10. Koordinátageometria

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Melyek azok a $P(x;y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik az $\dfrac{x^2-y}{|x|-1} \geq 0$ egyenlőtlenséget?

   Ábrázolja a megoldáshalmazt a koordináta-síkon!

ELTE 2010. szeptember (matematika, fizika BSc)

Megoldás:

A nevező nem lehet nulla, emiatt $x \neq \pm 1$, ezért az $x=1$ és az $x=-1$ egyenesek nem tartoznak a megoldáshoz.

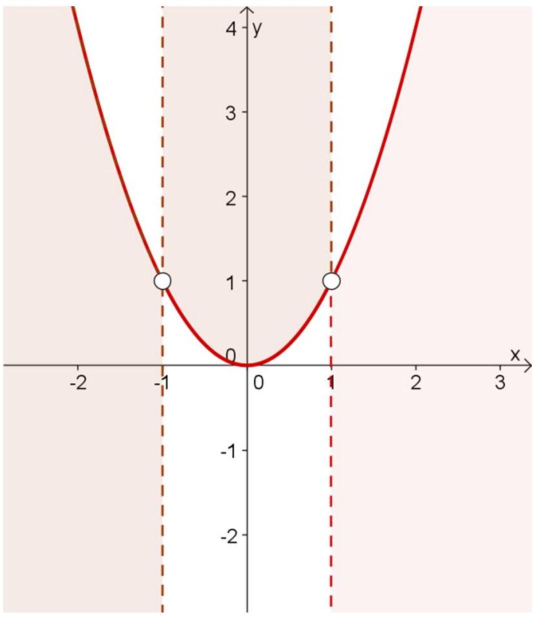
Ha a számláló nulla, akkor a nevező tetszőleges, nemnulla értéke mellett teljesül az egyenlőtlenség, így az $y=x^2$ parabola pontjai a $(-1;1)$ és az $(1;1)$ pontok kivételével a megoldáshalmaz elemei.

A tört akkor pozitív, ha a számlálója és nevezője azonos előjelű.

A számláló pozitív, ha $y<x^2$, aminek a parabola alatti pontok felelnek meg. A nevező pozitív, ha $|x|>1$, vagyis az $x=-1$ egyenestől balra, illetve az $x=1$ egyenestől jobbra elhelyezkedő félsíkok pontjai. E kettő metszete tartozik a megoldáshalmazhoz.

A számláló is és a nevező is negatív a parabola fölött ($y>x^2$) és a két függőleges egyenesünk között ($|x|<1$).

A megoldás: (Az üres karikával jelölt pontok és a szaggatott vonallal jelölt egyenes pontjai nem tartoznak a megoldáshoz.)



2. Hol metszi az y-tengelyt az $A(0;1)$, $B(2;2)$, $C(1;5)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög B-ből induló súlyvonala?

(A) $y=\frac{41}{12}$ (B) $y=\frac{7}{2}$ (C) $y=3,3$ (D) $y=\frac{10}{3}$ (E) $y=\frac{29}{9}$

BME 2015. szeptember 11. (16A)

Megoldás:

A B -ből induló súlyvonal áthalad az AC szakasz felezőpontján.

$$F_{AC}=\left(\frac{0+1}{2};\frac{1+5}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};3\right)$$

A $\overrightarrow{BF_{AC}}$ vektor a keresett súlyvonal irányvektora, 90°-os elforgatással kapunk egy normálvektort.

$\mathbf{v}=\overrightarrow{BF_{AC}}=\left(\frac{1}{2}-2;3-2\right)=\left(-\frac{3}{2};1\right)$, tehát $\mathbf{n}=\left(1;\frac{3}{2}\right)$

A súlyvonal egyenlete a B pontot használva:

$$x+\frac{3}{2}y=2+\frac{3}{2}\cdot 2$$
$$x+\frac{3}{2}y=5$$

Az y-tengellyel való metszéspont első koordinátája 0, ezért a második koordinátát megkapjuk, ha x helyére 0-t helyettesítünk:

$$\frac{3}{2}y=5\text{, tehát }y=\frac{10}{3}.$$

A jó válasz a (D).

3. A következő kifejezések közül melyik lehet egy valódi kör egyenlete?

1. $x^2-y^2-2x+4y=0$
2. $x^2+y^2-8y+27=0$
3. $x^2+y^2-6x+4y+12=0$

(A) Csak az 1. (B) Csak a 2. (C) Csak a 3. (D) Több is igaz. (E) Egyik sem igaz.

BME 2014. december 5. (16A)

Megoldás:

Az 1. egyenletben az x^2 és az y^2 együtthatója nem egyenlő, emiatt nem lehet kör egyenlete.

A 2. és a 3. egyenletet át kell alakítanunk, hogy lássuk a kör középpontját és sugarát.

