11. Sorozatok

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Egy számtani sorozat harmadik eleme 15, a nyolcadik eleme 30. Mely n természetes számra igaz, hogy a sorozat első n elemének összege 264?

ELTE 2013. szeptember (matematika tanárszak)

Megoldás:

A szokásos jelöléseket alkalmazva: $a_3 = 15$ és $a_8 = 30$.

Használjuk fel a számtani sorozat tagjai közötti összefüggést: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ és

az első n tag összegére vonatkozó összefüggést: $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$.

$$a_3 = a_1 + 2d = 15$$
$$a_8 = a_1 + 7d = 30$$

A második egyenletből vonjuk ki az elsőt:

$$5d = 15$$
$$d = 3$$

Ezt visszahelyettesítve megkapjuk a_1-t. $a_1 + 2 \cdot 3 = 15 \Rightarrow a_1 = 9$.

Az összegképletbe behelyettesítünk:

$$S_n = \frac{9 + 9 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$$
$$264 = \frac{3n + 15}{2} \cdot n$$
$$528 = 3n^2 + 15n$$
$$0 = 3n^2 + 15n - 528$$
$$0 = n^2 + 5n - 176$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével megkapjuk az n lehetséges értékeit:

$$n_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 704}}{2} = \frac{-5 \pm 27}{2}$$

$n_1 = 11$ és $n_2 = -16$. Ez nem lehet megoldás, mert $n \in N^+$.

Tehát a sorozat első 11 tagjának összege 264.

Ellenőrzés:

$$S_{11} = \frac{9 + 9 + (11-1) \cdot 3}{2} \cdot 11 = 24 \cdot 11 = 264.$$

2. Mennyi az alábbi összeg értéke?

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{11}+\left(\frac{1}{3}\right)^{12}+\left(\frac{1}{3}\right)^{13}+\cdots..+\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$$

$(A)3\cdot\frac{\frac{1}{3^{20}}-1}{2}$ $(B)\frac{3^{10}-1}{2\cdot 3^{20}}$ $(C)\ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3^{20}}-1\right)$ $(D)\ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{3^{20}}\right)$ $(E)\frac{3^{19}-3}{2}$

BME 2015. december 14. (14A)

Megoldás:

Vegyük észre, hogy ez egy mértani sorozat egymást követő 10 tagjának összege, ahol

$$a_1=\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\quad q=\frac{1}{3}\quad \text{és}\quad n=10.$$

Mértani sorozat első *n* tagjának összege: $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$.

Behelyettesítve:

$$S_{10}=\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10}-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{21}-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3^{21}}-\frac{1}{3^{11}}}{-\frac{2}{3}}=$$
$$=\frac{\frac{1-3^{10}}{3^{21}}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1-3^{10}}{3^{21}}\right)=\frac{-3(1-3^{10})}{2\cdot 3^{21}}=\frac{3^{10}-1}{2\cdot 3^{20}}$$

Tehát a jó válasz a (*B*).

3. Három pozitív egész szám csökkenő számtani sorozatot alkot. Ha a középső számot 3-mal csökkentjük, akkor 0,5 hányadosú csökkenő mértani sorozatot kapunk. Mennyi az eredeti három szám közül a középső?

(A) 6 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 24

BME 2013. május 10. (16B)

Első megoldás:

Érdemes a számtani sorozat három egymást követő tagját felírni úgy, hogy:

$a_1=a-d$ $a_2=a$ $a_3=a+d,$ ahol $d<0$

Ekkor $b_1=a-d$ $b_2=a-3$ $b_3=a+d,$ mértani sorozat, ahol *q=0,5*.

A mértani sorozat definíciója alapján: I. $\frac{a-3}{a-d}=0{,}5$; II. $\frac{a+d}{a-3}=0{,}5$.

Rendezzük át az egyenleteket:

I. $\dfrac{a-3}{a-d} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \; a-6 = -d \Rightarrow d = 6-a$

II. $\dfrac{a+d}{a-3} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \; a+2d = -3$

$d = 6 - a$-t behelyettesítjük a II. egyenletbe: $a + 2(6-a) = -3$

$$a + 12 - 2a = -3$$
$$-a = -15$$
$$a = 15$$

Tehát $a_2 = 15$ $\quad$ *és* $\quad$ $d = -9$.

A számtani sorozat tagjai: 24; 15; 6.

A mértani sorozat tagjai: 24; 12; 6; ahol *q*=0,5.

Második megoldás:

A mértani sorozat tagjait írjuk fel: $b_1 = a$ $\qquad b_2 = 0{,}5a$ $\qquad b_3 = 0{,}25a$.

