

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: 2017. november 24. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

A differenciál- és integrálszámítás alapjai

I. Differencia- és differenciálhányados

Def. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ értelmezve az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumon. Legyen x tetszőleges eleme az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumnak. Az $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ hányadost az f a -ban vett differenciahányadosának vagy különbségi hányadosának nevezzük.

Def. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ értelmezve az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumon. Az f függvény az a -ban differenciálható[deriválható], ha létezik a $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték [a differenciahányadosok határértéke].

Ezt a határértéket az f a -beli differenciálhányadosának vagy deriváltjának nevezzük. Jelölése: $f'(a)$ vagy $\frac{df}{dx}(a)$.

Megjegyzések:

1. Sok esetben megkönnyíti a számolást, ha a differenciahányadosokat az $x = a + h$ jelölés bevezetésével $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ alakban írjuk fel. Ekkor a differenciálhányados a $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ határértékel egyenlő [amennyiben létezik]. Természetesen h pozitív és negatív értékeket is felvehet, annak megfelelően, hogy $x > a$ vagy $x < a$.

2. A $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték kiszámításakor a $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ függvény határértékét keressük

az a -ban, az 1. pontban szerepelt alak esetén pedig a $g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ függvény határértékét kell kiszámítanunk a 0-ban. [Természetesen $g(x)$ nincs értelmezve a -ban, $g(h)$ nincs értelmezve 0-ban.] Ezért a differenciálhányados meghatározásánál alkalmazhatjuk a függvények határértékére vonatkozó definíciókat és tételeket.

3. A továbbiakban nem fogjuk kiírni, hogy $x \neq a$ illetve $h \neq 0$. Ez úgyis magától értetődő, mert 0-val nem oszthatunk, tehát ezeken a helyeken a differenciahányadosok nincsenek értelmezve.

Példák:

1. Legyen $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény minden a -ra a -ban deriválható, és a deriváltja mindenütt 0. Ugyanis $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$.

2. Legyen $f(x) = x^2$. Ekkor f minden a -ra a -ban deriválható, és a deriváltja:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$$

3. Legyen $f(x) = |x|$. Ekkor a függvény a 0 kivételével mindenütt differenciálható.

$$\text{Legyen } a > 0. \text{ Ekkor } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x_n \rightarrow a} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{x_n \rightarrow a} \frac{|x_n| - |a|}{x_n - a} = \lim_{x_n \rightarrow a} \frac{x_n - a}{x_n - a} = 1.$$

[A $\lim_{x_n \rightarrow a} \frac{|x_n| - |a|}{x_n - a} = \lim_{x_n \rightarrow a} \frac{x_n - a}{x_n - a}$ egyenlőség azért áll fenn, mert ha $x_n \rightarrow a$ és $a > 0$, akkor véges sok kivétellel $x_n > 0$ teljesül, viszont véges sok tag elhagyása nem befolyásolja a határértéket.]

$$\text{Ha } a < 0, \text{ akkor a fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x_n \rightarrow a} \frac{-x_n + a}{x_n - a} = -1.$$

Tehát a függvény $a > 0$ illetve $a < 0$ esetén a -ban deriválható, és a deriváltja az első esetben 1, a másodikban -1 .

$$\text{Ha } a = 0, \text{ akkor } x_n \rightarrow a + 0 \text{ esetén } \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x_n \rightarrow 0+0} \frac{x_n}{x_n} = 1, \quad x_n \rightarrow a - 0 \text{ esetén}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x_n \rightarrow 0-0} \frac{-x_n}{x_n} = -1. \text{ Tehát a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ határérték nem létezik, mert az}$$

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ függvény jobb- és baloldali határértéke nem egyezik meg a 0-ban. Így tehát az

$f(x) = |x|$ függvény a 0-ban nem differenciálható.

Gyakorló feladatok

1. A differenciálhányadosok vizsgálatával döntsük el, hogy az alábbi függvények differenciálhatók-e a megadott pontban!

a) $f(x) = x^2 + 5x, a = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}, a = 0$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, a = -2$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{ha } x < 1 \\ 3x - 1, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}, a = 1$

Jobboldali és baloldali differenciálhányados

A függvények jobb-, illetve baloldali határértékéhez, valamint a jobbról, illetve balról folytonosság definíciójához hasonlóan beszélhetünk jobboldali, illetve baloldali differenciálhányadosról.

