

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: 2017. november 24. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Függvényhatárérték-számítás

I. Függvények véges helyen vett véges határértéke

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az I intervallumon. Az f függvény alulról korlátos az I intervallumon, ha van olyan k valós szám, melyre $f(x) \geq k$, ha $x \in I$. Az f függvény felülről korlátos az I intervallumon, ha van olyan K valós szám, melyre $f(x) \leq K$, ha $x \in I$. Az f függvény korlátos az I intervallumon, ha alulról és felülről is korlátos.

Megjegyzés:

A fenti definícióhoz hasonlóan definiálható valamely ponthalmazon [alulról, illetve felülről] korlátos függvény, azzal a különbséggel, hogy ott a ponthalmaz elemeire kell megkövetelnünk a megfelelő egyenlőtlenségek teljesülését. A sorozatoknál látott korlátossághoz hasonlóan itt is igaz, hogy az f függvény akkor és csak akkor korlátos az I intervallumon, ha van olyan K valós szám, hogy minden $x \in I$ -re $|f(x)| \leq K$.

Függvény határértéke definíció I. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez az A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0 < |x - a| < \delta$ teljesül, fennáll $|f(x) - A| < \varepsilon$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Megjegyzések:

1. A fenti definíció azt mondja ki, hogy az f függvény határértéke a -ban A , ha minden olyan esetben, amikor x közel van a -hoz, $f(x)$ közel van A -hoz. Azért ε -hoz kell választanunk δ -t, mert azt akarjuk elérni, hogy ha A -t nevezzük határértéknek, akkor a függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhessenek hozzá; ennek általában az a feltétele, hogy x közel legyen a -hoz, de persze vannak kivételek. Ha fordítva mondanánk ki a definíciót, akkor nem tudnánk garantálni, hogy x -szel a -hoz közelítve a függvényértékek is közel legyenek A -hoz.

2. A definíció azt mutatja, hogy a függvény határértékének egy adott pontban való kiszámításakor érdektelen, hogy a függvény azon a konkrét helyen, ahol a határértéket számítjuk, mit csinál; még azt sem követeljük meg, hogy abban a pontban értelmezve legyen. A vizsgálat tárgya az, hogy a pont egy környezetében miként viselkedik egy függvény, illetve x értékével a ponthoz közelítve milyen tulajdonságai vannak.

Példa:

Legyen $f(x) = x$, és a tetszőleges valós szám. Megmutatjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.

Nyilvánvaló, hogy az f függvény minden intervallumon értelmezve van. Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám. Ekkor $\delta = \varepsilon$ -ra teljesül, hogy $0 < |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - a| < \varepsilon$, hiszen $|f(x) - a| = |x - a|$ és $\delta = \varepsilon$, azaz $0 < |x - a| = |f(x) - a| < \delta = \varepsilon$.

Függvény határértéke (Heine-féle) definíció II. Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez az A valós szám, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke a , de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke A .

Megjegyzés: A két definíció ekvivalenciáját az „átviteli elv”-ként ismert tétel mondja ki. Az „átviteli elv” elnevezés arra utal, hogy a második definíció segítségével a sorozatok határértékére megállapított tulajdonságokat alkalmazhatjuk a függvények határértékére vonatkozóan is.

A II. definíció segítségével könnyebben határozhatjuk meg a függvények határértékét, mint az I. definíció segítségével, ezért a továbbiakban a II. definíciót vesszük alapul, és ennek megfelelően készülnek a feladatok megoldásai, illetve a további definíciók is.

Példák:

1. Legyen $f(x) = x^2$, és a tetszőleges valós szám. Ekkor az f függvénynek minden a esetén van határértéke, és ez a határérték a^2 , mert minden $x_n \rightarrow a$ sorozatra $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow a^2$.
2. Legyen $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, ha $x \neq 0$, és legyen $f(0) = 0$. Ekkor az f függvénynek az $a = 0$ helyen nincs határértéke. Ennek bizonyításához vegyük az alábbi sorozatokat:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$$

Teljesül, hogy $x_n \rightarrow 0$ és $y_n \rightarrow 0$, továbbá $\sin \frac{1}{x_n} = 1$ és $\sin \frac{1}{y_n} = -1$. Tehát a definíció értelmében az $f(x)$ függvénynek nem lehet a 0-ban határértéke, mert találtunk két sorozatot, melyek 0-hoz tartanak, de a hozzájuk tartozó függvényértékek sorozatának határértéke nem egyezik meg.

Kidolgozott feladatok:

1. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1}$

Megoldás:

- a) Az $a = 0$ helyen vizsgálva a függvény határértékét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 3x_n + 2}{x_n^2 + x_n + 1}$, ahol $x_n \rightarrow 0$. A sorozatok határértékére és a műveletekre vonatkozó tételek szerint a tört számlálója 2-höz, nevezője 1-hez tart, ezért a hányados sorozat határértéke 2. (A számítás tetszőleges $x_n \rightarrow 0$ sorozat esetén érvényes.)

- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x_n^2 - 3x_n + 2}{x_n^2 - x_n + 1}$, ahol $x_n \rightarrow 2$. A sorozatok határértékére és a műveletekre vonatkozó tételek szerint a tört számlálója $3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 8$ -hoz, nevezője $2^2 - 2 + 2 = 4$ -hez tart, ezért a hányados sorozat határértéke 2. (A számítás tetszőleges $x_n \rightarrow 2$ sorozat esetén érvényes.)

2. Vizsgáljuk meg a számláló és a nevező szorzattá alakításával, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x - 14}$

b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 8x + 16}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{2x^2 - 7x + 3}$

Megoldás:

- a) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \rightarrow 2$ ($x_n \neq 2$) sorozatot. Ekkor $x_n^2 + x_n - 6 \rightarrow 0$ és $x_n^2 + 5x_n - 14 \rightarrow 0$, tehát a hányados határértéke nem meghatározott, így a törtben szereplő algebrai kifejezéseket át kell alakítanunk. A szorzattá alakításhoz felhasználhatjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezések gyöke a 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x - 14} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+7)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+7}.$$

Tekintsük a tetszőleges $x_n \rightarrow 2$ ($x_n \neq 2$) sorozatot, ekkor $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n+3}{x_n+7} = \frac{5}{9}$.

- b) Az előző feladathoz hasonlóan tetszőleges $x_n \rightarrow -4$ ($x_n \neq -4$) sorozat törtbe helyettesítésével a számlálóban és a nevezőben is 0-hoz tartó sorozatot kapunk. Alakítsuk szorzattá tehát a nevezőt és a számlálót is: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 8x + 16} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-2)}{(x+4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-2}{x+4}$. Alkalmazva a definíciót tetszőleges $x_n \rightarrow -4$ ($x_n \neq -4$) sorozatra: ha létezik a keresett határérték, akkor

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-2}{x+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-2}{x_n+4}.$$

A számláló -6 -hoz, a nevező viszont 0 -hoz tart. Ha az x_n sorozat felülről tart -4 -hez, akkor a nevező pozitív és 0 -hoz tart, tehát a tört határértéke $-\infty$, ha az x_n sorozat alulról tart -4 -hez, akkor a nevező negatív és 0 -hoz tart, tehát a tört határértéke $+\infty$. Ekkor viszont nem teljesül, hogy minden -4 -hez tartó sorozatra ugyanaz legyen a helyettesítési értékek sorozatának határértéke, így a keresett határérték nem létezik.

