3. Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Mennyi a $2x^2 - 8x - 5 = 0$ egyenlet gyökeinek a szorzata?

   $(A) - 10$ $(B) - 2$ $(C) - 2{,}5$ $(D)\ 4$ (E) ezek egyike sem

BME 2011. február 14. (18A)

Megoldás I.:

Az egyenlet diszkriminánsa $D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 104 > 0$, tehát az egyenletnek két gyöke van. Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet két gyöke x_1 és x_2, akkor:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$$

A jó válasz a (C).

Megoldás II.:

Kicsit nehezebben akkor is megkapjuk a megoldást, ha felírjuk a gyökök pontos értékét a megoldóképlet használatával, majd alkalmazzuk az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ azonosságot:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 40}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{104}}{4}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{8 + \sqrt{104}}{4} \cdot \frac{8 - \sqrt{104}}{4} = \frac{64 - 104}{16} = -\frac{40}{16} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$$

2. Az $x - \frac{4}{x} > 0$ egyenlőtlenség megoldása:

   $(A)\ 2 < x$ $(B) - 2 < x < 2$ $(C) - 2 < x < 0$ vagy $2 < x$ $(D) x < -2$ vagy 2<x (E) ezek egyike sem

BME 2010. szeptember (17A)

Megoldás I.:

A tört nevezője nem lehet 0, ezért az egyenlőtlenség megoldását az $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ halmazon keressük.

Hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{x^2 - 4}{x} > 0$$

Egy tört akkor és csak akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű, ezért az alábbi eseteket kell vizsgálnunk:

$x^2 - 4 > 0$	vagy	$x^2 - 4 < 0$
és		és
$x > 0$		$x < 0$

$x^2 - 4 > 0$, ha $|x| > 2$, azaz $x < -2$ vagy $x > 2$. Az $x > 0$ feltételt is figyelembe véve $x > 2$ esetén valósul meg az első eset.

$x^2 - 4 < 0$, ha $|x| < 2$, azaz $-2 < x < 2$. Az $x < 0$ feltétel mellett $-2 < x < 0$ esetén teljesül a második eset.

Összefoglalva a megoldás:

$$-2 < x < 0 \text{ vagy } x > 2.$$

Intervallumjelölést használva:

$$x \in \,]-2; 0[\, \cup \,]2; \infty[$$

Így a megoldás a (C).

Megoldás II.:

Ha az egyenlőtlenséget x-szel szeretnénk szorozni, figyelnünk kell arra, hogy az egyenlőtlenség iránya megfordul, ha negatív számmal szorzunk.

Ha $x > 0$ esetén szorozzuk az egyenlőtlenséget x-szel, akkor

$$x^2 - 4 > 0,$$

ha $x < 0$ akkor

$$x^2 - 4 < 0$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

Innentől kezdve az első megoldás lépéseit követve kapjuk a megoldást.

3. Határozza meg a $kx^2 - (2k+3)x + k - 3 = 0$ egyenletben szereplő k valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek egy valós megoldása legyen.

ELTE 2015. szeptember (matematika BSC)

Megoldás:

Ha $k = 0$, akkor elsőfokú egyenletet kapunk:

$$-3x - 3 = 0.$$

Ekkor egyetlen valós megoldás van, $x = -1$.

Ha $k \neq 0$, akkor a másodfokú egyenletnek akkor van egy valós megoldása, ha a diszkrimináns 0:

$$D = (2k+3)^2 - 4 \cdot k \cdot (k-3) = 4k^2 + 12k + 9 - 4k^2 + 12k = 24k + 9 = 0,$$

tehát $k = -\frac{9}{24} = -\frac{3}{8}$.

Ebben az esetben a másodfokú egyenlet:

$$-\frac{3}{8}x^2 - \left(-\frac{6}{8} + 3\right)x - \frac{3}{8} - 3 = 0.$$

Rendezés után:

$$-\frac{3}{8}x^2 - \frac{18}{8}x - \frac{27}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3.$$

Ezek szerint a paraméteres egyenletnek $k = 0$ és $k = -\frac{3}{8}$ esetén van egy valós megoldása.

