12. Kombinatorika, valószínűségszámítás

I. Nulladik ZH-ban láttuk:

1. Bornemissza Gergely elfelejtette a lőporraktár négy számjegyes pinkódját. Csak arra emlékszik, hogy vagy 1552 volt, vagy a számjegyek egymással fel voltak cserélve. A legrosszabb esetben hányszor kell próbálkoznia, azaz hányféle négyjegyű pinkód lehetséges ezekkel a jegyekkel? (Az 5-ös kétszer fordul elő.)

$(A)\ 11$ $(B)\ 12$ $(C)\ 13$ $(D)\ 14$ $(E)\ 15$

BME 2013. február 15. (15A)

Megoldás:

Ha minden számjegy különböző lenne, akkor egy pinkódot készítve az első helyre 4 számjegyből választhatnák, a másodikra a maradék 3-ból, a harmadikra 2-ből és az utolsó helyre 1 lehetőségünk marad. A választások száma egymástól független, ezért $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$-féle pinkódot kapnánk.

Ha a két ötös számjegy nem különböztethető meg, akkor ezeket felcserélve nem kapunk új pinkódot. Így minden esetet kétszer számoltunk, tehát az esetek száma $24 : 2 = 12$.

A jó válasz a (B).

Megjegyzés:

Az alábbi táblázatban felsoroljuk az említett 24 esetet a két 5-öst különböző színnel jelölve. Párba állítjuk azokat, amelyekben csak a két 5-ös színe különböző:

1255	1525	5125	2155	2515	5215
1255	1525	5125	2155	2515	5215
1552	5152	5512	2551	5251	5521
1552	5152	5512	2551	5251	5521

Az első és a második sor csak az ötösök színezésében tér el, ugyanígy a harmadik és negyedik sor. Így az első és a harmadik sor tartalmazza a keresett eseteket.

2. Hányféleképpen állíthatunk sorba 3 fekete és 3 fehér golyót, amelyek csak a színekben térnek el egymástól?

$(A)\ (3!)^2$ $(B)\ 6!$ $(C)\ \binom{6}{3}$ $(D)\ \frac{6!}{3!}$

ELTE 2011. májusi teszt

I. Megoldás:

Ha a 6 golyó különböző lenne, akkor ezeket 6!-féle módon rakhatnánk sorrendbe. Ha a 3 fehér golyót egymás között cseréljük, nem kapunk új esetet. 3 elemnek 3!-féle sorrendje van, ezért ugyanazt az esetet 3!-szor számoltuk. Ugyanez igaz a fekete golyókra is. Így, ha minden esetet pontosan egyszer akarunk számolni, akkor a 6!-t $(3! \cdot 3!)$-sal el kell osztanunk.

Így $\frac{6!}{3!\cdot 3!}$ eset lehet, erre a $\binom{6}{3}$ jelet használjuk (ejtsd: hat alatt a három).

A jó válasz a (C).

II. Megoldás:

Gondolkozhatunk úgy is, hogy a 3 fehér golyót elhelyezzük, majd a maradék helyekre letesszük a fekete golyókat. Most így számolunk.

Az első fehér golyót 6 helyre, a következőt a maradék 5 helyre, a harmadikat 4 helyre tehetjük. Az elhelyezések száma egymástól független, ezért $6 \cdot 5 \cdot 4$ esetet kapunk. A fehér golyók elhelyezésének sorrendje lényegtelen, csak az számít, hogy végül hol lesznek fehér golyók. 3 elemnek 3!-féle sorrendje van, ezért ugyanazt az esetet 3!-szor számoltuk, tehát az előbbi eredményt osztanunk kell 3!-sal: $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}$.

Szebb lenne, ha a számlálót is faktoriálissal fejeznénk ki. Ez lehetséges, ha bővítjük a törtet 3!-sal:

$$\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3!\cdot 3!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \binom{6}{3}.$$

Most is azt kapjuk, hogy a jó válasz a (C).

3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha egy polcon 6 darab könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy trilógia kötetei megfelelő sorrendben egymás mellé kerülnek? (Egy trilógia 3 darab könyvből áll.)

$(A)\ \frac{1}{2}$ $(B)\ \frac{1}{5}$ $(C)\ \frac{1}{6}$ $(D)\ \frac{1}{15}$ $(E)\ \frac{1}{30}$

BME 2014. február 14. (17A)

Megoldás:

Ha nem figyelünk arra, hogy a trilógia kötetei egymás mellé kerüljenek, akkor a polcon a 6 könyvet $6! = 720$-féle-módon helyezhetjük el.

