

8. Geometria

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Egy négyzet átlójának hossza $4 + \sqrt{2}$. Mennyi a négyzet oldalhossza?

- (A) $1 + 2\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{4 + \sqrt{2}}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$ (D) $2 + \sqrt{2}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

BME 2012. szeptember 7. (16B)

Megoldás:

Egy a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$. Ezt használva a keresett négyzet oldala:

$$\frac{4 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 1$$

A jó válasz az (A).

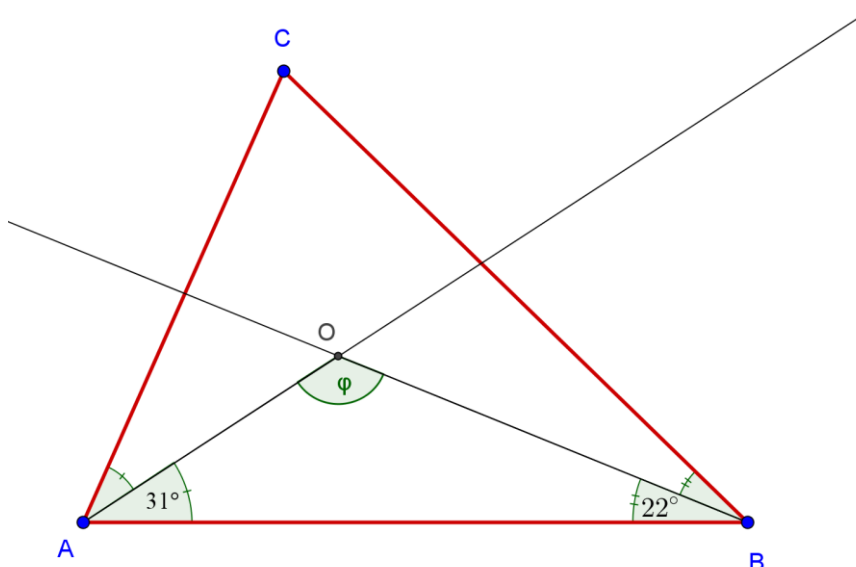
2. Egy háromszög két szöge 62° és 44° . Mekkora szögben látszanak az oldalak

- a) a beírt kör középpontjából,
- b) a magasságpontból,
- c) a köré írt kör középpontjából?

ELTE 2013. szeptember (matematika tanárszak)

Megoldás:

- a) A beírt kör középpontja a háromszög szögfelezőinek a metszéspontja, ezért $\angle OAB = 31^\circ$ és $\angle ABO = 22^\circ$. A háromszög szögeinek összege 180° , így az $ABO\Delta$ -ból számolva $\angle AOB = \varphi = 180^\circ - 31^\circ - 22^\circ = 127^\circ$. A szokásos betűzést használva a háromszög szögeire ez a szög $180^\circ - \alpha/2 - \beta/2$.



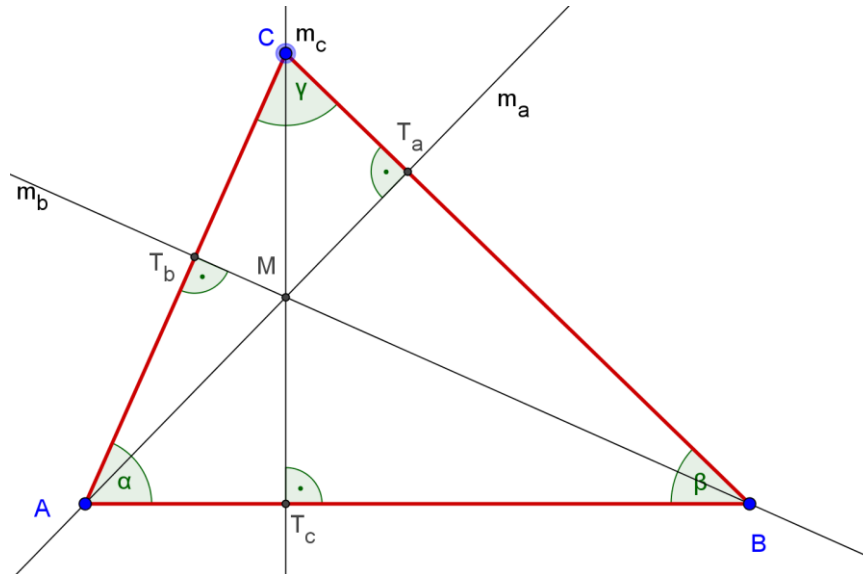
$\angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 62^\circ - 44^\circ = 74^\circ$. Az előzővel azonos gondolatmenettel kapjuk:

$$\angle AOC = 180^\circ - \alpha/2 - \gamma/2 = 180^\circ - 31^\circ - 37^\circ = 112^\circ$$

$$\angle BOC = 180^\circ - \beta/2 - \gamma/2 = 180^\circ - 22^\circ - 37^\circ = 121^\circ$$

Tehát az AB oldal 127° -os, az AC oldal 112° -os és a BC oldal 121° -os szögben látszik a beírt kör középpontjából.

- b) A háromszög magasságpontja a magasságvonalak metszéspontja.

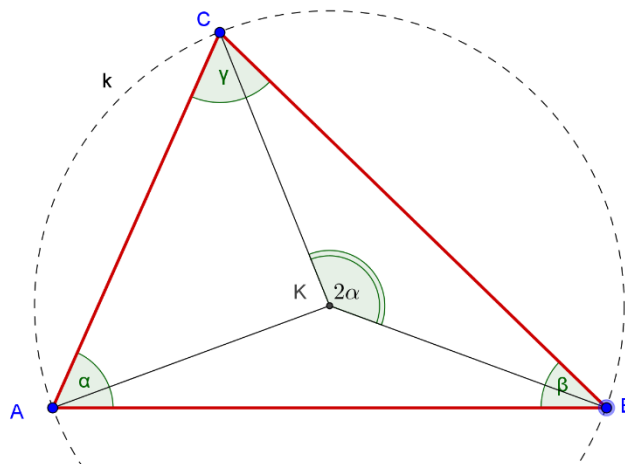


Az ABT_b derékszögű háromszögből $\angle ABT_b = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$, az ABT_a háromszögből pedig $\angle BAT_a = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$. Tehát $\angle AMB = 180^\circ - 46^\circ - 28^\circ = 106^\circ$, az M magasságpontból az AB oldal 106° -ban látszik.

Hasonló módon a többi keresett szöget is kiszámolhatnánk, de most egy másik lehetőséget is megmutatunk. A AT_cMT_b négyszög szögeinek az összege 360° , két 90° -os szöge van, így $\angle T_cMT_b = 360^\circ - 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$. Ennek a szögnek a csúcsszöge a $\angle BMC$, így azzal egyenlő, azaz az M pontból az BC oldal 118° -ban látszik. (Ez $180^\circ - \alpha$)

A harmadik látószög ezek alapján $\angle AMB = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$, M -ből az AB oldal 136° -os szögben látszik.

- c) A háromszög köré írt kör középpontját jelöljük K -val.



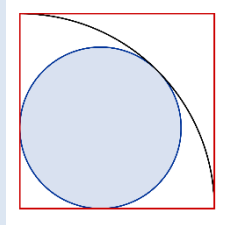
Egy középponti szög kétszer akkora, mint az ugyanazon az íven nyugvó kerületi szög, ezért

$$\angle BKC = 2\alpha = 124^\circ$$

Hasonlóan $\angle AKC = 2\beta = 88^\circ$, $\angle AKB = 2\gamma = 148^\circ$.

A keresett látószögek: 124° , 88° , 148° .

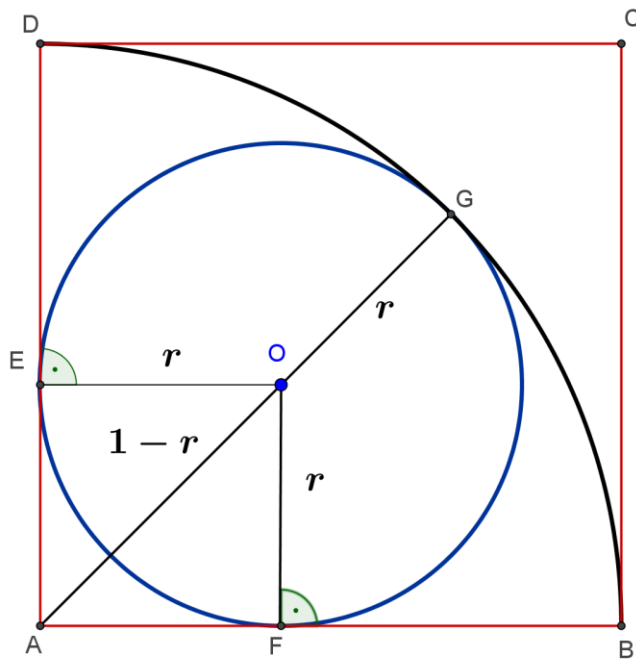
3. Mekkora az ábrán látható besötétített kör sugara, ha a négyzet oldala egységnyi hosszú?