Ekkor a számtani sorozat tagjai: $a_1 = a$ $\qquad a_2 = 0{,}5a + 3$ $\qquad a_3 = 0{,}25a$.

A számtani sorozat tulajdonságát alkalmazzuk: $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} = a_n$.

$$0{,}5a + 3 = \frac{a + 0{,}25a}{2}$$
$$a + 6 = a + 0{,}25a$$
$$6 = 0{,}25a$$
$$a = 24$$

Tehát a számtani sorozat második tagja: $a_2 = 0{,}5a + 3 = 15$

Tehát a jó válasz a (*C*).

4. Kovács úr a fia 6. születésnapján 200 000 Ft-ot helyezett el a bankba évi 5,5%-os kamatra. Ezt követően a fiú minden születésnapján újabb 30 000 Ft-ot tett az összeghez. Mennyi pénz lesz a számlájukon a fiú 18. születésnapján? (A számlavezetési költségektől eltekintünk.)

ELTE 2015.szeptember, (matematika BSc)

Megoldás:

Jelölje a 200 000 Ft induló összeget *A*, a 30 000 Ft-ot évenkénti befizetett összeget pedig *B*. A fiú 12 év múlva lesz 18 éves.

Felírjuk évenként a bankban lévő pénzösszeget:

1 év után: $A \cdot 1{,}055 + B$

2 év után: $(A \cdot 1{,}055 + B) \cdot 1{,}055 + B = A \cdot 1{,}055^2 + B \cdot 1{,}055 + B$

3 év után: $(A \cdot 1{,}055^2 + B \cdot 1{,}055 + B) \cdot 1{,}055 + B = A \cdot 1{,}055^3 + B \cdot 1{,}055^2 + B \cdot 1{,}055 + B$

4 év után: $A \cdot 1{,}055^4 + B \cdot 1{,}055^3 + B \cdot 1{,}055^2 + B \cdot 1{,}055 + B$.

Ezek alapján 12 év után a felvehető pénz a bankban:

$$A \cdot 1{,}055^{12} + B \cdot 1{,}055^{11} + B \cdot 1{,}055^{10} + B \cdot 1{,}055^9 + \dots + B \cdot 1{,}055^2 + B \cdot 1{,}055 + B$$

Ez egy 13 tagú összeg, ahol a B-t tartalmazó tagok egy mértani sorozat összegét alkotják,

$a_1 = B \qquad q = 1{,}055 \quad \text{és} \ n = 12.$

Tehát az összeg:

$$A \cdot 1{,}055^{12} + B(1{,}055^{11} + 1{,}055^{10} + \cdots + 1{,}055 + 1) = A \cdot 1{,}055^{12} + B \cdot \frac{1{,}055^{12} - 1}{1{,}055 - 1}$$

Visszahelyettesítve a konkrét értékeket a következő összeget kapjuk:

$$200\,000 \cdot 1{,}055^{12} + 30\,000 \cdot \frac{1{,}055^{12} - 1}{1{,}055 - 1} \approx 871809{,}2$$

Tehát Kovács úr fia a 18. születésnapján 871810 Ft-ot vehet fel.

II. Ismételjünk!

1. Sorozat fogalma

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/16.pdf 1.oldal

2. Nevezetes sorozatok (számtani, mértani)

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/16.pdf 1-2.oldal

3. Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/16.pdf 6.oldal

III. Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a következő sorozatok hatodik és huszonegyedik tagját!

   a) $a_n = n^3 - 15n + 3$

   b) $b_n = \sqrt{3n+4}$

2. Hányadik tagja a sorozatnak a 30?

   a) $a_n = n^2 - 11n + 18$

   b) $b_n = \frac{10n+20}{3n-26}$

3. Ha $a_n = \frac{2^n}{n!}$, akkor $\frac{a_{n+1}}{a_n} = ?$

   $(A)\ 1$ $(B)\ 2$ $(C)\ \frac{2}{n+1}$ $(D)\ \frac{2n}{n+1}$ (E) ezek egyike sem

   BME 2011. május 6. (16A)

4. Egy sorozatot a következő képlettel adunk meg: $a_n = log_2\left(\sqrt[4]{2}\right)^n$, ahol *n* tetszőleges pozitív egész szám.

   a) Előfordul-e a sorozat tagjai között az $\frac{1}{2}$, a 16 és a 100? Ha igen, a sorozat hányadik tagja?

   b) Határozza meg a sorozat első *n* tagjának összegét!

5. Egy számtani sorozat első tagja 10, a differenciája $-\frac{5}{4}$. Mennyi a sorozat 33. tagja, és mennyi az első 121 tag összege?