Ha a trilógia köteteit megfelelő sorrendben egymás mellé szeretnénk tenni, akkor tekintsük ezt a három könyvet egyetlen elemnek, így 4 elemünk lesz. Az ilyen sorrendek száma $4! = 24$.

A keresett valószínűség:

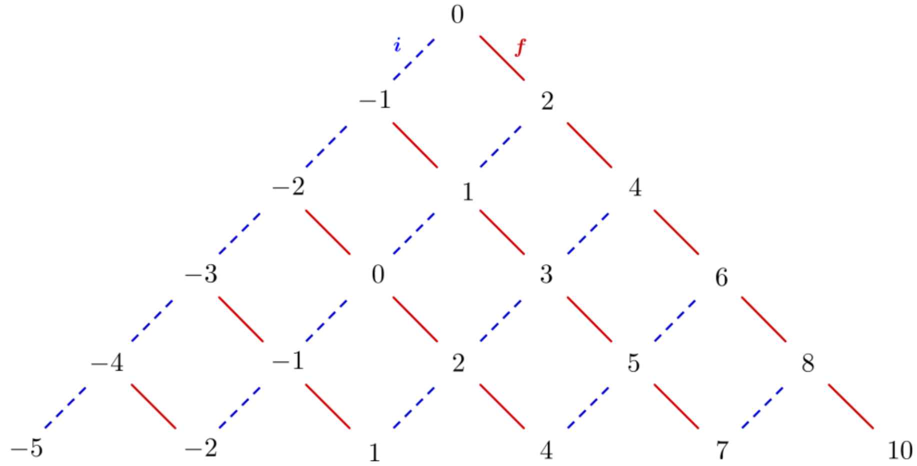
$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}.$$

A jó válasz az (E).

4. Egy játékbábú áll a számegyenesen a 0 pontban. Minden lépésben egy szabályos pénzérme feldobásával döntünk a sorsáról: fej esetén 2-t lép pozitív irányba, míg írás esetén 1-et negatív irányba. Ötször feldobjuk a pénzérmét és az eredménynek megfelelően lépünk. Milyen valószínűséggel lesz a bábu ez után az 5 lépés után a $[-10; 10]$ intervallum egyes pontjaiban?

ELTE 2015. szeptember (tanárszak)

Megoldás:



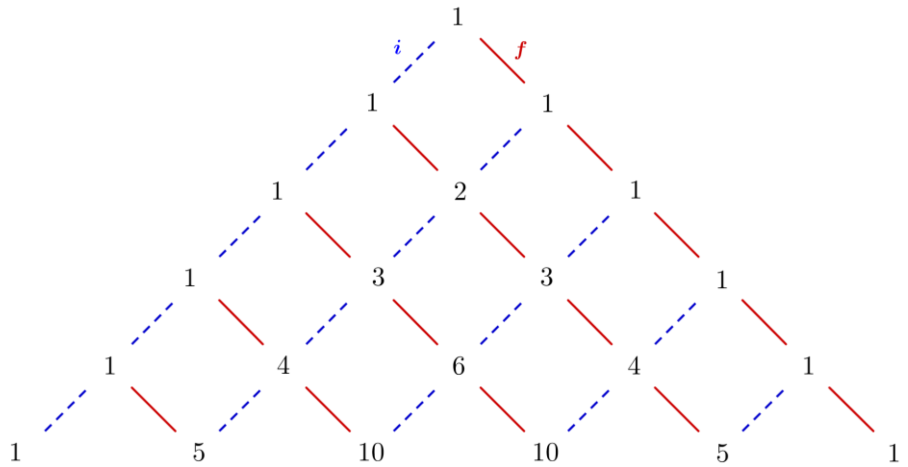
Az ábra mutatja, hogy az egyes dobások után a számegyenes mely pontjába kerül a bábu. A folytonos vonal esetén fejet dobtunk, a szaggatott vonal esetén írást.

Minden dobás kimenetele kétféle lehet, így az összes eset száma: $2^5 = 32$. Azoknak az eseteknek a száma, amikor k darab fejet és $5-k$ írást dobtunk, $\binom{5}{k}$, hiszen az öt lehetőségből k darabot kell kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít.