II. Ismételjünk!

1. Egyenlet, azonosság, alaphalmaz, értelmezési tartomány

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/07.pdf 1.oldal

2. Egyenletek, egyenletrendszerek megoldási módszerei

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/07.pdf 1-2.oldal

3. Egyenlőtlenségek megoldási módszerei

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/07.pdf 3.oldal

4. Hogyan oldunk meg szöveges feladatokat

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/07.pdf 3.oldal

5. Másodfokú egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/08.pdf 1.oldal

III. Gyakorló feladatok

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$2(6x-11)-3(7-4x)=-(x+5)+4(7-2x)$$

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{5-x}{x+3}+2=\frac{7x-3}{x+3}$$

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{x+5}{x+2}-\frac{x-6}{x-2}=\frac{5}{4-x^2}$$

4. Mennyi az x értéke, ha

$$\frac{8+x}{8-x}=\frac{x}{x+x}$$

$(A)\ 4$ $\qquad (B)\ 0$ $\qquad (C)-\frac{2}{3}$ $\qquad (D)-\frac{4}{3}$ $\qquad (E)-\frac{8}{3}$

BME 2012. szeptember 7. (17A)

5. Ábrázolja számegyenesen az egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

$$\frac{-6}{2x-8}\geq 0$$

6. Egy 30 éves apának 3 éves a fia. Hány év múlva lesz az apa négyszer annyi idős, mint a fia?

7. A lakásom és az iskola közötti utat tízszer gyorsabban teszem meg autóval, mint gyalog. Ha ennek az útnak az egyharmadát gyalog, a többit pedig autóval tenném meg, akkor ehhez 24 percre lenne szükségem. Az út hányad részét tettem meg gyalog, ha 9 perccel hosszabb ideig utaztam, mintha csak autóval utaztam volna?

ELTE 2013. szeptember (matematika BSC)

8. Oldja meg a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} x-4y&=11\\ -2x+7y&=-17 \end{aligned}\right\}$$

9. Oldja meg a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 2(x-5)-4(1-y)&=8\\ -4(x+2y)+5(-x+2y)&=-59 \end{aligned}\right\}$$

10. Határozza meg a d értékét úgy, hogy a $2x^2+7x+d=0$ egyenlet egyik gyöke -5 legyen!

11. Határozza meg a $-3x^2-12x+6=0$ egyenlet gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül!

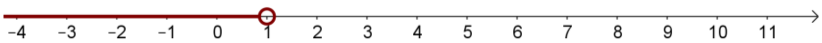
12. Egy tört számlálója 2-vel kisebb, mint a nevezője. Ha ehhez a törthöz hozzáadjuk a reciprok értékét, akkor $\frac{34}{15}$ –öt kapunk. Melyik ez a tört szám?

13. Egy tartály két csövön keresztül 6 óra alatt telik meg. Az egyik csövön át 5 órával hamarabb telik meg, mint a másikon keresztül. Mennyi idő alatt töltené meg külön-külön a két cső a tartályt?

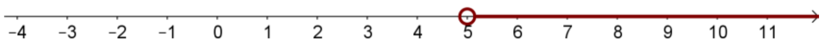
14. Oldja meg az egyenlőtlenséget! Melyik számegyenes ábrázolja helyesen a megoldásokat?

$$3x^2 - 11x + 1 > 7(x - 2)$$

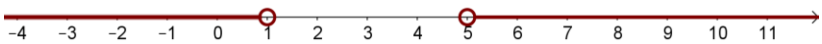
(A)



(B)

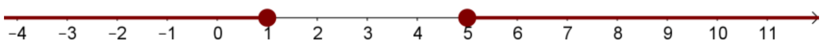


(C)



(D)

(E)



15. Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a jegyei felcserélésével kapott számot, az eredmény 110 lesz. Ha viszont az eredeti számot elosztjuk a felcserélés után kapott számmal, a hányados 2, a maradék pedig 26 lesz. Mennyi a kétjegyű szám jegyeinek összege?