Def. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ értelmezve az $[a, a + \omega)$ intervallumon. Az f függvény az a -ban jobbról differenciálható, ha létezik a $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték (a differenciálhányadosok jobboldali határértéke).

Ezt a határértéket az f a -beli jobboldali differenciálhányadosának [deriváltjának] nevezzük. Jelölése: $f'_+(a)$.

Def. Legyen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ értelmezve az $(a - \omega, a]$ intervallumon. Az f függvény az a -ban balról differenciálható, ha létezik a $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték (a differenciahányadosok jobboldali határértéke). Ezt a határértéket az f a -beli baloldali differenciálhányadosának [deriváltjának] nevezzük. Jelölése: $f'_-(a)$.

A függvény-határértékekről mondott korábbi tétel következménye:

Tétel: Legyen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ értelmezve az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumon. Az f differenciálható a -ban akkor és csak akkor, ha f jobbról és balról is differenciálható a -ban és $f'_+(a) = f'_-(a)$

Def. Ha az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ értelmezve van az (a, b) intervallumon és az f differenciálható (a, b) minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy az f differenciálható az (a, b) intervallumon.

Def. Ha az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ értelmezve van az $[a, b]$ intervallumon és az f differenciálható (a, b) minden pontjában, valamint a -ban jobbról, b -ben balról differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f differenciálható az $[a, b]$ intervallumon.

Def. Ha f differenciálható az (a, b) intervallumon, akkor a $g : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f'(x)$ függvényt az f deriváltfüggvényének vagy deriváltjának nevezzük. Jelölése: $f'(x)$ vagy $\frac{df}{dx}$.

Példa:

A korábban látott példák alapján az $f(x) = c$ függvény deriváltfüggvénye az $f'(x) = 0$ függvény, a $g(x) = x^2$ függvény deriváltja a $g'(x) = 2x$ függvény.

A legegyszerűbb elemi függvények deriváltja

A legegyszerűbb elemi függvények deriváltjait az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c, c \in \mathbf{R}$	0	$\cos x$	$-\sin x$
$x^a, a \in \mathbf{R}$	$a \cdot x^{a-1}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Megjegyzés:

A hatványfüggvény deriváltjához elég a bal oldali táblázatrész második sorában álló általános alakot megjegyezni és használni. Ügyelni kell azonban arra, hogy az általános alak esetén szükségszerű, hogy a hatványalap pozitív legyen. Azonban ha olyan gyökfüggvényről van szó, amely a változó negatív értékeire is értelmezve van, akkor a derivált a fenti második táblázat alapján a változó negatív értékeire is létezik, de nem írható fel az általános, törtkitevőjű hatványalakban. Ezért az általános képletet sokan formálisan, azaz úgy használják, hogy átmenetileg áttérnek a törtkitevőjű hatványalakra, ennek segítségével elkészítik a deriváltfüggvényt, majd a törtkitevőjű hatványt visszaalakítják gyökös alakra. Általános szabály ebben az esetben, hogy ahol a deriváltfüggvényre kapott kifejezés értelmezve van, ott a deriváltfüggvény is létezik, és megegyezik a kapott függvénnyel.

A gyakran használt esetekre a hatvány- és gyökfüggvények deriváltját külön összefoglalhatjuk:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n, n \in \mathbf{N}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbf{N}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x}, n \in \mathbf{N}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

II. Műveletek differenciálható függvényekkel.

A differenciálhatóság és a műveletek kapcsolata.

Összeg és különbség deriváltja

Tétel: Legyen f és g differenciálható a -ban. Ekkor $f + g$ is differenciálható a -ban, és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. Ha f és g differenciálható az I intervallumon, akkor $f + g$ is differenciálható itt, és a deriváltfüggvénye $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Tétel: Legyen f és g differenciálható a -ban. Ekkor $f - g$ is differenciálható a -ban, és $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$. Ha f és g differenciálható az I intervallumon, akkor $f - g$ is differenciálható itt, és a deriváltfüggvénye $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Kidolgozott feladat

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^6 + \sin x + 2$ függvény deriváltját az $a = 2$ helyen!

Megoldás:

Mivel $f(x) = g(x) + h(x) + k(x)$, ahol $g(x) = x^6$, $h(x) = \sin x$ és $k(x) = 2$ és g, h, k minden pontban deriválhatóak, ezért f is mindenütt deriválható és $f'(x) = g'(x) + h'(x) + k'(x)$, azaz $f'(x) = 6x^5 + \cos x + 0$. Tehát $f'(2) = 6 \cdot 2^5 + \cos 2 = 192 + \cos 2$.