Ekkor a bábu a $2k-(5-k)=3k-5$ pontba jut. Az ilyen eset valószínűsége:

$$P(3k-5)=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}=\frac{\binom{5}{k}}{32}.$$

Az $\binom{5}{k}$ értékeit a 2. feladatban bemutatott módon kiszámíthatjuk, de ezeket az értékeket a Pascal-háromszög megfelelő sorából is megkaphatjuk:



A fenti értéket használva:

$$P(-5)=\frac{1}{32};\quad P(-2)=\frac{5}{32};\quad P(1)=\frac{10}{32};\quad P(4)=\frac{10}{32};\quad P(7)=\frac{5}{32};\quad P(10)=\frac{1}{32}.$$

A $[-10; 10]$ intervallum többi pontjához nem juthatunk el, ezekben az esetekben a valószínűség 0.

II. Ismételjünk!

1. Leszámlálási alapfeladatok

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/23.pdf 1-2. oldal

2. Binomiális együtthatók

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/23.pdf 2.oldal

3. Klasszikus valószínűségi mező

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/24.pdf 1-2.oldal

4. Binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/24.pdf 4.oldal

5. Geometriai valószínűség

   https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/24.pdf 2-3. oldal

III. Gyakorló feladatok

1. Egy úszóverseny döntőjében 8 versenyző úszik.
   a) Hányféle lehet a végeredmény, ha nincs holtverseny?
   b) Hányféle sorrend lehet, ha a résztvevők között úszik Kati és Judit, akik biztosan az első három hely valamelyikén fognak végezni és nincs holtverseny?

2. Gombóc Artúr szereti a csokoládét. Jelenleg 8 csokija van, 4 egyforma tábla Milka csokija, 1 Tibi csokija, 3 egyforma Balaton szelete. Hányféle sorrendben eheti meg a 8 csokit Gombóc Artúr?

3. Hányféle módon tudjuk leolvasni a BALATON szót az alábbi ábrákról? (A bal felső betűről indulunk és csak jobbra vagy lefelé léphetünk.)

a)

B	A	L	A	T	O	N
A	L	A	T	O	N	
L	A	T	O	N		
A	T	O	N			
T	O	N				
O	N					
N						

b)

B	A	L	A	T
A	L	A	T	O
L	A	T	O	N

4. A $7, 8, 9$ számjegyekből hány olyan ötjegyű számot készíthetünk, melyben szerepel a 7-es?

   $(A)\ 3^5$ $(B)\ 3^5 - 3^4$ $(C)\ 3^5 - 2^5$ $(D)\ 5^3 - 5^2$ $(E)\ 5 \cdot 3^2 - 2^3$

   BME 2016. május 13. (16A)

5. Tímea 1986. július 23-án született. Internetes jelszót szeretne készíteni a nevének betűiből és a születési dátumának számjegyeiből, ez utóbbit 1986.07.23 alakban használva. A következő feltételekkel szeretné összeállítani jelszavát:
   - először 2 betűt választ, utána 3 számjegyet, ezt még egy betűvel zárja,
   - különböző betűket és különböző számokat fog használni,
   - bármelyik betű lehet kisbetű vagy nagybetű, még nem döntött erről.

   Hányféle jelszóból választhat Tímea?

6. Sándor hat barátjával ünnepli névnapját egy étteremben. Egy kör alakú asztalt terítettek számukra.
   a) Hányféle módon foglalhatnak helyet?
   b) Hányféle eset lehetséges, ha Sándor jobb oldalán barátnője, Katalin fog ülni?

   Két ülésrendet azonosnak tekintünk, ha mindenkinek a jobb és a bal oldali szomszédja is ugyanaz.

7. Egy gyümölcstálat szeretnénk összeállítani 10 darab gyümölcsöt felhasználva. Négyféle gyümölcs: őszibarack, körte, szilva, szőlő áll rendelkezésünkre, mindegyikből 10-nél több. Hányféle ilyen tál készíthető,
   a) ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy mindegyik gyümölcsöt tartalmazza a tál?
   b) ha mindegyik gyümölcsből legalább egy darabnak lennie kell a tálon?

   (Két tálat akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik gyümölcs fajtából különböző darabot helyeztek rá.)

8. Hozza egyszerűbb alakra!

a) $(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!$ b) $\frac{n!}{n\cdot(n-1)(n-2)}$ c) $\frac{(n+2)!}{n!\cdot(n+2)}-\frac{n!}{(n-1)!}$

9. Egy kockát kétszer feldobunk. Melyik valószínűbb: az, hogy a dobott számok összege páros, vagy pedig az, hogy ez az összeg páratlan?

ELTE 2007. szeptember 3. (fizika szak)

10. Öt tanuló: Ági, Béla, Ede, Gabi, és Feri két koncertjegyet nyert. Kisorsolják, hogy ki kapja meg. Az egy-egy cédulára írt öt nevet bedobják egy kalapba, és kihúznak belőle két nevet visszatevés nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Ági és Béla kapja a két jegyet?