(A) 2 (B)10 (C)13 (D) 18 (E) ezek egyike sem

IV. Megoldások:

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$2(6x-11)-3(7-4x)=-(x+5)+4(7-2x)$$

Megoldás:

$$12x-22-21+12x=-x-5+28-8x$$
$$24x-43=-9x+23$$
$$33x=66$$
$$x=2$$

Megjegyzés:

A zárójelek felbontásánál figyeltünk arra, hogy

- minden tagot szorozzunk;
- ha a zárójel előtt negatív szám áll, akkor az előjel megváltozik.

Ellenőrzés:

A bal és a jobb oldal értékét külön számoljuk ki:

B: $2\cdot(6\cdot2-11)-3\cdot(7-4\cdot2)=2-3\cdot(-1)=5$

J: $-(2+5)+4\cdot(7-2\cdot2)=-7+12=5$

Tehát a megoldásunk helyes.

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{5-x}{x+3}+2=\frac{7x-3}{x+3}$$

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, ezért $x\neq-3$

$$5-x+2\cdot(x+3)=7x-3$$
$$5-x+2x+6=7x-3$$
$$x+11=7x-3$$
$$14=6x$$
$$x=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

Megjegyzés:

Ha egy törtet a nevezővel szorzunk, akkor a számlálót kapjuk.

Ha egy tört nevezőjével szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát, akkor figyeljünk arra, hogy minden tagot, így az egész kifejezést is szoroznunk kell.

Ellenőrzés:

Az eredeti egyenletbe kell behelyettesítenünk:

B: $\frac{5-\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}+3}+2=\frac{\frac{15-7}{3}}{\frac{7+9}{3}}+2=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{3}}+2=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{16}+2=\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{2}$

J: $\frac{7\cdot\frac{7}{3}-3}{\frac{7}{3}+3}=\frac{\frac{49-9}{3}}{\frac{7+9}{3}}=\frac{\frac{40}{3}}{\frac{16}{3}}=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$

A megoldás jó.

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{x+5}{x+2}-\frac{x-6}{x-2}=\frac{5}{4-x^2}$$

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, ezért $x \neq \pm 2$.

A jobb oldalon lévő törtet (-1)-gyel bővítjük, mert ebben az esetben fogjuk tudni alkalmasan megválasztani a közös nevezőt:

$$\frac{x+5}{x+2}-\frac{x-6}{x-2}=\frac{-5}{x^2-4}$$

Alkalmazzuk az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ azonosságot:

$$\frac{x+5}{x+2}-\frac{x-6}{x-2}=\frac{-5}{(x+2)(x-2)}$$

$$(x+5)(x-2)-(x-6)(x+2)=-5$$

$$x^2+5x-2x-10-(x^2-6x+2x-12)=-5$$

$$x^2+5x-2x-10-x^2+6x-2x+12=-5$$

$$7x+2=-5$$

$$7x=-7$$

$$x=-1$$

Megjegyzés:

A törtvonal zárójelnek is megfelel, ezért a nevezőkkel való szorzásnál figyelünk az előjelekre.

Ellenőrzés:

B: $\frac{-1+5}{-1+2}-\frac{-1-6}{-1-2}=4-\frac{-7}{-3}=4-\frac{7}{3}=\frac{12}{3}-\frac{7}{3}=\frac{5}{3}$

J: $\frac{5}{4-1}=\frac{5}{3}$

A megoldás jó.