- (A) $2 - \sqrt{2}$ (B) $3 - 2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) ezek egyike sem

BME 2010.december 3. (16B)

Megoldás:



A keresett sugarat jelöljük r -rel. Ha két kör érinti egymást, akkor a két kör középpontja és az érintési pont egy egyenesen van ($A; O; G$), ezért $AO = 1 - r$.

Ha egy kör érint egy egyenest, akkor az érintési pontba húzott sugár merőleges az egyenesre, így $EO = r$ és $FO = r$.

Az AFO háromszög egyenlő szárú, derékszögű, a befogó és az átfogó közötti összefüggést használva:

$$1 - r = \sqrt{2} \cdot r$$

Átrendezve:

$$1 = \sqrt{2}r + r$$

$$r(\sqrt{2} + 1) = 1$$

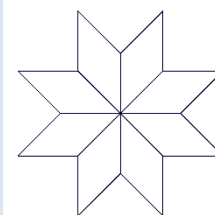
$$r = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

Gyöktelenítsük a nevezőt:

$$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$$

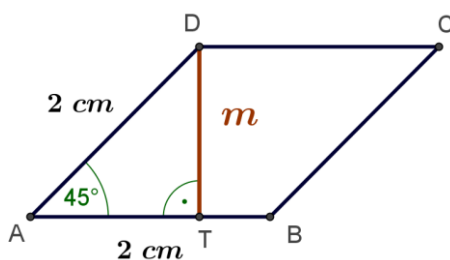
A kör sugara $\sqrt{2} - 1$, a jó válasz az (C).

4. Egy karácsonyfadísz alakja kúpszerű test. A test alakja az ábrán látható. Ezt a síkidomot nyolc egybevágó, 2 cm oldalú rombuszra lehetne vágni. A test magasságszakasza a középpontban áll és 6 cm hosszú. Mekkora a dísz térfogata?



ELTE 2015. szeptember (fizika BSc)

Megoldás:



Az ábra nyolc darab egybevágó rombuszból áll, ezért a rombuszok egyik szöge 45° . Az $ATD\Delta$ egyenlő szárú, derékszögű, amelynek az átfogója 2 cm, tehát a befogója $m = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ cm.

A rombusz területe: $AB \cdot m = 2\sqrt{2}$.

Az alaplap területe: $T_{alap} = 8 \cdot 2\sqrt{2} = 16 \cdot \sqrt{2}$ (cm²).

A kúpszerű test térfogata:

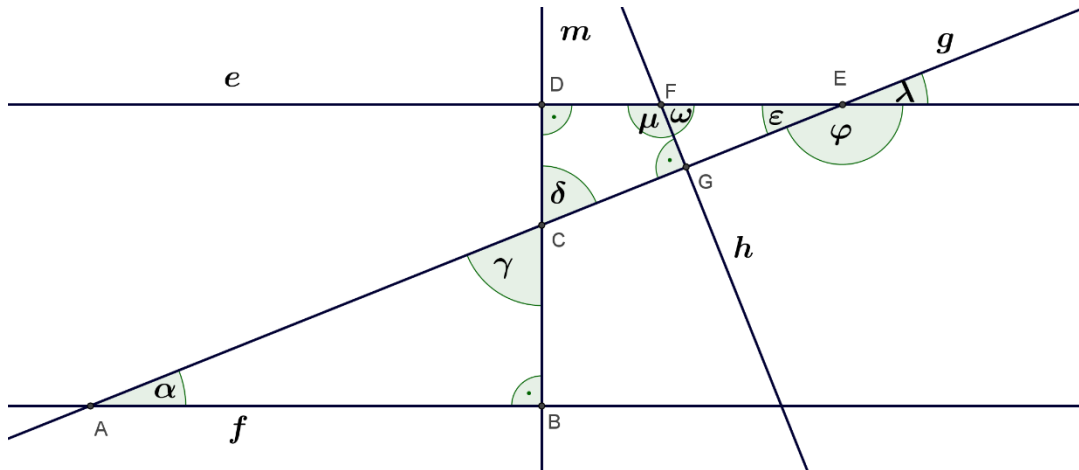
$$V = \frac{T_{alap} \cdot m}{3} = \frac{16 \cdot \sqrt{2} \cdot 6}{3} = 32\sqrt{2} \approx 45,25 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

II. Ismételjünk!

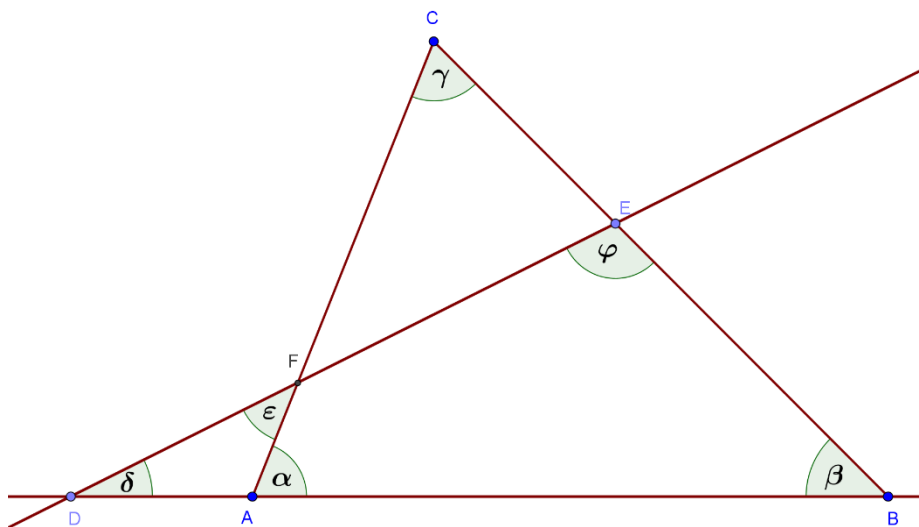
1. Alapfogalmak: térelemek szöge, távolsága
https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/21.pdf 1-3. oldal
2. Háromszögek, négyszögek sokszögek szögei, nevezetes vonalai, körei
https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/10.pdf 1-5. oldal
3. Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel
https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/10.pdf 3-4. oldal
4. Síkidomok kerülete, területe
https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/19.pdf 1-3. oldal
5. Kör és részei
https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/10.pdf 6-7. oldal
6. Egybevágóság, hasonlóság
https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/11.pdf 1-5. oldal
7. Térbeli alakzatok, felszín, térfogat
https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/01.pdf 1-4. oldal

III. Gyakorló feladatok

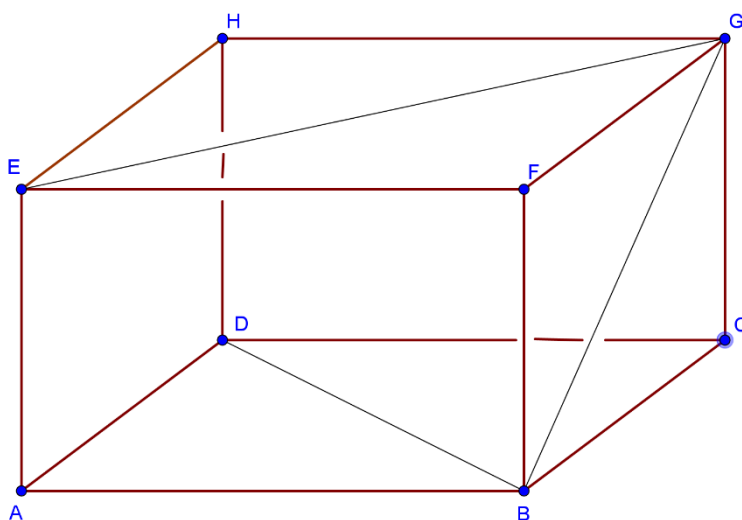
1. Az alábbi ábrán az $e \parallel f$, $e \perp m$, $f \perp m$ és $h \perp g$. Egészítse ki az alábbi mondatokat igaz állításokká, használja az alábbi kifejezéseket:
csúcsszögek, váltószögek, egyállású szögek, merőleges szárú szögek, pótszögek, kiegészítő szögek, mellékszögek!