ELTE 2006. szeptember 4. (fizika BSc)

11. Öt cédulára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat, majd az összekevert cédulákat véletlenszerűen egymás mögé téve egy ötjegyű számot kaptunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható 6-tal?

ELTE 2007. február (matematika BSc)

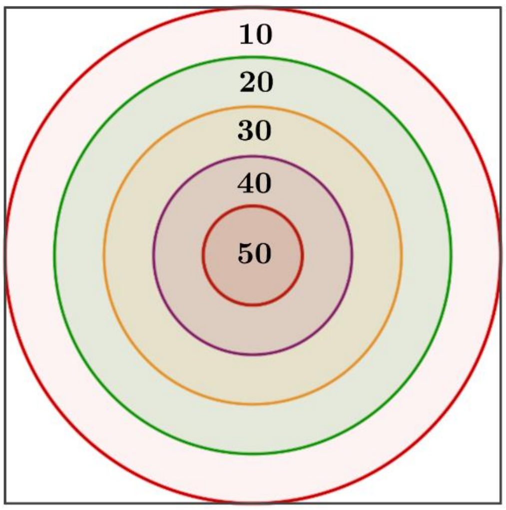
12. Egy jutalomutazásra 15 férfit és néhány nőt jelöltek, akik közül 2 személyt sorsolnak ki. Bármely személynek ugyanakkor esélye van arra, hogy kisorsolják. Tudjuk, hogy $\frac{7}{20}$ annak a valószínűsége, hogy mindkét kiválasztott személy férfi. Hány nő van a jelöltek között?

ELTE 2015. október

13. Egy 32 fős osztályban 12 tanulónak van angol nyelvvizsgája. Véletlenszerűen kiválasztunk 5 tanulót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan 3 rendelkezik angol nyelvvizsgával?

14. A bárányhimlő az orvosi statisztikák szerint az esetek 4%-ában okoz szövődményt. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 beteg gyerek közül 3-nál alakul ki valamilyen szövődmény?

15. Egy 100 cm oldalú négyzetre véletlenszerűen érkeznek lövések. Az egyes körök sugarai 10, 20, 30, 40, 50 cm. A lövések értéke 50, 40, 30, 20, 10 pont lehet, ha a megfelelő tartományba érkezik a lövés az alábbi ábra szerint. Ha a legnagyobb körön kívülre érkezik, akkor 0 pont a lövés értéke. A megfigyelések szerint minden lövés eléri a táblát és annak tetszőleges területére érkezhet (egyenletes eloszlás). Mennyi a valószínűsége a különböző pontértékű lövéseknek?



IV. Megoldások:

1. Egy úszóverseny döntőjében 8 versenyző úszik.
   a) Hányféle lehet a végeredmény, ha nincs holtverseny?
   b) Hányféle sorrend lehet, ha a résztvevők között úszik Kati és Judit, akik biztosan az első három hely valamelyikén fognak végezni, és nincs holtverseny?

   Megoldás:

   a) Az első helyezett 8 versenyző egyike lehet, a második a többiek közül egy, tehát erre 7 lehetőség van, és így tovább… Ilyen végeredmény $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320$ van, hiszen a 8 versenyző egy lehetséges sorrendjét kapjuk a verseny végén.

   b) Kati az első három hely egyikén végez, ez 3-féle módon lehetséges, Judit a maradék két hely egyikén végez, ez 2 lehetőség. A fennmaradó 6 versenyző a hat helyen 6!-féle módon végezhet. A lehetséges sorrendek száma ekkor $3 \cdot 2 \cdot 6! = 6 \cdot 6! = 4320$.

2. Gombóc Artúr szereti a csokoládét. Jelenleg 8 csokija van, 4 egyforma tábla Milka csokija, 1 Tibi csokija, 3 egyforma Balaton szelete. Hányféle sorrendben eheti meg a 8 csokit Gombóc Artúr?

   Megoldás:

   Ha a 8 szelet csoki mind különböző fajta lenne, akkor ezeket 8!-féle sorrendben ehetné meg Artúr. A 4 tábla Milka csoki nem különböztethető meg egymástól, ha ezeket egymás között tetszőleges módon cseréljük meg, ugyanazt a sorrendet kapjuk. Emiatt az esetek számát 4!-sal kell osztanunk. A 3 egyforma Balaton szelet miatt ugyanígy osztanunk kell 3!-sal. Tehát Artúr

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} = 280$$

   féle sorrendben eheti meg a csokoládékat.