4. Mennyi az x értéke, ha

$$\frac{8+x}{8-x}=\frac{x}{x+x}$$

$(A)\ 4$ $\qquad (B)\ 0$ $\qquad (C) -\frac{2}{3}$ $\qquad (D) -\frac{4}{3}$ $\qquad (E) -\frac{8}{3}$

BME 2012. szeptember 7. (17A)

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R}\backslash\{8;0\}$.

$$\frac{8+x}{8-x}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$2(8+x)=8-x$$

$$16+2x=8-x$$

$$3x=-8$$

$$x=-\frac{8}{3}$$

Ellenőrzés után kimondhatjuk, a jó válasz az (E).

5. Ábrázolja számegyenesen az egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

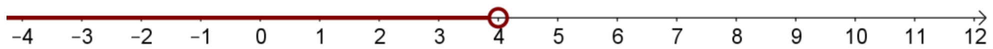
$$\frac{-6}{2x-8}\geq 0$$

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, ezért $x \neq 4$.

Egy tört értéke csak akkor 0, ha a számlálója 0. Ez most nem teljesülhet.

A tört értéke akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű. A feladat esetében tehát a nevezőnek negatívnak kell lennie. Ez $x<4$ esetén teljesül:



Megjegyzés:

Az egyenlőtlenséget nem tudjuk ellenőrizni, hiszen végtelen sok megoldást kaptunk.

6. Egy 30 éves apának 3 éves a fia. Hány év múlva lesz az apa négyszer annyi idős, mint a fia?

Megoldás:

x év múlva teljesül a feladat feltétele. Ekkor az apa $30+x$ éves, a fia $3+x$ éves lesz.

$$30+x=4(3+x)$$

$$30+x=12+4x$$

$$18=3x$$

$$x=6$$

Ellenőrzés:

A feladat szövegébe helyettesítünk. Az apa 6 év múlva 36 éves, a fia 9 éves lesz. $36:9=4$.

Tehát 6 év múlva lesz az apa négyszer annyi idős, mint a fia.

7. A lakásom és az iskola közötti utat tízszer gyorsabban teszem meg autóval, mint gyalog. Ha ennek az útnak az egyharmadát gyalog, a többit pedig autóval tenném meg, akkor ehhez 24 percre lenne szükségem. Az út hányad részét tettem meg gyalog, ha 9 perccel hosszabb ideig utaztam, mintha csak autóval utaztam volna?

ELTE 2013. szeptember (matematika BSC)

Megoldás I.:

Jelöljük az út hosszát s-sel, a gyalogos sebességét v -vel. Ekkor az autó sebessége $10v$. Az út mértékegysége legyen m, a sebességé $m/perc$.

A feladat szerint az út egy harmadát gyalog, a többit autóval teszem meg összesen 24 perc alatt. Használom a fizikából ismert $t=s/v$ összefüggést:

$$\frac{\frac{s}{3}}{v}+\frac{\frac{2s}{3}}{10v}=24$$

$$\frac{s}{3v}+\frac{2s}{30v}=24$$

$$10s+2s=24\cdot 30v=720v$$

$$12s=720v$$

$$s=60v$$

Ha csak autóval utazunk, akkor $s/10v=6$ percig tart az út. A feladat azt kérdezi, hogy milyen arányban osszuk meg az utat a gyalogos és az autós közlekedés között, hogy 15 perc legyen az utazási idő.

Az út k-ad részét tegyük meg gyalog és $(1-k)$-ad részét autóval. Ekkor:

$$\frac{ks}{v}+\frac{(1-k)s}{10v}=15$$

Használjuk fel az $s=60v$ eredményt:

$$\frac{k\cdot 60v}{v}+\frac{(1-k)\cdot 60v}{10v}=15$$

$$60k+(1-k)\cdot 6=15$$

$$60k+6-6k=15$$

$$54k=9$$

$$k=\frac{1}{6}$$

Tehát az út $\frac{1}{6}$ részét tettem meg gyalog, $\frac{5}{6}$ részét autóval.

Ellenőrzés:

Az út $\frac{1}{6}$ része $10v$, ez gyalog, v sebességgel, 10 perc alatt tehető meg. Az út $\frac{5}{6}$ része $50v$, ez autóval, $10v$ sebességgel, 5 percig tart. Az utat így 15 perc alatt tettem meg, ami valóban 9 perccel hosszabb a csak autóval való utazás idejénél.