A 2. egyenlet: $x^2 + y^2 - 8y + 27 = 0$

$$x^2 + (y-4)^2 - 16 + 27 = 0$$

$$x^2 + (y-4)^2 = -11$$

A jobb oldalon negatív számot kaptuk, ezért ez az egyenlet egy üreshalmazt ad meg.

A 3. egyenlet: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$

$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 12 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$$

Ez egy valódi kör egyenlete. (A kör középpontja $(3; -2)$, sugara 1.)

Tehát a jó válasz a (C).

4. A derékszögű koordináta-rendszer síkjában adott egy négyszög négy csúcsával: $A(-2;-3)$, $B(4;-3)$, $C(4;11)$, $D(-2;11)$ és egy kör az egyenletével: $x^2 + y^2 - 20x - 12y + 100 = 0$.

   Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi a négyszögnek is és a körnek is a területét!

ELTE 2012. szeptember (matematika BSc)

Megoldás:

Megnézve a megadott négyszög csúcsainak koordinátáit látható, hogy egy téglalapról van szó. A téglalap területét azok az egyenesek felezik, melyek átmennek a téglalap középpontján. (A téglalap középpontján átmenő egyenesek két egybevágó síkidomra bontják a téglalapot.)

Hasonlóan a kör területét a kör középpontján átmenő egyenesek felezik.

Meg kell tehát keresnünk mindkét alakzat középpontját, majd felírni a két ponton átmenő egyenes egyenletét.

A téglalap középpontja az AC szakasz felezőpontja: $F_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}; \frac{-3+11}{2}\right) = (1;4)$

A kör középpontjának megállapításához át kell alakítanunk a kör egyenletét.

$$x^2 + y^2 - 20x - 12y + 100 = 0$$

$$(x-10)^2 - 100 + (y-6)^2 - 36 + 100 = 0$$

$$(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$$

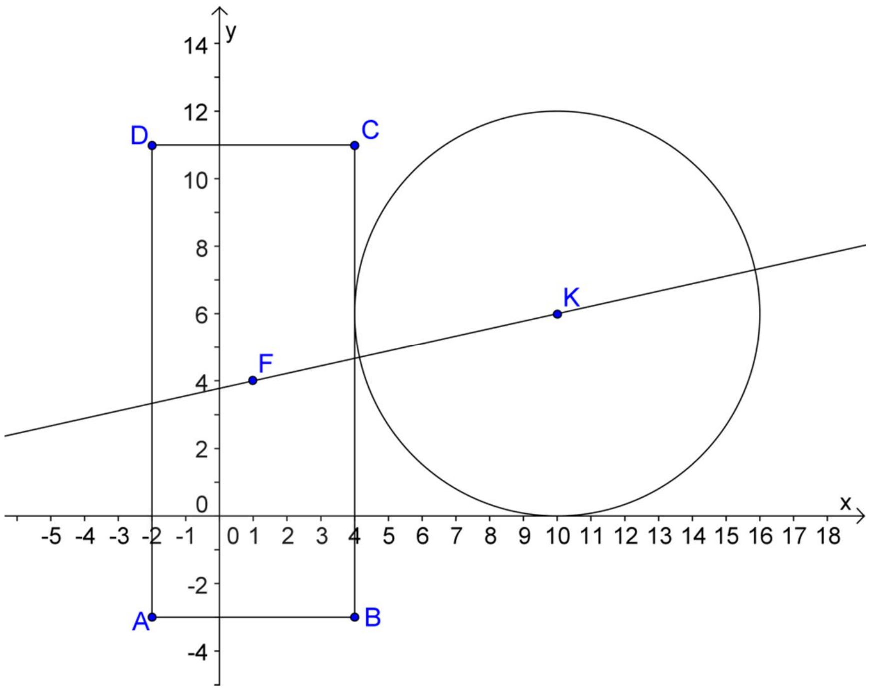
A kör középpontja tehát a $K(10;6)$ pont.

A két középponton átmenő egyenes irányvektora:

$\mathbf{v} = \overrightarrow{KF_{AC}} = (1-10;4-6) = (-9;-2)$, tehát $\mathbf{n} = (2;-9)$

A keresett egyenes egyenlete a normálvektorral és F_{AC} ponttal felírva:

$$2x - 9y = 2 \cdot 1 - 9 \cdot 4$$
$$2x - 9y = -34$$



II. Ismételjünk!

Vektorok a koordináta-rendszerben, egyenes egyenlete, kör egyenlete:

https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/15.pdf 1-2. oldal

III. Gyakorló feladatok

1. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok az $(x;y)$ pontok, amelyekre teljesül az alábbi két feltétel:

$$-x+2y<8 \text{ és } y \geq |x+4|-2$$

2. Adott 3 vektor: $\mathbf{a}(3;-4)$, $\mathbf{b}(-5;2)$, $\mathbf{c}(8;0)$. Végezze el az alábbi vektorműveleteket!

   a) $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+3\mathbf{c}$

   b) $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot 2\mathbf{b}$

3. Adottak az $\mathbf{a}(-7;1)$ és a $\mathbf{b}(3;-4)$ vektorok. Mennyi az általuk bezárt szög koszinusza?

   (A) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (E) Ezek egyike sem.

