7. Számelmélet

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Lehet-e négyzetszám az a pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában 510 darab 1-es és valahány 0 szerepel?

ELTE 2006. október 27. (matematika szak BSc)

Megoldás:

A szám számjegyeinek összege: $510 \cdot 1 = 510$. Így a szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, ezért nem lehet négyzetszám.

2. Hány olyan X számjegy van, melyre a $\overline{201X6}$ tízes számrendszerben felírt ötjegyű szám osztható hattal?

(A) Három (B) Négy (C) Hat (D)Tíz (E) Egy ilyen sincs

BME 2015. december 14. (14A)

Megoldás:

Egy szám akkor osztható hattal, ha osztható kettővel és hárommal is. A kettővel való oszthatóság teljesül, mivel a szám páros.

Hárommal való oszthatósághoz vizsgáljuk meg a számjegyek összegét!

A számjegyek összege: $9 + X,$ ez akkor osztható hárommal ha az X: $0;\ 3;\ 6; 9$.

Tehát a jó válasz a (B).

3. Mennyi az $n^2 + 2n$ szám utolsó előtti számjegye, ha az utolsó számjegye 4, és az n természetes szám?

ELTE 2012. szeptember (matematika szak BSc)

Első megoldás:

$n^2 + 2n = (n + 1)^2 - 1.$

Ha a szám utolsó számjegye 4, akkor az $(n + 1)^2$ négyzetszám 5-re végződik.

Ekkor az $n + 1$ is 5-re végződik.

Ha egy 5-re végződő számot négyzetre emelünk, akkor a négyzetszám 25-re végződik. Tehát az utolsó előtti szám a 2.

Második megoldás:

Legyen $n = 10a + b$, ekkor az

$n^2 + 2n = (10a + b)^2 + 2(10a + b) = 100a^2 + 20ab + b^2 + 20a + 2b =$

$= 100a^2 + 20a(b+1) + b^2 + 2b.$

A fenti kifejezés utolsó számjegye csak a $b^2 + 2b$ végződésétől függ, mert $100a^2 + 20a(b+1)$ nullára végződik.

Megvizsgáljuk b összes lehetséges végződését (10 eset):

b utolsó számjegye	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b^2 + 2b$ utolsó számjegye	0	3	8	5	4	5	8	3	0	9

Látjuk, hogy a $b^2 + 2b$ csak akkor végződik 4-re, ha a b 4-re végződik.

Ekkor b+1 5-re, és a $20a(b+1)$ kifejezés legalább két nullára végződik. Vagyis az utolsó két számjegy a $b^2 + 2b$-től függ.

A négyre végződő b számot felírhatjuk úgy, hogy $b = 10x + 4$.

$b^2 + 2b = (10x+4)^2 + 2(10x+4) = 100x^2 + 80x + 16 + 20x + 8 =$

$= 100x^2 + 100x + 16 + 8.$

Innen jól látható, hogy az utolsó két számjegyet a $16 + 8 = 24$ határozza meg.

Utolsó előtti számjegy így a 2.

4. Határozza meg azokat az a és b egész számokat, amelyekre teljesül, hogy az

$$a + b + 20 = ab,$$

és az a, b, 21 hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető!

ELTE 2007. március (matematika szintfelmérő)

Első megoldás:

Alakítsuk át az $a + b + 20 = ab$ egyenletet úgy, hogy az egyik oldalon szorzat álljon!

$$20 = ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1$$

$$21 = (a-1)(b-1).$$

$21 = 1 \cdot 21 = 3 \cdot 7$. Mivel az a és b szakaszokat jelent, így pozitív egész számoknak kell lenniük.

Ha $a - 1 = 1$ és $b - 1 = 21$, akkor $a = 2$ és $b = 22$. Ekkor a szakaszok 2; 22; 21. Ezekből a szakaszokból szerkeszthető háromszög, mert a háromszög egyenlőtlenség teljesül.

A sorrend felcserélésével $(21 = 21 \cdot 1)$, $a = 22$ és $b = 2$, ami szintén megoldás.