Szorzat deriváltja

Tétel: Legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor fg is differenciálható a -ban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Ha f és g differenciálható az I intervallumon, akkor fg is differenciálható itt, és a deriváltfüggvénye $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Következmény I.: A fenti tételből $g(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy ha f differenciálható a -ban és $c \in \mathbf{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható a -ban és a deriváltja $(cf)'(a) = cf'(a)$.

Következmény II.: A szorzat deriváltjára vonatkozó tétel első következményéből, illetve az összeg deriváltjára vonatkozó tételből kapjuk, hogy ha $p(x)$ n -edfokú polinomfüggvény, azaz $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, akkor $p(x)$ mindenütt differenciálható, és a deriváltja:

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1.$$

Következmény III: A tétel alkalmazható nemcsak két, hanem több tagból álló szorzat deriválására is. Három függvény esetén például az alábbiakat kapjuk:

Legyen f , g és h differenciálható az a pontban. Ekkor fgh is differenciálható a -ban és

$$\begin{aligned}(fgh)'(a) &= (fg)'(a)h(a) + f(a)g(a)h'(a) = (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))h(a) + f(a)g(a)h'(a) = \\ &= f'(a)g(a)h(a) + f(a)g'(a)h(a) + f(a)g(a)h'(a)\end{aligned}$$

Ennek alapján általánosan is fel tudjuk írni egy k tényezős szorzat deriváltját:

$$(f_1 f_2 \dots f_k)'(a) = f_1'(a) f_2(a) \dots f_k(a) + f_1(a) f_2'(a) \dots f_k(a) + \dots + f_1(a) f_2(a) \dots f_k'(a)$$

Példa:

A szorzat deriváltjára vonatkozó tétel alkalmazásaként elkészíthetjük az $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ függvény deriváltját. Láttuk korábban, hogy ha $f(x) = x$, akkor $f'(x) = 1$. Legyen $f(x) = x^2$. Alkalmazzuk a szorzat deriváltjára vonatkozó tételt! $f'(x) = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x)' = x + x = 2x$. Ezt folytathatjuk is, a fenti k tényezős szorzat deriváltja alapján hasonlóan megkaphatjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Kidolgozott feladatok

2. Határozzuk meg az alábbi szorzatfüggvények deriváltját!

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = (x+3)(x^2+5)$ | b) $g(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2+2x)$ | c) $h(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x$ |
| d) $k(x) = \sin x \cdot (2\cos x+1)$ | e) $n(x) = 2^x \cdot \sin x$ | f) $m(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ |

Megoldás:

- a) $f'(x) = (x+3)'(x^2+5) + (x+3)(x^2+5)' = 1 \cdot (x^2+5) + (x+3) \cdot 2x = 3x^2 + 6x + 5$
- b) $g'(x) = (\sqrt{x})' \cdot (x^2+2x) + \sqrt{x} \cdot (x^2+2x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2+2x) + \sqrt{x} \cdot (2x+2) = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$
- c) $h'(x) = (\sqrt{x})' \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$
- d) $k'(x) = (\sin x)' \cdot (2\cos x+1) + \sin x \cdot (2\cos x+1)' = (\cos x) \cdot (2\cos x+1) + \sin x \cdot (-2\sin x) =$
 $= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + \cos x$
- e) $n'(x) = (2^x)' \cdot \sin x + 2^x \cdot (\sin x)' = \ln 2 \cdot 2^x \cdot \sin x + 2^x \cdot \cos x$
- f) $m'(x) = (x+1)'(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)'(x+3) + (x+1)(x+2)(x+3)' =$
 $= 1 \cdot (x+2)(x+3) + (x+1) \cdot 1 \cdot (x+3) + (x+1)(x+2) \cdot 1 = 3x^2 + 12x + 11$

Hányados deriváltja

Tétel: Ha a g függvény differenciálható a -ban és $g(a) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{g}$ függvény is differenciálható a -ban, és a deriváltja $-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$. Ha a g függvény differenciálható az I intervallumon és itt $g(x) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{g}$ függvény is differenciálható az I intervallumon, és a deriváltfüggvénye $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

Tétel: Ha f és g differenciálható a -ban és $g(a) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható a -ban, és a deriváltja $\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$. Ha az f és g differenciálható az I intervallumon és itt $g(x) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az I intervallumon, és a deriváltfüggvénye:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Kidolgozott feladatok:

3. Mennyi az $f(x) = \frac{x^3 - 1}{3x + 2}$ függvény deriváltja az $a = 1$ helyen?

Megoldás:

Mivel a számláló, $h(x) = x^3 - 1$ és a nevező, $g(x) = 3x + 2$ mindenütt differenciálható és a nevező $x = 1$ esetén nem 0, ezért f is differenciálható az 1-ben. $h'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 3$, ezért a hányados deriváltjára vonatkozó szabály értelmében $f'(1) = \frac{h'(1)g(1) - h(1)g'(1)}{g^2(1)} = \frac{3}{5}$.

