2. Algebrai átalakítások

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Mi az alábbi kifejezés legegyszerűbb alakja a változó lehetséges értékei esetén?

$$\frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{(1-x^2)(x+2)}$$

$(A)\ \dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad (B)\ 1$ $\quad (C)\ 2$ $\quad (D)\ \dfrac{x+1}{x+2}$ $\quad (E) -1$

BME 2015. december 14. (14A)

Megoldás:

A megoldások során alkalmazzuk a nevezetes azonosságokat és a szorzattá alakítás különböző lehetőségeit.

Szorzattá alakítás típusai: kiemelés, csoportosítva kiemelés, gyöktényezős alak, nevezetes azonosságok alkalmazása.

A másodfokú kifejezést szorzattá tudjuk bontani a gyöktényezős alak segítségével:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad ha\ létezik\ x_1; x_2$$

vagyis $\qquad x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

nevezetes azonosságot használva:

$$1-x^2=(1-x)(1+x)$$

a szorzatok beírása után (a megfelelő kikötés mellett) egyszerűsíthetünk:

$$\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(1-x)(1+x)(x+2)}=\frac{x-1}{1-x}=-1; \ \ |x|\neq 1; x\neq -2$$

Tehát a jó válasz az (E).

2. Ha $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}$, akkor $\dfrac{2x+y}{6x-y}$ értéke:

$(A)\ \dfrac{1}{3}$ $\quad (B)\ \dfrac{5}{3}$ $\quad (C)\ 0$ $\quad (D)\ 3$

ELTE 2014. októberi teszt

Megoldás:

$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ egyenletből kifejezhetjük az y-et; $y = 3x$; ezt behelyettesítjük:

$$\frac{2x + 3x}{6x - 3x} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

Megjegyzés: x-szel egyszerűsíthetünk, mert az $x = 0$ nem lehet megoldás.

Tehát a jó válasz a (B).

3. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést (tételezzük fel, hogy a kifejezés értelmezhető)!

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} =$$

$(A)\ 0$ $(B)\ \frac{x}{1-x}$ $(C)\ \frac{x}{2x-1}$ $(D)\ \frac{2x}{x-1}$ (E) ezek egyike sem

BME 2011. február 14. (18A)

Megoldás:

Használjuk a törtekre vonatkozó műveleti szabályokat, és a „legalsó” törttel kezdjük az átalakítást: (közös nevező; törttel való osztás…)

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x-1}{x}}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{x-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{x - 1 + x}{x - 1}} =$$

$$= 1 - \frac{x-1}{2x-1} == \frac{2x - 1 - (x - 1)}{2x - 1} = \frac{x}{2x-1}$$

Tehát a jó válasz a (C).

4. Hozza egyszerűbb alakba a következő kifejezést! $(x \neq \pm 1)$

$$\left(\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{x + 1}{2x - 2}\right) \cdot \frac{4(x+1)(x-1)}{x^2 + 2x + 7} =$$

$(A) 1$ $(B)\ 2$ $(C)\ 2x^2 + 14$ $(D)\ \frac{2x^2 + 14}{x^2 + 2x + 7}$ (E) ezek egyike sem

BME 2014. december 15. (14A)

Megoldás:

Az első zárójelen belül hozzunk közös nevezőre és vonjunk össze:

$$\left(\frac{3 \cdot 2}{2(x-1)(x+1)} + \frac{(x+1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)}\right) \cdot \left(\frac{4(x+1)(x-1)}{x^2 + 2x + 7}\right) =$$

$$= \left(\frac{6 + x^2 + 2x + 1}{2(x-1)(x+1)}\right) \cdot \left(\frac{4(x+1)(x-1)}{x^2 + 2x + 7}\right) = \frac{x^2 + 2x + 7}{2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4(x+1)(x-1)}{x^2 + 2x + 7}$$

Egyszerűsítsünk $(x^2 + 2x + 7)$-tel és $(x-1)(x+1)$-gyel:

$$\frac{4}{2} = 2$$

Tehát a jó válasz a (B).

