5. Logaritmus

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Mennyi a $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{1}{125}$ kifejezés értéke?

(A) $-\frac{5}{3}$ (B) 9 (C) $\log_5 9$ (D) -9 (E) 5

BME 2015. szeptember 11. (17B)

Megoldás I.:

A feladat a logaritmus definíciójából kiindulva gyakorlatilag fejben végiggondolható. Az a kérdés, hogy a $\sqrt[3]{5}$ -öt hányadik hatványra kell emelni, hogy $\frac{1}{125}$ -öt kapjunk. A $\sqrt[3]{5}$ -nek a 3. hatványa 5, az $\frac{1}{125} = 5^{-3}$. Vagyis: $\frac{1}{125} = 5^{-3} = \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\right)^{-3}$ így a megoldás $3 \cdot (-3) = -9$.

Tehát a jó válasz a (D).

Megoldás II.:

Legyen $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{1}{125} = x$, így a logaritmus definíciója szerint egy exponenciális egyenletet kapunk.

$$\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{1}{125} = x$$

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^x = \frac{1}{125}$$

$$5^{\frac{1}{3}x} = 5^{-3}$$

$$\frac{x}{3} = -3$$

$$x = -9$$

Tehát a jó válasz a (D).

2. Mely valós x értékekre értelmezhető az $f(x) = \dfrac{1}{\log_2\left(\dfrac{x^2+1}{4}\right)}$ függvény? Azon x értékekre, melyekre

(A) $x \in$ (B) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ (C) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1, x \neq -1$ (D) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \sqrt{3}$, $x \neq -\sqrt{3}$ (E) Ezek egyike sem

BME 2014. május 19. (14)

Megoldás:

Két olyan műveletet tartalmaz a kifejezés, melynek értelmezési tartománya nem a valós számok halmaza. Egyrészt a logaritmus után csak pozitív szám állhat, másrészt a tört nevezője nem lehet nulla.

Tehát egyrészt $\frac{x^2+1}{4} > 0$. Ez minden x-re teljesül, hisz a tört számlálója is és nevezője is biztosan pozitív.

Másrészt:

$$\log_2\left(\frac{x^2+1}{4}\right) \neq 0$$
$$\frac{x^2+1}{4} \neq 1$$
$$x^2+1 \neq 4$$
$$x^2 \neq 3$$
$$x \neq \pm\sqrt{3}$$

Tehát a jó válasz a (D).

3. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$2\lg x - \lg(x+1) = \lg 5 - 1$$

ELTE 2011. október (matematika BSc)

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt a megoldást az $x > 0$ alaphalmazon keressük.

Felhasználva a logaritmus definícióját és azonosságait átalakíthatjuk az egyenletet:

$$2\lg x - \lg(x+1) = \lg 5 - 1$$
$$\lg x^2 - \lg(x+1) = \lg 5 - \lg 10$$
$$\lg \frac{x^2}{x+1} = \lg \frac{5}{10}$$

A logaritmus függvény szigorúan monotonitása miatt:

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}$$
$$2x^2 = x+1$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}.$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}$$

Az x_2 nincs az egyenlet értelmezési tartományában, emiatt az egyetlen megoldás az x=1.

Ellenőrzés:

B.: $2\lg 1 - \lg(1+1) = 2 \cdot 0 - \lg 2 \approx -0,301$

J.: $\lg 5 - 1 \approx 0,699 - 1 = -0,301$

Tehát a megoldás helyes.

4. Fejezze ki az *a* paramétert az $5 + 3^a = 3^b$ egyenlőségből! ($b > 2$)

(A) $a = \dfrac{b}{\log_3 5}$ (B) $a = \lg\left(3^b - 5\right)$ (C) $a = b - \log_3 5$ (D) $a = \log_3\left(3^b - 5\right)$ (E) $a = \dfrac{\lg 3}{\lg\left(3^b - 5\right)}$

BME 2015. szeptember 11. (16A)

Megoldás:

$$5 + 3^a = 3^b$$
$$3^a = 3^b - 5$$

Innen a logaritmus definíciójának segítségével fejezhetjük ki *a*-t.

$$a = \log_3\left(3^b - 5\right)$$

Tehát a jó válasz a (D).