- c) Az előző feladathoz hasonlóan tetszőleges $x_n \rightarrow 3$ ($x_n \neq 3$) sorozat törtbe helyettesítésével a számlálóban és a nevezőben is 0 -hoz tartó sorozatot kapunk. Alakítsuk szorzattá tehát a nevezőt és a számlálót is! A számlálót például polinomosztással lehet szorzattá alakítani, mert tudjuk, hogy az ott szereplő polinomnak a 3 gyöke, tehát az $x-3$ a polinomból kiemelhető. A polinomosztásról bővebb leírás a függelékben található.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{2x^2 - 7x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 2x - 1)(x-3)}{(2x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x-1}.$$

Alkalmazva a definíciót tetszőleges $x_n \rightarrow 3$ sorozatra:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x - 1} = \lim_{\substack{x_n \rightarrow 3 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{x_n^2 + 2x_n - 1}{2x_n - 1} = \frac{14}{5}.$$

A továbbiakban az elméleti anyag bővítésére, új fogalmak bevezetésére és tételek kimondására, továbbá a függvények speciális tulajdonságainak áttekintésére kerül sor, mert a függvényhatárértékek meghatározásánál ezek néhány lépést nagymértékben leegyszerűsítene.

Függvények bal-és jobboldali határértéke

A függvény-határérték definíciójában x_n „mindkét oldalról” közelítette az a számot, azaz nem kötöttük ki, hogy az x_n sorozat tagjai a -nál kisebbek vagy nagyobbak legyen. Megkülönböztethetünk azonban jobb- illetve baloldali határértéket, attól függően, hogy milyen x_n értékeket engedünk meg.

Bevezetünk egy szóhasználatot (mely már korábban szerepelt is): ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ és $a_n < a$, akkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat alulról tart a -hoz; ha pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ és $a_n > a$, akkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat felülről tart a -hoz.

Megjegyzés: Nyilvánvalóan az $a_n = a$ megengedése a határértéket nem befolyásolja, azonban a függvényhatárértéknél az $a_n \neq a$ feltételnek teljesülnie kell, így nekünk kényelmesebb a definícióban most az egyenlőséget nem megengedni. Ezt a kérdést a továbbiakban kezeljük rugalmasan: ha az egyéb körülmények nem tiltják, akkor vehetjük az $a_n \leq a$, illetve $a_n \geq a$ feltételeket.

Def: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban jobboldali határértéke és ez az A valós szám, ha minden (x_n) sorozatra, mely felülről tart a -hoz, de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke A . Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$.

Def: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban baloldali határértéke és ez az A valós szám, ha minden (x_n) sorozatra, mely alulról tart a -hoz, de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke A . Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$.

Tétel: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez az A valós szám akkor és csak akkor, ha f -nek létezik a -ban a baloldali és jobboldali határértéke, és mindkettő A .

Megjegyzés: A jelölésekben a „ $+0$ ” illetve „ -0 ” azt mutatja, hogy az a számnak melyik oldalán vagyunk. Szokás az $a+0$ illetve $a-0$ helyett egyszerűen csak az $a+$ illetve $a-$ jelölést használni.

Ezzel a határérték-fogalmunk kibővült, mert vannak olyan függvények, melyek egy-egy a szám esetén csak valamely $(a, a + \omega)$ illetve $[a, a + \omega)$, vagy $(a - \omega, a)$ illetve $(a - \omega, a]$ intervallumon vannak értelmezve. Ilyen például az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény, mely csak az $x \geq 0$ esetben van értelmezve, így a 0 -ban vett határértékről nem beszélhetünk, de jobboldali határértékről igen. [Belátható, hogy ez 0 .]

A határértékek kiszámításában gyakorlati haszna is van a fenti tételeknek, mert olyan függvények határértéke is kiszámítható, melyek több függvény kombinációjából állnak elő, azaz egyes intervallumokon más-más képlet adja meg a függvényt.

Kidolgozott feladat:

3. Mennyi az $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvény határértéke az $a = 0$ helyen?

Megoldás:

Ha a függvény jobboldali határértékét tekintjük a 0 -ban, akkor ez megegyezik a $g(x) = x$ függvény ugyanitt vett jobboldali határértékével, ami 0 . A függvény baloldali határértéke a 0 -ban megegyezik a $h(x) = -x^2$ függvény 0 -ban vett baloldali határértékével, ami 0 . Mivel a bal- és jobboldali határértékek léteznek és mindkettő 0 , ezért az f függvény határértéke a 0 -ban létezik és értéke 0 .

A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolata

Mivel a függvény határérték definíciója a sorozatok határértékén alapul, ezért a sorozatokkal végzett műveletek és a határértékek kapcsolatáról szóló tételek alapján a függvényekkel végzett műveletek és a határértékek kapcsolatáról is hasonló tételeket tudunk kimondani.

Tétel: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ és $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Ha az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez A , továbbá a g függvénynek létezik határértéke a -ban és ez B , akkor $f+g$ -nek, $f-g$ -nek, $f \cdot g$ -nek is létezik a -ban határértéke, és ez rendre $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$.

Azaz ha létezik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ és létezik $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, akkor létezik $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B$ és $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

Tétel: Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon úgy, hogy ezen a halmazon $g(x) \neq 0$ [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Ha az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez A , továbbá a g függvénynek létezik határértéke a -ban és ez $B \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ -nek is létezik a -ban határértéke, és ez $\frac{A}{B}$.

Megjegyzés: A fenti tételek speciális esete, amikor az egyik függvény konstans, ezért a konstanssal való szorzásra és osztásra, továbbá a konstans hozzáadására és kivonására vonatkozó tételek kimondása külön nem szükséges.

A függvénykompozícióra (összetett függvényekre) vonatkozó határértékekkel kapcsolatos tételt a következő fejezetben tárgyaljuk.