4. Legyen $f(x) = \operatorname{tg} x$. Határozzuk meg az f deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Mivel $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, továbbá $\sin x$ és $\cos x$ mindenütt deriválható, ezért f mindenütt deriválható, ahol a nevező nem 0, azaz $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ kivételével mindenütt deriválható. Itt a deriváltja a hányados deriváltjára vonatkozó szabállyal számítható ki:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Gyakorló feladatok:

1. Határozzuk meg az alábbi hányadosfüggvények deriváltfüggvényét! Állapítsuk meg azt a halmazt is, melyen a függvények differenciálhatók!

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x+1}}$

c) $h(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

Összetett függvény deriváltja

Tétel: [Lánc-szabály] Tegyük fel, hogy g differenciálható a -ban, h differenciálható $g(a)$ -ban. Ekkor $f(x) = h(g(x))$ is differenciálható a -ban, és $f'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a)$. Ha g differenciálható az I intervallumon, és h differenciálható g I intervallumhoz tartozó értékkészletén, akkor $f(x) = h(g(x))$ is differenciálható az I intervallumon, és $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Megjegyzés:

A tételt alkalmazhatjuk többszörösen összetett függvényekre is. Természetesen a deriválhatóság feltételét vizsgálni kell, a menetközben kapott deriváltak létezése alapfeltétel.

Kidolgozott feladat:

5. a) Határozzuk meg az $f(x) = \sin(x^3 - 3)$ függvény deriváltját!

- b) Határozzuk meg az $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^4$ függvény deriváltját!

Megoldás:

- a) Mivel $f(x) = h(g(x))$, ahol $h(x) = \sin x$ és $g(x) = x^3 - 3$, és g , illetve h mindenütt differenciálható, ezért f is mindenütt differenciálható és $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = (\cos(x^3 - 3)) \cdot (3x^2)$.
- b) Mivel $f(x) = h(g(x))$, ahol $h(x) = x^4$ és $g(x) = x^2 + 3x + 2$, és g , illetve h mindenütt differenciálható, ezért f is mindenütt differenciálható és

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = (4 \cdot (x^2 + 3x + 2)^3) \cdot (2x + 3)$$

Megjegyzések:

Sokszor nehéz átlátni egy-egy (akár többszörösen) összetett függvény szerkezetét és deriváltjának elkészítését. Az összetett függvényekkel való bánásmód során nagyon fontos, hogy jól ismerjük fel az összetételben szereplő függvényeket, és jól állapítsuk meg, hogy melyik a külső és melyik a belső függvény az összetételben. Fő szabályként azt érdemes megjegyezni, hogy a deriválás során „kívülről befelé” haladunk, és az a függvény van legkívül, amelynek értékét utoljára számítjuk ki. Pl. a $\sin x^2$ függvény esetén a külső függvény a $\sin x$, és a belső az x^2 (mert utoljára a sinus értéket számítjuk ki), de a $\sin^2 x$ függvény esetén a külső függvény az x^2 , és a belső a $\sin x$, mert utoljára négyzetre emelünk. Ennek megfelelően $(\sin x^2)' = \sin x^2 \cdot 2x$, míg $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$.