- α és ϵ
 - λ és ϵ
 - δ és ω
 - α és γ
 - α és λ
 - α és φ
 - μ és ω
 - δ és μ
2. Az ABC háromszöget elmetsettük egy egyenessel. Az ábrán jelölt szögek közül $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 62^\circ$, $\delta = 25^\circ$. Határozza meg az α , ϵ , φ szögek nagyságát!



3. Az $ABCDEFGH$ téglatestre megfogalmazott állítások közül melyek igazak?



- a) Az AB él merőleges BC -re.
- b) FB és DH nincs egy síkban.
- c) DB és EG kitérő.
- d) AB és BG tompaszöveget zár be.
- e) DC szakasz hossza nagyobb, mint a DB szakasz hossza.

(A) a, b, e

(B) c, d

(C) a, c

(D) a, b, e

(E) b, e

4. Az $ABC\Delta$ AB oldala, mint átmérő fölé kört szerkesztünk. Mely pontokban metszi a kör az AC és BC oldalak egyenesét?
5. Az $ABCD$ négyzet DC oldalán vegyünk fel egy tetszőleges M pontot. Az $MAB\angle$ szögfelezője a BC oldalt a K pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy $AM = BK + DM$!

ELTE 2011. október (matematika BSc).

6. Egy paralelogramma két oldala 9 cm és 12 cm , az egyik átlójának a hossza 8 cm . Határozza meg a másik átló hosszát!
7. Egy szabályos hatszög két párhuzamos oldalának a távolsága 2 egység. Hány egység a hatszög oldala?

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(C) $2\sqrt{3}$

(D) $\sqrt{6}$

(E) $\sqrt{2}$

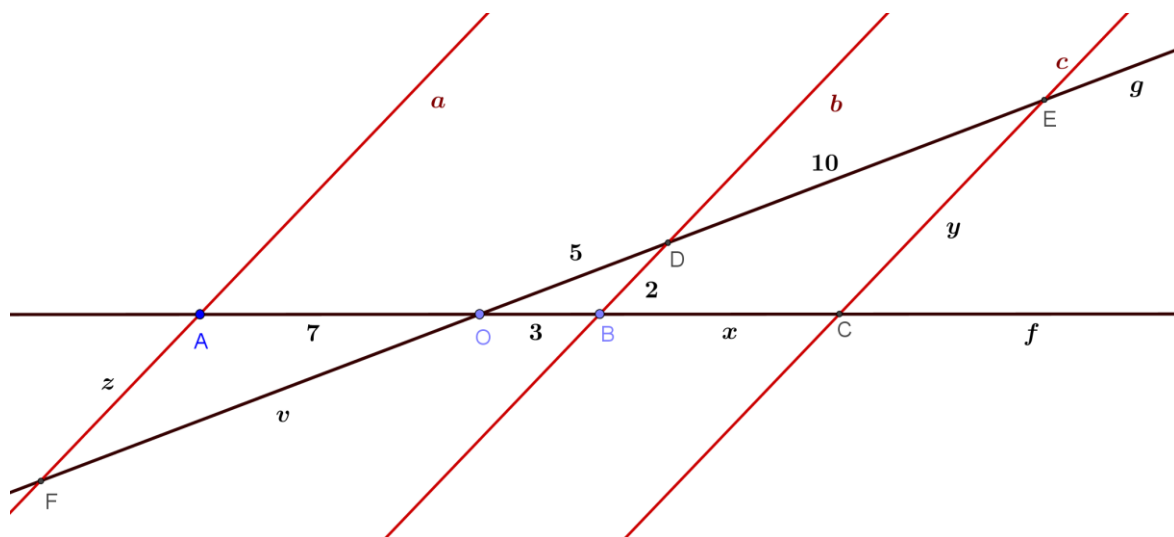
BME 2013. december 16. (14A)

8. Egy derékszögű háromszög két súlyvonala merőleges egymásra. Mit állíthatunk ilyenkor az oldalak arányáról?
9. Bizonyítsa be, hogy egy négyszög szögfelezői húrnégyszöget határoznak meg!

10. Egy érintőnéyszög három oldalának a hossza 4 cm , 9 cm , 8 cm . Mekkora lehet a négyszög negyedik oldala?

- (A) 3 cm (B) 5 cm (C) 13 cm (D) 17 cm (E) 12 cm

11. Az f és g egyeneseket az a, b, c párhuzamos egyenesekkel metsszük. Számítsa ki az x, y, z, v szakaszok hosszát!

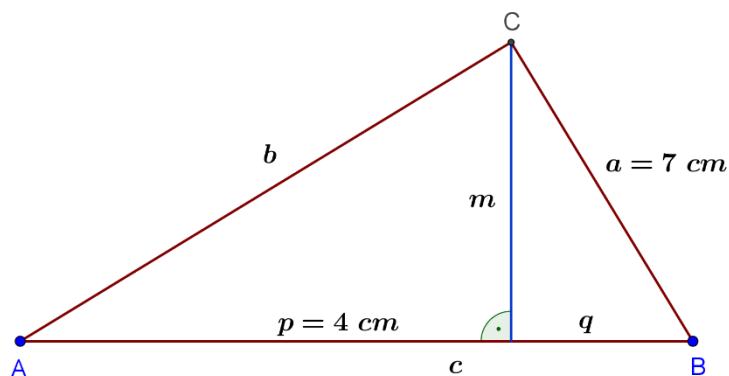


12. Mely állítások hamisak az alábbiak közül?

- a) A középpontos hasonlóság egyenestartó.
- b) Ha a középpontos hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, akkor minden szög képe az eredeti szög fele lesz.
- c) A középpontos hasonlóságnak nincs invariáns egyenese.
- d) Ha a középpontos hasonlóság aránya negatív, akkor a transzformáció irányításváltó.
- e) Ha a középpontos hasonlóság aránya 2, akkor a sokszög területe négyszeresére változik a transzformáció alkalmazásával.

- (A) a, b, e (B) c, d (C) b, c, d (D) a, e (E) b, e

13. Megrajzoltuk az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságát. Az a és a p szakasz hosszának ismeretében számítsa ki a hiányzó szakaszok hosszát!



14. Egy háromszöget egyik középvonala mentén kettévágunk. Milyen területarányú részek keletkeznek?

- (A) 1:2 (B) 1:3 (C) 1:4 (D) 2:5 (E) ezek egyike sem

BME 2010.december 3. (16A)

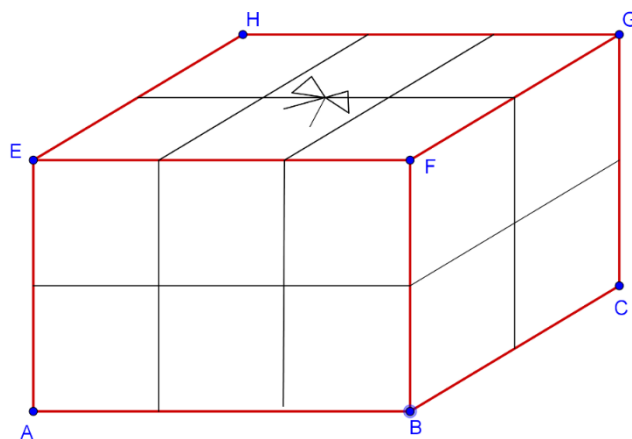
15. Egy kör területét az egyik húrja egy 11π és egy 25π területű darabra osztja. A kör kerülete

- (A) 10π (B) 12π (C) 10 (D) 12

hosszúságegység.

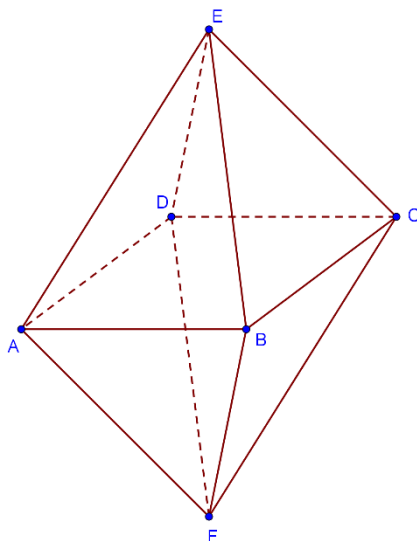
ELTE 2014. december13.

16. Egy téglatest alakú dobozt becsomagoltunk, majd zsinórral az ábra szerint átkötöttük. A doboz méretei: $AB = 25\text{ cm}$, $BC = 15\text{ cm}$, $AE = 12\text{ cm}$. Mennyi zsinórra volt szükség, ha a megkötéshez 30 cm-t használtunk el?



17. Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm -esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.

Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm^2 -ben) és a térfogatát (cm^3 -ben)!

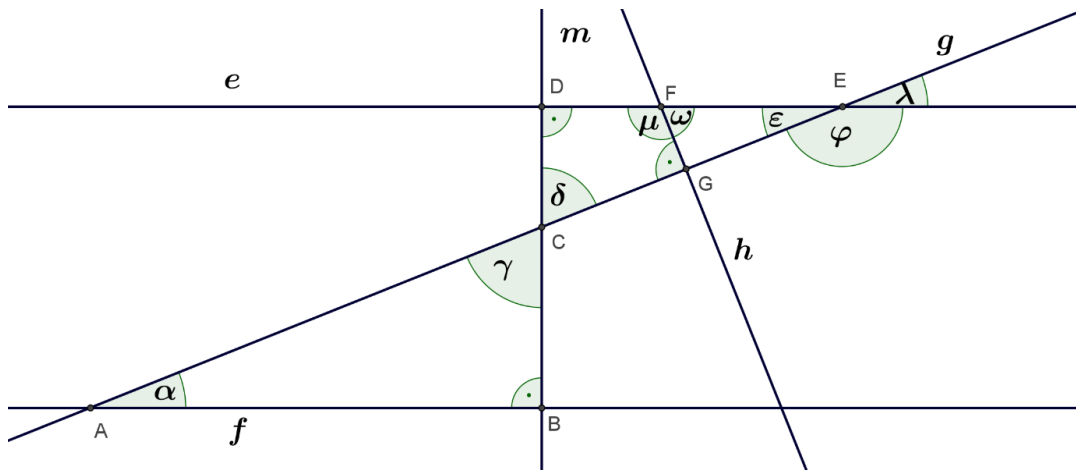


Középszintű érettségi vizsga 2013.május 7.

IV. Megoldások:

1. Az alábbi ábrán az $e \parallel f$, $e \perp m$, $f \perp m$ és $h \perp g$. Egészítse ki az alábbi mondatokat igaz állításokká, használja az alábbi kifejezéseket:

csúcsszögek, váltószögek, egyállású szögek, merőleges szárú szögek, pótszögek, kiegészítő szögek, mellékszögek!



- α és ϵ
- λ és ϵ
- δ és ω
- α és γ
- α és λ
- α és φ
- μ és ω
- δ és μ

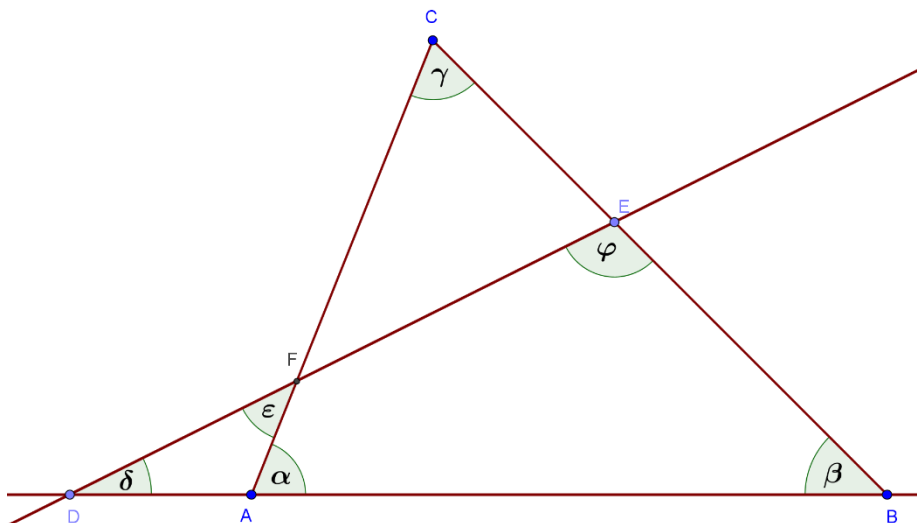
Megoldás:

- α és ϵ **váltószögek**. (száraik párhuzamosak, páronként ellentétes irányúak - egyenlők)
- λ és ϵ **csúcsszögek**. (száraik egy egyenesbe esnek, páronként ellentétes irányúak - egyenlők)
- δ és ω **merőleges szárú (hegyes) szögek**. (száraik páronként merőlegesek, mindkettő hegyesszög - egyenlők)

Megjegyzés: Ha mindkét szög tompaszög vagy derékszög lenne, akkor is egyenlő a két merőleges szárú szög.

- α és γ **pótszögek**. (összegük 90°)
- α és λ **egyállású szögek**. (száraik párhuzamosak, páronként azonos irányúak - egyenlők)
- α és φ **kiegészítő szögek**. (összegük 180°)
- μ és ω **mellékszögek**. (egyik száruk közös, másik száruk egy egyenesbe esik és ellentétes irányú - összegük 180°)
- δ és μ **merőleges szárú (hegyes és tompa) szögek** (száraik páronként merőlegesek, egyik hegyesszög, másik tompaszög - összegük 180°)

2. Az ABC háromszöget elmetsettük egy egyenessel. Az ábrán jelölt szögek közül $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 62^\circ$, $\delta = 25^\circ$. Határozza meg az $\alpha, \varepsilon, \varphi$ szögek nagyságát!



Megoldás:

A háromszög belső szögeinek összege 180° , így $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 45^\circ - 62^\circ = 73^\circ$.

A háromszög bármely külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög nagyságával, ezért

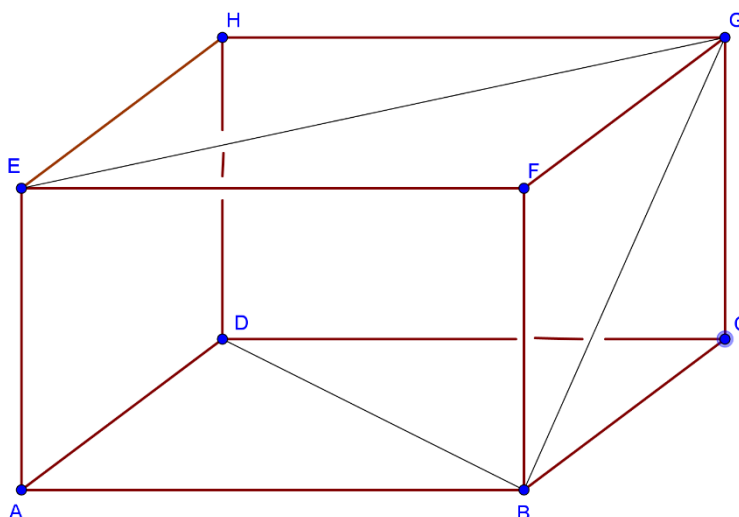
$$\alpha = \delta + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \alpha - \delta = 73^\circ - 25^\circ = 48^\circ.$$

A DBE háromszögből:

$$\varphi = 180^\circ - \beta - \delta = 180^\circ - 45^\circ - 25^\circ = 110^\circ.$$

3. Az $ABCDEFGH$ téglatestre megfogalmazott állítások közül melyek igazak?



- Az AB él merőleges BC -re.
- FB és DH nincs egy síkban.
- DB és EG kitérő.
- AB és BG tompaszöveget zár be.

e) DC hossza nagyobb, mint a DB szakasz hossza.

(A) a, b, e

(B) c, d

(C) a, c

(D) a, b, e

(E) b, e

Megoldás:

a) Igaz. Az $ABCD$ oldallap téglalap, ezért két szomszédos éle merőleges.

b) Hamis. FB és DH is merőleges az $ABCD$ síkra, ezért párhuzamosak, tehát egy síkban vannak.

c) Igaz. Az $ABCD$ illetve $EFGH$ párhuzamos síkokban vannak, de DB és EG nem párhuzamos, tehát kitérők.