BME 2011. szeptember 12. (16A)

4. Adott egy háromszög: $A(1;2)$, $B(7,4)$, $C(2,-1)$.

   a) Adja meg a háromszög AB oldalának felezőpontját a koordinátáival!

   b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

   c) Adja meg a $\overrightarrow{CB}$ vektor koordinátáit!

   d) Határozza meg a háromszög kerületét!

5. Egy rombusz egyik átlója a másik átlójának a kétszerese. A rövidebbik átló végpontjai $A(6;-4)$ és $C(-2;6)$. Határozza meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

ELTE 2013. szeptember (matematika tanárszak)

6. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;5)$ ponton és a koordinátatengelyekből egyenlő (nem nulla) hosszúságú szakaszokat vág le!

ELTE 2010. szeptember (földtudomány, környezettan BSc)

7. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(3;-2)$ ponton, és

   a) párhuzamos az e: $2x+5y=-4$ egyenletű egyenessel!

   b) merőleges az e: $2x+5y=-4$ egyenletű egyenesre!

8. Az alábbiak közül melyik az a pont, amely illeszkedik az $A(-2;3)$, $B(0;-1)$, $C(4;2)$ háromszög *B*-ből induló magasságvonalára?

(A) $(1;6)$ (B) $(1;5)$ (C) $(1;-7)$ (D) $(1;-6)$ (E) $(1;-5)$

BME 2015. május 8. (16A)

9. Milyen távol van a $P(-2;7)$ pont az e: $3x-2y=6$ egyenestől?

10. Adott egy *k* kör az egyenletével: $x^2-4x+y^2+8y=5$. Írja fel a *k*-val koncentrikus (vagyis azonos középpontú), feleakkora sugarú kör egyenletét!

11. Hol metszi az $e: x-2y=2$ egyenletű egyenes

a) a $3x+y=13$ egyenletű egyenest?

b) az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű kört?

12. Írja fel az $A(-1;-1)$; $B(5;1)$; $C(-2;2)$ háromszög köré írható körének egyenletét!

13. Írja fel az alábbi $A(-5;-2)$; $B(10;-11)$; $C(18;21)$ háromszög köré írható körének egyenletét!

14. Adott egy kör az egyenletével: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. Egy *P* pontról tudjuk, hogy rajta van a körön, a 3. síknegyedben van, első koordinátája -1.

a) Határozza meg *P* második koordinátáját!

b) Írja fel a kör *P*-n átmenő érintőjének egyenletét!

15. Adott egy kör a koordináta-rendszer síkjában, amelynek a középpontja az origóban van és a sugara 10 egység. Határozza meg azoknak a köröknek az egyenletét, melyek érintik ezt a kört, valamint az *x*-tengelyt a $(20;0)$ pontban.

ELTE 2015. szeptember (tanárszakok)

IV. Megoldások

1. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok az $(x;y)$ pontok, amelyekre teljesül az alábbi két feltétel:

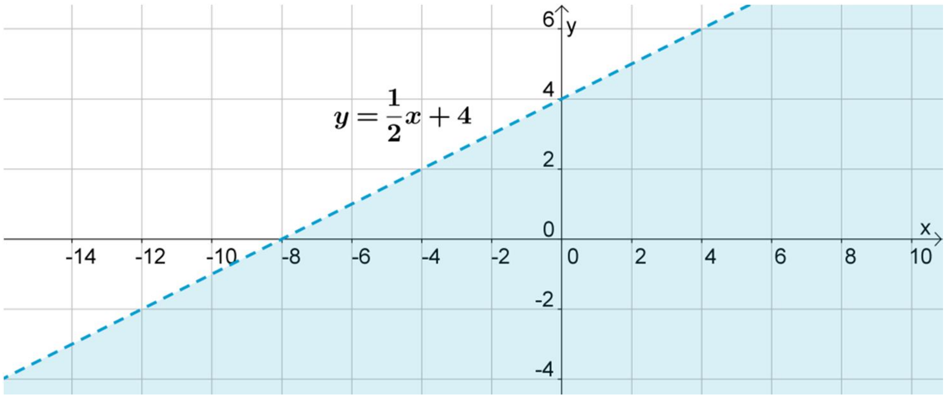
$$-x+2y<8 \text{ és } y\geq |x+4|-2$$

Megoldás:

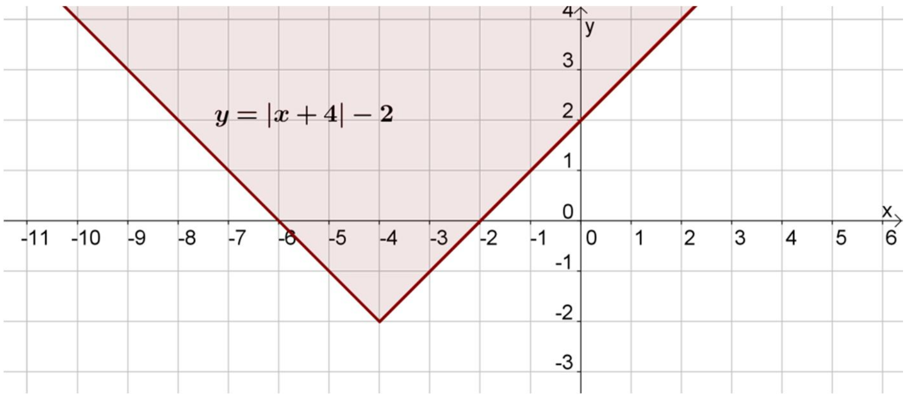
Vizsgáljuk csak az első feltételt! Az egyenlőtlenségből fejezzük ki y-t:

$$y<\frac{1}{2}x+4$$

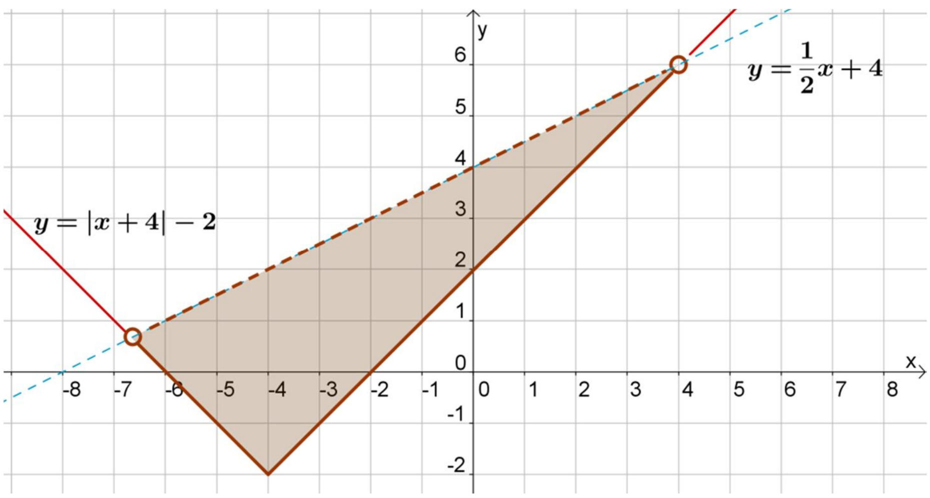
Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{2}x + 4$ egyenest! A fenti egyenlőtlenséget azoknak a pontoknak a koordinátái teljesítik, amelyek az egyenes alatt helyezkednek el (az egyenes pontjai nem).



Nézzük meg külön a 2. feltételt is! Ábrázoljuk az $y = |x + 4| - 2$ függvényt! (Pontosan fogalmazva $x \mapsto |x + 4| - 2$ függvényt.) Az $y \geq |x + 4| - 2$ feltételnek a grafikon pontjai és a felette elhelyezkedő pontok felelnek meg.



A két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, tehát a két halmaz közös részét, metszetét keressük. Egy háromszög alakú területet kapunk. Az üres karikával jelölt pontok és a szaggatott vonallal jelölt oldal nem tartozik hozzá a keresett tartományhoz.



2. Adott 3 vektor: $\mathbf{a}(3;-4)$, $\mathbf{b}(-5;2)$, $\mathbf{c}(8;0)$. Végezze el az alábbi vektorműveleteket!

a) $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+3\mathbf{c}$

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot 2\mathbf{b}$

Megoldás:

a) $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+3\mathbf{c}=\left[2\cdot(3;-4)-(-5;2)\right]+3\cdot(8;0)=(6;-8)-(-5;2)+(24;0)=$
$=(6+5+24;-8-2+0)=(35;-10)$

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot 2\mathbf{b}=\left[(3;-4)+(8;0)\right]\cdot 2(-5;2)=(11;-4)\cdot(-10;4)=11\cdot(-10)+(-4)\cdot 4=-126$

Megjegyzés:

Két vektor összegének, különbségének, egy vektor számszorosának az eredménye vektor, viszont két vektor skaláris szorzatának az eredménye egyetlen szám.

3. Adottak az $\mathbf{a}(-7;1)$ és a $\mathbf{b}(3;-4)$ vektorok. Mennyi az általuk bezárt szög koszinusza?

(A) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (E) Ezek egyike sem.

BME 2011. szeptember 12. (16A)

Megoldás:

A két vektor által közbezárt szög a skaláris szorzatból könnyen számolható. Tudjuk, hogy

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi$. Átrendezve:

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{-7\cdot 3+1\cdot(-4)}{\sqrt{(-7)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{-25}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{25}}=\frac{-25}{5\cdot\sqrt{2}\cdot 5}=\frac{-25}{25\cdot\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

A jó válasz az (A).