Gyakorló feladatok

2. A differenciálási szabályok segítségével állapítsuk meg az alábbi függvények deriváltját!

a) $f(x) = (x+1) \cdot (x+2)^2 \cdot (x+3)^3$

b) $g(x) = (1-x) \cdot (1-x^2)^2 \cdot (1-x^3)^3$

c) $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

d) $j(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

3. A differenciálási szabályok segítségével állapítsuk meg az alábbi függvények deriváltját!

a) $f(x) = \cos 2x - 2 \sin x$

b) $g(x) = \sin(\cos^2[\operatorname{tg}^3 x])$

4. A differenciálási szabályok segítségével állapítsuk meg az alábbi függvények deriváltját!

a) $f(x) = \log_2 x + 2^x + \log_2 2^x$

b) $g(x) = \log_5(5^x + 1)$

c) $h(x) = 2 \cdot 3^x + 5^{4x+7} - 2^{x^2+3x+1}$

d) $k(x) = (\log_4 x) \cdot 8^x$

5. A differenciálási szabályok segítségével állapítsuk meg az alábbi függvény deriváltját!

a) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

b) $g(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$

c) $h(x) = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

d) $k(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$

Magasabb rendű deriváltak

Def. Legyen f differenciálható az $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon, legyen itt a deriváltfüggvénye $f'(x)$. Ha $f'(x)$ differenciálható a -ban és itt a deriváltja $(f')'(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f kétszer differenciálható a -ban. Az $(f')'(a)$ számot az f a -beli második deriváltjának nevezzük, és $f''(a)$ -val jelöljük.

Megjegyzés:

Hasonlóan definiálható az a -beli n -edik derivált ($n \in \mathbf{Z}^+$) az $(n-1)$ -edik derivált segítségével [„definíció teljes indukcióval”]. A jelölése: az első, második, illetve harmadik deriváltat rendre $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ -val, az n -edik deriváltat, ha $n \geq 4$, $f^{(n)}(a)$ -val jelöljük.

Def. Legyen H azon valós számok halmaza, melyekben az f függvény kétszer differenciálható. Ekkor a $g: H \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto f''(x)$ függvényt az f második deriváltfüggvényének vagy röviden f második deriváltjának nevezzük, és $f''(x)$ -szel jelöljük.

Megjegyzés:

Hasonlóan definiálható az f függvény n -edik deriváltfüggvénye [n -edik deriváltja].

Példa:

Láttuk már, hogy $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Ebből kapjuk, hogy x^n kétszer is differenciálható minden pontban, és a második deriváltja $(x^n)'' = n(n-1) \cdot x^{n-2}$. Teljes indukcióval belátható, hogy x^n akárhányszor differenciálható, és a k -adik deriváltja:

$$(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}, \text{ ha } k \leq n \text{ és } (x^n)^{(k)} \equiv 0, \text{ ha } k > n.$$

Kidolgozott feladatok:

6. Készítsük el az alábbi függvények második és harmadik deriváltját!

a) $f(x) = \sqrt{x} + x^2$

b) $g(x) = \cos 2x$

c) $h(x) = x \cdot \sin x$

d) $l(x) = \ln x \cdot 2^x$

Megoldás:

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$; $f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' + 2 = \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)' + 2 = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} + 2 = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + 2$;

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = \left(-\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}; \text{ a deriválhatóság az } \mathbf{R}^+ \text{ számhalmazon}$$

áll fenn mindkét deriváltra vonatkozóan.

b) $g'(x) = -2\sin 2x$; $g''(x) = -4\cos 2x$; $g'''(x) = 8\sin 2x$

c) $h'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$;

$$h''(x) = \cos x + (x \cdot \cos x)' = \cos x + 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = 2\cos x - x \cdot \sin x$$

$$h'''(x) = -2\sin x - (x \cdot \sin x)' = -2\sin x - (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) = -3\sin x + x \cdot \cos x$$

d) $l'(x) = \frac{1}{x} \cdot 2^x + \ln x \cdot \ln 2 \cdot 2^x$;

$$l''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \cdot 2^x + \frac{1}{x} \cdot \ln 2 \cdot 2^x\right) + \left(\frac{1}{x} \cdot \ln 2 \cdot 2^x + \ln x \cdot \ln^2 2 \cdot 2^x\right) = -\frac{2^x}{x^2} + \frac{2\ln 2}{x} \cdot 2^x + \ln x \cdot \ln^2 2 \cdot 2^x$$

A harmadik deriválthoz érdemes a második deriváltat szorzattá alakítani:

$$l''(x) = 2^x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2\ln 2}{x} + \ln x \cdot \ln^2 2\right)$$

$$l'''(x) = \ln 2 \cdot 2^x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2\ln 2}{x} + \ln x \cdot \ln^2 2\right) + 2^x \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{2\ln 2}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \ln^2 2\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2^x \cdot \left(-\frac{\ln 2}{x^2} + \frac{2 \ln^2 2}{x} + \ln x \cdot \ln^3 2 + 2 \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{2 \ln 2}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \ln^2 2 \right) = \\
&= 2^x \cdot \left(\ln x \cdot \ln^3 2 + \frac{2}{x^3} - \frac{3 \ln 2}{x^2} + \frac{3 \ln^2 2}{x} \right)
\end{aligned}$$