II. Ismételjünk!

1. Nevezetes azonosságok

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/03.pdf 2. oldal

2. Szorzattá alakítás

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/03.pdf 1-2. oldal

3. Algebrai törtek

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/03.pdf 3-4. oldal

III. Gyakorló feladatok

1. A zárójelek felbontásával alakítsuk át a következő algebrai kifejezéseket!

   a) $(a-3)^2$ b) $(5a+2b)^2$ c) $(2ab-3x^2)^2$ d) $\left(\frac{1}{2}a^3+\frac{2}{5}b^4\right)^2$

   e) $(a+2)^3$ f) $(b^2-4c)^3$ g) $\left(\frac{2}{3}a-3b\right)^3$ h) $(a-3b+2c)^2$

2. Egészítse ki a következő kifejezéseket, hogy kéttagú vagy háromtagú kifejezés négyzete legyen!

   a) $4x^2+y^2+\cdots$

   b) $x^4-20x^2y+\cdots$

   c) $\frac{1}{4}x^2+16+\cdots$

   d) $4x^2+9y^2+12xy-4xz+\cdots$

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

   a) $(4x-3y)(5x+2y)$ b) $(2x-4y)(2x+4y)$

   c) $\left(\frac{5}{3}x-3y^2\right)\left(\frac{5}{3}x+3y^2\right)$ d) $(3a+2b)(5a-4b)-(4a+3b)^2$

   e) $(2+a)(4-2a+a^2)$ f) $(b-1)(b^2+b+1)$

4. Alakítsuk szorzattá kiemeléssel a következő kifejezéseket!

   a) $a^5+a^4-a^2$

   b) $35x^5y^2z^n-5x^3y^3z^{n-1}-20x^4y^4z^{n-2}$

5. Alakítsuk szorzattá csoportosítással!

   a) $2x+2y+ax+ay$

   b) $x^4-x^3-x^2+x$

   c) $5(a-2)+a(2-a)$

6. Alakítsuk szorzattá a nevezetes azonosságok használatával!

   a) x^2-16 b) $4a^2-9b^2$

   c) $25c^2y^4-169$ d) $0{,}01x^2-0{,}25d^6$

e) a^2-6a+9 f) $9k^4+24k^2l+16l^2$

g) $8c^3+12c^2d+6cd^2+d^3$ h) $8a^3-b^3$

7. Alakítsuk szorzattá különböző módszerek segítségével!

a) $5a^2+10ad+5d^2$ b) $8x^2y^2-72a^2b^2$

c) e^2-d^2+e+d d) $x^2+2xy+y^2-xz-yz$

8. Alakítsuk szorzattá a gyöktényezős alak használatával!

a) a^2-a-12 b) $2x^2+14x+24$

9. Egyszerűsítsük a következő algebrai törteket a változók lehetséges értékei mellett!

$a)\ \frac{6x+6}{3x^2-3}$ $b)\ \frac{3a^2-18a+15}{a^2-3a+2}$ $c)\ \frac{y^3+2y^2-y-2}{y^2+y-2}$

10. Egyszerűsítse a következő kifejezést, ha $a>2b>0$!

$$\frac{a^3-8b^3}{a-2b}$$

$(A)(2a+b)^2$ $(B)\ (a-2b)^2$ $(C)\ a^2+4b^2$ $(D)\ a^2+2ab+4b^2$ $(E)\ 4(a^2+b^2)$

BME 2013. május 10. (16B)

11. Végezze el a törtek szorzását, osztását a változók lehetséges értékei mellett!

$a)\ \frac{4p^2-9q^2}{p^2q^2}:\frac{2np+3nq}{2pq}$ $b)\ \frac{x^2+xy}{5x^2-5y^2}:\frac{x^2-xy}{3x^3-3y^3}$ $c)\ \frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{5a+25}}\cdot\frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{2a-6}}$

12. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést! ($x\neq\pm1$)

$$(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}+2\right)$$

$(A)\ 2x^4-2x^2$ $(B)\ \frac{2x^4-2x^2}{x^2-2x+1}$ $(C)\ 2x^2$ $(D)\ x^2-1$ $(E)\ 0$

BME 2015. május 8. (16A)

13. Végezze el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

$a)\ \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}-\frac{c+d}{2c-2d}$ $b)\ \left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right):\left(\frac{4b^2-9a^2}{ab}\right)$

14. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{2-\frac{a}{3a+1}}{\frac{5a+2}{9a^2-1}},\qquad |a|\neq\frac{1}{3};\ a\neq-\frac{2}{5}$$

15. Mennyi a következő kifejezés értéke, ha $a = 2{,}5$ és $b = -1{,}5$?

$$\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} \cdot \frac{2a - 2b}{3a + 3b}, \qquad |a| \neq |b|$$

$(A)\ \frac{2}{3}$ $(B)\ \frac{3}{2}$ $(C)\ -\frac{5}{3}$ $(D)\ 1\frac{2}{3}$

16. Mutassuk meg, hogy ha két tört összege egyenlő eggyel, akkor a törtek különbsége egyenlő a négyzeteinek különbségével!

17. Mennyivel egyenlő az $x^2 + \frac{1}{x^2}$ kifejezés értéke, ha $x + \frac{1}{x} = 14$?

$(A)\ 190$ $(B)\ 192$ $(C)\ 194$ $(D)\ 196$ $(E)\ 198$

BME 2015. február 13. (16A)

IV. Megoldások

A megoldások során alkalmazzuk a nevezetes azonosságokat, és a szorzattá alakítás különböző lehetőségeit.

Nevezetes azonosságok:

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2cb \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

Szorzattá alakítás típusai: kiemelés, csoportosítva kiemelés, gyöktényezős alak felírás, nevezetes azonosságok.

1. A zárójelek felbontásával alakítsuk át a következő algebrai kifejezéseket!

a) $(a-3)^2$ b) $(5a+2b)^2$ c) $(2ab-3x^2)^2$ d) $\left(\frac{1}{2}a^3 + \frac{2}{5}b^4\right)^2$

e) $(a+2)^3$ f) $(b^2-4c)^3$ g) $\left(\frac{2}{3}a - 3b\right)^3$ h) $(a-3b+2c)^2$

Megoldás:

a) $(a-3)^2 = a^2 - 6a + 9$

b) $(5a+2b)^2 = 25a^2 + 20ab + 4b^2$

c) $(2ab-3x^2)^2 = 4a^2b^2 - 12abx^2 + 9x^4$

d) $\left(\frac{1}{2}a^3 + \frac{2}{5}b^4\right)^2 = \frac{1}{4}a^6 + \frac{2}{5}a^3b^4 + \frac{4}{25}b^8$

e) $(a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

f) $(b^2-4c)^3 = b^6 - 12b^4c + 48b^2c^2 - 64c^3$

g) $\left(\frac{2}{3}a - 3b\right)^3 = \frac{8}{27}a^3 - 4a^2b + 18ab^2 - 27b^3$

h) $(a-3b+2c)^2 = a^2 + 9b^2 + 4c^2 - 6ab + 4ac - 12bc$

2. Egészítse ki a következő kifejezéseket, hogy kéttagú vagy háromtagú kifejezés négyzete legyen!

a) $4x^2 + y^2 + \cdots$

b) $x^4 - 20x^2y + \cdots$

c) $\frac{1}{4}x^2 + 16 + \cdots$

d) $4x^2 + 9y^2 + 12xy - 4xz + \cdots$

Megoldás:

a) 4xy, mert $(2x+y)^2 = 4x^2 + y^2 + 4xy$

b) $100y^2$, mert $(x^2 - 10y)^2 = x^4 - 20x^2y + 100y^2$

c) 4x, mert $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 16 + 4x$

d) $z^2 - 6yz$, mert $(2x + 3y - z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy - 4xz - 6yz$