Ha $21 = 3 \cdot 7$, akkor $a = 4$ és $b = 8$. Ekkor a szakaszok 4; 8; 21, de ekkor $4 + 8 = 12 < 21$, nem teljesül a háromszög egyenlőtlenség. Nincs ilyen háromszög.

Második megoldás:

Fejezzük ki az egyenletből (például) az a-t:

$$ab - a = b + 20$$

$$a(b-1) = b + 20 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b+20}{b-1}$$

$$a = \frac{b+20}{b-1} = \frac{b-1+21}{b-1} = 1 + \frac{21}{b-1}.$$

Mivel a pozitív egész, ezért a $b-1$ értéke csak a 21 pozitív osztói valamelyikével lehet egyenlő.

$b-1$	1	3	7	21
b	2	4	8	22
a	22	8	4	2
harmadik oldal	21	21	21	21

Az összetartozó számhármasok közül itt is csak a 2; 22; 21 számhármas elégíti ki a feltételeket.

5. Az A), B), C), D) állítások közül karikázza be az igaz állítás betűjelét!

   Néhány számot négy prím szorzataként írtunk fel, némelyik szorzótényező azonban elmosódott. De tudjuk, hogy egy páros számról van szó, amely 9-cel osztható négyzetszám. A keresett szám az alábbi lehet:

   A) $2 \cdot 5 \cdot \square \cdot \square$ *B)* $2 \cdot \square \cdot 3 \cdot 11$ *C)* $2 \cdot 3 \cdot \square \cdot \square$ *D)* $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \square$

ELTE 2015. március (matematika BSc)

Megoldás:

A szám prímtényezős felbontásában szerepel a 2, mert a szám páros, legalább két 3-as van benne, mert osztható 9-cel, és minden prímszám kitevője páros, mert a szám négyzetszám. Az A) és B) esetében, ha két 3-assal biztosítjuk a 9-cel való oszthatóságot, a szám nem lesz négyzetszám. A D) esetben, ha a hiányzó tényezőt 2-nek választjuk, szintén nem lesz a szám négyzetszám. A C) esetben egy 2-est és egy 3-ast írva a hiányzó helyekre, minden feltétel teljesül.

Tehát a jó válasz a (C).

II. Ismételjünk!

1. Maradékos osztás, oszthatóság fogalma és tulajdonságai

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/04.pdf 1. oldal

2. Prímszám, összetett szám, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/04.pdf 2. oldal

III. Gyakorló feladatok

1. Írjuk fel prímhatványok szorzataként a 4896-ot!
2. Hány nullára végződik az $56!$?
3. Mutassuk meg, hogy a $15^{2004} + 7$ nem prímszám!
4. Mely *n* természetes számra lesz $n^3 - n^2 + n - 1$ prímszám?

ELTE 2006. záródolgozat (matematika szak BSc)

5. Bizonyítsuk be, hogy
   a) $10 \mid 426^{19} + 132^{58}$; ($a$ | b jelentése a osztója b-nek)
   b) $3 \mid 1516^{40} + 202^{50} + 400^{60}$!
6. Bizonyítsuk be, hogy
   a) $5 \mid 4 \cdot 6^n + 5^n - 4$, ha $n \geq 1;\ n \in \mathbb{N}$;
   b) $4 \mid n^4 - 2n^3 + n^2$, ha $n \in \mathbb{N}$!
7. Milyen számjegyek írhatók az *a, b, c, d, e* helyére, ha
   a) $8 \mid \overline{6723a4}$;
   b) $15 \mid \overline{34b25c}$;
   c) $12 \mid \overline{78de2}$?
8. Az alábbi állítások a természetes számokra vonatkoznak.
   I. Ha egy szám számjegyeinek összege 27, akkor osztható 27-tel.
   II. Négy egymást követő szám szorzata osztható 24-gyel.
   III. Három egymást követő szám összege osztható hattal.
   IV. Ha egy szám osztható 3-mal és 15-tel, akkor 45-tel is.