3. Hányféle módon tudjuk leolvasni a BALATON szót az alábbi ábrákról? (A bal felső betűről indulunk és csak jobbra vagy lefelé léphetünk.)

a)

B	A	L	A	T	O	N
A	L	A	T	O	N	
L	A	T	O	N		
A	T	O	N			
T	O	N				
O	N					
N						

b)

B	A	L	A	T
A	L	A	T	O
L	A	T	O	N

   I. Megoldás:

   a) Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az olvasás során az egyes betűkhöz hányféle módon juthatunk el. Az első oszlop és az első sor minden betűjéhez nyilvánvalóan 1-féle módon. Egy adott mezőre annyiféle módon juthatunk, mint ahányféle módon a felette lévő és a baloldali mezőre léptünk az olvasás során. Ennek alapján töltjük ki a táblázatot, a megfelelő számokat összeadjuk:

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Az olvasást bármelyik N betűnél befejezhetjük, így $1+6+15+20+15+6+1=64$ az összes lehetőség száma.

b) Ebben az esetben is hasonlóan töltjük ki a táblázatot:

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15

Most egyetlen N betű helyén végződhet az olvasás. Így a lehetőségek száma 15.

II. Megoldás:

a) Minden lépésnél vagy jobbra, vagy lefelé lépünk. Hatszor választhatunk egymástól függetlenül a kétféle lehetőség közül. Így $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^6=64$-féle lehetőség van.

b) Most minden leolvasás során négyet lépünk jobbra és kettőt lefelé. A 6 lépésből ki kell választani azt, hogy melyik az a négy lépés, amit jobbra teszünk meg:

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$$

eset van.

Megjegyzés:

Az utolsó megoldásban gondolkozhattunk volna úgy is, hogy a 2 lefelé lépés helyét választjuk ki. Így ebből következik, hogy

$$\binom{6}{2}=\binom{6}{4}.$$

Általánosan igaz, hogy

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

4. A $7, 8, 9$ számjegyekből hány olyan ötjegyű számot készíthetünk, melyben szerepel a 7-es?

$(A)\ 3^5$ $(B)\ 3^5-3^4$ $(C)\ 3^5-2^5$ $(D)\ 5^3-5^2$ $(E)\ 5\cdot 3^2-2^3$

BME 2016. május 13. (16A)

Megoldás:

Először összeszámoljuk az összes ötjegyű számot, azokat is, amelyekben nem szerepel a 7-es. Minden helyiérték esetében 3 számjegyből választhatunk, ez $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^5$ lehetőség. Ezek között azok a rossz esetek, amelyekben csak a 8-as és a 9-es számjegyet használtuk, azaz minden helyre kétféle számjegyből választottunk. 2^5 ilyen eset van.

A megfelelő lehetőségek számát akkor kapjuk meg, ha az összes esetből levonjuk a rossz esetek számát: 3^5-2^5.

Tehát a jó válasz a (C).

5. Tímea 1986. július 23-án született. Internetes jelszót szeretne készíteni a nevének betűiből és a születési dátumának számjegyeiből, ez utóbbit 1986.07.23 alakban használva. A következő feltételekkel szeretné összeállítani jelszavát:

   - először 2 betűt választ, utána 3 számjegyet, ezt még egy betűvel zárja,
   - különböző betűket és különböző számokat fog használni,
   - bármelyik betű lehet kisbetű vagy nagybetű, még nem döntött erről.

   Hányféle jelszóból választhat Tímea?

   Megoldás:

   Az első helyre 5 betűből, a másodikra 4-ből, a hatodikra 3-ból választhat. Mindegyiket használhatja kisbetűs és nagybetűs változatban is, ez két-két lehetőség. A betűket tehát $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^3$-féle módon adhatja meg.

   A feltételek szerint a $0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9$ számjegyeket fogja használni. A jelszó harmadik helyére 8, a negyedikre 7, az ötödikre 6 lehetősége van. Ez $8 \cdot 7 \cdot 6$ lehetséges eset.

   A betűk és a számok együttes használatával $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 161280$-féle jelszóból választhat Tímea.

6. Sándor hat barátjával ünnepli névnapját egy étteremben. Egy kör alakú asztalt terítettek számukra.

   a) Hányféle módon foglalhatnak helyet?

   b) Hányféle eset lehetséges, ha Sándor jobb oldalán barátnője, Katalin fog ülni?

   Két ülésrendet azonosnak tekintünk, ha mindenkinek a jobb és a bal oldali szomszédja is ugyanaz.