Megoldás II.:

A feladatot megoldhatjuk következtetéssel is.

Ha autóval 10-szer gyorsabban közlekedem, akkor egy adott távolság megtétele gyalog 10-szer annyi ideig tart. Kétszer annyi utat kétszer annyi idő alatt teszek meg. Az előbbi két gondolat alapján, ha az út egyharmadát gyalog, kétharmadát autóval tettem meg, akkor ötször annyi ideig mentem gyalog, mint autóval. A 24 percet felosztom 5: 1 arányban:

$$24:(5+1)=4; \quad 5\cdot 4=20,$$

tehát 20 percig mentünk gyalog és 4 percig autóval. Ha a teljes utat autóval tennénk meg, akkor $1{,}5\cdot 4=6$ percig autóznánk, ha pedig végig gyalog mennénk, akkor $20\cdot 3=60$ perc lenne az út.

Az a kérdés, hogy milyen feltételek mellett tartana az út 15 percig.

Ha az út k-ad részén gyalogolunk és $(1-k)$-ad részé autózunk, akkor a menetidő:

$$60k+6(1-k)=15$$

Innen a megoldás azonos az elsővel.

8. Oldja meg a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} x-4y&=11\\ -2x+7y&=-17\end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

Az egyenletrendszer megoldásánál a behelyettesítő módszert használjuk.

Az első egyenletből $x=11+4y$, ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$-2(11+4y)+7y=-17$$
$$-22-8y+7y=-17$$
$$-y=5$$
$$y=-5$$

Ezzel az eredménnyel kiszámoljuk x-et:

$$x=11+4\cdot(-5)=-9$$

Ellenőrzés:

Mindkét egyenletbe helyettesítünk:

$-9-4\cdot(-5)=-9+20=11$

$-2\cdot(-9)+7\cdot(-5)=18-35=-17$

Így az egyenletrendszer megoldása valóban $x=-9$ és $y=-5$.

9. Oldja meg a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 2(x-5)-4(1-y) &= 8 \\ -4(x+2y)+5(-x+2y) &= -59 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

Bontsuk fel a zárójeleket, rendezzük az egyenleteket:

$$2x-10-4+4y=8$$

$$2x+4y=22$$

$$-4x-8y-5x+10y=-59$$

$$-9x+2y=-59$$

Az így kapott egyenletrendszer, amelyet az egyenlő együtthatók módszerével oldunk meg:

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y &= 22 \\ -9x+2y &= -59 \end{aligned}\right\}$$

A második egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk 2-vel:

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y &= 22 \quad (*) \\ -18x+4y &= -118 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikat:

$$20x=140$$

$$x=7$$

Egy korábbi egyenletbe visszahelyettesítve meghatározzuk y értékét. Erre a célra bármelyik egyenlet megfelel, de egy egyszerűbb egyenletet érdemes ehhez választani $(*)$:

$$2\cdot 7+4y=22$$

$$14+4y=22$$

$$4y=8$$

$$y=2$$

Ellenőrzés:

$2\cdot(7-5)-4\cdot(1-2)=4+4=8$

$-4\cdot(7+2\cdot 2)+5(-7+2\cdot 2)=-44-15=-59$

Tehát a megoldásunk jó, valóban $x=7$ és $y=2$, azaz $(7;2)$ a keresett számpár.

10. Határozza meg a d értékét úgy, hogy a $2x^2+7x+d=0$ egyenlet egyik gyöke -5 legyen!

Megoldás:

Ha a -5 ennek az egyenletnek gyöke, akkor behelyettesítve a bal oldal értéke 0 lesz:

$$2\cdot(-5)^2+7\cdot(-5)+d=0$$

$$50-35+d=0$$

$$d=-15$$

Ellenőrzés:

A $2x^2 + 7x - 15 = 0$ egyenletet megoldása:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$x = -5 \quad \text{vagy} \quad x = 1{,}5.$$

Az egyik gyök valóban -5. Így a másodfokú egyenletben a d paraméter értéke -15.