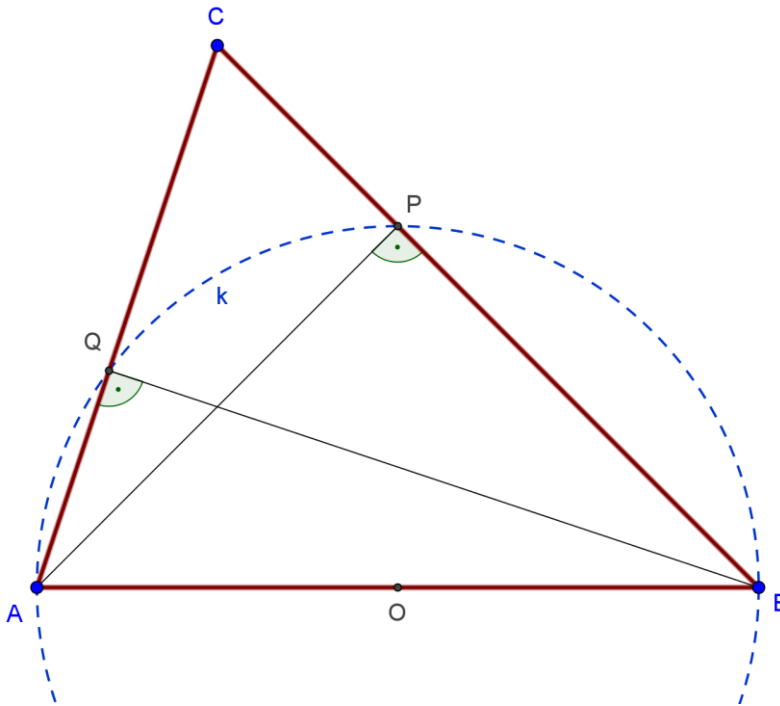
d) Hamis. AB merőleges BC -re és BF -re, ezért a $BCGF$ sík minden egyenesére, így BG -re is.

e) Hamis. A BCD háromszögben a C csúsnál derékszög van, így a háromszög leghosszabb oldala a DB átfogó.

Tehát a jó válasz a (C).

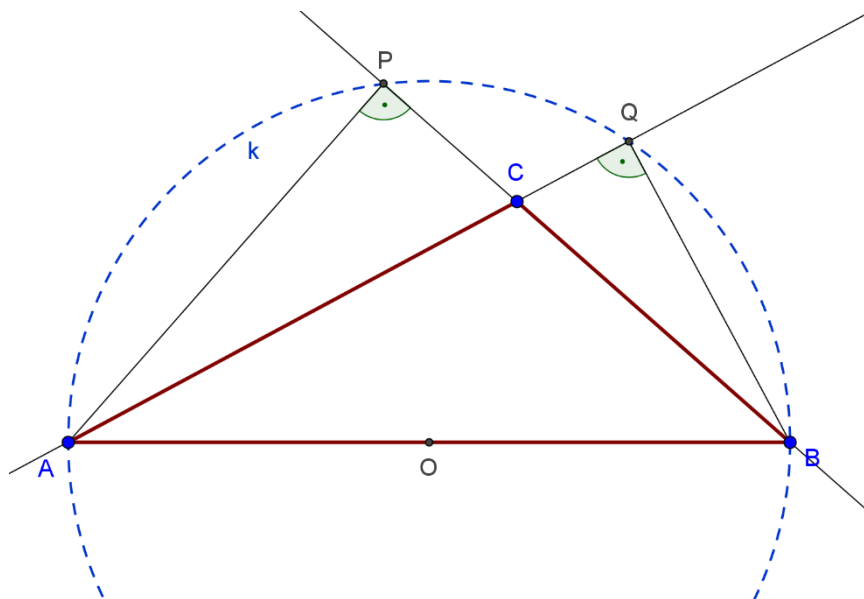
4. Az $ABC\Delta$ AB oldala, mint átmérő fölé kört szerkesztünk. Mely pontokban metszi a kör az AC és BC oldalak egyenesét?

Megoldás:

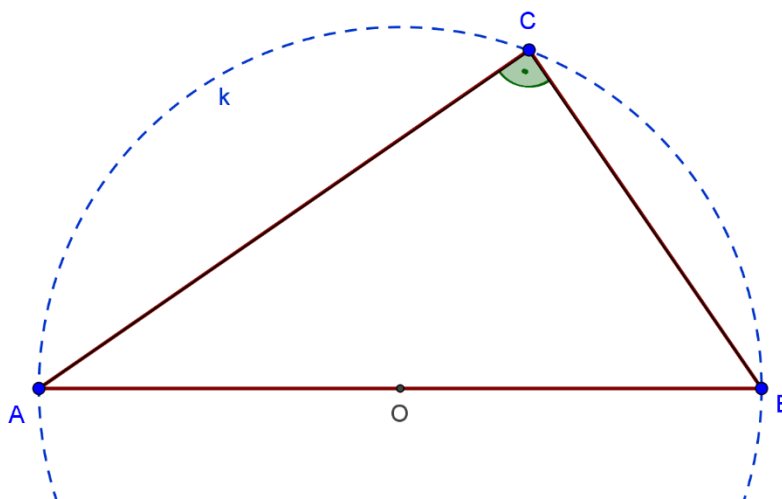


A megszerkesztett kör az AB szakasz Thalész-köre, ezért $APB\angle$ és $AQB\angle$ derékszög. Ez azt jelenti, hogy P és Q az A illetve a B csúcsokból induló magasságok talppontjai.

Az alábbi ábra azt mutatja, hogy tompaszögű és derékszögű háromszög esetében is a magasságtalppontokat kapjuk.



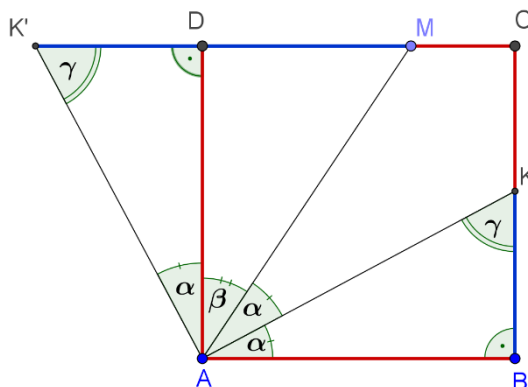
Derékszögű háromszög esetében a magasságtalppontok és a derékszögű csúcs egybeesik.



5. Az $ABCD$ négyzet DC oldalán vegyünk fel egy tetszőleges M pontot. Az MAB szögfelezője a BC oldalt a K pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy $AM = BK + DM$!

ELTE 2011. október (matematika BSc).

Megoldás:

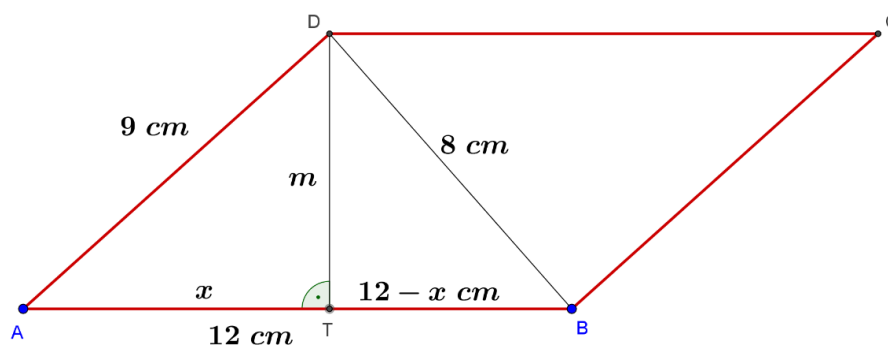


Állítsuk elő a $BK + DM$ szakaszt. Ha az $ABK\Delta$ -et elforgatjuk 90° -al pozitív irányban, akkor a BK szakasza DM meghosszabbítására kerül, $K'D = BK$, így $K'M = BK + DM$.

Vizsgáljuk az $AMK'\Delta$ -et. $\beta = 90^\circ - 2\alpha$, ezért $K'AM\angle = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha$. Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének összege 90° , tehát a $K'DA\Delta$ -ben $\gamma = 90^\circ - \alpha$. Ezzel beláttuk, hogy az $AMK'\Delta$ két szöge egyenlő és ebből következik, hogy $AM = K'M = BK + DM$, ami a feladat állítása.