   Közöttük az igaz állítások száma:

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ELTE 2015. májusi teszt

9. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját, és legkisebb közös többszörösét!
   a) $(125; 33)$; $[125; 33]$;
   b) $(840; 3900)$; $[840; 3900]$;
   c) $(a; b)$; $[a; b]$, $ha\ \ a = 2^5 \cdot 3^{12} \cdot 7^9 \cdot 17^5 \cdot 23$; $b = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7^{11} \cdot 11^8 \cdot 13$.
10. Az út egyik oldalán villanyoszlopok állnak 60 m távolságra egymástól. A másik oldalon fák állnak 35 m-re egymástól. Egyik helyen egymással szemben van egy villanyoszlop és egy fa. Legközelebb hány m-re lesz ismét egymással szemben fa és villanyoszlop?

11. Mely x, y pozitív természetes számokra igaz, hogy

    a) $(x; 8) = 4$;

    b) $[388; y] = 3492$?

12. Melyek azok a számpárok, amelyeknek legnagyobb közös osztója 15, legkisebb közös többszöröse 4725?

13. Hány pozitív osztója van a következő számoknak?

    a) $a = 512$;

    b) $b = 3600$;

    c) $c = 3^4 \cdot 7^{10} \cdot 11^2 \cdot 17^6 \cdot 19$

14. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, melynek pontosan 12 pozitív osztója van?

15. Mely n egész számokra lesz a következő kifejezés egész szám?

$$\frac{5n-1}{n+1}$$

16. Egy ötjegyű szám osztható 7-tel, 8-cal és 9-cel. Az első két számjegyből álló szám prímszám, eggyel nagyobb egy négyzetszámnál, s a két számjegy összege kétjegyű. Melyik ez az ötjegyű szám?

IV. Megoldások:

1. Íjuk fel prímhatványok szorzataként a 4896-ot!

Megoldás:

A számelmélet alaptétele: Bármely 1-nél nagyobb egész szám felbontható prímszámok szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Ez alapján:

$$\begin{array}{r|l} 4896 & 2 \\ 2448 & 2 \\ 1224 & 2 \\ 612 & 2 \\ 306 & 2 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$4896 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17.$

2. Hány nullára végződik az $56!$?

Megoldás:

A nullára végződést az határozza meg, hogy a 10 hányadik hatványon szerepel a számban. Mivel $10 = 2 \cdot 5,$ ezét e kettőnek a kitevőjét kell meghatároznunk. A 2 biztos, hogy nagyobb kitevővel szerepel, mint az 5, ezért elég az 5 kitevőjét figyelembe venni.

$56! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 56.$ A tényezők közül az $5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55$-ben $(56: 5 = 11{,}2),$ 11 számban szerepel az 5 tényezőként, és egyedül a 25-ben van a második hatványon.

Tehát az 5 kitevője $11 + 1 = 12.$ A 2 biztos, hogy nagyobb kitevőn lesz. Így az 56! 12 nullára végződik.

Érdekességként határozzuk meg a 2 kitevőjét is! A 2, mint tényező, minden második számban szerepel. Minden negyedik számban második hatványon, minden nyolcadik számban harmadik hatványon, minden tizenhatodik számban negyedik hatványon és minden harminckettedik számban ötödik hatványon.

$$56: 2 = 28; \quad 56: 4 = 14; \quad 56: 8 = 7; \quad 56: 16 = 3{,}5; \quad 56: 32 = 1{,}75.$$

Tehát 28 számban legalább 1-szer; 14 számban legalább 2-szer; 7 számban legalább 3-szor; 3 számban legalább 4-szer; 1 számban 5-ször szerepel a 2, mint tényező. A 2 kitevője így $28 + 14 + 7 + 3 + 1 = 53.$

3. Mutassuk meg hogy a $15^{2004} + 7$ nem prímszám!

Megoldás:

Az 5-re végződő számok hatványai biztosan 5-re végződnek. $5 + 7 = 12,$ a szám biztosan 2-re végződik: így a szám páros, osztható 2-vel (nem egyenlő 2-vel), tehát nem prím.

4. Mely n természetes számra lesz $n^3 - n^2 + n - 1$ prímszám?

ELTE 2006. záródolgozat (matematika szak BSc)

Megoldás:

Ha a p prímszám és $p = ab$, akkor vagy a=1, vagy b=1. $(a, b \in \mathbb{Z})$.

