4. Hatványozás, gyökvonás

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Válassza ki, hogy az alábbiak közül melyikkel egyezik meg a következő kifejezés, ha x, y és z pozitív számok!

$$\sqrt[4]{\frac{x^7 \cdot y^3}{z^{\frac{1}{3}}}} \cdot \sqrt{\frac{z^3}{x^{-2} \cdot y^{\frac{1}{4}}}}$$

(A) $x^{\frac{11}{4}} y^{\frac{5}{8}} z^{\frac{17}{12}}$ (B) $x^{\frac{11}{4}} y^{\frac{7}{8}} z^{\frac{15}{12}}$ (C) $x^{\frac{9}{4}} y^{\frac{3}{8}} z^{\frac{19}{12}}$ (D) $x^{\frac{5}{4}} y^{\frac{11}{8}} z^{\frac{13}{12}}$ (E) Ezek egyike sem.

BME 2016. február 19. (16A)

Megoldás:

Törtkitevőjű hatványokkal érdemes dolgozni. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$

A hatványozás azonosságait használjuk: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\sqrt[4]{\frac{x^7 \cdot y^3}{z^{\frac{1}{3}}}} \cdot \sqrt{\frac{z^3}{x^{-2} \cdot y^{\frac{1}{4}}}} = \frac{x^{\frac{7}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}}}{z^{\frac{1}{12}}} \cdot \frac{z^{\frac{3}{2}}}{x^{-1} \cdot y^{\frac{1}{8}}} = x^{\frac{7}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot z^{-\frac{1}{12}} \cdot z^{\frac{3}{2}} \cdot x^{1} \cdot y^{-\frac{1}{8}} = x^{\frac{11}{4}} \cdot y^{\frac{5}{8}} \cdot z^{\frac{17}{12}}$$

Tehát a jó válasz az (A).

2. Gyöktelenítse a nevezőt!

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2} =$$

(A) $3-\sqrt{6}$ (B) $3+\sqrt{6}$ (C) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) Ezek egyike sem.

BME 2011. szeptember 12. (16A)

Megoldás:

A nevező konjugáltjával, $(\sqrt{6}+2)$-vel bővítjük a törtet.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)} = \frac{6+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}^2-2^2} = \frac{2\left(3+\sqrt{6}\right)}{6-4} = 3+\sqrt{6}$$

Tehát a jó válasz a (B).

3. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{4x-3}\le 3x-1$$

ELTE 2013. december

Megoldás:

A négyzetgyök akkor van értelmezve, ha $3x-5\ge 0$ és $4x-3\ge 0$. Mivel a baloldal nemnegatív, a jobboldalra a $3x-1\ge 0$ feltétel adódik. Ezek együtt akkor teljesülnek, ha $x\ge\frac{5}{3}$

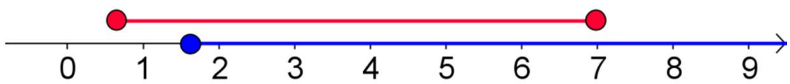
$$\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{4x-3}\le 3x-1$$
$$\sqrt{(3x-5)\cdot(4x-3)}\le 3x-1$$
$$\sqrt{12x^2-29x+15}\le 3x-1$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelhetünk:

$$12x^2-29x+15\le 9x^2-6x+1$$
$$3x^2-23x+14\le 0$$

A baloldali kifejezés zérushelyeit a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével kapjuk: $\frac{2}{3}$ és 7.