II. Ismételjünk!

1. A logaritmus fogalma, azonosságai

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/05.pdf 1.oldal

2. Logaritmikus egyenletek

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/09.pdf 1.oldal

III. Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi logaritmusok pontos értékét!

   a) $\log_2 16$ b) $\log_4 \frac{1}{2}$ c) $\log_8 1$

   d) $\log_{\frac{1}{5}} 25$ e) $\log_{16} \sqrt{8}$ f) $\log_{\sqrt[3]{a}} \frac{1}{a^2}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

2. Határozza meg x értékét az alábbi kifejezésekben!

   a) $\log_5 x = 3$ b) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ c) $\log_8 x = -\frac{2}{3}$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = 8$

3. Határozza meg a logaritmusok alapját!

   a) $\log_x 16 = 4$ b) $\log_x 8 = 2$ c) $\log_x \frac{1}{3} = -3$ d) $\log_x \sqrt[4]{3} = -\frac{1}{4}$

4. Adja meg a következő kifejezések pontos értékét!

   a) $8^{\log_8 13}$ b) $25^{\log_{\sqrt{5}} 2}$ c) $3^{2-\log_3 2}$ d) $16^{\log_4 3 - \log_2 9}$

5. A logaritmus azonosságainak felhasználásával adja meg a következő kifejezések pontos értékét!

   a) $\lg 2 + \lg \sin 30° + \lg \cos 60° + 2\lg \sqrt{2}$

   b) $\log_3 5 - \log_3 \left(5 \cdot \sqrt[4]{9}\right)$

   c) $\log_5 \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}}$

   d) $\log_{\sqrt{2}} 9 + \log_{\sqrt{2}} 48 - 3 \cdot \log_{\sqrt{2}} 6$

   e) $\lg\left[\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_7 \sqrt[3]{49}\right)\right]$

6. A következő állítások közül mely(ek) igaz(ak) minden lehetséges a,b,c,k paraméterérték esetén? ($a,b,c>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1,\ k\neq 0$)

1. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$

2. $a^{\log_b a} = b$

3. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$

(A) Csak az 1. (B) Csak a 2. (C) Csak a 3. (D) Több is igaz. (E) Egyik sem igaz.

BME 2014. szeptember 12. (17A)

7. Mely valós x értékekre értelmezhető az $f(x)=\lg\left(x-\frac{1}{x}\right)$ függvény? Azon x értékekre, melyekre

(A) $1<x$ (B) $0<x$ (C) $-1<x<0$ vagy $1<x$ (D) $x<-1$ vagy $1<x$ (E) Ezek egyike sem

BME mintafeladatsor

8. Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezések értelmezhetőek!

a) $\lg(5-|x|)$

b) $\log_3(x^2+x-12)$

ELTE 2015. szeptember (tanárszakok)

9. Fejezze ki a $\left(\sqrt{x}\right)^{\lg y^2}=z$ egyenlőségből az y változót, ha $x>1$ és $y,z>0$!

(A) $y=\lg\frac{z}{4\lg x}$ (B) $y=2^{\frac{\lg z}{4\lg x}}$ (C) $y=10^{\frac{\lg z}{4\lg x}}$ (D) $y=10^{\frac{\lg z}{2\lg\sqrt{x}}}$ (E) $y=10^{\frac{z}{\lg x}}$

BME 2016. február 19. (16A)

10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$2[\lg(x-2)+\lg 5]=2+\lg(x+46)$$

11. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_3\left[1+\log_2\left(1+\log_3 x\right)\right]=1$$

12. Oldja meg a $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán és tekintse a következő 3 kijelentést!

A: Az egyenletnek egy megoldása van.

B: Az egyenletnek csak pozitív megoldása van.

C: Az egyenletnek van prímszám megoldása.

Az alábbiak közül melyik állítás igaz?