   Megoldás:

   a) Összesen 7 embert kell leültetnünk. A 7 ember 7!-féle módon állítható sorba. Így ültessük az asztal köré őket. Egy kör alakú asztal esetében két ülésrend egyenértékű, ha mindenkinek a jobb és a bal oldalán ugyanazok ülnek. Így, ha egy ülésrendet az asztal körül megforgatunk úgy, hogy mindenki a szomszédja székére ül egy adott irányban, akkor ugyanazt az esetet kapjuk. Ezt még hatszor megtehetjük. Ezek szerint a 7! esetben minden lehetőséget 7-szer számoltunk. Tehát $7!: 7 = 6! = 720$-féle módon ültethetjük le a baráti társaságot.

   b) Ültessük le Sándort, majd jobb oldalára Katalint. A maradék öt embert Sándor bal oldalától indulva $5! = 120$-féle módon ültethetjük le. Tehát az ilyen ülésrendek száma 120.

7. Egy gyümölcstálat szeretnénk összeállítani 10 darab gyümölcsöt felhasználva. Négyféle gyümölcs: őszibarack, körte, szilva, szőlő áll rendelkezésünkre, mindegyikből 10-nél több. Hányféle ilyen tál készíthető,

   a) ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy mindegyik gyümölcsöt tartalmazza a tál?

   b) ha mindegyik gyümölcsből legalább egy darabnak lennie kell a tálon?

   (Két tálat akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik gyümölcs fajtából különböző darabot helyeztek rá.)

Megoldás:

a) „Kódoljuk” a gyümölcstál tartalmát. Írjunk le annyi 1-est, ahány őszibarack van rajta, utána írjunk egy 0-t, ezután írjunk annyi 1-est, ahány körtét tartalmaz a tál, majd egy 0-t, annyi 1-est, amennyi szilva van a tálon, újra egy 0-t, végül annyi 1-est, ahány fürt szőlő került a tálra. Például az 1110110111101 kód esetén a tálon 3 őszibarack, 2 körte, 4 szilva és 1 szőlő van. Az 1100111110111 kód esetében a tálon nincs körte. Ezek a kódok 10 darab 1-est és 3 darab 0-t tartalmaznak, ez összesen 13 számjegy. Az a kérdés, hogy hány ilyen kód létezik. A 13 helyből válasszunk ki 10-et, ahová az 1-eseket tesszük (vagy 3-at, ahová a 0-kat tesszük). Ezt $\binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$-féle módon valósíthatjuk meg. Tehát 286-féle módon készíthetjük el a gyümölcstálat.

b) A tálra helyezzünk el egy-egy darabot mindegyik fajta gyümölcsből. Ezután még 6 darabot kell a tálra tennünk úgy, ahogy az a) részben tettük. A „kódunk” most hat 1-esből és három elválasztó 0-ból áll. Ilyen kódot $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$-féle módon készíthetünk. Tehát 84-féle megfelelő gyümölcstál van.

8. Hozza egyszerűbb alakra!

a) $(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!$ b) $\frac{n!}{n\cdot(n-1)(n-2)}$ c) $\frac{(n+2)!}{n!\cdot(n+2)} - \frac{n!}{(n-1)!}$

Megoldás:

a) Ebben az esetben 1-től $(n+1)$-ig szorozzuk össze az egész számokat, tehát:

$$(n+1)\cdot n\cdot(n-1)! = (n+1)!$$

b) A törtet egyszerűsíthetjük a nevezőben lévő szorzattal:

$$\frac{n!}{n\cdot(n-1)(n-2)} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)(n-2)} = (n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (n-3)!$$

c) Egyszerűsítsük a törteket:

$$\frac{(n+2)!}{n!\cdot(n+2)} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!}{n!\cdot(n+2)} - \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n+1-n = 1$$

9. Egy kockát kétszer feldobunk. Melyik valószínűbb: az, hogy a dobott számok összege páros, vagy pedig az, hogy ez az összeg páratlan?

ELTE 2007. szeptember 3. (fizika szak)

Megoldás:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A fenti táblázat felső sorában az első dobás, a bal oldali oszlopban a másik dobás lehetséges értékeit írtuk. Egy sor és egy oszlop kereszteződésébe pedig a két dobás összege került. Kék színnel jelöltük, ha az összeg páros.

Az ábrából látható, hogy az összeg ugyanannyiszor páros, mint páratlan, ezért a két eset valószínűsége azonos, tehát mindkét eset valószínűsége $0{,}5$.

Ez abból a meggondolásból is nyilvánvaló, hogy ha az első dobás értékét rögzítjük, akkor a másik kockával dobott hat szám közül három esetben lesz az összeg páros és három esetben páratlan.