6. Egy egész számokból álló számtani sorozat első öt tagjának összege 65, szorzata 129168. Melyik ez a sorozat?

7. Mekkora a 2016-nál kisebb, hárommal osztva kettő maradékot adó pozitív egész számok összege?

8. Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azutánin 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.

c) Hány méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon?

d) Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele?

e) Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon?

f) A 21-edik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával?

Középszintű érettségi vizsga 2006. október 25.

9. Egy számtani sorozat első húsz tagjának az összege 45, az első negyven tag összege pedig 290. Határozza meg a sorozat első tagját és differenciáját! Hány 100-nál kisebb tagja van a sorozatnak?

ELTE 2007. szeptember (földtudományi szak BSc)

10. Egy mértani sorozat első tagja 3, a hányadosa -2. Mennyi a sorozat ötödik és tizedik tagja? Határozza meg az első tizenhárom tag összegét!

11. Melyik az a szám, amelyet 30-hoz, 50-hez és a 80-hoz hozzáadva három olyan számot kapunk, amelyek mértani sorozatot alkotnak?

ELTE 2010. szeptember (földtudományi szak BSc)

12. Egy mértani sorozat tagjaira teljesülnek a következő összefüggések. Számítsuk ki a sorozat első tagját és a hányadosát!

$$a_1 + a_2 + a_3 = 57 \quad és \quad a_1 - a_3 = 15$$

13. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak?

Emelt szintű érettségi vizsga 2010. május 4.

14. Egy mértani sorozat első eleme 3, n -edik eleme 13. Az első n elem reciprok értékeinek összege 8. Számítsa ki a mértani sorozat első n tagjának összegét!

ELTE 2007. Matematika szintfelmérő

15. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 6. Ha az első taghoz 5-öt, a másodikhoz 2-t, a harmadikhoz 1-et adunk, akkor egy mértani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Melyik ez a mértani sorozat?

16. Egy populációban a baktériumok száma mértani sorozat szerint növekszik. 1 órakor 1000, 3 órakor 4000 baktérium van a populációban. Mennyi lesz a baktériumok száma 7 órakor?

$$(A)\ 1000 \cdot 10^4 \qquad (B)\ 1000 \cdot 4^7 \qquad (C)\ 64000 \qquad (D) \sum_{k=1}^{7} 1000 \frac{2^k - 1}{2 - 1} \qquad (E) \sum_{k=1}^{6} 1000 \frac{2^k - 1}{2 - 1}$$

BME 2011. december 2. (16A)

17. Egy új autó ára 4 500 000 Ft. Az elhasználódás miatt évenként 15% –os értékcsökkenést figyelembe véve, mennyit ér az autó 5 év múlva? Hány év múlva csökken az autó értéke a negyedére?

18. Kiss Béla örökölt $100\ 000\ 000$ Ft-ot, amit január elején helyez el a bankban, ahol évi 5% –os kamatot fizetnek. Úgy tervezi, hogy 20 év alatt fogja felhasználni az örökségét, mégpedig úgy, hogy minden év végén azonos összeget fog kivenni a bankból. Mekkora összeget vehet fel évente, ha 20 év múlva nem marad pénze a bankban?

IV. Megoldások

A megoldások során alkalmazzuk a sorozatokra vonatkozó összefüggéseket:

	számtani sorozat	mértani sorozat
a sorozat tagjai közötti kapcsolat	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$
az első *n* tag összege	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n =$ $= \dfrac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$	$S_n = \begin{cases} n \cdot a_1, & ha\ q = 1 \\ a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & ha\ q \neq 1 \end{cases}$

1. Számítsuk ki a következő sorozatok hatodik és huszonegyedik tagját!

   a) $a_n = n^3 - 15n + 3$

   b) $b_n = \sqrt{3n + 4}$

   Megoldás:

   c) $a_6 = 6^3 - 15 \cdot 6 + 3 = 129;$ $\qquad a_{21} = 21^3 - 15 \cdot 21 + 3 = 8949$

   d) $b_6 = \sqrt{3 \cdot 6 + 4} = \sqrt{22};$ $\qquad b_{21} = \sqrt{3 \cdot 21 + 4} = \sqrt{67}$

2. Hányadik tagja a sorozatnak a 30?

   a) $a_n = n^2 - 11n + 18$

   b) $b_n = \frac{10n+20}{3n-26}$

   Megoldás:

   a) $a_n = n^2 - 11n + 18 = 30$

   $n^2 - 11n - 12 = 0$

   $$n_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 + 48}}{2} = \frac{11 \pm 13}{2};$$

   $n_1 = 12$ $\qquad n_2 = -1,$ ez nem megoldás , mert *n* csak pozitív természetes szám lehet.