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $(4x - 3y)(5x + 2y)$

b) $(2x - 4y)(2x + 4y)$

c) $\left(\frac{5}{3}x - 3y^2\right)\left(\frac{5}{3}x + 3y^2\right)$

d) $(3a + 2b)(5a - 4b) - (4a + 3b)^2$

e) $(2 + a)(4 - 2a + a^2)$

f) $(b - 1)(b^2 + b + 1)$

Megoldás:

a) Minden tagot minden taggal szorozzunk be, és utána végezzük el a lehetséges összevonásokat!

$(4x - 3y)(5x + 2y) = 20x^2 - 7xy - 6y^2$

b) Használjuk a következő nevezetes azonosságot: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(2x - 4y)(2x + 4y) = 4x^2 - 16y^2$

c) $\left(\frac{5}{3}x - 3y^2\right)\left(\frac{5}{3}x + 3y^2\right) = \frac{25}{9}x^2 - 9y^4$

d) $(3a + 2b)(5a - 4b) - (4a + 3b)^2 =$

$= 15a^2 - 12ab + 10ab - 8b^2 - (16a^2 + 24ab + 9b^2) =$

$= 15a^2 - 12ab + 10ab - 8b^2 - 16a^2 - 24ab - 9b^2 = -a^2 - 26ab - 17b^2$

e) $(2 + a)(4 - 2a + a^2) = 8 - 4a + 2a^2 + 4a - 2a^2 + a^3 = 8 + a^3$

Észrevehető, hogy itt az $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ azonosság jelenik meg.

f) $(b - 1)(b^2 + b + 1) = b^3 - 1$, mert ez pontosan az:

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ azonosság.

4. Alakítsuk szorzattá kiemeléssel a következő kifejezéseket!

a) $a^5 + a^4 - a^2$

b) $35x^5y^2z^n - 5x^3y^3z^{n-1} - 20x^4y^4z^{n-2}$

Megoldás:

a) $a^5 + a^4 - a^2 = a^2(a^3 + a^2 - 1)$

b) $35x^5y^2z^n - 5x^3y^3z^{n-1} - 20x^4y^4z^{n-2} = 5x^3y^2z^{n-2}(7x^2z^2 - yz - 4xy^2)$

5. Alakítsuk szorzattá csoportosítással!

a) $2x + 2y + ax + ay$

b) $x^4 - x^3 - x^2 + x$

c) $5(a - 2) + a(2 - a)$

Megoldás:

a) $2x + 2y + ax + ay = 2(x + y) + a(x + y) = (x + y)(2 + a)$

b) Először az első két tagból emeljük ki az x^3-t, majd a másik kettőből a $(-x)$-et.

Figyeljünk az előjelekre!

$$x^4 - x^3 - x^2 + x = x^3(x - 1) - x(x - 1) = (x - 1)(x^3 - x) = (x - 1)x(x^2 - 1)$$
$$= (x - 1)x(x - 1)(x + 1) = x(x - 1)^2(x + 1)$$

c) Az $(a - 2)$-nek a $(2 - a)$ az ellentettje, tehát:

$5(a - 2) + a(2 - a) = 5(a - 2) - a(a - 2) = (a - 2)(5 - a)$

6. Alakítsuk szorzattá a nevezetes azonosságok használatával!

a) $x^2 - 16$

b) $4a^2 - 9b^2$

c) $25c^2y^4 - 169$

d) $0{,}01x^2 - 0{,}25d^6$

e) $a^2 - 6a + 9$

f) $9k^4 + 24k^2l + 16l^2$

g) $8c^3 + 12c^2d + 6cd^2 + d^3$

h) $8a^3 - b^3$

Megoldás:

a) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

b) $4a^2 - 9b^2 = (2a - 3b)(2a + 3b)$

c) $25c^2y^4 - 169 = (5cy^2 - 13)(5cy^2 + 13)$

d) $0{,}01x^2 - 0{,}25d^6 = (0{,}1x - 0{,}5d^3)(0{,}1x + 0{,}5d^3)$

e) $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$

f) $9k^4 + 24k^2l + 16l^2 = (3k^2 + 4l)^2$

g) $8c^3 + 12c^2d + 6cd^2 + d^3 = (2c + d)^3$

h) $8a^3 - b^3 = (2a)^3 - b^3 = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$