6. Egy paralelogramma két oldala 9 cm és 12 cm , az egyik átlójának a hossza 8 cm . Határozza meg a másik átló hosszát!

Megoldás:



A magassággal az ábra szerint két derékszögű háromszögre bontjuk az ABD háromszöget és ezekre a háromszögekre felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$m^2 + x^2 = 81$$

$$m^2 + (12 - x)^2 = 64$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$x^2 - (12 - x)^2 = 17$$

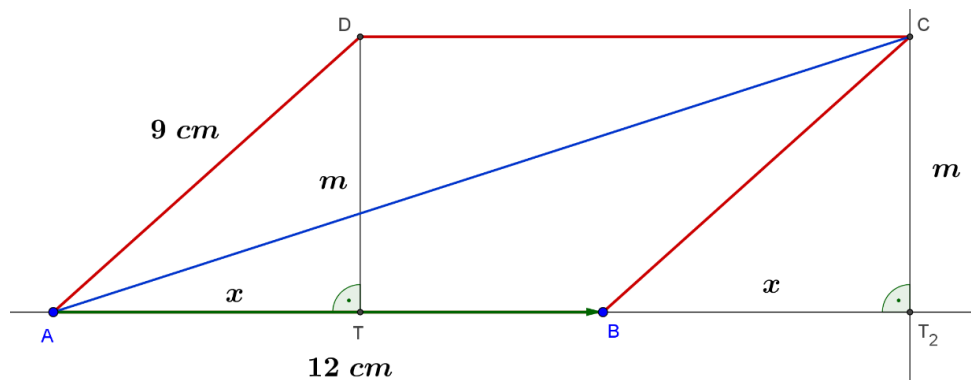
$$x^2 - 144 + 24x - x^2 = 17$$

$$24x = 161$$

$$x = \frac{161}{24} \approx 6,71\text{ (cm)}$$

Az első egyenletbe behelyettesítve:

$$m^2 + (6,71)^2 = 81 \Rightarrow m \approx 6\text{ (cm)}.$$



Az AC átlót befoglaljuk az AT_2C derékszögű háromszögbe. Ha az ATD háromszöget az $\overrightarrow{AB}$ vektorral eltoljuk, akkor a BT_2C háromszöget kapjuk, tehát ezek a háromszögek egybevágóak, megfelelő oldalaik egyenlők.

Így az AT_2C derékszögű háromszög befogói $12\text{ cm} + x$ és m , Pitagorasz-tétel alapján:

$$AC^2 = (12 + x)^2 + m^2$$

$$AC^2 = (12 + 6,71)^2 + 6^2 = 386,0641$$

$$AC \approx 19,65\text{ (cm)}$$

Tehát a paralelogramma másik átlója $19,65\text{ cm}$ hosszú.

7. Egy szabályos hatszög két párhuzamos oldalának a távolsága 2 egység. Hány egység a hatszög oldala?

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

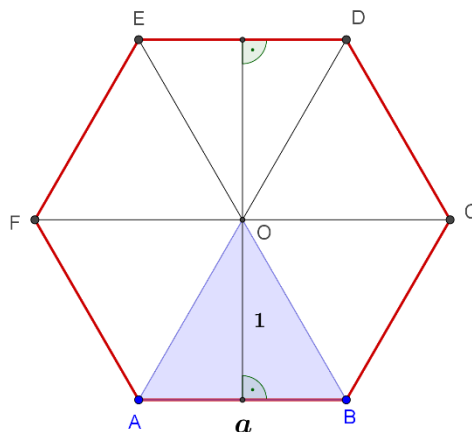
(C) $2\sqrt{3}$

(D) $\sqrt{6}$

(E) $\sqrt{2}$

BME 2013.december 16. (14A)

Megoldás:



A szabályos hatszöget hat darab egybevágó szabályos háromszögre bonthatjuk. Ha a párhuzamos oldalak távolsága 2 egység, akkor egy ilyen szabályos háromszög magassága 1 egység.

Ha a szabályos háromszög oldala a , akkor a magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Alkalmazzuk ezt az $ABO\Delta$ -re:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$a\sqrt{3} = 2$$

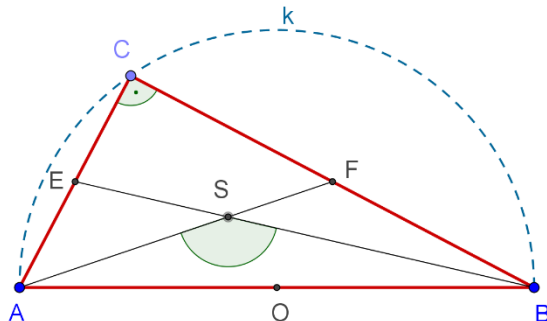
$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Tehát a jó válasz a (B).

8. Egy derékszögű háromszög két súlyvonala merőleges egymásra. Mit állíthatunk ilyenkor az oldalak arányáról?

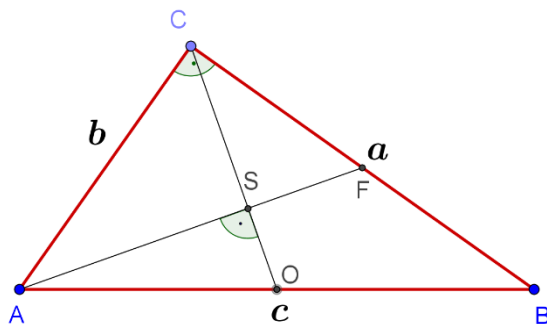
Megoldás:

Az ábrán a két befogóhoz tartozó súlyvonalat rajzoltuk meg, ezek metszéspontja az S súlypont.



A C csúcs a Thalész-tétel megfordítása miatt az AB szakasz Thalész-körén van. Az S pont ezen a körön belül, ezért az S pontból az AB szakasz tompaszögben látszik. Ilyenkor a két súlyvonal nem lehet merőleges egymásra.

Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor az átfogóhoz és az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal merőleges egymásra:



Az O pont az AB szakasz felezőpontja. A Thalész-tétel megfordítása miatt $AO = BO = CO = \frac{c}{2}$.

Az AF súlyvonalat Pitagorasz-tétel alapján számoljuk ki:

$$AF^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2.$$

A súlypont a súlyvonalat a csúctól távolabbi harmadoló pontban osztja, tehát:

$$AS^2 = \left(\frac{2AF}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot AF^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right) = \frac{a^2}{9} + \frac{4}{9} \cdot b^2$$

$$SO = \frac{\frac{c}{2}}{3} = \frac{c}{6}$$

$$SO^2 = \left(\frac{c}{6}\right)^2 = \frac{c^2}{36}$$

Ha az $AOS\Delta$ derékszögű, akkor a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AO^2 = AS^2 + SO^2$$

$$\frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{9} + \frac{4}{9} \cdot b^2 + \frac{c^2}{36}$$

Rendezzük az egyenletet, először a közös nevezővel, 36-tal szorzunk:

$$9c^2 = 4a^2 + 16b^2 + c^2$$

$$8c^2 = 4a^2 + 16b^2$$

$$2c^2 = a^2 + 4b^2$$

Tudjuk, hogy $c^2 = a^2 + b^2$, így:

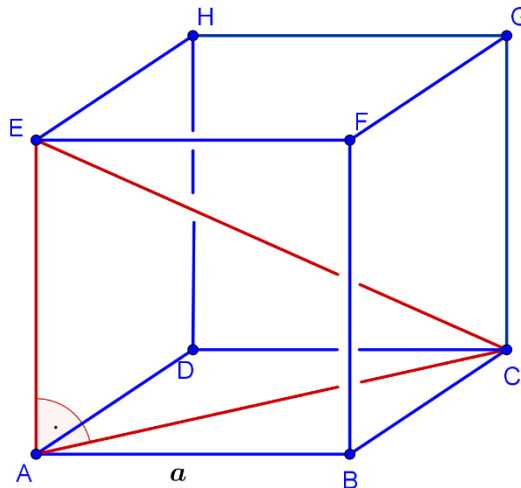
$$2a^2 + 2b^2 = a^2 + 4b^2$$

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}b \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Tehát a két befogó aránya $\sqrt{2}$.

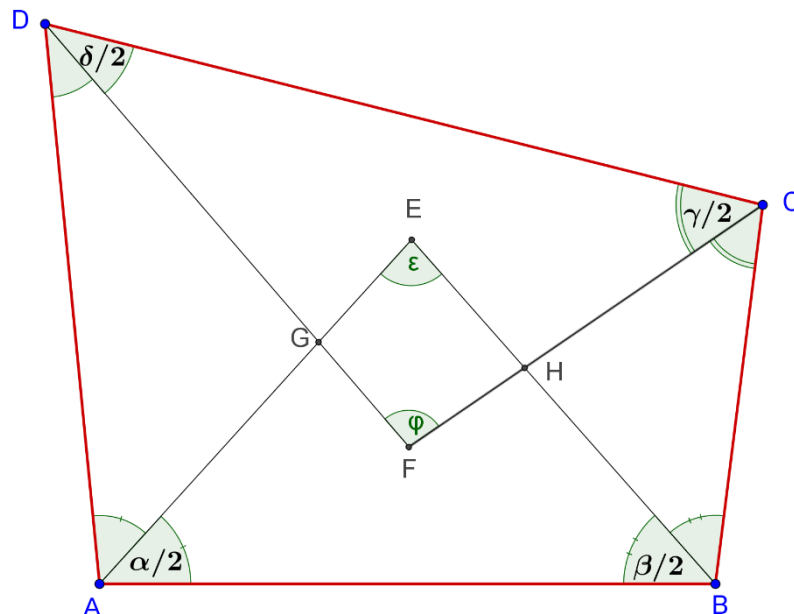
Megjegyzés:

Az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$, ezért a kocka átlós síkja tartalmaz ilyen derékszögű háromszöget. (Az ábrán az ACE háromszög ilyen.)