   Tehát az a_n sorozat 12. tagja a 30.

   Ellenőrzés: $\boldsymbol{a_{12} = 12^2 - 11 \cdot 12 + 18 = 30}$

   b) $b_n = \frac{10n+20}{3n-26} = 30$

   $10n + 20 = 30 \cdot (3n - 26)$

   $10n + 20 = 90n - 780$

   $800 = 80n$

   $n = 10$

Tehát az b_n sorozat 10. tagja a 30.

Ellenőrzés: $\boldsymbol{b_{10} = \frac{100+20}{30-26} = \frac{120}{4} = 30}$.

3. Ha $a_n = \frac{2^n}{n!}$, akkor $\frac{a_{n+1}}{a_n} = ?$

$(A)\ 1$ $(B)\ 2$ $(C)\ \dfrac{2}{n+1}$ $(D)\ \dfrac{2n}{n+1}$ (E) ezek egyike sem

BME 2011. május 6. (16A)

Megoldás:

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}$$

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n}$$

Egyszerűsítsünk 2^n és $n!$-al:

$$\frac{2^n \cdot 2}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{(n+1)}$$

Tehát a jó válasz a (*C*).

4. Egy sorozatot a következő képlettel adunk meg: $a_n = log_2\left(\sqrt[4]{2}\right)^n$, ahol *n* tetszőleges pozitív egész szám.

a) Előfordul-e a sorozat tagjai között az $\frac{1}{2}$, a 16 és a 100? Ha igen, a sorozat hányadik tagja?

b) Határozza meg a sorozat első *n* tagjának az összegét!

Megoldás:

a) Alakítsuk át az a_n sorozatot: $a_n = log_2\left(\sqrt[4]{2}\right)^n = log_2(2)^{\frac{n}{4}} = \frac{n}{4}$ a logaritmus definíciója miatt.

$$a_n = \frac{n}{4}$$

$$a_n = \frac{n}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 2$$
$$a_n = \frac{n}{4} = 16 \quad \Rightarrow \quad n = 64$$
$$a_n = \frac{n}{4} = 100 \quad \Rightarrow \quad n = 400$$

Tehát a sorozat 2. tagja $\frac{1}{2}$, a 64. tagja 16 és a 400. tagja a 100.

b) Írjuk fel az $a_n = \frac{n}{4}$ sorozat első pár tagját: $\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{4}{4}$ látszik, hogy ez egy számtani sorozat, melynek az első tagja és a differenciája is $\frac{1}{4}$.

$$a_n = \frac{n}{4} \qquad a_1 = \frac{1}{4} \qquad d = \frac{1}{4}$$

Az első n tag összegét a számtani sorozat összegképletébe behelyettesítve kapjuk:

$$S_n = \frac{\frac{1}{4} + \frac{n}{4}}{2} \cdot n = \frac{n+1}{8} \cdot n = \frac{n \cdot (n+1)}{8}$$

5. Egy számtani sorozat első tagja 10, a differenciája $-\frac{5}{4}$. Mennyi a sorozat 33. tagja, és mennyi az első 121 tag összege?

Megoldás:

$$a_{33} = a_1 + 32 \cdot d = 10 + 32 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = 10 - 40 = -30$$

$$S_{121} = \frac{a_1 + a_{121}}{2} \cdot 121 = \frac{10 + 10 + 120 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)}{2} \cdot 121 = \frac{20 - 150}{2} \cdot 121 = -7865$$

6. Egy egész számokból álló számtani sorozat első öt tagjának összege 65, szorzata 129168. Melyik ez a sorozat?

Megoldás:

Ha egy számtani sorozat páratlan számú szomszédos (vagy a középsőre szimmetrikus sorszámú) tagjainak összege adott, akkor érdemes a középső tagot egy betűvel jelölni: $a_3 := a$. A feladat feltétele szerint *a* egész szám, ezért *d* is egész szám.

$$a_1 := a - 2d; \quad a_2 := a - d; \quad a_3 := a; \quad a_4 := a + d; \quad a_5 := a + 2d$$

Írjuk fel az első 5 tag összegét és szorzatát:

$$\text{I. } (a - 2d) + (a - d) + a + (a + d) + (a + 2d) = 65$$

$$\text{II. } (a - 2d) \cdot (a - d) \cdot a \cdot (a + d) \cdot (a + 2d) = 129168$$