Kidolgozott feladatok:

4. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$

Megoldás:

a) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \rightarrow 1$ ($x_n \neq 1$) sorozatot. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3) = \lim_{x_n \rightarrow 1} (x_n^2 - 2x_n - 3) = -4, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x_n \rightarrow 1} (x_n^2 - 5x_n + 6) = 2.$$

A két függvény hányadosának határértéke tehát $\frac{-4}{2} = -2$.

b) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \rightarrow 3$ ($x_n \neq 3$) sorozatot. Ekkor a számlálóba és a nevezőbe helyettesítve is azt kapjuk, hogy azok határértéke 0, tehát a hányados határértéke nem meghatározott, így a törtben szereplő algebrai kifejezéseket át kell alakítanunk. A szorzattá alakításhoz felhasználhatjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezések gyöke a 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-2}.$$

A számláló határértéke 4, a nevezőé pedig 1, tehát a hányados határértéke 4.

c) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \rightarrow -2$ ($x_n \neq -2$) sorozatot. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x) = \lim_{x_n \rightarrow -2} (x_n^2 - x_n) = 6, \quad \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + x^2 + 1) = \lim_{x_n \rightarrow -2} (x_n^3 + x_n^2 + 1) = -3$$

A két függvény hányadosának határértéke tehát $\frac{6}{-3} = -2$.

- d) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \rightarrow 0$ ($x_n \neq 0$) sorozatot. Ekkor a számlálóba és a nevezőbe helyettesítve is azt kapjuk, hogy azok határértéke 0, tehát a hányados határértéke nem meghatározott, így a törtben szereplő algebrai kifejezéseket át kell alakítanunk. A számlálóban és a nevezőben is az x kiemelhető:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2 + x + 1}$$

A számláló -1 -hez, a nevező $+1$ -hez tart, tehát a hányados határértéke -1 .

- e) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \rightarrow 3$ ($x_n \neq 3$) sorozatot. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^4 - 3x + 2) = \lim_{x_n \rightarrow 3} (x_n^4 - 3x_n + 2) = 74, \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^5 - 4x + 3) = \lim_{x_n \rightarrow 3} (x_n^5 - 4x_n + 3) = 234$$

A két függvény hányadosának határértéke tehát $\frac{74}{234} = \frac{37}{117}$.

- f) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \rightarrow 1$ ($x_n \neq 1$) sorozatot. Ekkor a számlálóba és a nevezőbe helyettesítve is azt kapjuk, hogy azok határértéke 0, tehát a hányados határértéke nem meghatározott, így a törtben szereplő algebrai kifejezéseket át kell alakítanunk. A szorzattá alakításhoz felhasználhatjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezések gyöke az 1. Polinomosztással (az $x-1$ kiemelésével) kapjuk a következőket (a módszert részletesen lásd a Függelékben):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x - 3}$$

A számláló és a nevező határértéke egyaránt 1, tehát a hányados határértéke is 1.

Megjegyzés: A megoldásokban az egyszerűség kedvéért a továbbiakban nem részletezzük azt a gondolatmenetet, hogy „Vegyünk egy tetszőleges $x_n \rightarrow a$ ($x_n \neq a$) sorozatot. Helyettesítsük ezt a függvény hozzárendelési szabályába, és vizsgáljuk a kapott sorozat határértékét! stb.”

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 10x + 4}$

A gyakorló feladatok megoldása a dokumentum végén található.

II. Függvények folytonossága

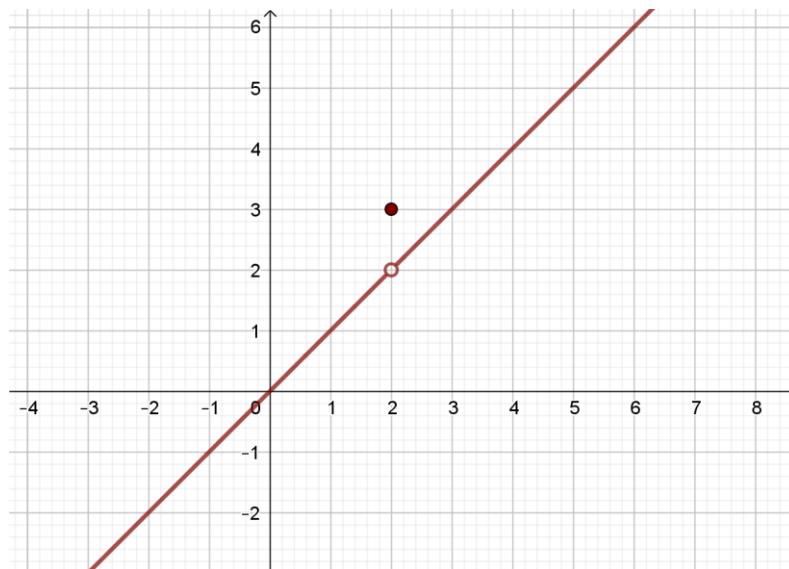
Az eddigiekben nem foglalkoztunk azzal, hogy egy függvény hogyan viselkedik abban a pontban, ahol a határértékét számítjuk. Ha ezt is figyelembe vesszük, a függvények egy újabb érdekes tulajdonságát vizsgálhatjuk.

Def. Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvény folytonos a -ban, ha a függvénynek létezik a -beli határértéke, és ez megegyezik a függvénynek a -ban felvett értékével, azaz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

A fenti definíció másképp megfogalmazva:

Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvény folytonos a -ban akkor és csak akkor, ha minden a -hoz tartó (x_n) sorozatra az $f(x_n)$ függvényértékek sorozatának határértéke $f(a)$.

Korábban már láthattunk példát folytonos függvényre. Az $f(x) = x$ függvénynek minden a -ban létezik határértéke és a -val egyenlő, ami pont azt jelenti, hogy az f függvény minden a -ban folytonos. Könnyen tudunk azonban olyan függvényt is készíteni, amely nem folytonos valamely pontban. Legyen például $g(x) = x$, ha $x \neq 2$, és legyen $g(2) = 3$. Ekkor nyilvánvaló, hogy a g függvény határértéke a 2-ben 2, de a függvényérték 3, így a g függvény a 2-ben nem folytonos.



A bal- és jobboldali határérték definíciójának segítségével definiálhatjuk a függvények balról, illetve jobbról folytonosságát is.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $[a, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvény jobbról folytonos a -ban, ha a függvénynek $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a]$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvény balról folytonos a -ban, ha a függvénynek létezik a -beli baloldali határértéke, és ez megegyezik a függvénynek a -ban felvett értékével, azaz $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az (a, b) intervallumon. Az f folytonos (a, b) -n, ha (a, b) minden pontjában folytonos.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $[a, b]$ intervallumon. Az f folytonos $[a, b]$ -n, ha folytonos (a, b) -n, és a -ban jobbról, b -ben balról folytonos.

A továbbiakban a folytonos [balról, illetve jobbról folytonos] függvények említésekor nem fogjuk feltüntetni az értelmezési tartományt, a folytonosság fogalmába beleértjük, hogy a függvények a megfelelő intervallumokon értelmezve vannak.

Vannak tehát nem folytonos és folytonos függvényeink. Azon pontokat, ahol valamely f függvény nem folytonos, megkülönböztető elnevezéssel láthatjuk el.