(A) A és C (B) A vagy C (C) A vagy B (D) B és C (E) ha B, akkor C

BME 2016. február 19. (16A)

13. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$3 \cdot 2^{x+1} + 5 = 7 \cdot 2^{x+3}$$

14. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok körében!

$$\frac{1}{2}\lg 2x \geq \lg(3-x) - \lg\sqrt{x+1}$$

ELTE 2013. szeptember (tanárszak)

15. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \lg x - 3 &= \lg y^2 \\ \lg x^5 - 4 &= \lg \frac{1}{y} \end{aligned}\right\}$$

ELTE 2015. szeptember (fizika BSc)

16. Egy változtatható fényerejű lámpa m fényérzetét a P teljesítménye függvényében az $m = 2{,}5 \cdot \log_2 \frac{P}{P_0}$ képlet adja, ahol $P_0 = 20W$. Milyen P_2 értéknél lesz az m_2 fényérzetérték kétszer akkora, mint a $P_1 = 100W$ teljesítményhez tartozó m_1 fényérzet?

(A) 200 W (B) 250 W (C) 500 W (D) Nincs ilyen P_2 érték (E) Ezek egyike sem.

BME 2014. december 15. (14B)

IV. Megoldások

1. Számítsa ki az alábbi logaritmusok pontos értékét!

a) $\log_2 16$ b) $\log_4 \frac{1}{2}$ c) $\log_8 1$

d) $\log_{\frac{1}{5}} 25$ e) $\log_{16} \sqrt{8}$ f) $\log_{\sqrt[3]{a}} \frac{1}{a^2}$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

Megoldás:

a) $\log_2 16 = 4$, mivel $2^4 = 16$

b) $\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, mivel $4^{\frac{1}{2}} = 2$ és $2^{-1} = \frac{1}{2}$, tehát $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

c) $\log_8 1 = 0$, mivel minden szám 0. hatványa 1

d) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$, mivel $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$

e) $\log_{16} \sqrt{8} = \log_{2^4} 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{8}$, mivel $16^{\frac{3}{8}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{8}} = 2^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$

f) $\log_{\sqrt[3]{a}} \frac{1}{a^2} = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^{-2} = 3\cdot(-2) = -6$, mivel $\left(\sqrt[3]{a}\right)^{-6} = a^{\frac{1}{3}\cdot(-6)} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

2. Határozza meg x értékét az alábbi kifejezésekben!

a) $\log_5 x = 3$ b) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ c) $\log_8 x = -\frac{2}{3}$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = 8$

Megoldás:

A logaritmus definíciója szerint: ha $\log_a b = c$, akkor $a^c = b$.

a) $\log_5 x = 3$; $x = 5^3 = 125$

b) $\log_3 x = \frac{1}{2}$; $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

c) $\log_8 x = -\frac{2}{3}$; $x = 8^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = 8$; $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

3. Határozza meg a logaritmusok alapját!

a) $\log_x 16 = 4$ b) $\log_x 8 = 2$ c) $\log_x \frac{1}{3} = -3$ d) $\log_x \sqrt[4]{3} = -\frac{1}{4}$

Megoldás:

A logaritmus értelmezési tartományának megfelelően $x > 0$ és $x \neq 1$.

a) $\log_x 16 = 4$; $x^4 = 16$, amiből $x = 2$

b) $\log_x 8 = 2$; $x^2 = 8$, amiből $x = \sqrt{8}$

c) $\log_x \frac{1}{3} = -3$; $x^{-3} = \frac{1}{3}$, vagyis $x^3 = 3$, amiből $x = \sqrt[3]{3}$

d) $\log_x \sqrt[4]{3} = -\frac{1}{4}$; $x^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$, vagyis $\left(x^{-1}\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}}$ amiből $x = \frac{1}{3}$

4. Adja meg a következő kifejezések pontos értékét!

a) $8^{\log_8 13}$ b) $25^{\log_{\sqrt{5}} 2}$ c) $3^{2-\log_3 2}$ d) $16^{\log_4 3 - \log_2 9}$

Megoldás:

A megoldás során felhasználunk két egyszerű összefüggést, melyek a logaritmus definíciójából következnek. $a^{\log_a b} = b$ és $\log_a b = \log_{a^k} b^k$. Ezeken felül a hatványozás és a logaritmus azonosságait használjuk. Egyes részfeladatoknál többféle megoldási utat is mutatunk.