7. Határozzuk meg a $\sin x$ függvény 2018-adik deriváltját!

Megoldás:

$$(\sin x)' = \cos x; (\sin x)'' = -\sin x; (\sin x)''' = -\cos x; (\sin x)^{(4)} = \sin x$$

Látható, hogy innen előlről kezdődik, tehát a $\sin x$ függvény minden negyedik deriváltja önmaga lesz. Mivel 2016 osztható 4-gyel, ezért a 2016-ik derivált is $\sin x$. A 2018-ik derivált tehát a második deriválttal, azaz $-\sin x$ -szel egyezik meg.

III. Primitív függvény, határozatlan integrál

A deriválás bizonyos értelmű megfordítása során arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott függvény melyik függvény deriváltjaként állítható elő.

Def. Ha F differenciálható az (a,b) -n, és itt $F'(x) = f(x)$, akkor F -et az $f(a,b)$ -hez tartozó primitív függvényének nevezzük.

Def. Ha F differenciálható az $[a,b]$ -n, és itt $F'(x) = f(x)$, akkor F -et az $f[a,b]$ -hez tartozó primitív függvényének nevezzük.

Megjegyzés:

Ha az f függvény esetén egyértelmű, hogy melyik intervallumon teljesül $F'(x) = f(x)$ összefüggés, akkor a mindennapos gyakorlatban F -et röviden f primitív függvényének nevezzük (az intervallum megjelölése nélkül).

Ezek után rögtön a következő kérdések merülhetnek fel:

1. f milyen tulajdonságaiból következik, hogy van primitív függvénye?
2. Ha f -nek több primitív függvénye van, akkor ezek milyen kapcsolatban vannak egymással?

Tétel: Ha f -nek van primitív függvénye $[a,b]$ -n, akkor f rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal, azaz f minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket felvesz az $[a,b]$ intervallumon.

Megjegyzések:

1. Ha f nem rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal egy intervallumon, akkor azon az intervallumon nincs primitív függvénye.
2. A Darboux-tulajdonság szükséges, de nem elégséges feltétel a primitív függvény létezéséhez. Legyen ugyanis a $[-2, 2]$ intervallumon f a következőképpen értelmezve:

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \\ x+2, & \text{ha } -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy f a $[-2, 2]$ intervallumon minden $f(-2)$ és $f(2)$ közé eső értéket felvesz, mert $f(-2) = f(2) = 0$, így itt rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal. Viszont ha lenne olyan F függvény, melyre $F'(x) = f(x)$ a $[-2, 2]$ intervallumon, akkor $F'(x) = f(x)$ teljesülne például a $[-1, 1]$ intervallumon, azonban nyilvánvaló, hogy f itt nem rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal, mert itt $f(-1) = 1$

és $f(1) = -1$ közé eső értékeket egyáltalán nem vesz fel. Tehát f -nek nem létezik primitív függvénye a $[-2, 2]$ intervallumon.

Tétel: Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor $[a, b]$ -n van primitív függvénye.

Megjegyzés: A folytonosság elégséges, de nem szükséges feltétele a primitív függvény létezésének.

Tétel: Legyen F az f függvény primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon. G primitív függvénye f -nek az $[a, b]$ intervallumon akkor és csak akkor, ha van olyan c konstans, hogy az $[a, b]$ intervallumon $G(x) = F(x) + c$.

A tételből látható, hogy f primitív függvényei csak egy konstansban térhetnek el egymástól, tehát ha f egy primitív függvényét meghatározzuk, megkaphatjuk az összes primitív függvényét ennek segítségével.

Def. Az f I intervallumhoz tartozó primitív függvényeinek összességét az f határozatlan integráljának nevezzük, és $\int f(x)dx$ -szel vagy röviden $\int f$ -fel jelöljük.

A továbbiakban azokat a függvényeket, amelynek egy adott I intervallumon létezik primitív függvénye, az adott I intervallumon integrálható függvényeknek fogjuk nevezni.