Def. Ha az f függvény az a pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f -nek a -ban szakadási helye van. A szakadási helyeket három csoportra oszthatjuk:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ létezik, de a nincs benne f értelmezési tartományában vagy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$. Ekkor azt mondjuk, hogy f -nek a -ban megszüntethető szakadási helye van. [Azért megszüntethető, mert az f függvény folytonossá tehető a -ban. Az első esetben a -t bele vesszük az értelmezési tartományba, és ott úgy adjuk meg a függvény értékét, hogy az a határértékkel legyen egyenlő. A második esetben a függvényértéket megváltoztatjuk a -ban úgy, hogy a határértékkel legyen egyenlő.]
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nem létezik, de létezik a $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ véges határérték [és ezek szükségszerűen különbözőek]. Ekkor azt mondjuk, hogy f -nek ugráshelye van a -ban, vagy f ugrik a -ban.
3. Minden más eset.

Az 1. és 2. típusú szakadási helyeket elsőfajú, a 3. típusúakat másodfajú szakadási helynek nevezzük.

A folytonosság és a műveletek kapcsolata

Tétel: Ha f és g folytonos függvények a -ban, akkor $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ is folytonos a -ban, és $g(a) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos a -ban.

Következmény: Mivel $f(x) = x$ folytonos a -ban tetszőleges a esetén, ezért a $g(x)$ polinomfüggvény [azaz $g(x) = a_n x^n + \dots + a_0$] folytonos a -ban tetszőleges a esetén. Ha $h(x)$ racionális törtfüggvény [azaz két polinomfüggvény hányadosaként áll elő], akkor $h(x)$ a nevező nullhelyeit kivéve mindenütt folytonos.

A függvények esetében előkerül egy újabb művelet, ami még korábban nem szerepelt, nevezetesen a függvények összetétele vagy kompozíciója.

Legyenek $f : D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow D(g) \subset \mathbb{R}$, $g : D(g) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, és legyen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = u$, illetve $\lim_{x \rightarrow u} g(x) = v$. Ekkor általában nem igaz, hogy a $g(f(x))$ függvénynek van határértéke a -ban és ez v . [Ezt abból gondolhatnánk, hogy ha x tart a -hoz, akkor $f(x)$ tart u -hoz, és $g(f(x))$ tart v -hez.] Vegyük a következő függvényeket:

$f(x) = 4$ minden x -re és $g(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha } x \neq 4 \\ 3, & \text{ha } x = 4 \end{cases}$. Ekkor nyilvánvaló, hogy a $g(f(x))$ függvény értelmezve van $\mathbb{R}$ -en. Azonban $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 5$, de $\lim_{x \rightarrow 3} g(f(x)) \neq 5$, mert $\lim_{x \rightarrow 3} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 3} g(4) = 3$.

Azonban bizonyos feltételek mellett igaz az állítás, nevezetesen:

Tétel: Ha f folytonos a -ban és g folytonos $f(a)$ -ban, akkor $g(f(x))$ folytonos a -ban.

Megjegyzés: Az állítás teljesüléséhez nem szükséges a folytonosság, kevesebb megkötés is elég. Azonban a mindennapos gyakorlatban leginkább folytonos függvényekkel dolgozunk, ezért itt most az összetett függvényekkel kapcsolatban csak a folytonos függvények összetételének esetét tárgyaljuk.

Kidolgozott feladatok:

1. Válasszuk meg A értékét úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen a teljes értelmezési tartományán!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{ha } x \neq 2 \\ A, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Megoldás:

Ha $x \neq 2$, akkor a tört egyszerűsíthető, így a függvény

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x \neq 2 \\ A, & \text{ha } x = 2 \end{cases}.$$

Ha $a \neq 2$, akkor a függvény folytonos a -ban az $x+2$ folytonossága miatt.

Ha $x \rightarrow 2$, akkor $x+2 \rightarrow 4$. Tehát ha $A = 4$, akkor a függvény a -ban folytonos, ha $A \neq 4$, akkor a függvény a -ban nem folytonos.

2. Vizsgáljuk meg az alábbi függvény folytonosságát az értelmezési tartományán!

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, \text{ azaz } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Megoldás:

Ha $a > 0$, akkor ott folytonos $f(x)$, mert itt a $g(x) = 1$ függvénnyel egyezik meg. Ugyanígy folytonos $a < 0$ esetén is. A 0-ban viszont nem folytonos, mert a baloldali határértéke -1 , a jobboldali határértéke pedig 1 , azaz a függvénynek a 0-ban nincs határértéke, tehát nem folytonos.

3. Vizsgáljuk meg az alábbi függvény folytonosságát az értelmezési tartományán!

$$f(x) = x \cdot [x]$$

(A képletben $[x]$ az x egészrészét, azaz a nála nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelöli)

Megoldás:

Ha a nem egész szám, akkor a -ban folytonos, mert itt x és $[x]$ is folytonos. Ha a egész, akkor az $[a-1, a)$ intervallumban $f(x) = x \cdot (a-1)$, az $[a, a+1)$ intervallumban $f(x) = x \cdot a$.

Ha $x \rightarrow a+0$, akkor $f(x) \rightarrow a^2$, ha $x \rightarrow a-0$, akkor $f(x) \rightarrow a^2 - a$. Ha a függvénynek létezik a határértéke a -ban, akkor $a^2 - a = a^2$ kell teljesüljön. Ez csak $a = 0$ esetén áll fenn, tehát más egész a esetén f nem lehet folytonos. A 0-ban viszont az, mert itt a függvény értéke is, meg a határértéke is 0.

4. Vizsgáljuk meg az alábbi függvény folytonosságát az értelmezési tartományán!

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$$

Megoldás:

A függvény $x = -1$ kivételével mindenütt értelmezhető. Az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, mert itt a nevező és a számláló is folytonos, és folytonos függvények hányadosa szintén folytonos függvény.

5. Vizsgáljuk meg, hogy létezik-e a következő függvényhatárérték!

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 25}$$

Megoldás:

A folytonosságot felhasználva behelyettesítéssel kapjuk, hogy a számláló és a nevező határértéke is 0 az $x = 5$ -nél. Alakítsuk át a kifejezést! A számlálót gyöktelenítéssel, a nevezőt szorzattá alakítással tudjuk továbbformálni:

$$\frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 25} = \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(x+5)} \cdot \frac{1}{(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{(5-x)}{(x-5)(x+5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{(x+5)(2 + \sqrt{x-1})}$$

Az új nevezőben folytonos függvény áll, ezért a keresett határérték $-\frac{1}{40}$.

Gyakorló feladatok:

1. Meg tudjuk-e választani A és B értékét úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen a teljes értelmezési tartományán?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x - 14}, & \text{ha } x \neq 2 \text{ és } x \neq -7 \\ A, & \text{ha } x = 2 \\ B, & \text{ha } x = -7 \end{cases}$$

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1}$

III. A végtelen mint függvényhatárérték

Az átviteli elv alapján adott definíciónk kapcsolatot teremt a függvények és a sorozatok határértéke között. Célszerű tehát a sorozatok lehetséges határértékeit függvények esetén is értelmezni. Ezt véges határértékek esetén már megtettük, de a végtelen mint határérték bevezetése is lehetséges.