7. Alakítsuk szorzattá a különböző módszerek segítségével!

a) $5a^2 + 10ad + 5d^2$

b) $8x^2y^2 - 72a^2b^2$

c) $e^2 - d^2 + e + d$

d) $x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz$

Megoldás:

a) Először emeljünk ki, majd alkalmazzuk az azonosságot:

$5a^2 + 10ad + 5d^2 = 5(a^2 + 2ad + d^2) = 5(a + d)^2$

b) $8x^2y^2 - 72a^2b^2 = 8(x^2y^2 - 9a^2b^2) = 8(xy - 3ab)(xy + 3ab)$

c) Alkalmazzuk az azonosságot és utána emeljünk ki:

$e^2 - d^2 + e + d = (e - d)(e + d) + e + d = (e + d)(e - d + 1)$

d) Alkalmazzuk az első három tagra az azonosságot, és az utolsó két tagból emeljünk ki $(-z)$-t:

$$x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz = (x + y)^2 - z(x + y)$$

emeljük ki a $(x + y)$-t:

$$(x+y)^2 - z(x+y) = (x+y)(x+y-z)$$

8. Alakítsuk szorzattá a gyöktényezős alak használatával!

   a) $a^2 - a - 12$ b) $2x^2 + 14x + 24$

Megoldás:

a) Először keressük meg a másodfokú egyenlet megoldóképletének a segítségével a gyököket!

$$a^2 - a - 12 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-48)}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2},$$

innen $a_1 = 4 \quad \acute{e}s \quad a_2 = -3$

Tehát $a^2 - a - 12 = (a-4)(a+3)$

b) Ugyanezt a módszert alkalmazzuk, ne felejtkezzünk el a főegyütthatóról!

$$2x^2 + 14x + 24 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 192}}{4} = \frac{-14 \pm 2}{4},$$

innen: $x_1 = -3$ $\acute{e}s$ $x_2 = -4$

Tehát: $2x^2 + 14x + 24 = 2(x+3)(x+4)$

9. Egyszerűsítsük a következő algebrai törteket a változók lehetséges értékei mellett!

   $a)\ \frac{6x+6}{3x^2-3}$ $b)\ \frac{3a^2-18a+15}{a^2-3a+2}$ $c)\ \frac{y^3+2y^2-y-2}{y^2+y-2}$

Megoldás:

a) Először az értelmezési tartományt kell megvizsgálni: $3x^2 - 3 \neq 0,$ ahonnan $|x| \neq 1,$

majd alakítsuk szorzattá a kifejezéseket:

$$\frac{6x+6}{3x^2-3} = \frac{6(x+1)}{3(x^2-1)} = \frac{6(x+1)}{3(x-1)(x+1)}$$

Egyszerűsíthetünk $(x+1)$-gyel és 3-mal:

$$\frac{6(x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x-1}, \qquad |x| \neq 1.$$

b) Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt a gyöktényezős felírás segítségével!

A számláló: $3a^2 - 18a + 15 = 3(a-1)(a-5)$

A nevező szorzattá bontása után érdemes megvizsgálni a kifejezés értelmezési tartományát:

$$a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2), \quad \text{tehát } a \neq 1, a \neq 2.$$

A szorzattá bontás után egyszerűsíthetünk $(a-1)$-gyel:

$$\frac{3a^2-18a+15}{a^2-3a+2} = \frac{3(a-1)(a-5)}{(a-1)(a-2)} = \frac{3(a-5)}{a-2}, \qquad a \neq 1, a \neq 2.$$

c) Alakítsuk a számlálót és a nevezőt is szorzattá!