a) $8^{\log_8 13} = 13$

b) $25^{\log_{\sqrt{5}} 2} = 25^{\log_{\sqrt{5}^4} 2^4} = 25^{\log_{25} 16} = 16$

vagy: $25^{\log_{\sqrt{5}} 2} = \left(\sqrt{5}\right)^{4\log_{\sqrt{5}} 2} = \left(\sqrt{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}} 2^4} = 2^4 = 16$

c) $3^{2-\log_3 2} = \frac{3^2}{3^{\log_3 2}} = \frac{9}{2}$

vagy: $3^{2-\log_3 2} = 3^{\log_3 9 - \log_3 2} = 3^{\log_3 \frac{9}{2}} = \frac{9}{2}$

d) $16^{\log_4 3 - \log_2 9} = 16^{\log_{16} 9 - \log_{16} 9^4} = 16^{\log_{16} \frac{9}{9^4}} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$

vagy: $16^{\log_4 3 - \log_2 9} = \frac{16^{\log_4 3}}{16^{\log_2 9}} = \frac{4^{2\log_4 3}}{2^{4\log_2 9}} = \frac{4^{\log_4 3^2}}{2^{\log_2 9^4}} = \frac{3^2}{9^4} = \frac{1}{729}$

5. A logaritmus azonosságainak felhasználásával adja meg a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\lg 2 + \lg\sin 30° + \lg\cos 60° + 2\lg\sqrt{2}$

b) $\log_3 5 - \log_3\left(5\cdot\sqrt[4]{9}\right)$

c) $\log_5 \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}}$

d) $\log_{\sqrt{2}} 9+\log_{\sqrt{2}} 48-3\cdot\log_{\sqrt{2}} 6$

e) $\lg\left[\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_7 \sqrt[3]{49}\right)\right]$

Megoldás:

a) $\lg 2+\lg\sin 30°+\lg\cos 60°+2\lg\sqrt{2}=\lg 2+\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{1}{2}+\lg\left(\sqrt{2}\right)^2==\lg\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\right)=$

$=\lg 1=0$

b) $\log_3 5-\log_3\left(5\cdot\sqrt[4]{9}\right)=\log_3\frac{5}{5\cdot\sqrt[4]{9}}=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$

c) $\log_5\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}}=\log_5\frac{5^{\frac{3}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}}=\log_5 5^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=\log_5 5^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$

d) $\log_{\sqrt{2}} 9+\log_{\sqrt{2}} 48-3\cdot\log_{\sqrt{2}} 6=\log_{\sqrt{2}}\frac{9\cdot 48}{6^3}=\log_{\sqrt{2}}\frac{3^2\cdot 3\cdot 2^4}{2^3\cdot 3^3}=\log_{\sqrt{2}} 2=2$

e) $\lg\left[\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_7 \sqrt[3]{49}\right)\right]=\lg\left[\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_7 7^{\frac{2}{3}}\right)\right]=\lg\left(\log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}\right)=\lg 1=0$

6. A következő állítások közül mely(ek) igaz(ak) minden lehetséges *a,b,c,k* paraméterérték esetén? ($a,b,c>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1,\ k\neq 0$)

1. $\log_{a^k} b=\frac{1}{k}\log_a b$

2. $a^{\log_b a}=b$

3. $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$

(A) Csak az 1. (B) Csak a 2. (C) Csak a 3. (D) Több is igaz. (E) Egyik sem igaz.

BME 2014. szeptember 12. (17A)

Megoldás:

1. $\log_{a^k} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^k}=\frac{\log_a b}{k}=\frac{1}{k}\log_a b$ Az 1. állítás igaz.

2. $a^{\log_b a}=b$ hamis, pl.: $4^{\log_2 4}=4^2=16$ (Az azonosság helyesen: $a^{\log_a b}=b$)

3. $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ Igaz, ez egy ismert azonosság.

Tehát az 1. és a 3. állítás igaz, vagyis a (D) a jó válasz.