Def: Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez plusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke a , de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $+\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Def: Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez mínusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke a , de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Véges helyen vett jobb- és baloldali végtelen határértékeket is definiálhatunk a korábbiakkal analóg módon:

Def: Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban jobboldali határértéke és ez $+\infty$, ha minden (x_n) sorozatra, mely felülről tart a -hoz, de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $+\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

Def: Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban jobboldali határértéke és ez $-\infty$, ha minden (x_n) sorozatra, mely felülről tart a -hoz, de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$.

Def: Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban baloldali határértéke és ez $+\infty$, ha minden (x_n) sorozatra, mely alulról tart a -hoz, de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $+\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$.

Def: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban baloldali határértéke és ez $-\infty$, ha minden (x_n) sorozatra, mely alulról tart a -hoz, de egyik tagja sem egyenlő a -val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$.

Kidolgozott feladatok:

1. Állapítsuk meg, hogy léteznek-e az alábbi függvényhatárértékek! Ha igen, akkor határozzuk meg az értéküket!

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 2}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{11}}$

Megoldás:

- a) A kifejezés számlálója és nevezője is folytonos a 3-nál, a számláló határértéke 19, a nevezőé pedig 0. Ha x felülről tart a 3-hoz, akkor a nevező pozitív és 0-hoz tart, a számláló pozitív véges értékhez tart, így a tört jobboldali határértéke $+\infty$. Ha x alulról tart a 3-hoz, akkor a nevező negatív és 0-hoz tart, a számláló pozitív véges értékhez tart, így a tört baloldali határértéke $-\infty$. Tehát a keresett határérték nem létezik.
- b) A kifejezés számlálója és nevezője is folytonos a 2-nél, a számláló határértéke 4^{20} , a nevezőé pedig 0. Mivel a nevező 10-edik hatvány, ezért értéke mindig pozitív $x \neq 2$ esetén, ezért a nevező úgy tart 0-hoz, hogy közben csak pozitív értékeket vesz fel. Emiatt a tört határértéke $+\infty$.
- c) A kifejezés számlálója és nevezője is folytonos a 2-nél, a számláló és nevező határértéke egyaránt 0. A kifejezés emiatt átalakítható: felhasználjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben szereplő polinomnak a 2 egyaránt gyöke, így mindkét polinomból az $x - 2$ kiemelhető. $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ (polinomosztással vagy a másodfokú kifejezés gyökök segítségével történő szorzattá alakításával), és $x^3 - 12x + 16 = (x - 2)^2(x + 4)$ (polinomosztással és a kapott másodfokú kifejezés pl. gyökök segítségével történő szorzattá alakításával). Az átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{11}} = \frac{(x - 2)^{20} \cdot (x + 1)^{20}}{(x - 2)^{22} \cdot (x + 4)^{11}} = \frac{(x + 1)^{20}}{(x - 2)^2 \cdot (x + 4)^{11}}$$

A számláló határértéke 3^{20} , a nevezőé pedig 0. Mivel a nevezőben a 0-hoz tartó kifejezés négyzetes, a másik kifejezés pedig pozitív, ezért értéke mindig pozitív $x \neq 2$ esetén, emiatt a nevező úgy tart 0-hoz, hogy közben csak pozitív értékeket vesz fel. Tehát a tört határértéke $+\infty$.

Függvény végtelenben vett határértéke

Ha a függvény határértékének definíciójában szereplő, a -hoz tartó sorozatok helyett végtelenbe tartó sorozatokat választunk, akkor a függvények „végtelenben vett” határértékét kaphatjuk meg. (Ez szemléletesen leírja a függvény viselkedését, miközben a változó értéke egyre nagyobb, illetve egyre kisebb lesz.)

Def: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W, +\infty)$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Az f határértéke a plusz végtelenben az A szám, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $+\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke A . Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Def: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty, W]$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Az f határértéke a mínusz végtelenben az A szám, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $-\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke A . Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Hasonló definíció mondható ki a $+\infty$ -ben és $-\infty$ -ben vett $+\infty$ illetve $-\infty$ határértékre:

Def: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W, +\infty)$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Az f határértéke a plusz végtelenben plusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $+\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $+\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Def: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W, +\infty)$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Az f határértéke a plusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $+\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Def: Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty, W]$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Az f határértéke a mínusz végtelenben plusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $-\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $+\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Def: Legyen az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty, W]$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Az f határértéke a mínusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $-\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Példa:

Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény esetén a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ a_n \rightarrow +\infty}} a_n^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ a_n \rightarrow 0}} a_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ a_n \rightarrow -\infty}} a_n^2 = +\infty$$

Kidolgozott feladatok:

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3x - 1}{2x^2 - x + 1}$

Megoldás:

a) A $+\infty$ -ben vett határérték megállapításához alakítsuk át a függvényt!

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ha x tart a $+\infty$ -be, akkor a számláló 1-hez, a nevező szintén 1-hez tart. Azaz a függvény határértéke a $+\infty$ -ben és a $-\infty$ -ben is 1.

b) Használjuk az a) feladat megoldásában kapott alakot!

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ha x tart a $-\infty$ -be, akkor a számláló 1-hez, a nevező szintén 1-hez tart. Azaz a függvény határértéke a $-\infty$ -ben is 1.

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3x - 1}{2x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2, \text{ a sorozatokra korábban látott összefüggések alapján.}$$

3. Állapítsuk meg az alábbi határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

Megoldás:

- a) Mivel mindkét szereplő függvény a végtelenben végtelenbe tart, ezért a különbség határértéke átalakítás nélkül nem adható meg. Gyöktelenítsük a kifejezést, majd osszunk a nevező domináns tagjával, ahogy ezt korábban a sorozatoknál is láttuk!

$$\sqrt{x^2 + 5x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 5x} - x)(\sqrt{x^2 + 5x} + x)}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1}$$

A számláló 5, a nevező határértéke 2, így a keresett határérték $\frac{5}{2}$.

- b) Ha a törtben a számlálót és a nevezőt is leosztjuk $\sqrt{x}$ -szel (a nevező domináns tagjával), akkor az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \rightarrow 1$$

mert a számláló és a nevező is 1-hez tart, ha x tart a végtelenbe.

Gyakorló feladatok:

1. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20} (3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$$

IV. Szakadási helyek vizsgálata

Kidolgozott feladatok:

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények szakadási helyének jellegét! Vizsgáljuk meg, létezik-e a függvényeknek határértéke a plusz és mínusz végtelenben!

a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$

b) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$

c) $h(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$

d) $j(x) = \frac{x^2-9}{x^2(x-3)^3}$

e) $k(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$

f) $m(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

Megoldás:

- a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$. Mivel a számláló és a nevező mindenhol folytonos, ezért a függvény mindenhol folytonos, ahol a nevező nem 0. Tekintsük az $x = 1$ -nél vett jobb-, illetve baloldali határértéket!