A számláló:

$$y^3 + 2y^2 - y - 2 = y^2(y+2) - (y+2) = (y+2)(y^2-1) = (y+2)(y-1)(y+1)$$

A nevezőt a gyöktényezős alak segítségével alakítsuk szorzattá:

$y^2 + y - 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2}$; vagyis $y_1 = 1, y_2 = -2$,

$$y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2), \qquad (nevező \neq 0) \quad y \neq 1; y \neq -2.$$

Tehát a tört:

$$\frac{y^3 + 2y^2 - y - 2}{y^2 + y - 2} = \frac{(y+2)(y-1)(y+1)}{(y-1)(y+2)} = y + 1, \qquad y \neq 1; y \neq -2.$$

10. Egyszerűsítse a következő kifejezést, ha $a > 2b > 0$!

$$\frac{a^3 - 8b^3}{a - 2b}$$

$(A)(2a+b)^2$ $(B)\ (a-2b)^2$ $(C)\ a^2 + 4b^2$ $(D)\ a^2 + 2ab + 4b^2$ $(E)\ 4(a^2 + b^2)$

BME 2013. május 10. (16B)

Megoldás:

$$\frac{a^3 - 8b^3}{a - 2b}, \quad a > 2; b > 0, \qquad a \neq 2b.$$

Alakítsuk a számlálót szorzattá a két köb különbségére vonatkozó nevezetes azonosság alapján:

$$a^3 - 8b^3 = a^3 - (2b)^3 = (a-2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

ekkor:

$$\frac{(a-2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)}{a - 2b} = a^2 + 2ab + 4b^2.$$

Tehát a jó válasz a (*D*).

11. Végezze el a törtek szorzását, osztását a változók lehetséges értékei mellett!

$a)\ \frac{4p^2 - 9q^2}{p^2q^2} : \frac{2np + 3nq}{2pq}$ $b)\ \frac{x^2 + xy}{5x^2 - 5y^2} : \frac{x^2 - xy}{3x^3 - 3y^3}$ $c)\ \frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{5a+25}} \cdot \frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{2a-6}}$

Megoldás:

Az törtek számlálóját és nevezőjét is alakítsuk szorzattá, vizsgáljuk meg az értelmezési tartományt és egyszerűsítsünk!

a) Nevezetes azonosságok és kiemelés segítségével alakítsunk szorzattá:

$$\frac{4p^2 - 9q^2}{p^2q^2} : \frac{2np + 3nq}{2pq} = \frac{(2p-3q)(2p+3q)}{p^2q^2} : \frac{n(2p+3q)}{2pq} =$$

$$= \frac{(2p-3q)(2p+3q)}{p^2q^2} \cdot \frac{2pq}{n(2p+3q)} =$$

egyszerűsíthetünk a $(2p+3q)$-val és (pq)-val:

$$= \frac{(2p-3q)(2p+3q)}{p^2q^2} \cdot \frac{2pq}{n(2p+3q)} = \frac{2(2p-3q)}{pqn}, \qquad p \neq 0, q \neq 0, n \neq 0, 2p \neq -3q.$$

b) Alakítsunk szorzattá ahol lehetséges:

$$\frac{x^2+xy}{5x^2-5y^2} : \frac{x^2-xy}{3x^3-3y^3} = \frac{x(x+y)}{5(x^2-y^2)} : \frac{x(x-y)}{3(x^3-y^3)} =$$

$$= \frac{x(x+y)}{5(x-y)(x+y)} \cdot \frac{3(x^3-y^3)}{x(x-y)} = \frac{x(x+y)}{5(x-y)(x+y)} \cdot \frac{3(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x(x-y)} =$$

egyszerűsítés után kapjuk:

$$= \frac{3(x^2+xy+y^2)}{5(x-y)}, \qquad |x| \neq |y|, \qquad x \neq 0$$

c)