A határozatlan integrál megadása szigorúan véve az alábbi formában történik:

$$\int f(x)dx = \{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}.$$

Mivel tudjuk, hogy a primitív függvények csak egy c konstansban térnek el egymástól, ezért ezt így is írhatjuk $f(x)$ egy tetszőleges $F(x)$ primitív függvény segítségével:

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbf{R}\}, \text{ röviden } \int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

A kitűzött és gyakorló feladatok megoldásában az egyszerűség kedvéért az utóbbi alakot fogjuk használni, és nem írjuk ki, hogy $c \in \mathbf{R}$.

Megjegyzés:

A „primitív függvény” elnevezés sokakban azt a téves képzetet keltheti, hogy a primitív függvény valamilyen egyszerűsített változata a vizsgált függvénynek. A szó jelentése azonban a pro primo, prima kifejezésekben is szereplő „első, először létező” jelentésű szóra vezethető vissza; primitív függvény egyszerűen annyit tesz: az a függvény, ami először volt, és amiből deriválással („származtatással”) kaptuk az általunk vizsgált függvényt.

A primitív függvény keresését a továbbiakban a határozatlan integrál kiszámításának, röviden integrálásnak is fogjuk nevezni.

Alapintegrálok

Az ún. elemi függvények differenciálási szabályainak ismeretében kapjuk az ún. alapintegrálokat, melyeket az elemi függvények deriváltjaihoz hasonlóan táblázatba foglalhatunk [a táblázatban a primitív függvény mellett fel van tüntetve az az intervallum, melyen a primitív függvény érvényes]. A határozatlan integrálokat minden esetben egy tetszőlegesen választott primitív függvény és egy tetszőleges c konstans (valós szám) összegeként adjuk meg.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, I \subset x^\alpha \text{ értelmezési tartománya}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c, I \subset (-\infty, 0) \text{ vagy } I \subset (0, +\infty)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c, I \subset (-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c, I \subset [-1, 1]$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsh} x + c = \ln \left x + \sqrt{x^2 + 1} \right + c, I \subset (-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\operatorname{arch} x + c = \ln \left x + \sqrt{x^2 - 1} \right + c, I \subset (1, +\infty) \text{ vagy } I \subset (-\infty, -1)$
e^x	$e^x + c, I \subset (-\infty, +\infty)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, I \subset (-\infty, +\infty)$
$\sin x$	$-\cos x + c, I \subset (-\infty, +\infty)$
$\cos x$	$\sin x + c, I \subset (-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c, I \subset \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + c, I \subset (-\infty, +\infty)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + c, I \subset (-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x + c, I \subset (-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x + c, I \subset (-\infty, 0) \text{ vagy } I \subset (0, +\infty)$

IV. Integrálási módszerek

A primitív függvény keresése sok kérdést vet fel. Láthattuk a deriválás kapcsán, hogy viszonylag bonyolult függvényeknek is lehet egyszerű a deriváltja, és viszonylag egyszerű függvényeknek is lehet bonyolult a deriváltja. A primitívfüggvény-keresés során mindenképpen jól kell tudnunk deriválni, jól kell ismernünk a deriválási szabályokat, és sok esetben azt is el kell képzelnünk, hogy milyen típusú függvény deriváltja lehet az a függvény, amelyet éppen vizsgálunk.

A határozatlan integrál keresésének néhány módszerét szeretnénk bemutatni a továbbiakban.

Primitív függvények és műveletek kapcsolata

A deriválási szabályok néhány egyszerű következménye megfogalmazható, amely a segítségünkre van a primitív függvények keresésében.

Tétel: Ha f integrálható az I intervallumon és c tetszőleges valós szám, akkor cf is integrálható az I intervallumon és $\int (cf)(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$.

Tétel: Ha f és g integrálható az I intervallumon, akkor $f + g$ is integrálható az I intervallumon és $\int (f + g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Tétel: Ha f és g integrálható az I intervallumon, akkor $f - g$ is integrálható az I intervallumon és $\int (f - g)(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Sajnos hasonló általános tétel nem mondható ki szorzat- és hányadosfüggvény, illetve összetett függvény integráljára. A későbbiekben azonban látjuk majd, hogy speciális esetekben találhatunk kiutat ebből a szituációból.

Integrálás a vizsgált függvény átalakításával és alapintegrálokra visszavezetéssel

A kidolgozott és gyakorló feladatok megoldásában egyaránt szerepelni fog a már korábban említett „+c”, azaz egy primitív függvényt adunk meg, és a +c jelzi, hogy ehhez tetszőleges konstans adva megkapjuk az összes primitív függvényt.