$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3}{x-1} = +\infty$, mert a nevező 0-hoz tart, és pozitív. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3}{x-1} = -\infty$, mert a nevező 0-hoz tart, és negatív. Tehát a függvénynek nincs határértéke az 1-nél, így itt másodfajú szakadási helye van.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-1} = 0$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x-1} = 0$ teljesül, mert a nevező abszolút értéke mindkét esetben végtelenbe tart, a számláló pedig véges érték.

- b) A számláló és a nevező mindenütt folytonos, ezért a hányados a nevező nullhelyei kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek két szakadási helye van (a nevező két nullhelye), az $x = 0$ és az $x = 1$. Alakítsuk át a hozzárendelési szabályt! $g(x) = \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}$. Ebből lát-

ható, hogy $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$, tehát az $x = 1$ -nél megszüntethető szakadási helye van, a $g(1) = 1$ érték megadásával. Tekintsük az $x = 0$ -nál vett jobb-, illetve baloldali határértéket!

$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, mert a nevező 0-hoz tart, és pozitív. $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, mert a nevező 0-hoz tart, és negatív. Tehát a függvénynek nincs határértéke a 0-nál, így ott másodfajú szakadási helye van.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ teljesül, mert a nevező abszolút értéke mindkét esetben végtelenbe tart, a számláló pedig véges érték.

- c) A számláló és a nevező mindenütt folytonos, ezért a hányados a nevező nullhelyei kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek két szakadási helye van (a nevező két nullhelye), az $x = 2$ és az $x = 3$. Alakítsuk át a hozzárendelési szabályt!

$$h(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}. \text{ Ebből látható, hogy } \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-3} = 0, \text{ te-}$$

hát az $x = 2$ -nél megszüntethető szakadási helye van, a $g(2) = 0$ érték megadásával. Tekintsük

az $x = 3$ -nál vett jobb-, illetve baloldali határértéket! $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x-2}{x-3} = +\infty$, mert a számláló pozitív

és 1-hez tart, a nevező pedig 0-hoz tart és pozitív. $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x-2}{x-3} = -\infty$, mert a számláló pozitív és

1-hez tart, a nevező pedig 0-hoz tart és negatív. Tehát a függvénynek nincs határértéke a 3-nál, így ott másodfajú szakadási helye van.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 1$. Hasonló módon

$$\text{kapjuk: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 1.$$

- d) A számláló és a nevező mindenütt folytonos, ezért a hányados a nevező nullhelyei kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek két szakadási helye van (a nevező két nullhelye), az $x = 0$ és az $x = 3$. Alakítsuk át a hozzárendelési szabályt!

$$j(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2(x-3)^3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)^3} = \frac{x+3}{x^2(x-3)^2}$$

A kapott kifejezés nevezője továbbra is 0 az $x = 0$ és az $x = 3$ helyen. A két helyen a függvény határértékét megvizsgálva azt kapjuk, hogy mindkét helyen a határérték plusz végtelen, mert a nevező nullához tart és pozitív, a számláló pedig egy pozitív értékhez tart. Tehát másodfajú szakadási helye van a 0-nál és a 3-nál is.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x^2(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{x(x-3)^2} = 0$ és

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x^2(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{x(x-3)^2} = 0, \text{ mert mindkét esetben a számláló 1-hez, a nevező abszo-}$$

lút értéke pedig végtelenhez tart.

- e) Az összetett függvény folytonossága miatt a kitevőben levő tört nevezőjének zérushelyét (az $x = -1$ -et) kivéve az összetett függvényünk mindenütt folytonos. Vizsgáljuk meg a jobb- és baloldali határértéket a szakadási helynél! Kezdjük a kitevővel: $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x+1} = +\infty$, mert a nevező

0-hoz tart és pozitív. Így $\lim_{x \rightarrow -1+0} 3^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$, mert a kitevő plusz végtelenbe tart.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty, \text{ mert a nevező 0-hoz tart és negatív. Így } \lim_{x \rightarrow -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}} = 0, \text{ mert a kitevő mí-}$$

nusz végtelenbe tart. Tehát a függvénynek a -1 -nél nincs határértéke, ezért ez másodfajú szakadási hely.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{1}{x+1}} = 1$, mert a kitevő 0-hoz tart. Ugyan-

így $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{\frac{1}{x+1}} = 1$.

- f) Az összetett függvény folytonossága miatt a kitevőben levő tört nevezőjének zérushelyét (az $x = 0$ -t) kivéve a nevezőben szereplő összetett függvény mindenütt folytonos, és mivel sehol sem 0, ezért a hányados is mindenütt folytonos a 0 kivételével. Vizsgáljuk meg a jobb- és baloldali határértéket a szakadási helynél! Kezdjük a kitevővel: $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, mert a nevező 0-hoz

tart és pozitív. Így $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(1 + 2^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$, azaz $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0$. Nézzük a baloldali határértéket!

$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, mert a nevező 0-hoz tart és negatív. Így $\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(1 + 2^{\frac{1}{x}}\right) = 1$, mert a 2-hatvány

kitevője mínusz végtelenbe tart, vagyis a 2-hatvány értéke 0-hoz tart. Tehát $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1$. Ez

viszont azt jelenti, hogy a függvénynek van bal- és jobboldali véges határértéke, ám ezek nem egyeznek meg, így a függvénynek a 0-nál elsőfajú szakadási helye van (ugrás).

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$, mert a 2-hatvány kitevője

0-hoz, így a 2-hatvány 1-hez tart. Hasonlóan kapjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$.

V. Trigonometrikus függvények határértéke

Kidolgozott feladatok:

1. Felhasználva, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

Megoldás:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3x}{2x} \right) = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = 2, \text{ és itt felhasználjuk, hogy } \cos 2x \text{ folyto-}$$

nos és $\cos 0 \neq 0$.