4. Adott egy háromszög: $A(1;2)$, $B(7,4)$, $C(2,-1)$.

a) Adja meg a háromszög AB oldalának felezőpontját a koordinátáival!

b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

c) Adja meg a $\overrightarrow{CB}$ vektor koordinátáit!

d) Határozza meg a háromszög kerületét!

Megoldás:

a) A felezőpont koordinátáit a végpontok koordinátáinak számtani közepeként kapjuk:

$$F_{AB}=\left(\frac{1+7}{2};\frac{2+4}{2}\right)=(4;3)$$

b) A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok koordinátáinak számtani közepe:

$$S=\left(\frac{1+7+2}{3};\frac{2+4+(-1)}{3}\right)=\left(\frac{10}{3};\frac{5}{3}\right)$$

c) Két pont közötti vektor koordinátáit megkapjuk, ha a végpontból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit.

$$\overrightarrow{CB}=(7-2;4-(-1))=(5;5)$$

d) A háromszög oldalainak hosszát a csúcsainak távolságaként kapjuk.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(7-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{40}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(2-7)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{50}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$$

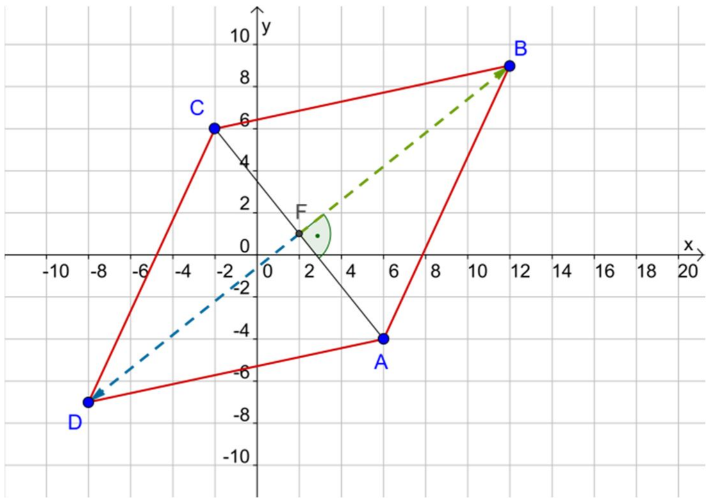
$$K=\sqrt{50}+\sqrt{40}+\sqrt{10}\approx 16,56$$

5. Egy rombusz egyik átlója a másik átlójának a kétszerese. A rövidebbik átló végpontjai $A(6;-4)$ és $C(-2;6)$. Határozza meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

ELTE 2013. szeptember (matematika tanárszak)

Megoldás:

A rombusz átlói felezik egymást és merőlegesek egymásra. Ezért a keresett két csúcspontot megkapjuk, ha a középpontot eltoljuk a rövidebbik átló vektorának 90°-os elforgatottjával mindkét irányba.



A rombusz középpontja az AC szakasz felezőpontja:

$$F_{AC}=\left(\frac{6-2}{2};\frac{-4+6}{2}\right)=(2;1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-2-6;6+4)=(-8;10)$$

90°-kal elforgatva $(10;8)$ illetve $(-10;-8)$. Ezekkel a vektorokkal kell a középpontot eltolni.

$B=(2;1)+(10;8)=(12;9)$ és $D=(2;1)+(-10;-8)=(-8;-7)$

6. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;5)$ ponton és a koordinátatengelyekből egyenlő (nem nulla) hosszúságú szakaszokat vág le!

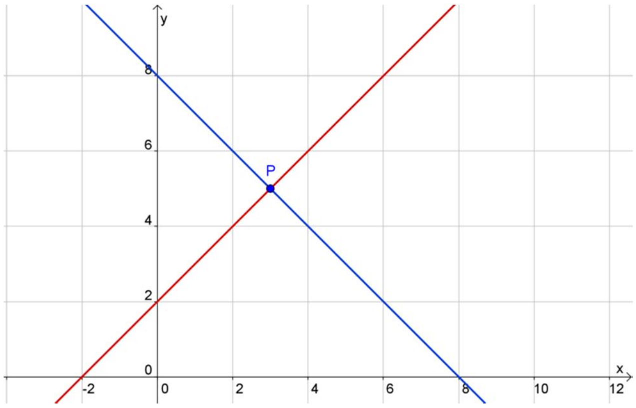
ELTE 2010. szeptember (földtudomány, környezettan BSc)

Megoldás:

A koordinátatengelyekből egyenlő hosszúságú szakaszokat az $m=1$ és az $m=-1$ meredekségű egyenesek vágnak le. Így a keresett egyenes egyenlete $y=x+b$, vagy $y=-x+b$. Ezekbe P koordinátáit helyettesítve kapjuk b lehetséges értékeit.

$$\begin{aligned} 5&=3+b \\ b&=2 \end{aligned} \quad \text{vagy} \quad \begin{aligned} 5&=-3+b \\ b&=8 \end{aligned}$$

Két megoldást kaptunk: $y=x+2$, illetve $y=-x+8$.



7. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(3;-2)$ ponton, és

   a) párhuzamos az *e:* $2x+5y=-4$ egyenletű egyenessel!

   b) merőleges az *e:* $2x+5y=-4$ egyenletű egyenesre!

Megoldás:

A megadott egyenes normálvektora az egyenletéből leolvasható: $\mathbf{n_e}=(2;5)$.

a) A párhuzamos egyenesnek ugyanez a normálvektora. A keresett egyenes egyenlete:

$$2x+5y=2\cdot 3+5\cdot(-2)$$
$$2x+5y=-4$$

b) A merőleges egyenesnek a normálvektorát 90°-os elforgatással kapjuk: $\mathbf{n_f}=(5;-2)$. A keresett egyenes egyenlete:

$$5x-2y=5\cdot 3-2\cdot(-2)$$
$$5x-2y=19$$

8. Az alábbiak közül melyik az a pont, amely illeszkedik az $A(-2;3)$, $B(0;-1)$, $C(4;2)$ háromszög B-ből induló magasságvonalára?

(A) $(1;6)$ (B) $(1;5)$ (C) $(1;-7)$ (D) $(1;-6)$ (E) $(1;-5)$

BME 2015. május 8. (16A)

Megoldás:

Írjuk fel a B-ből induló magasságvonal egyenletét! Az ehhez szükséges normálvektor az $\overrightarrow{AC}$.

$\mathbf{n}=\overrightarrow{AC}=(6;-1)$. Így a magasságvonal: $6x-y=6\cdot 0-1\cdot(-1)=1$. A megadott pontok első koordinátája 1, ezt helyettesítsük a kapott egyenletbe!

$$6\cdot 1-y=1$$
$$y=5$$

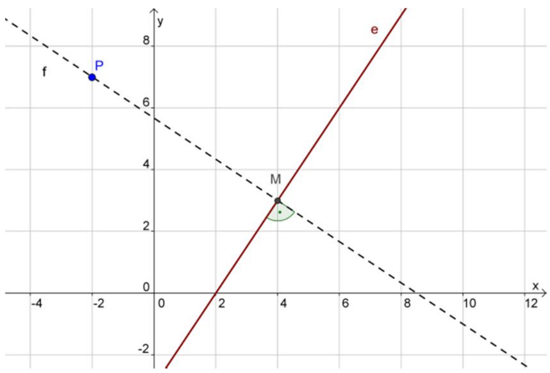
A jó válasz a (B).

9. Milyen távol van a $P(-2;7)$ pont az e: $3x-2y=6$ egyenestől?

Megoldás:

Egy pont egyenestől való távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza. Ennek megfelelően a megoldás lépései:

1. merőlegest állítunk a P pontból az e egyenesre: f;
2. e és f metszéspontja: M;
3. M és P távolsága a keresett távolság.



1. Az e egyenes normálvektora: $\mathbf{n_e}=(3;-2)$ Az f egyenes erre merőleges: $\mathbf{n_f}=(2;3)$. Egy pontja a P, tehát az f egyenes egyenlete: $2x+3y=2\cdot(-2)+3\cdot 7=17$
2. e és f metszéspontját egyenletrendszer megoldásával számoljuk:

$$\left.\begin{array}{l}3x-2y=6\\2x+3y=17\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}9x-6y=18\\4x+6y=34\end{array}\right\}$$

Összeadva az egyenleteket:

$$13x=52$$

$$x=4$$

Visszahelyettesítve az 1. egyenletbe:

$$3\cdot 4-2y=6$$

$$-2y=-6$$

$$y=3$$

A metszéspont: $M(4;3)$

3. $\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{(-2-4)^2+(7-3)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$

10. Adott egy *k* kör az egyenletével: $x^2-4x+y^2+8y=5$. Írja fel a *k*-val koncentrikus (vagyis azonos középpontú), feleakkora sugarú kör egyenletét!

Megoldás:

Alakítsuk át a kör egyenletét, hogy le tudjuk olvasni a kör középpontját és sugarát!

$$x^2-4x+y^2+8y=5$$

$$(x-2)^2-4+(y+4)^2-16=5$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2=25$$

A kör középpontja tehát $K(2;-4)$, sugara $r=5$. A keresett körnek tehát ugyanez a középpontja, sugara pedig 2,5. Egyenlete:

$$(x-2)^2+(y+4)^2=6{,}25$$

11. Hol metszi az $e: x-2y=2$ egyenletű egyenes

a) a $3x+y=13$ egyenletű egyenest?

b) az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű kört?