Első megoldás:

$$\frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{5a+25}} \cdot \frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{2a-6}}$$

A négyzetgyök és a nevező értelmezhetősége miatt:

$a-3 \geq 0, \qquad a+5 \geq 0, \qquad 5a+25 > 0, \qquad 2a-6 > 0,$

ahonnan: $a \geq 3$; $\quad a \geq -5$; $\quad a > -5$; $\quad a > 3$ vagyis $a > 3$

$$\frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{5a+25}} \cdot \frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{2a-6}} = \frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{5}\sqrt{a+5}} \cdot \frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{2}\sqrt{a-3}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Második megoldás:

Alkalmazzuk a négyzetgyökvonás azonosságait:

$$\sqrt{\frac{a-3}{5a+25} \cdot \frac{a+5}{2a-6}} = \sqrt{\frac{a-3}{5(a+5)} \cdot \frac{a+5}{2(a-3)}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

12. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést! $(x \neq \pm 1)$

$$(x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} + 2\right)$$

$(A)\ 2x^4 - 2x^2 \qquad (B)\ \dfrac{2x^4 - 2x\quad^{2}}{x^2-2x+1} \qquad (C)\ 2x^2 \qquad (D)\ x^2-1 \qquad (E)\ 0$

BME 2015. május 8. (16A)

Megoldás:

A második zárójelen belül közös nevezőre hozás után végezzük el az összevonást!

$$(x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} + 2\right) =$$

$$= (x^2-1) \cdot \left(\frac{1+x}{(x-1)(1+x)} - \frac{x-1}{(x-1)(1+x)} + \frac{2(x-1)(1+x)}{(x-1)(1+x)}\right) =$$

$$= (x^2-1)\cdot\frac{1+x-x+1+2(x-1)(1+x)}{(x-1)(1+x)} = (x^2-1)\cdot\frac{2+2x^2-2}{(x-1)(1+x)} =$$

$$= (x-1)(1+x)\cdot\frac{2x^2}{(x-1)(1+x)} = 2x^2, \qquad |x| \neq 1.$$

Tehát a jó válasz a (*C*).

13. Végezze el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

$$a)\ \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}-\frac{c+d}{2c-2d} \qquad\qquad b)\ \left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right):\left(\frac{4b^2-9a^2}{ab}\right)$$

Megoldás:

a) Először alakítsuk szorzattá a nevezőket, hogy meg tudjuk határozni a közös nevezőt:

$$\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}-\frac{c+d}{2c-2d} = \frac{c^2+d^2}{(c-d)(c+d)}-\frac{c+d}{2(c-d)}$$

A közös nevező: $2(c-d)(c+d)$ lesz, az értelmezési tartomány: $|c| \neq |d|$

$$\frac{2(c^2+d^2)}{2(c-d)(c+d)}-\frac{(c+d)(c+d)}{2(c-d)(c+d)} = \frac{2(c^2+d^2)}{2(c-d)(c+d)}-\frac{c^2+2cd+d^2}{2(c-d)(c+d)} =$$

$$= \frac{2c^2+2d^2-c^2-2cd-d^2}{2(c-d)(c+d)} = \frac{c^2-2cd+d^2}{2(c-d)(c+d)}$$

Újabb szorzattá bontás után egyszerűsíthetünk $(c-d)$-vel:

$$= \frac{(c-d)^2}{2(c-d)(c+d)} = \frac{c-d}{2(c+d)}, \qquad |c| \neq |d|.$$

b) Hozzunk közös nevezőre a zárójelen belül, és amit lehet, bontsunk szorzattá!