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x \cdot \cos x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (2x \cdot \operatorname{ctg} 3x)$$

Megoldás:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 3.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 3x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

(Itt ismét felhasználtuk a $\cos x$ függvény folytonosságát és azt, hogy $\cos 0 \neq 0$.)

$$c) \text{ A kifejezés átalakításával visszavezethető a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{ határértékre:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x \cdot \operatorname{ctg} 3x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cdot \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

3. Állapítsuk meg az alábbi függvényhatárértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + 2x}}{\sin x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

Megoldás:

a) A számlálóban és a nevezőben álló függvény is folytonos a 0-ban, de mindkettő helyettesítési értéke 0, így át kell alakítanunk a képletet. Alakítsuk át a számlálót gyöktelenítéssel!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + 2x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 + 2x})(1 + \sqrt{1 + 2x})}{\sin x(1 + \sqrt{1 + 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + 2x)}{\sin x(1 + \sqrt{1 + 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin x(1 + \sqrt{1 + 2x})}$$

Végezzünk további átalakítást úgy, hogy a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határérték felhasználható legyen!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x(1 + \sqrt{1 + 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2x}} \right) = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1.$$

- b) A számlálóban és a nevezőben álló függvény is folytonos a 0-ban, de mindkettő helyettesítési értéke 0, így át kell alakítanunk a képletet. Célunk, hogy az átalakítás után a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határérték felhasználható legyen. Ehhez a számlálót és a nevezőt is szorozzuk meg $1 + \cos x$ -szel!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot (1 + \cos x) \right) = 1 \cdot 2 = 2$$

Gyakorló feladatok

1. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\sin 3x}$

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 \frac{x}{4}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{\cos 4x - \cos 6x}$

A gyakorló feladatok megoldása

I. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 10x + 4}$

Megoldás:

a) Alakítsuk át a kifejezést, mert a két törtnek külön-külön nincs határértéke!

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} &= \frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{2(1+x+x^2) - 3(1+x)}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)} = \\ &= \frac{2x^2 - x - 1}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)} \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

b) Behelyettesítéssel a számláló és a nevező határértéke is 0-nak adódik, ezért alakítsuk át a törtet a zárójelek kibontásával és kiemeléssel, majd egyszerűsítéssel!

$$\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \frac{6x^3 + 11x^2 + 6x}{x} = 6x^2 + 11x + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6x^2 + 11x + 6) = 6$$

c) A számlálóba és a nevezőbe 1-et helyettesítve mindkét esetben 0-t kapunk, így át kell alakítanunk a törtet:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{(1-x)(2x^2 + x + 1)} = \frac{-(x^2 + x - 1)}{2x^2 + x + 1}$$

$$\text{Tehát } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 + x - 1)}{2x^2 + x + 1} = -\frac{1}{4}$$

d) Alakítsuk át itt is a számlálót és a nevezőt!

$$\frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 10x + 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 1)}{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x - 2)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + 4x - 2}$$

$$\text{Tehát } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 10x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + 4x - 2} = \frac{9}{22}.$$

II. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Meg tudjuk-e választani A és B értékét úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen a teljes értelmezési tartományán?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x - 14}, & \text{ha } x \neq 2 \text{ és } x \neq -7 \\ A, & \text{ha } x = 2 \\ B, & \text{ha } x = -7 \end{cases}$$

Megoldás:

Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát! $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x - 14} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x+7)(x-2)} = \frac{x+3}{x+7}$. Ennek a

határértéke a 2-nél létezik, és értéke $\frac{5}{9}$. Tehát $A = \frac{5}{9}$ választással a 2-nél folytonos lesz a függvény.

A függvény határértéke -7 -nél azonban nem létezik, mert ha x felülről tart -7 -hez, akkor a nevező pozitív és 0-hoz tart, a számláló pedig -4 -hez tart, így a függvény jobboldali határértéke $-\infty$. Ez már önmagában nem teszi lehetővé a folytonosságot. (A függvény baloldali határértéke egyébként $+\infty$.)

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1}$

Megoldás:

a) A számlálóban és a nevezőben is folytonos függvényeket látunk. A számláló határértéke 3-nál $\sqrt{5}$, a nevező határértéke $1 + \sqrt{2}$, tehát a vizsgált határérték létezik, és értéke $\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$.

b) A számlálóban és a nevezőben is folytonos függvényeket látunk. Ha a számláló és a nevező határértékét behelyettesítéssel meghatározzuk, akkor mindkét esetben 0-t kapunk, így át kell alakítanunk a kifejezést. Vegyük észre, hogy a számlálóban és a nevezőben a gyök alatt álló kifejezések szorzattá alakíthatók, így kiemelésre adódik lehetőség:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x-2)}} = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2} \cdot (1 + \sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x+2}}{1 + \sqrt{x-1}}$$

Így már a határérték kiszámítható, felhasználva, hogy a számlálóban és a nevezőben is folytonos függvényeket látunk: a számláló 2-höz, a nevező pedig szintén 2-höz tart, így a keresett jobboldali határérték 1.

- c) A folytonosságot felhasználva behelyettesítéssel kapjuk, hogy a számláló és a nevező határértéke is 0 az $x = 1$ -nél. Alakítsuk át a törtet! A számlálót szorzattá alakítással, a nevezőt gyöktelenítéssel tudjuk továbbvihető alakra hozni:

$$\frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} = \frac{(1-x)(1+x)}{(\sqrt{x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{2-x}) = \frac{(1-x)(1+x)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2x-2} =$$

$$= -\frac{(1+x)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2}$$

A számlálóban álló függvény folytonos, így határértéke az 1-nél 4, tehát a keresett határérték -2 .

- d) A folytonosságot felhasználva behelyettesítéssel kapjuk, hogy a számláló és a nevező határértéke is 0 az $x = 1$ -nél. Alakítsuk át a törtet! A számlálót gyöktelenítsük:

$$\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{\sqrt{x+8}+3}$$

A kapott kifejezés folytonos az 1-nél, így határértéke $\frac{1}{6}$.

III. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Határozzuk meg a következő határértéket!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

Megoldás:

- a) Osszuk le a számlálót és a nevezőt is a nevező domináns tagjával, azaz x^3 -nal!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} - 2} = -\frac{1}{2}$$

mert a számláló 1-hez, a nevező pedig -2 -höz tart.

- b) Osszuk le a számlálót és a nevezőt is a nevező domináns tagjával, azaz x^3 -nal!

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{1 + x^2 - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} - 2} = +\infty$$

mert a számláló $-\infty$ -hez, a nevező pedig -2 -höz tart.

- c) A számlálóban és a nevezőben is a legnagyobb fokú tag x^{50} , osszuk tehát ezzel a számlálót és a nevezőt is (tényezőnként elvégezhető az osztás):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}}$$

A számlálóban levő kifejezések határértéke 2^{20} , illetve 3^{30} , a nevezőben levő kifejezés határértéke pedig 2^{50} . Tehát a keresett határérték $\frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.

- d) A nevezőben a domináns tag x -es nagyságrendű, így osszuk el a számlálót és a nevezőt is x -szel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = -1$$

mert a számlálóban levő függvény határértéke -1 , a nevezőé pedig 1 .

- e) Gyöktelenítés után az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}.$$

Itt a számlálót és a nevezőt $\sqrt{x}$ -szel leosztva a kifejezés határértéke meghatározható:

$$\frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

mert a számláló 1 -hez, a nevező 2 -höz tart.