11. Határozza meg a $-3x^2 - 12x + 6 = 0$ egyenlet gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül!

Megoldás:

Először a diszkrimináns vizsgálatával ellenőrizzük, hogy az egyenletnek van-e megoldása a valós számok körében. $D = (-12)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 6 = 144 + 72 > 0$, tehát két valós megoldás van.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-12}{-3} = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{-3} = -2.$$

Ezt az eredményt használjuk fel az alábbi átalakítások során:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot \quad x_1 \cdot x_2 = (-4)^2 - 2 \cdot (-2) = 16 + 4 = 20.$$

Tehát a gyökök négyzetösszege 20.

12. Egy tört számlálója 2-vel kisebb, mint a nevezője. Ha ehhez a törthöz hozzáadjuk a reciprok értékét, akkor $\frac{34}{15}$ –öt kapunk. Melyik ez a tört szám?

Megoldás:

A tört nevezője x. Ezzel fejezzük ki a törtet és a reciprokát. Az alábbi egyenletet az $x \neq 0; 2$ feltétel mellett oldjuk meg.

$$\frac{x-2}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{34}{15}$$

Az egyenlet mindkét oldalát $15 \cdot x \cdot (x - 2)$-vel szorozzuk:

$$15 \cdot (x-2)^2 + 15 \cdot x^2 = 34 \cdot x \cdot (x-2)$$

Alkalmazzuk az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ azonosságot:

$$15(x^2 - 4x + 4) + 15x^2 = 34x^2 - 68x$$

$$30x^2 - 60x + 60 = 34x^2 - 68x$$

$$0 = 4x^2 - 8x - 60$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

A másodfokú egyenlet két gyöke 5 és -3.

Ellenőrzés:

Ha $x = 5$, akkor a tört $\frac{3}{5}$. A törtnek és a reciprokának az összege $\frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{9+25}{15} = \frac{34}{15}$.

Ha $x = -3$, akkor a tört $\frac{-5}{-3}$. Ellenőrizve $\frac{-5}{-3} + \frac{-3}{-5} = \frac{25+9}{15} = \frac{34}{15}$. Törtet általában nem szoktunk így írni, de lehetséges.

Tehát a keresett tört $\frac{3}{5}$ vagy $\frac{-5}{-3}$.

13. Egy tartály két csövön keresztül 6 óra alatt telik meg. Az egyik csövön át 5 órával hamarabb telik meg, mint a másikon keresztül. Mennyi idő alatt töltené meg külön-külön a két cső a tartályt?

Megoldás:

Ha az egyik, illetve a másik cső egyedül lenne nyitva, akkor az egyiken keresztül $(x-5)$, a másikon keresztül x óra alatt telne meg a tartály.

Az első cső egyedül 1 óra alatt a tartály $\frac{1}{x-5}$-öd részét, a másik az $\frac{1}{x}$-ed részét tölti meg. Ha mindkét cső nyitva van, akkor 6 óra alatt hatszor ennyi víz jut a tartályba. A feltételek szerint ekkor tele lesz a tartály, tehát a részek összege éppen 1 egész:

$$\frac{6}{x-5} + \frac{6}{x} = 1$$

$x > 5$, mert a tartály megtöltése csak pozitív időtartam alatt lehetséges.

$$6x + 6(x-5) = x \cdot (x-5)$$

$$6x + 6x - 30 = x^2 - 5x$$

$$x^2 - 17x + 30 = 0$$

A másodfokú egyenlet két gyöke 15 és 2, de a 2 nem felel meg az $x > 5$ feltételnek.

Így az első cső 10 óra alatt, a második 15 óra alatt tölti meg a tartályt, ha egyedül van nyitva.