10. Öt tanuló: Ági, Béla, Ede, Gabi, és Feri két koncertjegyet nyert. Kisorsolják, hogy ki kapja meg. Az egy-egy cédulára írt öt nevet bedobják egy kalapba, és kihúznak belőle két nevet visszatevés nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Ági és Béla kapja a két jegyet?

ELTE 2006. szeptember 4. (matematika BSc)

Megoldás:

Két cédulát $\binom{5}{2} = 10$-féle módon húzhatunk ki, hiszen 5 elemből választunk ki kettőt úgy, hogy a sorrend nem számít. Ez az összes eset száma.

Ezek közül 1 esetben lesz a két cédulán Ági és Béla neve. Ez a kedvező eset.

Így a valószínűség:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{1}{10}.$$

Megjegyzés:

Nem olyan sok esetről van szó, felsoroljuk az alábbiakban az összes esetet, amiből a fenti állításunk szintén kiolvasható:

Ági és Béla	Béla és Gabi
Ági és Ede	Béla és Feri
Ági és Gabi	Ede és Gabi
Ági és Feri	Ede és Feri
Béla és Ede	Gabi és Feri

11. Öt cédulára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat, majd az összekevert cédulákat véletlenszerűen egymás mögé téve egy ötjegyű számot kaptunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható 6-tal?

ELTE 2007. február (matematika BSc)

Megoldás:

Az öt cédulát $5! = 120$-féle módon rakhatjuk sorba, 120-féle számot készíthetünk.

A szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal.

A számjegyek összege 15, ami osztható 3-mal, így mindegyik elkészített szám osztható lesz 3-mal.

Egy szám akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye páros. Az egyes helyiértékre így kétféle számból választhatunk, majd ez elé sorba rendezzük a maradék 4 számot, ami 4! módon lehetséges. A 6-tal osztható számok száma ennek alapján: $2 \cdot 4! = 48$. Ez a kedvező esetek száma.

A keresett valószínűség:

$$P = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} (= 0{,}4 = 40\%).$$

12. Egy jutalomutazásra 15 férfit és néhány nőt jelöltek, akik közül 2 személyt sorsolnak ki. Bármely személynek ugyanakkor esélye van arra, hogy kisorsolják. Tudjuk, hogy $\frac{7}{20}$ annak a valószínűsége, hogy mindkét kiválasztott személy férfi. Hány nő van a jelöltek között?

ELTE 2015. október

Megoldás:

Jelöljük n-nel a nők számát. $(15+n)$ ember közül kettőt $\binom{15+n}{2}$-féle módon választhatunk ki.

Ha a két embert csak a férfiak közül választjuk, akkor $\binom{15}{2}$ esetet kapunk.

A feltételek szerint:

$$\frac{\binom{15}{2}}{\binom{15+n}{2}} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{105}{\binom{15+n}{2}} = \frac{105}{300}$$

$$\binom{15+n}{2} = 300$$

$$\frac{(15+n)!}{2! \cdot (13+n)!} = \frac{(15+n)(14+n)}{2} = 300$$

$$210 + 29n + n^2 = 600$$

$$n^2 + 29n - 390 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásai -39 és 10, ebből csak a 10 lehet megoldás.

Ellenőrzés:

$$\frac{\binom{15}{2}}{\binom{15+10}{2}} = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{105}{300} = \frac{7}{20}$$

Tehát a jelöltek között 10 nő volt.

13. Egy 32 fős osztályban 12 tanulónak van angol nyelvvizsgája. Véletlenszerűen kiválasztunk 5 tanulót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan 3 rendelkezik angol nyelvvizsgával?

Megoldás:

32 tanulóból 5 tanulót $\binom{32}{5}$-féle módon választhatunk ki. Ha úgy választunk ki 5 tanulót, hogy azok közül 3-nak van nyelvvizsgája és 2-nek nincs, akkor a 3 tanulót 12-ből, a 2 tanulót 20-ból választhatjuk. Erre $\binom{12}{3} \cdot \binom{20}{2}$ lehetőségünk van.

Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{220 \cdot 190}{201376} \approx 0{,}2076$$

Megjegyzés:

Az ilyen jellegű problémákra használjuk a hipergeometikus eloszlás elnevezést.

14. A bárányhimlő az orvosi statisztikák szerint az esetek 4%-ában okoz szövődményt. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 beteg gyerek közül 3-nál alakul ki valamilyen szövődmény?