A pozitív főegyütthatójú másodfokú függvény a zérushelyek között negatív. Vessük össze a kapott eredményt az értelmezési tartománnyal:



Tehát a megoldás:

$$\frac{5}{3}\le x\le 7.$$

4. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 3\cdot 4^{x-2}+2\cdot 3^{y+1}&=14 \\ 5\cdot 3^{y+2}+17&=2\cdot 4^{x-1} \end{aligned}\right\}$$

ELTE 2015. október

Megoldás:

A hatványozás azonosságait használjuk:

$$3\cdot\frac{4^x}{4^2}+2\cdot 3^y\cdot 3=14$$

$$5\cdot 3^y\cdot 9+17=2\cdot\frac{4^x}{4}$$

$$\frac{3}{16}\cdot 4^x+6\cdot 3^y=14$$

$$45\cdot 3^y+17=\frac{1}{2}\cdot 4^x$$

Vezessünk be új ismeretleneket: $4^x:=a$; $3^y:=b$.

$$\frac{3}{16}\cdot a+6\cdot b=14$$

$$45\cdot b+17=\frac{1}{2}\cdot a$$

$$3\cdot a+96\cdot b=224$$

$$90\cdot b+34=a$$

$$3\cdot(90b+34)+96b=224$$

$$270b+102+96b=224$$

$$366b=122$$

$$b=\frac{1}{3}$$

$$a=90\cdot\frac{1}{3}+34=64$$

Visszahelyettesítve a változókat kapjuk a megoldást:

$4^x=64$, vagyis $x=3$; $3^y=\frac{1}{3}$; amiből $y=-1$.

Ellenőrzés:

I. Egyenlet: $3\cdot 4^{3-2}+2\cdot 3^{-1+1}=3\cdot 4+2=14$

II. Egyenlet: B: $5\cdot 3^{-1+2}+17=15+17=32$

J: $2\cdot 4^{3-1}=2\cdot 16=32$

A megoldás jó.

II. Ismételjünk!

1. Hatványozás, gyökvonás értelmezése, azonosságai

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/02.pdf 1-2.oldal

2. Négyzetgyökös egyenletek

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/08.pdf 1.oldal

3. Exponenciális egyenletek

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/09.pdf 1.oldal

III. Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi hatványok pontos értékét!

a) 3^{-2} b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $16^{-\frac{1}{4}}$ d) $32^{\frac{2}{5}}$

e) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ g) $\left(\frac{81}{625}\right)^{-\frac{3}{4}}$ h) $0{,}001^{-\frac{1}{3}}$

2. Fejezze ki az a, b, c és d pozitív paraméterek hatványainak szorzataként az alábbi kifejezést!

$$\left(\frac{a^{-7}b^{3}}{c^{4}d^{-3}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{a^{-2}b}{c^{2}d^{-4}}\right)^{3}$$

(A) $a^{\frac{7}{6}}bc^{-10}d^{-9}$ (B) $ac^{-2}d^{9}$ (C) $abc^{2}d^{9}$ (D) $a^{2}bc^{-10}d^{-4}$ (E) Egyik sem

BME 2015. szeptember 11. (15B)

3. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos számértékét!

$$\sqrt[2013]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4026]{5+2\sqrt{6}}$$

ELTE 2013. szeptember (tanárszak)

4. Melyek igazak az alábbi egyenlőségek közül, ha az ismeretlenek tetszőleges pozitív számokat jelölnek?

a) $\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a^{2}}}=\sqrt[12]{a^{3}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{a^{2}}\cdot\sqrt[3]{a^{4}}}{\sqrt{a}}=\sqrt[30]{a^{37}}$ c) $\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{ab^{2}}\cdot\sqrt[4]{a^{-3}b}}=\sqrt[24]{\frac{b^{11}}{a^{5}}}$ e) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a}$ f) $\frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{13}{12}}}=1$

5. Gyöktelenítse az alábbi törtek nevezőjét!

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

6. Számítsa ki az alábbi kifejezés értékét!

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^{2}$$

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 16

BME 2016. február 19. (16A)

7. Számítsa ki az alábbi kifejezés értékét!

$$\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}+\sqrt{28}\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{63}+\sqrt{7}\right)$$

8. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{15+x}+2x-6=0$$

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3+2\cdot\sqrt{5-2x}=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

b) $\sqrt{x+3}+12=-\sqrt{x^2-2x-8}$

10. Mely valós x értékekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{2+x}}\geq 0$$

ELTE 2012. szeptember (fizika, földtudományi, környezettan BSc)

11. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$81\cdot\sqrt[3]{9^{x-7}}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$

12. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$2^{x-1}+2^x-2^{x+1}+2^{x+2}=14$$

13. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$5^{2x}-18\cdot 5^x-175=0$$

14. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$1<2^{x^2-5x+6}<16$$

ELTE 2013. szeptember (matematika BSc)

15. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$$

ELTE 2013. december

IV. Megoldások

1. Számítsa ki az alábbi hatványok pontos értékét!

a) 3^{-2} b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $16^{-\frac{1}{4}}$ d) $32^{\frac{2}{5}}$

e) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ g) $\left(\frac{81}{625}\right)^{-\frac{3}{4}}$ h) $0,001^{-\frac{1}{3}}$

Megoldás:

a) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

b) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $16^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}$

d) $32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = \sqrt[5]{32}^2 = 2^2 = 4$

e) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{81}^3 = 3^3 = 27$

g) $\left(\frac{81}{625}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{625}{81}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{625}{81}}^3 = \sqrt[4]{\frac{5^4}{3^4}}^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$

h) $0,001^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10$

2. Fejezze ki az a, b, c és d pozitív paraméterek hatványainak szorzataként az alábbi kifejezést!

$$\left(\frac{a^{-7}b^3}{c^4d^{-3}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^{-2}b}{c^2d^{-4}}\right)^3$$

(A) $a^{\frac{7}{6}}bc^{-10}d^{-9}$ (B) $ac^{-2}d^9$ (C) abc^2d^9 (D) $a^2bc^{-10}d^{-4}$ (E) Egyik sem

BME 2015. szeptember 11. (15B)

Megoldás:

A hatványozás azonosságait használjuk: $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$; $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\left(\frac{a^{-7}b^3}{c^4d^{-3}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^{-2}b}{c^2d^{-4}}\right)^3 = \frac{a^7b^{-3}}{c^{-4}d^3} \cdot \frac{a^{-6}b^3}{c^6d^{-12}} = a^{7-6} \cdot b^{-3+3} \cdot c^{4-6} \cdot d^{-3+12} = ac^{-2}d^9$$

Tehát a jó válasz a (B).

3. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos számértékét!

$$\sqrt[2013]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4026]{5+2\sqrt{6}}$$

ELTE 2013. szeptember (tanárszak)

Megoldás:

$$\sqrt[2013]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4026]{5+2\sqrt{6}} = \sqrt[4026]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(5+2\sqrt{6}\right)} = \sqrt[4026]{\left(3-2\sqrt{6}+2\right) \cdot \left(5+2\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \sqrt[4026]{\left(5-2\sqrt{6}\right) \cdot \left(5+2\sqrt{6}\right)} = \sqrt[4026]{25-4\cdot 6} = 1$$

Megjegyzés:

A megoldás során a következő azonosságokat használtuk: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot k]{a^k}$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$.

4. Melyek igazak az alábbi egyenlőségek közül, ha az ismeretlenek tetszőleges pozitív számokat jelölnek?

a) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^2}} = \sqrt[12]{a^3}$ b) $\frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}} = \sqrt[30]{a^{37}}$ c) $\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}b}} = \sqrt[24]{\frac{b^{11}}{a^5}}$ e) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a}$ f) $\frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{13}{12}}} = 1$

Megoldás:

Dolgozhatunk gyökökkel vagy törtkitevőjű hatványokkal. Ennek megfelelően némely részfeladatnál többféle megoldási lehetőséget is mutatunk.

a) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4 \cdot a^2}} = \sqrt[12]{a^6} = \sqrt{a}$ HAMIS

vagy:

$\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^2}} = \left(a \cdot \left(a^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ HAMIS

b) $$\frac{\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\left(a^2\right)^3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[5]{\left(a^4\right)^5}}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt[15]{a^6\cdot a^{20}}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt[30]{a^{52}}}{\sqrt[30]{a^{15}}}=\sqrt[30]{a^{37}}$$ IGAZ

vagy:

$$\frac{\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}=\frac{a^{\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{2}{5}+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{12+40-15}{30}}=a^{\frac{37}{30}}=\sqrt[30]{a^{37}}$$ IGAZ

c) $$\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$$ IGAZ

d) $$\sqrt{\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[4]{a^{-3}b}}=\sqrt{\sqrt[12]{a^4b^8}\cdot\sqrt[12]{a^{-9}b^3}}=\sqrt{\sqrt[12]{a^{-5}b^{11}}}=\sqrt[24]{\frac{b^{11}}{a^5}}$$ IGAZ

vagy:

$$\sqrt{\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[4]{a^{-3}b}}=\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{4}{12}}b^{\frac{8}{12}}a^{-\frac{9}{12}}b^{\frac{3}{12}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(a^{\frac{-5}{12}}b^{\frac{11}{12}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{-\frac{5}{24}}b^{\frac{11}{24}}=\sqrt[24]{\frac{b^{11}}{a^5}}$$ IGAZ

e) $$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$$ HAMIS

f) $$\frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{13}{12}}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{13}{12}}=a^{\frac{9+4-13}{12}}=a^0=1$$ IGAZ

Összefoglalva:

a) HAMIS	b) IGAZ	c) IGAZ
d) IGAZ	e) HAMIS	f) IGAZ

5. Gyöktelenítse az alábbi törtek nevezőjét!

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Megoldás:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2+2\sqrt{6}+3}{2-3}=-5-2\sqrt{6}$

6. Számítsa ki az alábbi kifejezés értékét!

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2$$

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 16

BME 2016. február 19. (16A)

Megoldás:

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=\sqrt{4-2\sqrt{3}}^{\,2}+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}^{\,2}=$$

$$=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}+4+2\sqrt{3}=8+2\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=8+2\sqrt{16-12}=8+4=12$$

A helyes válasz a (D).

7. Számítsa ki az alábbi kifejezés értékét!

$$\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}+\sqrt{28}\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{63}+\sqrt{7}\right)$$

Megoldás:

A négyzetgyök alatti számokat igyekezzünk szorzattá bontani oly módon, hogy az egyik tényező négyzetszám legyen. Ebből a tényezőből gyököt vonhatunk.

$$\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}+\sqrt{28}\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{63}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{5}+\sqrt{4\cdot 7}\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{9\cdot 7}+\sqrt{7}\right)=$$

$$=\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}\right)=\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{7}\right)=9\cdot 5-4\cdot 7=45-28=17$$

8. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{15+x}+2x-6=0$$

Megoldás:

Vizsgáljuk meg az egyenlet értelmezési tartományát! A négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám, emiatt $15+x\geq 0$, így $x\geq -15$.

Mielőtt négyzetre emelnénk az egyenletet, át kell rendezni oly módon, hogy az egyik oldalon egyedül maradjon a négyzetgyök. A négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás, emiatt vagy további vizsgálatokat kell tennünk az előjelekre vonatkozóan, vagy ellenőriznünk kell az egyenletet, hogy kiszűrjük az esetleges hamis gyököket. Ez utóbbi lehetőséget választjuk.

$$\sqrt{15+x}+2x-6=0$$

$$\sqrt{15+x}=-2x+6$$

$$15+x=(-2x+6)^2$$

$$15+x=4x^2-24x+36$$

$$4x^2-25x+21=0$$

$$x_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{25^2-4\cdot 4\cdot 21}}{8}=\frac{25\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{25\pm 17}{8}$$

$$x_1=\frac{21}{4} \text{ és } x_2=1$$

Mindkét gyök benne van az értelmezési tartományban. Még ellenőriznünk kell a megoldásokat, hisz a négyzetre emelés miatt hamis gyököt is kaphattunk.