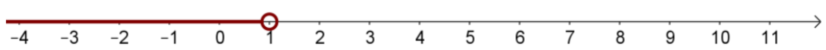
Ellenőrzés:

Az első cső 6 óra alatt a tartály $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ részét, a második a $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ részét tölti meg. $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, ezért 6 óra alatt valóban megtelik a tartály, ha mind a két cső nyitva van.

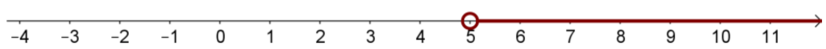
14. Oldja meg az egyenlőtlenséget! Melyik számegyenes ábrázolja helyesen a megoldásokat?

$$3x^2 - 11x + 1 > 7(x-2)$$

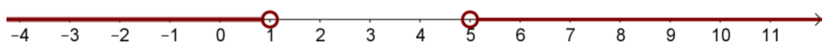
(A)



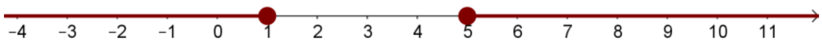
(B)



(C)



(D) 

(E) 

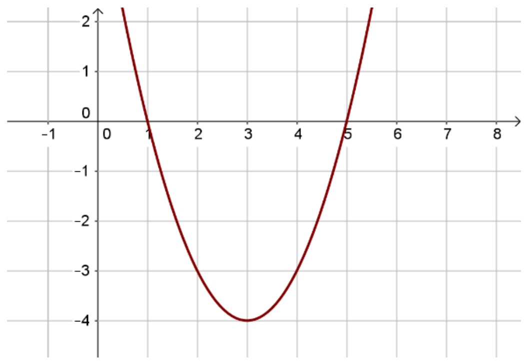
Megoldás:

$$3x^2 - 11x + 1 > 7x - 14$$

$$3x^2 - 18x + 15 > 0$$

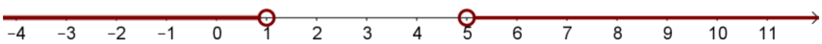
$$x^2 - 6x + 5 > 0$$

Megoldjuk az $x^2 - 6x + 5 = 0$ egyenletet, a két gyök 1 és 5. Az $x \mapsto x^2 - 6x + 5$ függvény grafikonja felfelé nyitott parabola:



A grafikonról látható, hogy az egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha $x < 1$ vagy $x > 5$. Természetesen a grafikont nem kell pontosan megrajzolnunk, elég akár elképzelnünk a koordináta-rendszerben való helyzetét vagy egy közelítő vázlatot rajzolnunk magunknak.

Számegyenesen ábrázolva:



Tehát a jó megoldás a (C).

15. Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a jegyei felcserélésével kapott számot, az eredmény 110 lesz. Ha viszont az eredeti számot elosztjuk a felcserélés után kapott számmal, a hányados 2, a maradék pedig 26 lesz. Mennyi a kétjegyű szám számjegyeinek összege?

(A) 2 (B)10 (C)13 (D) 18 (E) ezek egyike sem

Megoldás:

Legyen a kétjegyű szám $\overline{xy} = 10x + y$. A felcseréléssel kapott szám $\overline{yx} = 10y + x$.

Ennek a kettőnek az összege:

$$11x + 11y = 110 \quad \Rightarrow \quad x + y = 10$$

A maradékos osztás eredménye alapján:

$$(10y + x) \cdot 2 + 26 = 10x + y$$

A fentiek szerint $x = 10 - y$, tehát:

$$(10y + 10 - y) \cdot 2 + 26 = 10(10 - y) + y$$

$$(9y+10)\cdot 2+26=100-10y+y$$
$$18y+20+26=100-9y$$
$$27y=54$$
$$y=2$$
$$x=10-2=8$$

A kétjegyű szám 82. A számjegyek összege 10. Tehát a jó válasz a (B).

Ellenőrzés:

$82+28=110$, és $82=28\cdot 2+26$, tehát 82-t 28-cal osztva a hányados 2 és a maradék 26.