Megoldás:

Két alakzat metszéspontját megkapjuk, ha megoldjuk az egyenletükből álló egyenletrendszert.

a) Egy elsőfokú egyenletrendszert kell megoldanunk. Dolgozhatunk az egyenlő együtthatók módszerével, ehhez a második egyenletet szorozzuk 2-vel, majd összeadjuk az egyenleteket.

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=2 \\ 3x+y=13 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=2 \\ 6x+2y=26 \end{array}\right\}$$

$$7x=28$$
$$x=4$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$4-2y=2$$
$$-2y=-2$$
$$y=1$$

A keresett metszéspont: $M(4;1)$.

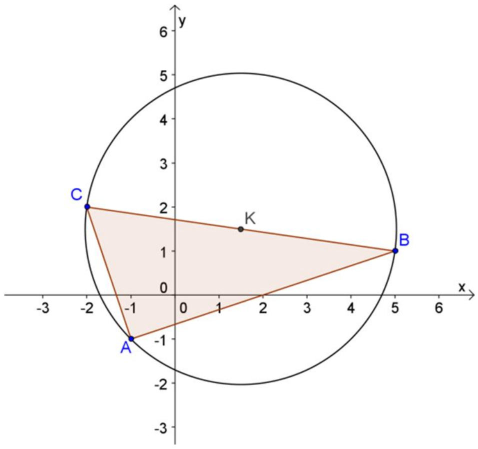
b) A megoldandó egyenletrendszer egyik egyenlete elsőfokú, a másik másodfokú. Az elsőfokú egyenletből fejezzük ki x-et, és írjuk be a másodfokú egyenletbe!

$$x-2y=2$$
$$x=2+2y$$
$$(2+2y-3)^2+(y+2)^2=25$$
$$(2y-1)^2+(y+2)^2=25$$
$$4y^2-4y+1+y^2+4y+4=25$$
$$5y^2=20$$
$$y^2=4$$
$$y=\pm 2$$

Visszahelyettesítve az $x=2+2y$ egyenletbe kapjuk, hogy $x_1=-2$, $x_2=6$. A keresett két metszéspont tehát: $M_1=(-2;-2)$, $M_2=(6;2)$.

12. Írja fel az $A(-1;-1)$; $B(5;1)$; $C(-2;2)$ háromszög köré írható körének egyenletét!

Megoldás:



Vegyük észre, hogy a háromszög derékszögű! Ellenőrizzük: ha az AB és az AC oldalak merőlegesek egymásra, a megfelelő vektorok skaláris szorzata nulla.

$\overrightarrow{AB}=(6;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;3)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\cdot(-1)+2\cdot 3=0$

A Thalész-tétel szerint a köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja, a sugara az átfogó hosszának fele.

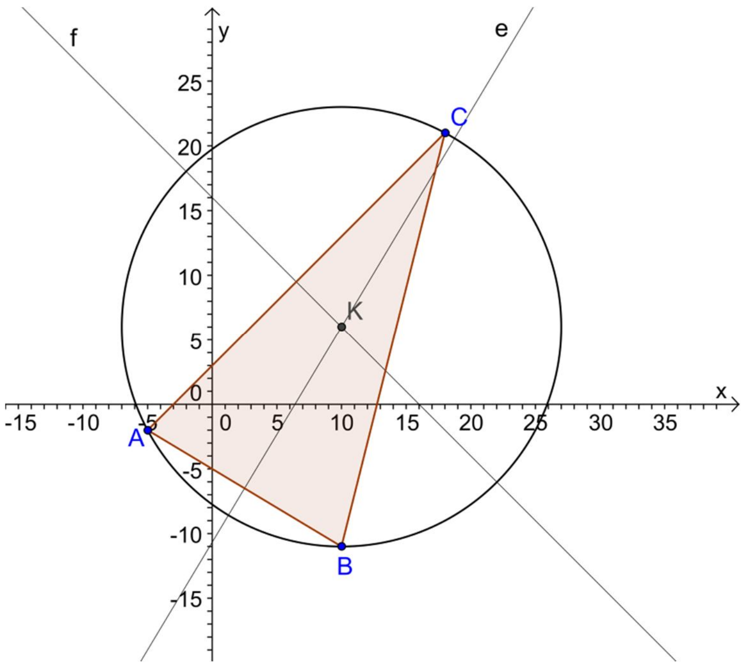
$F_{BC}=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$; $\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{(5+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{50}$; $r=\frac{\sqrt{50}}{2}$

A keresett kör egyenlete:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

13. Írja fel az alábbi $A(-5;-2)$; $B(10;-11)$; $C(18;21)$ háromszög köré írható körének egyenletét!

Megoldás:



A háromszög köré írható körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. A megoldás lépései:

1. AB oldal felezőmerőlegesének egyenlete: e;
2. AC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: f;
3. e és f metszéspontja: K – a kör középpontja;
4. a kör sugara K és A távolsága;
5. a kör egyenlete.