Az I.-ből: $a = 13$. Ezt helyettesítsük be a másodikba:

$$(13 - 2d) \cdot (13 - d) \cdot 13 \cdot (13 + d) \cdot (13 + 2d) = 129168$$

Vegyük észre a nevezetes azonosságokat:

$$\begin{aligned} (13 - 2d) \cdot (13 + 2d) \cdot 13 \cdot (13 - d) \cdot (13 + d) &= 129168 \\ (169 - 4d^2) \cdot 13 \cdot (169 - d^2) &= 129168 \\ 169^2 - 169d^2 - 676d^2 + 4d^4 &= 9936 \\ 4d^4 - 845d^2 + 18625 &= 0 \end{aligned}$$

Egy másodfokúra visszavezethető, negyedfokú egyenletet kaptunk. Vezessünk be egy új ismeretlent: $x := d^2$.

Ekkor az egyenletünk: $\quad 4x^2 - 845x + 18625 = 0$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével kapjuk, hogy $x_1 = 25; \quad x_2 = 186{,}25$.

Ez utóbbi nem megoldás, mivel nem egész szám négyzete.

$x_1 = 25 \;\Rightarrow\; d^2 = 25,$ ahonnan $d_1 = 5; \quad d_2 = -5$

Tehát a keresett sorozatok:

ha $d_1 = 5$, akkor $a_1 = 3$, ekkor a sorozat: 3; 8; 13; 18; 23;

ha $d_2 = -5$, akkor $a_1 = 23$, ekkor a sorozat: 23; 18; 13; 8; 3.

Mindkét sorozat eleget tesz a feltételeknek.

7. Mekkora a 2016-nál kisebb, hárommal osztva kettő maradékot adó pozitív egész számok összege?

Megoldás:

A legkisebb, a feltételeknek megfelelő szám a 2, a legnagyobb a 2015.

Ez egy olyan számtani sorozat (2; 5; 8; ...), melynek az első tagja a 2, a differenciája 3 és az *n*. tagja 2015. Tehát: $a_1 = 2$ $d = 3$ $a_n = 2015$

Az első *n* tag összege: $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$.

Az *n* értékét kiszámíthatjuk az n. tagból:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2015 = 2 + 3(n-1)$$

$$n = 672$$

Tehát: $S_n = \frac{2+2015}{2} \cdot 672 = 677712$.

A 2016-nál kisebb, hárommal osztva kettő maradékot adó pozitív egész számok összege: 677712.

8. Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azutánin 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.

a) Hány méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon?

b) Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele?

c) Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon?

d) A 21-edik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával?

Középszintű érettségi vizsga 2006. október 25.

Megoldás:

a) Egy számtani sorozatról van szó, ahol $a_1 = 220$; $d = 10$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 220 + 100 = 320$$

320 méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon.

b) Keressük azt az n értéket, ahol $S_n \geq 7100$; (7,1 km = 7100 m)

Ez egy szigorúan monoton növekvő sorozat, ezért elég megvizsgálni, hogy hol éri el a sorozat összege a 7100-et.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 7100; \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

$$\frac{440 + 10(n-1)}{2} \cdot n = 7100$$
$$(44 + n - 1) \cdot n = 1420$$
$$n^2 + 43n - 1420 = 0$$

A másodfokú kifejezésnek két zérushelye van, amik közül csak az egyik pozitív $n \approx 21{,}88$.

Tehát a 22. napon fejezik be a munkát.

c) Az első 21 nap alatt 6720 métert aszfaltoznak le, mert

$S_{21} = \frac{2a_1+20d}{2} \cdot 21 = \frac{440+200}{2} \cdot 21 = 6720$;

$7100 - 6720 = 380$, tehát az utolsó napra 380 méter maradt.

d) Egyenes arányosság esetén 440 métert kellene aszfaltozni a 21. napon, de

$$a_{21} = 220 + 200 = 420$$

Tehát nem teljesül az egyenes arányosság feltétele.

9. Egy számtani sorozat első húsz tagjának az összege 45, az első negyven tag összege pedig 290. Határozza meg a sorozat első tagját és differenciáját! Hány 100-nál kisebb tagja van a sorozatnak?

ELTE 2007.szeptember, (földtudományi szak BSc)

Megoldás:

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = 45 \qquad \Rightarrow \qquad 2a_1 + 19d = 4{,}5$$
$$S_{40} = \frac{2a_1 + 39d}{2} \cdot 40 = 290 \qquad \Rightarrow \qquad 2a_1 + 39d = 14{,}5$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$20d = 10,$$

innen a sorozat differenciája: $d = 0{,}5$.