Ha $x_1=\frac{21}{4}$: $\sqrt{15+\frac{21}{4}}+2\frac{21}{4}-6=\sqrt{\frac{81}{4}}+\frac{21}{2}-\frac{12}{2}=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=9$, tehát ez nem megoldás.

Ha $x_2=1$: $\sqrt{15+1}+2\cdot 1-6=4-4=0$.

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása az $x=1$.

Megjegyzés:

Jól látszik, hogy a $\frac{21}{4}$ valóban hamis gyök (és nem számolási hiba). Ha a négyzetre emelés előtti egyenletbe helyettesítjük a $\frac{21}{4}$ értéket, az egyik oldalra $\frac{9}{2}$, a másikra $-\frac{9}{2}$ adódik. Ezek négyzete valóban egyenlő.

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3+2\cdot\sqrt{5-2x}=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

b) $\sqrt{x+3}+12=-\sqrt{x^2-2x-8}$

Megoldás:

a) Vizsgáljuk meg az egyenlet értelmezési tartományát! A négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám, emiatt $5-2x\geq 0$, vagyis $x\leq 2,5$, ugyanakkor $x-3>0$, vagyis $x>3$. A két intervallumnak nincs közös része, emiatt az egyenlet értelmezési tartománya üres halmaz. Az egyenletnek nincs megoldása.

b) Mivel a négyzetgyök értéke nemnegatív szám, emiatt az egyenlet baloldala ≥ 12, míg a jobboldal ≤ 0 A két kifejezés nem lehet egyenlő, így az egyenletnek nincs megoldása.

10. Mely valós x értékekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{2+x}}\geq 0$$

ELTE 2012. szeptember (fizika, földtudományi, környezettan BSc)

Megoldás:

Mivel a négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat és a nevező értéke nem lehet nulla, a baloldali kifejezés csak akkor értelmes, ha $x<2$ és $x>-2$, tehát az alaphalmaz $-2<x<2$.

Hozzunk közös nevezőre, majd a közös nevezővel való beszorzás után rendezzük az egyenletet és emeljünk négyzetre! Ezt megtehetjük, mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív kifejezés áll.

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{2+x}}\geq 0$$

$$\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}-\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}}\geq 0$$

$$\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\geq 0$$

$$\sqrt{2+x}\geq\sqrt{2-x}$$

$$2+x\geq 2-x$$

$$x\geq 0$$

A $-2<x<2$ feltétel és $x\geq 0$ összevetéséből a megoldáshalmaz $0\leq x<2$.

11. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$81\cdot\sqrt[3]{9^{x-7}}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$

Megoldás:

A hatványozás azonosságainak felhasználásával mindkét oldalt átalakítjuk 3 hatványává.

$$81\cdot\sqrt[3]{9^{x-7}}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$

$$3^4\cdot\left(3^{2(x-7)}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{-3}\cdot 3^x$$

$$3^4\cdot 3^{\frac{2x-14}{3}}=3^{x-3}$$

$$3^{4+\frac{2x-14}{3}}=3^{x-3}$$

A 3-as alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a kitevők lesznek egyenlők. Rendezzük a kapott egyenletet!

$$4+\frac{2x-14}{3}=x-3$$
$$12+2x-14=3x-9$$
$$x=7$$

Ellenőrzés:

B: $81\cdot\sqrt[3]{9^{7-7}}=81$

J: $\frac{1}{27}\cdot 3^7=81$

A megoldás jó.

12. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$2^{x-1}+2^x-2^{x+1}+2^{x+2}=14$$

Megoldás:

A hatványozás azonosságainak segítségével alakítjuk a bal oldalt. Célunk, hogy 2^x-t kiemelhessünk.

$$2^{x-1}+2^x-2^{x+1}+2^{x+2}=14$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2^x+2^x-2\cdot 2^x+4\cdot 2^x=14$$
$$2^x\cdot\left(\frac{1}{2}+1-2+4\right)=14$$
$$2^x\cdot\left(\frac{1}{2}+3\right)=14$$
$$2^x\cdot\frac{7}{2}=14$$
$$2^x=4$$
$$x=2$$

(Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton.)

Ellenőrzés:

$2^{2-1}+2^2-2^{2+1}+2^{2+2}=2+4-8+16=14$

A megoldás jó.

13. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$5^{2x}-18\cdot 5^x-175=0$$

Megoldás:

Mivel $5^{2x} = \left(5^x\right)^2$, valójában egy másodfokú egyenlettel van dolgunk. Bevezetünk egy új ismeretlent: $5^x := a$. Behelyettesítés után megoldjuk a kapott másodfokú egyenletet, majd visszahelyettesítünk:

$$5^{2x} - 18 \cdot 5^x - 175 = 0$$

$$a^2 - 18a - 175 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 4 \cdot 175}}{2} = \frac{18 \pm 32}{2}$$

$$a_1 = 25 \text{ és } a_2 = -7$$

Visszahelyettesítünk: $a = 5^x$. Ha $a = 25$, akkor x=2; míg az $a = -7$ nem ad megoldást. (5^x értéke nem lehet negatív.)

Ellenőrzés:

$$5^{2 \cdot 2} - 18 \cdot 5^2 - 175 = 5^4 - 18 \cdot 25 - 175 = 625 - 450 - 175 = 0$$

A megoldás jó.

14. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$1 < 2^{x^2 - 5x + 6} < 16$$

ELTE 2013. szeptember (matematika BSc)

Megoldás:

$$1 < 2^{x^2 - 5x + 6} < 16$$

$$2^0 < 2^{x^2 - 5x + 6} < 2^4$$

Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, az egyenlőtlenség a kitevőkre is igaz, tehát:

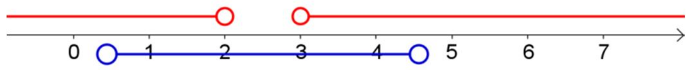
$$0 < x^2 - 5x + 6 < 4$$

Oldjuk meg külön a két egyenlőtlenséget!

Az $x^2 - 5x + 6$ kifejezés zérushelyeit a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével kapjuk: $x_1 = 2$ és $x_2 = 3$. Mivel a másodfokú függvény főegyütthatója pozitív, így a kifejezés pozitív, ha $x < 2$ vagy $x > 3$.

Az $x^2 - 5x + 6 < 4$ egyenlőtlenséget 0-ra rendezve: $x^2 - 5x + 2 < 0$. A másodfokú kifejezés zérushelyei: $x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \approx 0{,}44$ és $x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \approx 4{,}56$. Most a negatív értékeket keressük, emiatt: $\frac{5 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$.

Ábrázoljuk közös számegyenesen a kapott intervallumokat:



Összevetve a két egyenlőtlenség megoldását, mindkettő teljesül, ha

$$\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < 2 \text{ vagy } 3 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

15. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

ELTE 2013. december

Megoldás:

A hatványozás tulajdonságai alapján átalakítjuk az egyenletet, majd 2^x -nel (nem nulla) elosztjuk mindkét oldalt.

$$6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

$$2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 2^x \cdot 3^x = 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x$$

$$3^x + 6 \cdot 3^x = 1 + 2 + 4$$

$$7 \cdot 3^x = 7$$

$$3^x = 1$$

$$x = 0$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt.

Ellenőrzés:

B: $6^0 + 6^{0+1} = 1 + 6 = 7$

J: $2^0 + 2^{0+1} + 2^{0+2} = 1 + 2 + 4 = 7$

A megoldás jó.