Alakítsuk szorzattá a kifejezést!

$n^3 - n^2 + n - 1 = n^2(n-1) + (n-1) = (n-1)(n^2+1)$

Mivel $n^2 + 1 > 1$, ezért az $n - 1 = 1$ kell teljesüljön. Tehát $n = 2$-re lesz a kifejezés prímszám.

Ellenőrzés: $8 - 4 + 2 - 1 = 5$, és az 5 prímszám.

5. Bizonyítsuk be, hogy

a) $10 \mid 426^{19} + 132^{58}$;

b) $3 \mid 1516^{40} + 202^{50} + 400^{60}$!

Megoldás:

a) Egy szám akkor osztható 10-zel, ha az utolsó számjegye 0.

Egy egész szám hatványainak végződése csak az alap utolsó számjegyétől függ.

Egy 6-ra végződő szám mindegyik pozitív hatványa 6-ra végződik.

A kettő hatványai:

hatvány	utolsó számjegy
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	6
2^5	2

Megfigyelhető, hogy a 2 hatványainak utolsó számjegye periodikusan ismétlődik. A periódus 4. A hatványok végződését megkaphatjuk úgy, hogy a kitevő néggyel való osztásának maradékát határozzuk meg. $58 = 14 \cdot 4 + 2$, tehát a 132^{58} hatvány 4-re végződik.

Vagyis az összeg végződése: 6+4=10, tehát nullára végződik, így a kifejezés osztható 10-zel.

b) Először vizsgáljuk meg, hogy az alapok mennyi maradékot adnak 3-mal osztva.

$1516 = 3k + 1$; $202 = 3l + 1$; $400 = 3m - 1$.

$(3k+1)^{40} + (3l+1)^{50} + (3m-1)^{60}$ A hatványra emelés elvégzése után olyan összeget kapunk, melyben minden tagban szerepel a 3 tényezőnként, kivéve az utolsó tagot. Az utolsó tag mindhárom esetben 1, így a három hatvány hárommal való osztási maradéka 1, tehát az összegük osztható hárommal.

6. Bizonyítsuk be, hogy

   a) $5 \mid 4 \cdot 6^n + 5^n - 4$, ha $n \geq 1$ és $n \in \mathbb{N}$;

   b) $4 \mid n^4 - 2n^3 + n^2$, ha $n \in \mathbb{N}$!

   Megoldás:

   a) Egy szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha 5-re vagy 0-ra végződik.

   $6^n \quad 6 - ra$; $\quad 5^n \quad 5 - re$ végződik. ha $n > 0$. $4 \cdot 6 + 5 - 4 = 25$, tehát az utolsó számjegy 5. Így a kifejezés osztható 5-tel.

   Megjegyzés: $n = 0$-ra nem lenne igaz az állítás.

   b) Bontsuk szorzattá a kifejezést!

   $n^4 - 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 - 2n + 1) = n^2(n-1)^2$

   Ha n páros $\Rightarrow$ n^2 osztható 4-gyel, mert. $(2k)^2 = 4k^2$.

   Ha n páratlan $\Rightarrow$ $n - 1$ páros $\Rightarrow$ $(n-1)^2$ osztható 4-gyel. Ezzel az állítást beláttuk.

7. Milyen számjegyek írhatók az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* helyére, ha

   a) $8 \mid \overline{6723a4}$;

   b) $15 \mid \overline{34b25c}$;

   c) $12 \mid \overline{78de2}$?

   Megoldás:

   a) 8-cal akkor osztható egy szám, ha az utolsó három számjegyből képzett szám osztható 8-cal.

   Tehát a lehet 0; 4; 8.

   A számok: 672304; 672344; 672384.

   b) 15-tel akkor osztható egy szám, ha osztható 3-mal és 5-tel is, mivel 5 és 3 relatív prímek. (Két vagy több szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk az 1.)

   Az 5-tel való oszthatóság miatt az utolsó számjegy 5 vagy 0 lehet.

   3-mal akkor osztható egy szám, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal

   Ha $c = 5$, akkor $b = 2;\ 5;\ 8.$

   Ha $c = 0$, akkor $b = 1;\ 4;\ 7.$

   A számok: 342255; 345255; 348255; 341250; 344250; 347250.

   c) 12-vel akkor osztható egy szám, ha osztható 4-gyel és 3-mal is.