A differencia értéket visszahelyettesítve megkapjuk az első tagot: $a_1 = -2{,}5$.

Vizsgáljuk meg hány tag kisebb 100-nál.

$a_n < 100 \quad \Rightarrow \quad a_1 + (n-1)d = -2{,}5 + 0{,}5(n-1) < 100$

$0{,}5n - 3 < 100 \quad \Rightarrow \quad n < 206$, a 206. tag lenne pontosan 100, tehát 205 tagja van a sorozatnak, amely kisebb mint 100.

10. Egy mértani sorozat első tagja 3, a hányadosa -2. Mennyi a sorozat ötödik és tizedik tagja? Határozza meg az első tizenhárom tag összegét!

Megoldás:

$a_1 = 3 \qquad q = -2 \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (q \neq 1)$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 3 \cdot (-2)^4 = 48$

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 3 \cdot (-2)^9 = -1536$

$$S_{13} = a_1 \frac{q^{13}-1}{q-1} = 3 \cdot \frac{(-2)^{13}-1}{-2-1} = 8193$$

Tehát az első tizenhárom tag összege: 8193.

11. Melyik az a szám, amelyet 30-hoz, 50-hez és a 80-hoz hozzáadva három olyan számot kapunk, amelyek mértani sorozatot alkotnak?

ELTE 2010.szeptember, (földtudományi szak BSc)

Megoldás:

Legyen: $a_1 = 30 + x;\quad a_2 = 50 + x;\qquad a_3 = 80 + x$

A mértani sorozat tulajdonságát alkalmazzuk:

$$(50+x)^2 = (30+x)(80+x)$$
$$2500 + 100x + x^2 = 2400 + 110x + x^2$$
$$100 = 10x$$
$$x = 10\,.$$

Tehát a mértani sorozat: 40; 60; 90.

Ellenőrzés: $\frac{60}{40} = \frac{3}{2};\quad \frac{90}{60} = \frac{3}{2};\quad q = \frac{3}{2}.$

12. Egy mértani sorozat tagjaira teljesülnek a következő összefüggések. Számítsuk ki a sorozat első tagját és a hányadosát!

$$a_1 + a_2 + a_3 = 57 \quad \textit{és} \quad a_1 - a_3 = 15$$

Megoldás:

I. $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 57$ $\qquad$ II. $a_1 - a_1 q^2 = 15$

$a_1(1+q+q^2) = 57$ $\qquad$ $a_1(1-q^2) = 15$

Fejezzük ki az elsőből az a_1-t és helyettesítsük be a másodikba:

$$a_1 = \frac{57}{1+q+q^2} \qquad 1+q+q^2 \neq 0$$

$$\frac{57}{1+q+q^2} \cdot (1-q^2) = 15$$
$$57 \cdot (1-q^2) = 15 \cdot (1+q+q^2)$$
$$57 - 57q^2 = 15 + 15q + 15q^2$$
$$0 = 72q^2 + 15q - 42$$
$$0 = 24q^2 + 5q - 14$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével határozzuk meg a gyököket:

$$q_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+1344}}{48} = \frac{-5 \pm 37}{48} =$$

$$q_1 = \frac{2}{3}; \qquad q_2 = -\frac{7}{8}$$

Ha $\quad q_1 = \frac{2}{3};\qquad$ $a$kkor $\qquad a_1 = \frac{57}{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{57}{\frac{19}{9}} = 27.$

Ha $q_1 = -\frac{7}{8}$; akkor $a_1 = \frac{57}{1-\frac{7}{8}+\left(-\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{57}{\frac{57}{64}} = 64.$

13. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak?

Emelt szintű érettségi vizsga 2010. május 4.

Megoldás:

I. $a_1 + a_2 + a_3 = 91$
$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 91$
$a_1(1 + q + q^2) = 91$

II. $a_6 + a_7 + a_8 = 2912$
$a_1 q^5 + a_1 q^6 + a_1 q^7 = 2912$
$a_1 q^5(1 + q + q^2) = 2912$

Látszik, hogy a második egyenlet bal oldala az első egyenlet bal oldalának a q^5szerese.

Tehát: $q^5 = 32 \quad \Rightarrow \quad q = 2$

Az első egyenletbe behelyettesítve:

$$a_1(1 + 2 + 4) = 7a_1 = 91 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 13\,.$$

A mértani sorozat első tagja és hányadosa: $a_1 = 13$ és $q = 2$.

Ellenőrzés: a sorozat tagjai**: 13**; **26**; **52**; **104**; **208**; **416**; **832**; **1664**

$13 + 26 + 52 = 91$; $416 + 832 + 1664 = 2912$.

Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak?

$$a_n = 13 \cdot 2^{n-1}$$

$$10^{12} \leq 13 \cdot 2^{n-1} < 10^{13}$$

Osszuk el az egyenlőtlenséget 13-mal:

$$\frac{10^{12}}{13} \leq 2^{n-1} < \frac{10^{13}}{13}.$$

10-es alapú logaritmust véve: (A tízes alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő)

$$\lg\frac{10^{12}}{13} \leq \lg 2^{n-1} < \lg\frac{10^{13}}{13}.$$

Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\lg 10^{12} - \lg 13 \leq (n-1)\lg 2 < \lg 10^{13} - \lg 13$$
$$12 - \lg 13 \leq (n-1)\lg 2 < 13 - \lg 13$$
$$\frac{12 - \lg 13}{\lg 2} \leq n - 1 < \frac{13 - \lg 13}{\lg 2}$$
$$\frac{12 - \lg 13}{\lg 2} + 1 \leq n < \frac{13 - \lg 13}{\lg 2} + 1$$
$$37{,}16 \leq n < 40{,}48$$

Tehát a sorozat 37. tagja még 12-jegyű, a 41. tagja meg már 14-jegyű. Ezek szerint 3db 13-jegyű tagja van a sorozatnak:a 38. 39. és 40. tag.

$$a_{38} \approx 1{,}79 \cdot 10^{12}; a_{39} \approx 3{,}57 \cdot 10^{12};\ a_{40} \approx 7{,}145 \cdot 10^{12};$$

Ellenőrzés: $a_{37} \approx 8{,}93 \cdot 10^{11}$; $\quad a_{41} \approx 1{,}43 \cdot 10^{13}$

14. Egy mértani sorozat első tagja 3, n -edik tagja 13. Az első n tag reciprok értékeinek összege 8. Számítsa ki a mértani sorozat első n tagjának összegét!

ELTE 2007. Matematika szintfelmérő

Megoldás:

A feltételek szerint:

$$a_1 = 3; \qquad a_n = 3q^{n-1} = 13 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 8$$

Hozzunk közös nevezőre és szorozzunk be 3-mal:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3q} + \frac{1}{3q^2} + \cdots + \frac{1}{3q^{n-1}} = 8$$

$$\frac{q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1}{q^{n-1}} = 24\,.$$

A számláló háromszorosa pontosan az első n tag összege: ($S_n = 3 + 3q + \cdots + 3q^{n-1}$)

$$S_n = 3(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots \ldots q + 1) = 3 \cdot 24 \cdot q^{n-1}, \text{mivel } q^{n-1} = \frac{13}{3}$$

$$S_n = 3 \cdot 24 \cdot \frac{13}{3} = 312\,.$$

Tehát az első n tag összege 312.

15. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 6. Ha az első taghoz 5-öt, a másodikhoz 2-t, a harmadikhoz 1-et adunk, akkor egy mértani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Melyik ez a mértani sorozat?

Megoldás:

A számtani sorozat feltételéből : $a_2 = 2$, így a tagok:

$$2 - d; \qquad 2; \qquad 2 + d$$

A mértani sorozat: $\quad 7 - d; \qquad 4; \qquad 3 + d$

A mértani sorozat tulajdonságát felhasználva:

$$4^2 = (7 - d)(3 + d)$$

$$16 = -d^2 + 4d + 21$$

$$d^2 - 4d - 5 = 0\,.$$

Az egyenlet megoldásai: $\quad d_1 = 5 \qquad d_2 = -1$

Ha $d_1 = 5$; akkor a számtani sorozat: $\quad -3; \quad 2; \quad 7;$

a mértani sorozat tagjai: $\quad 2; \quad 4; \quad 8 \qquad \Rightarrow \quad q_1 = 2.$

Ha $d_2 = -1$; akkor a számtani sorozat: $\quad 3; \quad 2; \quad 1;$

a mértani sorozat tagjai: 8; 4; 2 $\Rightarrow$ $q_2 = \frac{1}{2}$.

Mindkét sorozat kielégíti a feltételeket.

16. Egy populációban a baktériumok száma mértani sorozat szerint növekszik. 1 órakor $1000, 3$ órakor 4000 baktérium van a populációban. Mennyi lesz a baktériumok száma 7 órakor?