7. Mely valós x értékekre értelmezhető az $f(x)=\lg\left(x-\frac{1}{x}\right)$ függvény? Azon x értékekre, melyekre

(A) $1<x$ (B) $0<x$ (C) $-1<x<0$ vagy $1<x$ (D) $x<-1$ vagy $1<x$ (E) Ezek egyike sem

BME mintafeladatsor

Megoldás:

A nevező miatt $x\neq 0$. A logaritmus miatt $x-\frac{1}{x}>0$. Közös nevezőre hozva a baloldalon azt kapjuk, hogy $\frac{x^2-1}{x}>0$. A tört értéke akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű.

1. eset:

A számláló pozitív, ha $x^2-1>0$, ha $x^2>1$, vagyis, ha $x<-1$ vagy $x>1$. A nevező miatt $x>0$. Tehát $x>1$.

A számláló negatív, ha $x^2-1<0$, vagyis $-1<x<1$. A nevező miatt most $x<0$. Tehát $-1<x<0$.

A feladat megoldása tehát $-1<x<0$ vagy $x>1$.

A jó válasz a (C).

8. Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezések értelmezhetőek!

a) $\lg(5-|x|)$

b) $\log_3(x^2+x-12)$

ELTE 2015. szeptember (tanárszakok)

Megoldás:

A logaritmus után csak pozitív szám állhat.

a) $5-|x|>0$, tehát $|x|<5$, ami akkor igaz, ha $-5<x<5$

b) $x^2+x-12>0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva megkapjuk a kifejezés zérushelyeit: $x_1=-4$ és $x_2=3$. A másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, így a kifejezés akkor pozitív, ha $x<-4$ vagy $x>3$.

9. Fejezze ki a $\left(\sqrt{x}\right)^{\lg y^2}=z$ egyenlőségből az y változót, ha $x>1$ és $y,z>0$!

(A) $y=\lg\frac{z}{4\lg x}$ (B) $y=2^{\frac{\lg z}{4\lg x}}$ (C) $y=10^{\frac{\lg z}{4\lg x}}$ (D) $y=10^{\frac{\lg z}{2\lg\sqrt{x}}}$ (E) $y=10^{\frac{z}{\lg x}}$

BME 2016. február 19. (16A)

Megoldás:

$$\left(\sqrt{x}\right)^{\lg y^2} = z$$

$$\lg y^2 = \log_{\sqrt{x}} z$$

$$\lg y^2 = \frac{\lg z}{\lg\sqrt{x}}$$

$$2\lg y = \frac{\lg z}{\lg\sqrt{x}}$$

$$\lg y = \frac{\lg z}{2\lg\sqrt{x}}$$

$$y = 10^{\frac{\lg z}{2\lg\sqrt{x}}}$$

(Első lépésben a logaritmus definícióját használtuk, majd az ismert azonosság használatával a jobb oldalon is áttértünk 10-es alapú logaritmusra. Az egyenlet alakítása után az utolsó lépést ismét a logaritmus definíciója alapján végezhettük el.)

Tehát a jó válasz a (D).

10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$2[\lg(x-2)+\lg 5] = 2+\lg(x+46)$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt $x-2>0$ és $x+46>0$, tehát $x>2$.

Az egyenletet a logaritmus azonosságainak segítségével úgy alakítjuk, hogy mindkét oldalon egyetlen kifejezés azonos alakú logaritmusát lássuk. Ekkor a logaritmus monotonitása miatt elhagyhatjuk a logaritmust.

$$2\left[\lg(x-2)+\lg 5\right] = 2+\lg(x+46)$$

$$\lg(x-2)^2+\lg 5^2 = \lg 100+\lg(x+46)$$

$$\lg\left(25\cdot(x-2)^2\right) = \lg\left(100\cdot(x+46)\right)$$

$$25\cdot(x-2)^2 = 100\cdot(x+46)$$

$$x^2-4x+4 = 4x+184$$

$$x^2-8x-180=0$$

$$x_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{64+720}}{2} = \frac{8\pm 28}{2}$$

$$x_1 = 18 \text{ és } x_2 = -10$$

A -10 nincs az egyenlet értelmezési tartományában, így egy megoldásunk van, a 18.

Az $x > 2$ feltétel mellett ekvivalens átalakításokat végeztünk, a kapott eredmény valóban megoldása az egyenletnek.

11. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_3\left[1+\log_2\left(1+\log_3 x\right)\right]=1$$

Megoldás:

Az egyenletet kívülről tudjuk „lebontani”, a megoldáshoz a logaritmus definícióját használva.

$$\log_3\left[1+\log_2\left(1+\log_3 x\right)\right]=1$$
$$1+\log_2\left(1+\log_3 x\right)=3$$
$$\log_2\left(1+\log_3 x\right)=2$$
$$1+\log_3 x=4$$
$$\log_3 x=3$$
$$x=27$$

Mivel az egyenlet megoldása során a logaritmus definícióját használtuk, valamit ekvivalens átalakításokat, a kapott eredmény biztosan benne van az értelmezési tartományban és valóban megoldás.

A kapott eredményt le is ellenőrizhetjük:

$$\log_3\left[1+\log_2\left(1+\log_3 27\right)\right]=\log_3\left[1+\log_2\left(1+3\right)\right]=\log_3\left[1+\log_2\left(4\right)\right]=\log_3\left[1+2\right]=\log_3 3=1$$

12. Oldja meg a $\log_2^2 x-\log_2 x-2=0$ egyenletet a valós számok halmazán és tekintse a következő 3 kijelentést.

A: Az egyenletnek egy megoldása van.

B: Az egyenletnek csak pozitív megoldása van.

C: Az egyenletnek van prímszám megoldása.

Az alábbiak közül melyik állítás igaz?

(A) A és C (B) A vagy C (C) A vagy B (D) B és C (E) ha B, akkor C

BME 2016. február 19. (16A)

Megoldás:

Az egyenlet akkor van értelmezve, ha $x > 0$. Látható, hogy egy másodfokú egyenlettel van dolgunk. Használjuk a megoldóképletet!

$$\log_2 x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$$

$\log_2 x_1 = 2$, amiből $x_1 = 4$ és $\log_2 x_2 = -1$, amiből $x_2 = \frac{1}{2}$.

A fenti állítások közül tehát A és C hamis, B igaz. Így a feladatra a jó válasz a (C).

Megjegyzés:

Az és kapcsolattal összekötött állítás csak akkor igaz, ha mindkét állítás igaz, vagy esetén elég, ha az egyik igaz. Az (E) válasz helyességéhez a C állításnak is igaznak kéne lennie.

13. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$3\cdot 2^{x+1}+5=7\cdot 2^{x+3}$$

Megoldás:

Az egyenletet úgy alakítjuk, hogy 2^x -t ki tudjunk emelni.

$$\begin{aligned} 3\cdot 2^{x+1}+5&=7\cdot 2^{x+3} \\ 3\cdot 2^x\cdot 2-7\cdot 2^x\cdot 8&=-5 \\ 2^x\cdot(6-56)&=-5 \\ 2^x&=\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Az ismeretlen a kitevőben van, a jobb oldal pedig nem írható fel 2 egész kitevős hatványaként, ezért logaritmus használatával tudjuk befejezni az egyenlet megoldását. A logaritmus definíciója szerint:

$$x=\log_2\frac{1}{10}$$

Ha ki szeretnénk számolni a kapott végeredmény közelítő értékét, át kell térnünk 10-es alapú logaritmusra:

$$x=\log_2\frac{1}{10}=\frac{\lg\frac{1}{10}}{\lg 2}\approx -3{,}322$$

Mivel csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredmény valóban megoldása az egyenletnek. Az ellenőrzést elvégezhetjük pontosan a logaritmikus alakkal számolva, vagy a közelítő értékkel, akkor csak közelítőleg fog megegyezni a két oldal.

14. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok körében!

$$\frac{1}{2}\lg 2x\ge \lg(3-x)-\lg\sqrt{x+1}$$

ELTE 2013. szeptember (tanárszak)

Megoldás:

A logaritmusok és a négyzetgyök miatt meg kell vizsgálnunk az értelmezési tartományt. $x>0$; $3-x>0$, vagyis $x<3$; $x+1>0$, amiből $x>-1$. Összegezve az értelmezési tartomány: $0<x<3$.