   4-gyel akkor osztható egy szám, ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható 4-gyel.

   Az utolsó két számjegy lehet: 12; 32; 52; 72; 92.

e	1	3	5	7	9
d	0; 3; 6; 9,	1; 4; 7,	2; 5; 8,	0; 3; 6; 9,	1; 4; 7,

A lehetséges számok:

78012; 78312; 78612; 78912; 78132; 78432; 78732; 78252; 78552; 78852; 78072; 78372; 78672; 78972; 78192; 78492; 78792.

8. Az alábbi állítások a természetes számokra vonatkoznak.

   I. Ha egy szám számjegyeinek összege 27, akkor osztható 27-tel.

   II. Négy egymást követő szám szorzata osztható 24-gyel.

   III. Három egymást követő szám összege osztható hattal.

   IV. Ha egy szám osztható 3-mal és 15-tel, akkor 45-tel is.

   Közöttük az igaz állítások száma:

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D)4

ELTE 2015. májusi teszt

Megoldás:

I. Nem igaz, például 38628 számjegyeinek összege 27, de nem osztható 27-tel.

II. 24-gyel pontosan akkor osztható egy szám, ha osztható 8-cal és 3-mal is, mert 8 és 3 legkisebb közös többszöröse 24.

Négy egymást követő szám között $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ biztosan van egy, amely osztható 4-gyel és egy másik, amely osztható 2-vel. E kettő szorzata biztosan osztható 8-cal. Négy egymást követő szám között biztosan van egy, mely osztható 3-mal. Tehát ez az állítás igaz.

III. Három egymást követő szám összege: $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$.

Ez biztosan osztható 3-mal, de nem biztos, hogy osztható lesz 2-vel.

Például $2 + 3 + 4 = 9$. Tehát az állítás nem igaz.

IV. Nem igaz, mert a 3 és 15 legkisebb közös többszöröse 15. Például a 30 osztható 3-mal és 15-tel is, de nem osztható 45-tel. (3 és 15 nem relatív prímek.)

A négy állításból egy igaz, így a helyes válasz az (A).

9. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját, és legkisebb közös többszörösét!

   a) $(125; 33)$; $[125; 33]$;

   b) $(840; 3900)$; $[840; 39000]$;

   c) $(a; b)$; $[a; b]$, $ha \;\; a = 2^5 \cdot 3^{12} \cdot 7^9 \cdot 17^5 \cdot 23$; $b = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7^{11} \cdot 11^8 \cdot 13$.

Megoldás:

Két vagy több szám legnagyobb közös osztója a közös osztók közül a legnagyobb.

Két vagy több szám legkisebb közös többszöröse a pozitív közös többszörösök közül a legkisebb.

A legnagyobb közös osztót úgy kapjuk meg, ha minden közös prímtényezőt az előforduló legkisebb hatványon összeszorzunk.

A legkisebb közös többszöröst úgy kapjuk meg, ha minden előforduló prímtényezőt az előforduló legnagyobb hatványon összeszorzunk.

a) Írjuk fel a számok prímtényezős felbontását!

$$\left.\begin{aligned} 125 &= 5^3; \\ 33 &= 3 \cdot 11 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad (125; 33) = 1.$$

A két szám relatív prím, az 1-en kívül nincs más közös osztójuk. Ekkor a két szám legkisebb közös többszöröse a két szám szorzata:

$[125; 33] = 125 \cdot 33 = 4125.$

b) Írjuk fel a számok prímtényezős felbontását!

$$\left.\begin{aligned} 840 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7; \\ 3900 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (840; 3900) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60\,;$$

$[840; 39000] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 = 54600.$

c) $a = 2^5 \cdot 3^{12} \cdot 7^9 \cdot 17^5 \cdot 23;\quad b = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7^{11} \cdot 11^8 \cdot 13;$

$(a; b) = 2^4 \cdot 7^9;$ $\qquad [a; b] = 2^5 \cdot 3^{12} \cdot 5^4 \cdot 7^{11} \cdot 11^8 \cdot 13 \cdot 17^5 \cdot 23\,.$

10. Az út egyik oldalán villanyoszlopok állnak 60 m távolságra egymástól. A másik oldalon fák állnak 35 m-re egymástól. Egyik helyen egymással szemben van egy villanyoszlop és egy fa. Legközelebb hány m-re lesz ismét egymással szemben fa és villanyoszlop?