Megoldás:

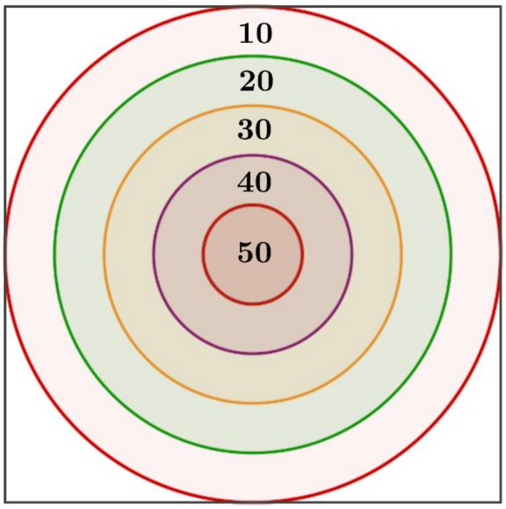
Egy beteg gyereknél $0{,}04$ valószínűséggel alakul ki valamilyen szövődmény, $0{,}96$ valószínűséggel pedig nem. Ezért annak a valószínűsége, hogy 3 adott gyereknél fellép szövődmény, a másik hétnél pedig nem, $0{,}04^3 \cdot 0{,}96^7$. A 10-ből ezt a 3 gyereket $\binom{10}{3}$-féle módon választhatjuk ki. Így annak a valószínűsége, hogy a 10 közül háromnál jelentkezik szövődmény,

$$\binom{10}{3} \cdot 0{,}04^3 \cdot 0{,}96^7 \approx 0{,}00577.$$

Megjegyzés:

Ebben a feladatban a jelenség leírására binomiális eloszlást használtunk.

15. Egy 100 cm oldalú négyzetre véletlenszerűen érkeznek lövések. Az egyes körök sugarai 10, 20, 30, 40, 50 cm. A lövések értéke 50, 40, 30, 20, 10 pont lehet, ha a megfelelő tartományba érkezik a lövés az alábbi ábra szerint. Ha a legnagyobb körön kívülre érkezik, akkor 0 pont a lövés értéke. A megfigyelések szerint minden lövés eléri a táblát és annak tetszőleges területére érkezhet (egyenletes eloszlás). Mennyi a valószínűsége a különböző pontértékű lövéseknek?



Megoldás:

A feltételezés szerint a tábla minden pontjára egyenlő eséllyel érkezik a lövés. Így az egyes lövések valószínűsége a megfelelő területekkel arányos, a teljes négyzet területéhez, 100^2-hez viszonyítunk.

50 pontot akkor kapunk, ha egy 10 cm sugarú kör területét éri a lövés, ezért:

$$P(50pont) = \frac{10^2\pi}{100^2} = \frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314 \approx 3\%$$

40 pontot akkor ér a lövés, ha egy olyan körgyűrűre érkezik, amelyet egy 20 cm-es és egy 10 cm-es kör határol:

$$P(40pont) = \frac{20^2\pi - 10^2\pi}{100^2} = \frac{3\pi}{100} \approx 0{,}0942 \approx 9\%$$

Hasonlóan:

$$P(30\,pont) = \frac{30^2\pi - 20^2\pi}{100^2} = \frac{5\pi}{100} \approx 0{,}1571 \approx 16\%$$

$$P(20\,pont) = \frac{40^2\pi - 30^2\pi}{100^2} = \frac{7\pi}{100} \approx 0{,}2199 \approx 22\%$$

$$P(10\,pont) = \frac{50^2\pi - 40^2\pi}{100^2} = \frac{9\pi}{100} \approx 0{,}2827 \approx 28\%$$

A 0 pontnak megfelelő tartomány a négyzet területének és a legnagyobb kör területének a különbsége:

$$P(0\,pont) = \frac{10^4 - 50^2\pi}{100^2} = \frac{100 - 25\pi}{100} \approx 0{,}2146 \approx 21\%$$

Megjegyzés:

Ez a hat lehetőség teljes eseményrendszert alkot, hiszen egymást kizáró események és a hat közül egy biztosan bekövetkezik. A valószínűségek összege, pontos értékekkel számolva:

$$\frac{\pi}{100} + \frac{3\pi}{100} + \frac{5\pi}{100} + \frac{7\pi}{100} + \frac{9\pi}{100} + \frac{100 - 25\pi}{100} = 1.$$

Ha a %-ban megadott közelítő értékeket adjuk össze, akkor „csak” 99%-ot kapunk. Ez a szabályos közelítés miatt adódott. Ha ezt a „szépséghibát” javítani akarjuk, a 0 pontos lövés valószínűségére írjunk 22%-ot.