1}{2}x + 4$$

Ábrázoljuk az  $y = \frac{1}{2}x + 4$  egyenest. A fenti egyenlőtlenséget azoknak a pontoknak a



koordinátái teljesítik, amelyek az egyenes alatt helyezkednek el (az egyenes pontjai nem).

- b) Ábrázoljuk az  $y = |x + 4| - 2$  függvényt (ha pontosan fogalmazunk  $x \mapsto |x + 4| - 2$  függvényt.) Ha  $y \geq |x + 4| - 2$ , akkor a grafikonon és a felette elhelyezkedő pontok felelnek meg a feltételnek:



Ha a két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, akkor a két halmaz közös részét, metszetét keressük. Egy háromszög alakú területet kapunk. Az üres karikával jelölt pontok és a szaggatott vonallal jelölt oldal nem tartozik hozzá a keresett tartományhoz.