Megoldás:

A villanyoszlopok 60 méterenként, a fák 35 méterenként helyezkednek el. Vagyis az oszlopok 60 többszöröseinél, a fák 35 többszöröseinél lesznek. A legközelebbi pont, ahol szemben állnak egymással a 60 és a 35 legkisebb közös többszöröse lesz.

$$\left.\begin{aligned} 60 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5; \\ 35 &= 5 \cdot 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [60; 35] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

Legközelebb 420 méterre áll egy villanyoszlop és egy fa egymással szemben.

11. Mely x, y pozitív természetes számokra igaz, hogy

a) $(x; 8) = 4;$

b) $[388; y] = 3492$?

Megoldás:

a) $8 = 2^3;\ \ 4 = 2^2$. Mivel a legnagyobb közös osztó a négy, ezért az x szám biztosan osztható 4-gyel, de nem osztható 8-cal.

Tehát $x = 4 \cdot k$, ahol k páratlan szám, $(k; 2) = 1$. Végtelen sok ilyen szám van.

b) Bontsuk prímtényezőkre a megadott számokat!

$388 = 2^2 \cdot 97;$ $\qquad 3492 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 97.$

Az y-nak mindenképpen 9 többszörösének kell lennie és prímtényezői 3492 prímtényezői közül kerülhetnek ki: $y = 9 \cdot k$.

y lehetséges értékei: 9; $9 \cdot 2$; $9 \cdot 4$; $9 \cdot 97$; $9 \cdot 2 \cdot 97$; $9 \cdot 4 \cdot 97$,

tehát: $y \in \{9; 18; 36; 873; 1746; 3492\}$.

12. Melyek azok a számpárok, amelyeknek legnagyobb közös osztója 15, legkisebb közös többszöröse 4725?

Megoldás:

Legyenek a keresett számok: a és b!

Mivel $(a;b) = 15$; ezért $a = 15x$; $b = 15y$ és $(x;y) = 1$.

Az $[a;b] = 4725$ és $4725:15 = 315$ miatt keressük azokat az x és y pozitív egész számokat, amelyekre:

$$(x;y) = 1$$
$$[x;y] = 315$$

$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket! x és y szerepe felcserélhető, ezért feltehetjük, hogy $x < y$.

x	1	9	5	7
y	315	35	63	45
a	15	135	75	105
b	4725	525	945	675

Tehát a két pozitív szám: 15 és 4725; 135 és 525; 75 és 945; 105 és 675.

13. Hány pozitív osztója van a következő számoknak?

a) $a = 512$;

b) $b = 3600$;

c) $c = 3^4 \cdot 7^{10} \cdot 11^2 \cdot 17^6 \cdot 19$

Megoldás:

Ha egy összetett szám prímtényezős felbontása:

$a = {p_1}^{r_1} \cdot {p_2}^{r_2} \cdot {p_3}^{r_3} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{r_k}$,

akkor az a szám osztóinak száma:

$$d(a) = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_k + 1).$$

Az osztók számának meghatározásához bontsuk fel a számokat prímtényezőkre:

a)

$$a = 512 = 2^9;$$

$$d(a) = 10.$$

b)

$$b = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2;$$

$$d(b) = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45.$$

Megjegyzés: Az osztók száma csak abban az esetben lehet páratlan, ha mindegyik kitevő páros, vagyis a szám négyzetszám.

c)

$$c = 3^4 \cdot 7^{10} \cdot 11^2 \cdot 17^6 \cdot 19;$$

$$d(c) = 5 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 = 2310.$$

14. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, melynek pontosan 12 pozitív osztója van?

Megoldás:

Legyen $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ és ekkor az osztók száma:

$$d(a) = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_k + 1) = 12.$$

Bontsuk fel a 12-t pozitív egész számok szorzatára (egytényezős szorzat is lehet)!