IV. fejezetben kitűzött feladatok megoldása:

1. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\sin 3x}$

Megoldás:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \right) = 1 \cdot 2 = 2$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{5} \right) = 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{7x}{\sin 7x} \cdot \frac{3}{7} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\cos 4x \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{3 \cdot \cos 4x} \right) = 1 \cdot \frac{4}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\cos 8x \cdot \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 8x}{8x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{8}{3 \cdot \cos 8x} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}$$

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 \frac{x}{4}}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{\cos 4x - \cos 6x}$$

Megoldás:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 \frac{x}{4}}{\frac{x}{4} \cdot 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} \cdot \frac{3 \sin \frac{x}{4}}{4} \right) = 1 \cdot \frac{3 \cdot 0}{4} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

c) Alkalmazzunk olyan átalakítást, hogy a $\sin x$ és az x jellegű kifejezések szorzata helyett a hányadosuk szerepeljen! Ehhez a tangens függvényt alakítsuk át kotangenssé!

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (1-x) \right)$$

Ha most bevezetjük az $y = 1 - x$ jelölést, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (1-x) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(y \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} y \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} y \right) \cdot \frac{\frac{\pi}{2} y}{\sin \left(\frac{\pi}{2} y \right)} \cdot \frac{2}{\pi} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot |\sin x|}{x}. \text{ Itt külön kell vizsgálnunk a jobb-és baloldali határértéket.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{2} \cdot |\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{2} \cdot \sin x}{x} = \sqrt{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sqrt{2} \cdot |\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sqrt{2} \cdot (-\sin x)}{x} = -\sqrt{2}$$

Ebből látszik, hogy a kétoldali határértékek nem egyeznek meg, így a vizsgált határérték nem létezik.

e) Alkalmazzuk a nevezőben szereplő különbségre az addíciós tételt!

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{\cos 4x - \cos 6x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{-2 \sin \frac{4x+6x}{2} \sin \frac{4x-6x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{-2 \sin 5x \sin(-2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5}{4} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Függelék

Polinomosztás

A számok osztásához hasonlóan algebrai kifejezéseket is oszthatunk egymással maradékosan. A módszer az egyik konkrét kitűzött feladat számításának elvégzésével szeretnénk bemutatni.

A polinomosztás felhasználásához előzményeként még egy tételt meg kell említenünk:

Tétel: Ha a $p(x)$ valós együtthatós polinom gyöke az a valós szám, akkor a polinom felírható $p(x) = (x + a) \cdot q(x)$ alakban, ahol $q(x)$ egy megfelelő valós együtthatós polinom.

Lássuk tehát a polinomosztást!

Tudjuk, hogy az $x^3 - x^2 - 7x + 3$ polinomnak az $x = 3$ gyöke, tehát osztható $(x - 3)$ -mal.

Kezdjük el az osztást úgy, mint a számoknál!

$$(x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x - 3) =$$

Most egy olyan x -hatványt kell találnunk, amellyel $(x - 3)$ -at megszorozva x^3 is keletkezik, ez az x^2 lesz. Végezzük el a visszaszorzást, és vonjuk ki a kapott polinomot az eredetiből:

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x - 3) = x^2 \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline 2x^2 - 7x + 3 \end{array}$$

Most folytassuk tovább a megfelelő x -hatvány keresését, olyat kell találnunk, mellyel $(x - 3)$ -at megszorozva $2x^2$ is keletkezik:

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x - 3) = x^2 + 2x \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline 2x^2 - 7x + 3 \\ -(2x^2 - 6x) \\ \hline -x + 3 \end{array}$$

Befejező lépésként már nyilvánvalóan -1 -et kell írunk a hányadosba:

$$\begin{array}{r}
(x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x - 3) = x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(x^3 - 3x^2)} \\
2x^2 - 7x + 3 \\
\underline{-(2x^2 - 6x)} \\
-x + 3 \\
\underline{-(-x + 3)} \\
0
\end{array}$$

Előfordulhat, hogy a polinomosztás során maradék lép fel. Az osztást csak addig tudjuk végezni, amíg a visszaszorítás után kapott polinom fokszáma kisebb nem lesz, mint az osztóé. Ha nem fogy el egyszerre minden tag, akkor maradék keletkezik (pont úgy, mint a számok maradékos osztásánál). Ilyenkor a $p(x)$ polinom $q(x)$ polinommal történő osztása után a $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$ alakot kapjuk, ahol $r(x)$ polinom fokszáma kisebb, mint $q(x)$ fokszáma.

VI. Definíciók az I. függvényhatárérték definíciónak megfelelő megfogalmazásban és környezetben

Jobb- és baloldali határérték

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban jobboldali határértéke és ez A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0 < x - a < \delta$ teljesül, fennáll $|f(x) - A| < \varepsilon$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban baloldali határértéke és ez A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0 < a - x < \delta$ teljesül, fennáll $|f(x) - A| < \varepsilon$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$.

A végtelen mint határérték

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez plusz végtelen, ha minden K valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ teljesül, fennáll $K < f(x)$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban határértéke és ez mínusz végtelen, ha minden K valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ teljesül, fennáll $K > f(x)$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban jobboldali határértéke és ez $+\infty$, ha minden K valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0 < x - a < \delta$ teljesül, fennáll $f(x) > K$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a + \omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban jobboldali határértéke és ez $-\infty$, ha minden K valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0 < x - a < \delta$ teljesül, fennáll $f(x) < K$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban baloldali határértéke és ez $+\infty$, ha minden K valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0 < a - x < \delta$ teljesül, fennáll $f(x) > K$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a -ban baloldali határértéke és ez $-\infty$, ha minden K valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0 < a - x < \delta$ teljesül, fennáll $f(x) < K$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$.

Végtelenben vett határérték

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W, +\infty)$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f határértéke a plusz végtelenben az A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan K valós szám, hogy minden esetben, amikor $K < x$ teljesül, fennáll $|f(x) - A| < \varepsilon$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty, W]$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f határértéke a mínusz végtelenben az A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan K valós szám, hogy minden esetben, amikor $K > x$ teljesül, fennáll $|f(x) - A| < \varepsilon$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W, +\infty)$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f határértéke a plusz végtelenben plusz végtelen, ha minden N valós számhoz létezik olyan K valós szám, hogy minden esetben, amikor $K < x$ teljesül, fennáll $f(x) > N$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W, +\infty)$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f határértéke a plusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden N valós számhoz létezik olyan K valós szám, hogy minden esetben, amikor $K < x$ teljesül, fennáll $f(x) < N$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty, W]$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f határértéke a mínusz végtelenben plusz végtelen, ha minden N valós számhoz létezik olyan K valós szám, hogy minden esetben, amikor $K > x$ teljesül, fennáll $f(x) > N$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Def. Legyen az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty, W]$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f határértéke a mínusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden N valós számhoz létezik olyan K valós szám, hogy minden esetben, amikor $K > x$ teljesül, fennáll $f(x) < N$ is. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.