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right):\left(\frac{4b^2-9a^2}{ab}\right) = \left(\frac{2b}{ab}-\frac{3a}{ab}\right):\left(\frac{(2b-3a)(2b+3a)}{ab}\right) =$$

$$= \frac{2b-3a}{ab}:\frac{(2b-3a)(2b+3a)}{ab} = \frac{2b-3a}{ab}\cdot\frac{ab}{(2b-3a)(2b+3a)} =$$

Lehet egyszerűsíteni $(2b-3a\ )$–val és (ab)-vel, tehát kapjuk:

$$= \frac{1}{2b+3a}, \qquad |2b| \neq |3a|; a \neq 0; b \neq 0.$$

14. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{2-\frac{a}{3a+1}}{\frac{5a+2}{9a^2-1}}, \qquad |a| \neq \frac{1}{3}; a \neq -\frac{2}{5}$$

Megoldás:

Közös nevezőre hozás után végezzük el a törtekkel való műveleteket:

$$\frac{2-\frac{a}{3a+1}}{\frac{5a+2}{9a^2-1}} = \frac{\frac{2(3a+1)}{3a+1}-\frac{a}{3a+1}}{\frac{5a+2}{9a^2-1}} = \frac{\frac{6a+2-a}{3a+1}}{\frac{5a+2}{9a^2-1}} =$$

$$=\frac{6a+2-a}{3a+1}:\frac{5a+2}{9a^2-1}=\frac{5a+2}{3a+1}\cdot\frac{9a^2-1}{5a+2}=$$

Bontsunk szorzattá, és egyszerűsíthetünk $(3a+1)$-gyel és $(5a+2)$-vel!

$$=\frac{5a+2}{3a+1}\cdot\frac{(3a-1)(3a+1)}{5a+2}=3a-1, \qquad |a|\neq\frac{1}{3};\, a\neq-\frac{2}{5}.$$

15. Mennyi a következő kifejezés értéke, ha $a=2{,}5$ és $b=-1{,}5$?

$$\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}\cdot\frac{2a-2b}{3a+3b}, \qquad |a|\neq|b|$$

$(A)\ \frac{2}{3}$ $\qquad (B)\ \frac{3}{2}$ $\qquad (C)\ -\frac{5}{3}$ $\qquad (D)\ 1\frac{2}{3}$

Megoldás:

Először alakítsuk szorzattá a kifejezéseket, majd egyszerűsíthetünk $(a-b)^2$-nel és $(a+b)$-vel.

$$\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}\cdot\frac{2a-2b}{3a+3b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}\cdot\frac{2(a-b)}{3(a+b)}=\frac{2}{3}$$

Megjegyzés: A fent megadott értelmezési tartományon belül a kifejezés értéke független a-tól és b-től.

Tehát a jó válasz az (A).

16. Mutassuk meg, hogy ha két tört összege egyenlő eggyel, akkor a törtek különbsége egyenlő a négyzeteinek különbségével!

Megoldás:

A két tört legyen:

$$\frac{a}{b} \text{ és } \frac{c}{d}$$

Írjuk fel a két tört négyzetének különbségét:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{d}\right)^2$$

Alakítsuk szorzattá:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{d}\right)^2=\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$$

Mivel $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=1$, ezért :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{d}\right)^2=\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right), \text{ahol } b\neq0; d\neq0$$

Ezzel az állításunkat beláttuk.

Megjegyzés:

Bármely két számra igaz ez az állítás:

Ha $a+b=1$, akkor $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1\cdot(a-b)=a-b$.

17. Mennyivel egyenlő az $x^2+\frac{1}{x^2}$ kifejezés értéke, ha $x+\frac{1}{x}=14$?

(A) 190 (B) 192 (C) 194 (D) 196 (E) 198

BME 2015. február 13. (16A)

Megoldás:

Emeljük az $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ kifejezést négyzetre:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

Ebből következik, hogy:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2 = 14^2 = 196$$

Tehát:

$$x^2+\frac{1}{x^2} = 14^2-2 = 194$$

Tehát a jó válasz a (C).