9. Bizonyítsa be, hogy egy négyszög szögfelezői húrnégyszöget határoznak meg!

Megoldás:



A négyszög szögeit a szokásos módon $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ betűkkel jelöljük. Ekkor $\angle EAB = \frac{\alpha}{2}, \angle ABE = \frac{\beta}{2}$, tehát $\varepsilon = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Hasonlóan $\varphi = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$. Ennek a két szögnek az összege

$$360^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} = 360^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}$$

Bármely négyszögben a belső szögek összege 360° , így a fenti kifejezés értéke:

$$360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Ezek alapján az $EGFH$ négyszög két-két szemben lévő szögének összege 180° , tehát a négyszög húrnégyszög.

10. Egy érintőnégyszög három oldalának a hossza $4\text{ cm}, 9\text{ cm}, 8\text{ cm}$. Mekkora lehet a négyszög negyedik oldala?

(A) 3 cm (B) 5 cm (C) 12 cm (D) 13 cm (E) 17 cm

Megoldás:

Ha egy négyszög érintőnégyszög, akkor a szemben lévő oldalainak összege egyenlő. A negyedik oldalt jelöljük d -vel. A válasz függ attól, hogy a megadottak közül melyek a szemben lévő oldalak. Három lehetőség van:

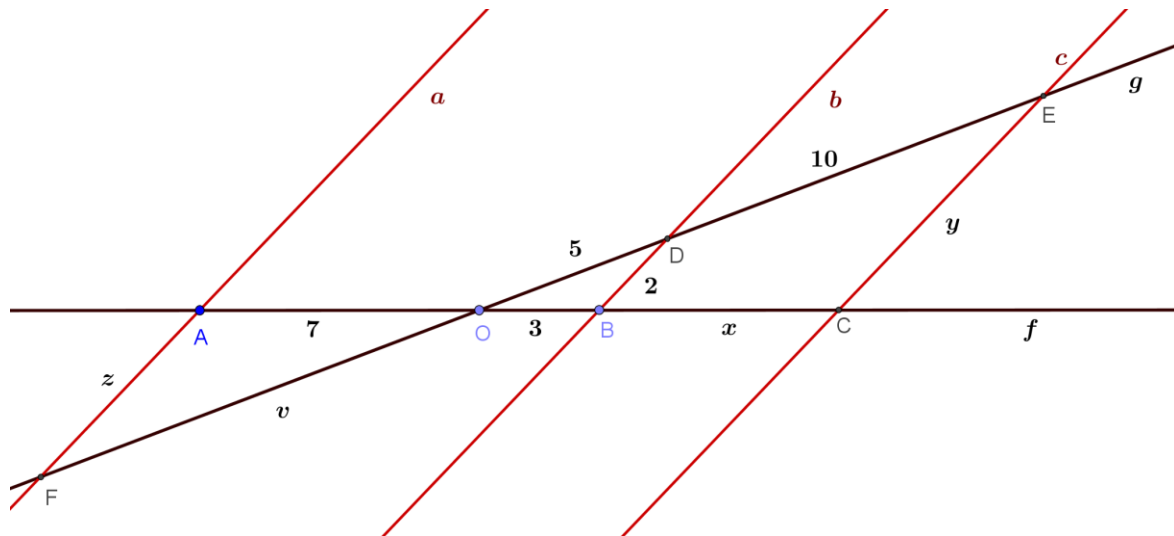
$$4\text{ cm} + 9\text{ cm} = 8\text{ cm} + d \Rightarrow d = 5\text{ cm}$$

$$4\text{ cm} + 8\text{ cm} = 9\text{ cm} + d \Rightarrow d = 3\text{ cm}$$

$$9\text{ cm} + 8\text{ cm} = 4\text{ cm} + d \Rightarrow d = 13\text{ cm}$$

Több jó válasz is van: (A), (B), (D).

11. Az f és g egyeneseket az a, b, c párhuzamos egyenesekkel metsszük. Számítsa ki az x, y, z, v szakaszok hosszát!



Megoldás:

A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\frac{x}{3} = \frac{DE}{OD} = \frac{10}{5} = 2$$

$$x = 6 \text{ (egység)}$$

$$\frac{v}{5} = \frac{AO}{OB} = \frac{7}{3}$$

$$v = \frac{35}{3} \approx 11,67 \text{ (egység)}$$

A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján:

$$\frac{y}{2} = \frac{OE}{OD} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y = 6 \text{ (egység)}$$

$$\frac{z}{2} = \frac{OA}{OB} = \frac{7}{3}$$

$$z = \frac{14}{3} \approx 4,67 \text{ (egység)}$$

Megjegyzés:

A párhuzamos szelők tételének alkalmazásakor a szögszáron tetszőleges szakaszokat összehasonlíthatunk, **DE** a párhuzamos szelőszakaszok tételében a szögszáron a megfelelő szakaszokat a szög csúcsától kell mérnünk.

12. Mely állítások hamisak az alábbiak közül?

- a) A középpontos hasonlóság egyenestartó.
- b) Ha a középpontos hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, akkor minden szög képe az eredeti szög fele lesz.
- c) A középpontos hasonlóságnak nincs invariáns egyenese.
- d) Ha a középpontos hasonlóság aránya negatív, akkor a transzformáció irányításváltó.
- e) Ha a középpontos hasonlóság aránya 2, akkor a sokszög területe négyszeresére változik a transzformáció alkalmazásával.

(A) a, b, e

(B) c, d

(C) b, c, d

(D) a, e

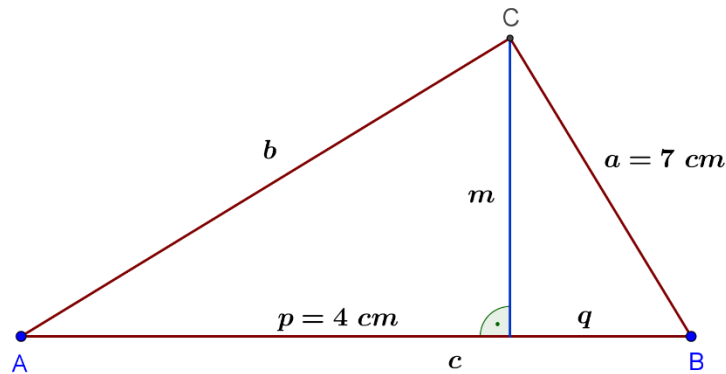
(E) b, e

Megoldás:

- a) Igaz.
- b) Hamis, a középpontos hasonlóság szögtartó, tehát minden szög képe az eredetivel azonos méretű.
- c) Hamis. Minden, a középponton átmenő egyenes képe önmaga. Ezeknek az egyeneseknek a pontjai nem fixpontok, kivéve az 1 arányú középpontos hasonlóság esetén.
- d) Hamis. A középpontos hasonlóság minden arány esetében irányítástartó.
- e) Igaz. Hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának a négyzetével.

A jó válasz a (D).

13. Megrajzoltuk az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságát. Az a és a p szakasz hosszának ismeretében számítsa ki a hiányzó szakaszok hosszát!



Megoldás:

A befogótétel szerint:

$$a^2 = q \cdot c = q(q + p)$$

$$49 = q(q + 4)$$

$$49 = q^2 + 4q$$

$$q^2 + 4q - 49 = 0$$

$$q \approx 5,28 \text{ vagy } q \approx -9,28$$

A feladat szempontjából csak a pozitív érték jó, $q = 5,28 \text{ cm}$.

Az átfogó hossza $c = p + q = 9,28 \text{ cm}$.

A b szakaszt szintén a befogótétellel számoljuk: $b = \sqrt{p \cdot c} = \sqrt{4 \cdot 9,28} \approx 6,09 \text{ cm}$.

A magasságtétel szerint: $m = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{4 \cdot 5,28} \approx 4,60 \text{ cm}$.

A megoldásokat két tizedes jegyre kerekítettük.