Az tényezőkből 1-et kivonva kapjuk a prímek kitevőit. A legkisebb, a feltételeknek megfelelő számot keressük, így érdemes minél kisebb prímszámot választani hatványalapnak.

12 felbontása	12	$6 \cdot 2$	$4 \cdot 3$	$3 \cdot 2 \cdot 2$
kitevők	11	$5; 1$	$3; 2$	$2; 1; 1$
prímhatványok	2^{11}	$2^5 \cdot 3^1$	$2^3 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
értéke	2048	96	72	60

Tehát a legkisebb pozitív egész szám, melynek pontosan 12 pozitív osztója van a 60.

15. Mely *n* egész számokra lesz a következő kifejezés egész szám?

$$\frac{5n - 1}{n + 1}$$

Megoldás:

Alakítsuk át a törtet úgy, hogy a nevezőt megjelenítjük a számlálóban, és a kapott összeget tagonként osztjuk:

$$\frac{5n - 1}{n + 1} = \frac{5n + 5 - 5 - 1}{n + 1} = \frac{5(n + 1) - 6}{n + 1} = \frac{5(n + 1)}{n + 1} - \frac{6}{n + 1} = 5 - \frac{6}{n + 1}.$$

A kapott kifejezés akkor lesz egész szám, ha a $\frac{6}{n+1}$ egész. Ez akkor teljesül, ha az $n + 1$ osztója a 6-nak.

Az $n + 1$ lehetséges értékei (a 6 osztói): $1;\ 2;\ 3;\ 6;\ -1;\ -2;\ -3;\ -6$.

Ekkor *n* értékei lehetnek: $0;\ 1;\ 2,\ 5;\ -2;\ -3;\ -4;\ -7$.

Ellenőrzés:

$$\frac{5 \cdot 0 - 1}{0 + 1} = -1;\ \frac{5 \cdot 1 - 1}{1 + 1} = 2;\ \frac{5 \cdot 2 - 1}{2 + 1} = 3;\ \frac{5 \cdot 5 - 1}{5 + 1} = 4;$$

$$\frac{5 \cdot (-2) - 1}{-2 + 1} = 11;\ \frac{5 \cdot (-3) - 1}{-3 + 1} = 8;\ \frac{5 \cdot (-4) - 1}{-4 + 1} = 7;\ \frac{5 \cdot (-7) - 1}{-7 + 1} = 6.$$

16. Egy ötjegyű szám osztható 7-tel, 8-cal és 9-cel. Az első két számjegyből álló szám prímszám, eggyel nagyobb egy négyzetszámnál, s a két számjegy összege kétjegyű. Melyik ez az ötjegyű szám?

Megoldás:

Ha egy ötjegyű szám osztható 7-tel, 8-cal, és 9-cel, akkor többszöröse a 504-nek, mert a három szám legkisebb közös többszöröse az 504.

Az első két számjegyből álló szám prímszám, ezért páratlannak kell lennie, és eggyel nagyobbnak egy négyzetszámnál. Emiatt elég a páros kétjegyű négyzetszámokat nézni: 16; 36; 64. A náluk eggyel nagyobb szám: 17; 37; 65. Ezek közül csak a 17 és a 37 prímszám. Közülük csak a 37 felel meg annak a feltételnek, hogy a számjegyeinek összege kétjegyű. Tehát 504 olyan ötjegyű többszörösét kell keresni, amelyik 37-tel kezdődik.

$37000 : 504 \approx 73{,}4$ és $38000 : 504 \approx 75{,}4$.

Ezért két megfelelő szám van: $74 \cdot 504 = 37296$; $\quad 75 \cdot 504 = 37800$.

Ellenőrzés:

Mindkét szám 37-tel kezdődik, ami egy négyzetszámnál (36) eggyel nagyobb prímszám. Osztható 7-tel, 8-cal és 9-cel:

$37296 : 7 = 5328$; $37296 : 8 = 4662$; $37296 : 9 = 4144$;

$37800 : 8 = 4725$; $37800 : 9 = 4200$; $37800 : 7 = 5400$.