1. $F_{AB}\left(\frac{5}{2};-\frac{13}{2}\right)$; $\mathbf{n_e}=\overrightarrow{AB}=(15;-9)$ dolgozhatunk a vele párhuzamos $(5;-3)$ vektorral

   $e:5x-3y=32$

2. $F_{AC}\left(\frac{13}{2};\frac{19}{2}\right)$; $\mathbf{n_f}=\overrightarrow{AC}=(23;23)$ dolgozhatunk a vele párhuzamos $(1;1)$ vektorral.

   $\mathrm{f}:x+y=16$

3. Megoldandó a $\left.\begin{aligned}5x-3y&=32\\x+y&=16\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer.

   A második egyenletből kifejezzük x-et, majd beírjuk az 1. egyenletbe.

$$x=16-y$$
$$5(16-y)-3y=32$$
$$80-5y-3y=32$$
$$-8y=-48$$
$$y=6$$
$$x=16-6=10$$

   $K=(10;6)$

4. $r=\left|\overrightarrow{KA}\right|=\sqrt{(10+5)^2+(6+2)^2}=17$

5. A keresett kör egyenlete: $(x-10)^2+(y-6)^2=289$

14. Adott egy kör az egyenletével: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. Egy P pontról tudjuk, hogy rajta van a körön, a 3. síknegyedben van, első koordinátája -1.

a) Határozza meg P második koordinátáját!

b) Írja fel a kör P-n átmenő érintőjének egyenletét!

Megoldás:

a) Mivel P rajta van a körön, a kör egyenletébe $x=-1$-et helyettesítve megkapjuk P második koordinátáját.

$$(-1-3)^2+(y+2)^2=25$$
$$16+(y+2)^2=25$$
$$(y+2)^2=9$$
$$y+2=\pm3$$
$$y_1=1$$
$$y_2=-5$$

Tudjuk, hogy P a 3. síknegyedben van, ezért az $y=-5$ a feladat megoldása.

b) A kör érintőjét a körvonal egy adott pontjában keressük. Tudjuk, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. A keresett érintő normálvektora a $\overrightarrow{KP}$ vektor, ahol K a kör középpontja.

A kör középpontjának koordinátái leolvashatók az egyenletéből: $K(3;-2)$

$\mathbf{n} = \overrightarrow{KP} = (-4;-3)$. Így az érintő egyenlete: $-4x-3y=-4\cdot(-1)+(-3)\cdot(-5)$

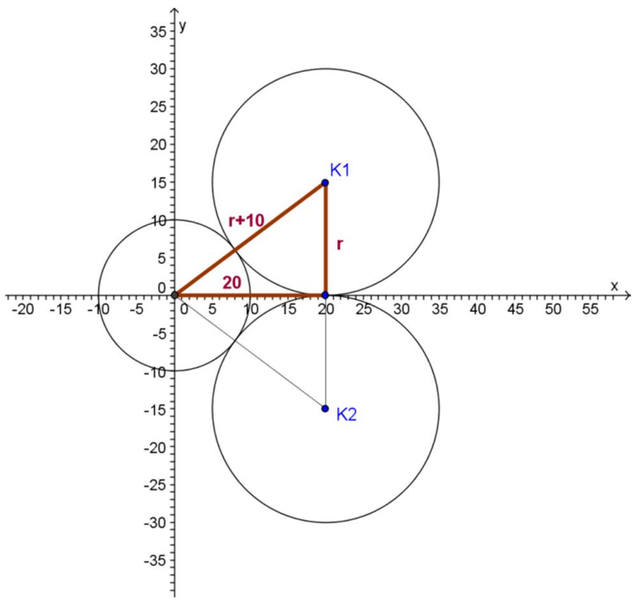
$$-4x-3y=19$$

15. Adott egy kör a koordináta-rendszer síkjában, amelynek a középpontja az origóban van és a sugara 10 egység. Határozza meg azoknak a köröknek az egyenletét, melyek érintik ezt a kört, valamint az x-tengelyt a $(20;0)$ pontban.

ELTE 2015. szeptember (tanárszakok)

Megoldás:

Készítsünk ábrát a feladathoz!



A feladat szimmetriájából következik, hogy két megfelelő, azonos sugarú kör van. Jelöljük a sugarat r-rel. A körök középpontjainak koordinátái $(20;\pm r)$. Az érintkező körök érintési pontjai és középpontjaik egy egyenesen vannak.

Az ábrán is bejelölt derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt kapjuk r értékét.

$$20^2+r^2=(r+10)^2$$
$$400+r^2=r^2+20r+100$$
$$300=20r$$
$$r=15$$

A két kör egyenlete:

$(x-20)^2+(y-15)^2=225$ és $(x-20)^2+(y+15)^2=225$