$(A)\ 1000 \cdot 10^4$ $(B)\ 1000 \cdot 4^7$ $(C)\ 64000$ $(D)\ \sum_{k=1}^{7} 1000\frac{2^k - 1}{2-1}$ $(E)\ \sum_{k=1}^{6} 1000\frac{2^k - 1}{2-1}$

BME 2011. december 2. (16A)

Megoldás:

A mértani sorozat tagjai legyenek az óránkénti baktériumok száma:

$a_1 = 1000;$ $a_3 = 4000$ $a_7 = ?$

$a_3 = a_1 q^2$; $4000 = 1000q^2$ $\Rightarrow$ $q^2 = 4$, amiből: $q_1 = 2;$ $(q_2 = -2)$

($q_2 = -2$ -nek nincs értelme ebben a feladatban)

Ha $q_1 = 2$, akkor $a_7 = 1000 \cdot 2^6 = 64000$.

Tehát a jó válasz a (*C*).

17. Egy új autó ára $4\,500000$ Ft. Az elhasználódás miatt évenként $15\% -$os értékcsökkenést figyelembe véve, mennyit ér az autó 5 év múlva? Hány év múlva csökken az autó értéke a negyedére?

Megoldás:

1 év után az autó értéke: $4\,500000 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 4\,500000 \cdot 0{,}85$ (Ft)

2 év után: $4\,500000 \cdot 0{,}85^2$

5 év után: $4\,500000 \cdot 0{,}85^5 = 1\,996673{,}9$.

Az autó értéke öt év múlva: 1 996 674 Ft.

Hány év múlva csökken az autó értéke a negyedére?

Legyen n az évek száma.

Az n év múlva az autó értéke: $4\,500000 \cdot 0{,}85^n$

Ekkor: $4\,500000 \cdot 0{,}85^n = \frac{4\,500000}{4}$

4 500000-rel lehet egyszerűsíteni. (Az évek száma nem függ az autó értékétől)

$$0{,}85^n = \frac{1}{4}$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát:

$$\lg 0{,}85^n = \lg\frac{1}{4}$$

$$n\lg 0{,}85 = \lg\frac{1}{4}$$

$$n = \frac{\lg\frac{1}{4}}{\lg 0{,}85} \approx 8{,}53$$

Tehát 9 év múlva lesz az autó értéke a negyede az eredeti árnak.

18. Kiss Béla örökölt $100\,000\,000$ Ft-ot, amit január elején helyez el a bankban, ahol évi 5% −os kamatot fizetnek. Úgy tervezi, hogy 20 év alatt fogja felhasználni az örökségét, mégpedig úgy, hogy minden év végén azonos összeget fog kivenni a bankból. Mekkora összeget vehet fel évente, ha 20 év múlva nem marad pénze a bankban?

Megoldás:

Jelölje *A* az örökölt összeget, és *B* az évenkénti kivett összeget.

Felírjuk évenként a bankban lévő pénzösszeget:

1 év után: $A \cdot 1{,}05 - B$

2 év után: $(A \cdot 1{,}05 - B) \cdot 1{,}05 - B = A \cdot 1{,}05^2 - B \cdot 1{,}05 - B$

3 év után: $(A \cdot 1{,}05^2 - B \cdot 1{,}05 - B) \cdot 1{,}05 - B = A \cdot 1{,}05^3 - B \cdot 1{,}05^2 - B \cdot 1{,}05 - B$

4 év után: $A \cdot 1{,}05^4 - B \cdot 1{,}05^3 - B \cdot 1{,}05^2 - B \cdot 1{,}05 - B$

20 év után: $A \cdot 1{,}05^{20} - B \cdot 1{,}05^{19} - B \cdot 1{,}05^{18} - \cdots - B \cdot 1{,}05 - B$

Ekkor a pénze elfogy: $A \cdot 1{,}05^{20} - B \cdot 1{,}05^{19} - B \cdot 1{,}05^{18} - \cdots - B \cdot 1{,}05 - B = 0$

Átrendezve az egyenletet: $A \cdot 1{,}05^{20} = B(1{,}05^{19} + 1{,}05^{18} + \cdots + 1{,}05 + 1)$

A zárójelen belül egy 20 tagú mértani sorozat összege van, ahol $a_1 = 1 \quad q = 1{,}05$.

A mértani sorozat összegképletét alkalmazva kapjuk:

$$A \cdot 1{,}05^{20} = B \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05 - 1}$$

$$B = A \cdot 1{,}05^{20} \cdot \frac{1{,}05 - 1}{1{,}05^{20} - 1} = 100\,000000 \cdot 1{,}05^{20} \cdot \frac{1{,}05 - 1}{1{,}05^{20} - 1} = 8024258{,}7.$$

Tehát évente $8\,024259$ Ft-ot vehet fel a bankból.