Alakítsuk át az egyenlőtlenséget a logaritmus azonosságainak a használatával.

$$\frac{1}{2}\lg 2x \ge \lg(3-x) - \lg\sqrt{x+1}$$
$$\lg\sqrt{2x} \ge \lg\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$$

A 10-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő, így elhagyhatjuk a logaritmusokat.

$$\sqrt{2x} \ge \frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$$

Az értelmezési tartomány szerint mindkét oldal pozitív, így négyzetre emelhetjük az egyenlőtlenséget:

$$2x \ge \frac{9-6x+x^2}{x+1}$$
$$2x^2+2x \ge 9-6x+x^2$$
$$x^2+8x-9 \ge 0$$

A másodfokú kifejezés zérushelyeit a megoldóképletbe helyettesítve kapjuk. Mivel a másodfokú tag együtthatója pozitív, a kifejezés a két zérushely között negatív, nekünk éppen ennek komplementere a megfelelő.

$$x_{1,2} = \frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{2} = \frac{-8\pm 10}{2}$$

$x_1 = 1$ és $x_2 = -9$. Tehát $x \le -9$ vagy $x \ge 1$.

Ezt az eredményt összevetve az értelmezési tartománnyal a megoldás: $1 \le x < 3$.

15. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \lg x - 3 &= \lg y^2 \\ \lg x^5 - 4 &= \lg\frac{1}{y} \end{aligned}\right\}$$

ELTE 2015. szeptember (fizika BSc)

Megoldás:

A logaritmus értelmezési tartománya miatt x és y is pozitív számok.

A logaritmus azonosságaival átalakítjuk az egyenletrendszert, majd új ismeretleneket vezetünk be: $a := \lg x$ és $b := \lg y$.

$$\left.\begin{aligned} \lg x - 3 &= \lg y^2 \\ \lg x^5 - 4 &= \lg \frac{1}{y} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \lg x - 3 &= 2\lg y \\ 5\lg x - 4 &= -\lg y \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a - 3 &= 2b \\ 5a - 4 &= -b \end{aligned}\right\}$$

A második egyenletet 2-vel megszorozva és összeadva a két egyenletet kapjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned} a - 3 &= 2b \\ 10a - 8 &= -2b \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} 11a - 11 &= 0 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Innen $b = -1$ adódik.

Visszahelyettesítve $\lg x = 1$, vagyis $x = 10$, illetve $\lg y = -1$, amiből $y = \frac{1}{10}$.

A kapott számpár benne van az értelmezési tartományban.

Ellenőrzés:

I. egyenlet: $\lg 10 - 3 = 1 - 3 = -2$; $\lg\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \lg 10^{-2} = -2$

II. egyenlet: $\lg 10^5 - 4 = 5 - 4 = 1$; $\lg\frac{1}{0{,}1} = \lg 10 = 1$

16. Egy változtatható fényerejű lámpa m fényérzetét a P teljesítménye függvényében az $m = 2{,}5 \cdot \log_2 \frac{P}{P_0}$ képlet adja, ahol $P_0 = 20W$. Milyen P_2 értéknél lesz az m_2 fényérzetérték kétszer akkora, mint a $P_1 = 100W$ teljesítményhez tartozó m_1 fényérzet?

(A) 200 W (B) 250 W (C) 500 W (D) Nincs ilyen P_2 érték (E) Ezek egyike sem.

BME 2014. december 15. (14B)

Megoldás:

A feladat szövege szerint $m_1 = 2{,}5 \cdot \log_2 \frac{100}{20}$ és $m_2 = 2m_1 = 2{,}5 \cdot \log_2 \frac{P_2}{20}$. Ebből adódik a megoldandó egyenlet:

$$2 \cdot 2,5 \cdot \log_2 \frac{100}{20} = 2,5 \cdot \log_2 \frac{P_2}{20}$$

$$2 \cdot \log_2 5 = \log_2 \frac{P_2}{20}$$

$$\log_2 25 = \log_2 \frac{P_2}{20}$$

$$25 = \frac{P_2}{20}$$

$$P_2 = 500$$

A helyes válasz tehát a (C).