14. Egy háromszöget egyik középvonala mentén kettévágunk. Milyen területarányú részek keletkeznek?

(A) 1:2

(B) 1:3

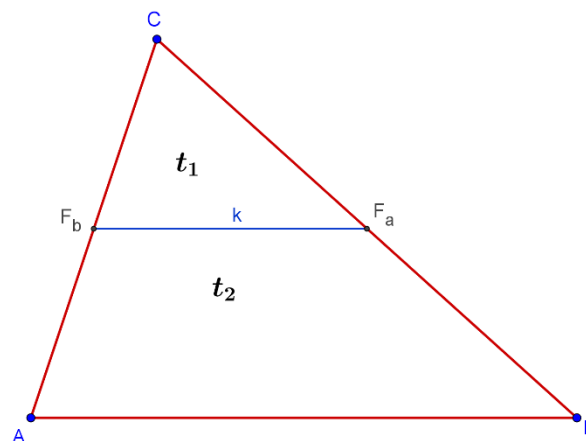
(C) 1:4

(D) 2:5

(E) ezek egyike sem

BME 2010.december 3. (16A)

Megoldás:



A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakasz a középvonal, az ábrán $F_b F_a$.

Az $F_b F_a C \Delta$ -et C középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal kapjuk az $ABC \Delta$ -ből. Hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának a négyzetével:

$$\frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{1}{4}$$

Átrendezve:

$$4t_1 = t_1 + t_2$$

$$t_2 = 3t_1$$

A keletkezett részek aránya: $t_1 : t_2 = 1 : 3$, a jó válasz a (B).

15. Egy kör területét az egyik húrja egy 11π és egy 25π területű darabra osztja. A kör kerülete

- (A) 10π (B) 12π (C) 10 (D) 12

hosszúságegység.

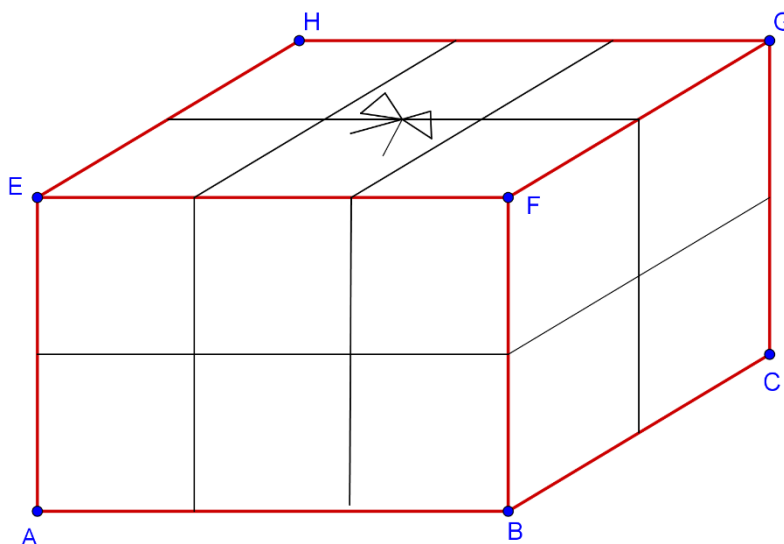
ELTE 2014. december 13.

Megoldás:

A teljes kör területe 36π , ezért a kör sugara 6 egység. (Az r sugarú kör területe $r^2\pi$.) Ezért a kör kerülete $2 \cdot 6 \cdot \pi = 12\pi$. (Az r sugarú kör kerülete $2r\pi$.)

A jó válasz a (B).

16. Egy téglatest alakú dobozt becsomagoltunk, majd zsinórral az ábra szerint átkötöttük. A doboz méretei: $AB = 25 \text{ cm}$, $BC = 15 \text{ cm}$, $AE = 12 \text{ cm}$. Mennyi zsinórra volt szükség, ha a megkötéshez 30 cm-t használtunk el?



Megoldás:

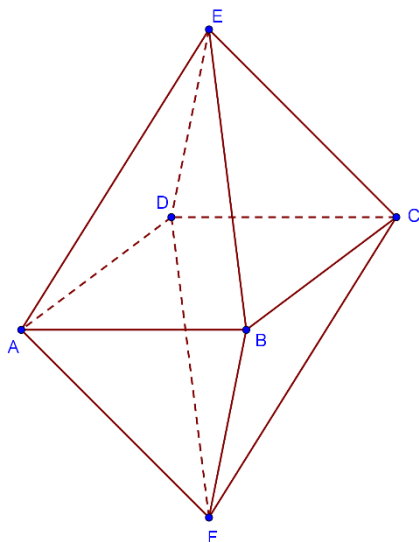
AB hosszúságú részből 4 db, BC és AE hosszúságúból 6-6 db van és ehhez hozzá kell adnunk a kötéshez szükséges hosszat. A szükséges zsinór:

$$4 \cdot 25 + 6 \cdot 15 + 6 \cdot 12 + 30 = 292 \text{ (cm)}.$$

Vegyünk 3 métert!

17. Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm -esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.

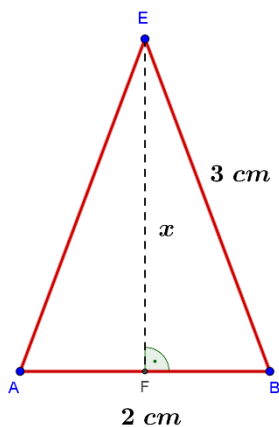
Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm^2 -ben) és a térfogatát (cm^3 -ben)!



Középszintű érettségi vizsga 2013.május 7.

Megoldás:

A felszín 8 egybevágó háromszögből áll. Megrajzoljuk egy ilyen háromszögben az egyik magasságot, majd Pitagorasz-tétellel kiszámoljuk ennek a hosszát:



$$FB = 1\text{ cm}$$

$$x^2 + 1 = 3^2$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\text{ (cm)}$$

A háromszög területe:

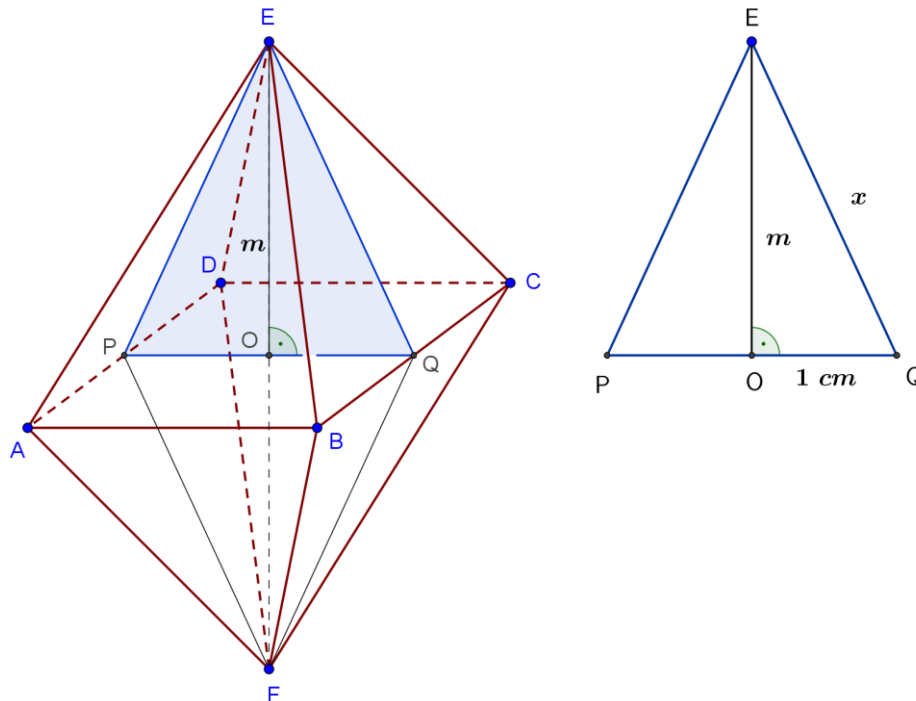
$$t = \frac{AB \cdot x}{2} = 2\sqrt{2}\text{ (cm}^2\text{)}.$$

A felszín ennek a nyolcszorosa:

$$A = 16\sqrt{2}\text{ cm}^2 \approx 22,6\text{ cm}^2.$$

A térfogat kiszámításához meghatározzuk a gúlák magasságát, az ábrán ezt m -mel jelöljük.

A test egyik szimmetria-síkja, az $EPFQ$ sík, tartalmazza ezt a magasságot. A P és Q pontok a megfelelő élek felezőpontjai. Az EPQ háromszög alapja AB -vel, szárai pedig az oldallapok magasságaival, az előbb kiszámolt x -el egyenlők.



A magasságot az OQE derékszögű háromszögből számoljuk:

$$m^2 + 1 = x^2$$

$$m^2 + 1 = 8$$

$$m^2 = 7$$

$$m = \sqrt{7}$$

Az $ABCDE$ gúla térfogata:

$$V_{ABCDE} = \frac{t_{ABCD} \cdot m}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A test térfogata ennek a kétszerese:

$$\frac{8\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3 \approx 7,1 \text{ cm}^3.$$