Kidolgozott feladatok:

1. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $(3-x^2)^3$	b) $\left(\frac{1-x}{x}\right)^2$	c) $\frac{(1-x)^3}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$	d) $\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}$
e) $\frac{x^2}{1+x^2}$	f) $(2^x+3^x)^2$	g) $\operatorname{tg}^2 x$	

Megoldás:

a) Végezzük el a köbre emelést!

$$\int (3-x^2)^3 dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) dx = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + c$$

b) Végezzük el a négyzetre emelést, osszuk le tagonként!

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + c$$

c) Végezzük el a köbre emelést és osszuk le tagonként!

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-x)^3}{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}\right) dx = \\ &= -3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5} \cdot \sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{x^8} + c \end{aligned}$$

d) Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzet van!

$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^4} + c$$

e) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + c$

f) Végezzük el a négyzetre emelést!

$$\int (2^x+3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{1}{\ln 4} \cdot 4^x + \frac{2}{\ln 6} \cdot 6^x + \frac{1}{\ln 9} \cdot 9^x + c$$

$$g) \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

Gyakorló feladatok:

1. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $(1-x)(1-2x)(1-3x)$

b) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

c) $\frac{x^2+3}{x^2-1}$

d) $\frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}$

e) $\frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}$

f) $\operatorname{ctg}^2 x$

Lineáris belső függvénnyel rendelkező összetett függvény határozatlan integrálja

Tétel: Ha f integrálható és $a \neq 0$ és b tetszőleges valós szám, továbbá $\int f(x) \, dx = F(x) + c$ akkor $f(ax+b)$ is integrálható és $\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$.

Megjegyzés: A tétel kimondásakor nem jelöltük meg az integrálhatóság intervallumát. Természetesen, ha f az I intervallumon integrálható, akkor $f(ax+b)$ integrálhatósága olyan intervallumra vonatkozik, hogy $ax+b$ az I intervallumba essen. (I lehet zárt és nyílt intervallum is.)

Kidolgozott feladatok:

2. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $f(x) = (2x-3)^{10}$

b) $g(x) = \sqrt[3]{1-3x}$

c) $\frac{1}{2+3x^2}$

d) $\frac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Megoldás:

a) $\int (2x-3)^{10} \, dx = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x-3)^{11} + c = \frac{1}{22} \cdot (2x-3)^{11} + c$

b) $\int \sqrt[3]{1-3x} \, dx = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt[3]{(1-3x)^4} + c = -\frac{1}{4} \sqrt[3]{(1-3x)^4} + c$

$$c) \int \frac{1}{2+3x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}x + c = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}x + c$$

$$d) \int \frac{1}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} dx = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + c$$

Gyakorló feladatok:

2. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$

b) $\frac{1}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$

$f(g(x)) \cdot g'(x)$ alakú függvények integrálása

Kidolgozott feladatok:

3. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját! A megoldás során alkalmazzuk az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabályt!

a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x^3}$

c) $\frac{x}{3-2x^2}$

d) $\frac{x}{4+x^4}$

e) $\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$

f) $x \cdot e^{-x^2}$

Megoldás:

a) Az integrandus $f' \cdot f^{-\frac{1}{2}}$ alakra hozható: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + c$

b) Az integrandus $f' \cdot f^{\frac{1}{3}}$ alakra hozható:

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^4 + c = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^4 + c$$

c) Az integrandus $f' \cdot \frac{1}{f}$ alakra hozható: $\int \frac{x}{3-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{-4x}{3-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \ln |3-2x^2| + c$

d) Az integrandus $f' \cdot \frac{1}{f^2+1}$ alakra hozható:

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx = \int \frac{x}{4+(x^2)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + c$$

e) A gyök alól x -et kiemelve $f' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}$ alakra hozható:

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} dx = -\int -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} dx = -\arcsin \frac{1}{x} + c.$$

f) Az integrandus $f' \cdot e^f$ alakra hozható: $\int x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int -2x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$

Gyakorló feladatok:

3. Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

b) $\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x}$

c) $\frac{e^x}{2+e^x}$

Trigonometrikus függvények integrálása

Kidolgozott feladatok:

4. Határozzuk meg az alábbi függvény határozatlan integrálját!

a) $\sin^2 x$

b) $\sin 3x \cdot \sin 5x$

c) $\sin^3 x$

d) $\sin^4 x$

e) $\frac{\cos^3 x}{\sin x}$

Megoldás:

a) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$

b) $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c$

c) $\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) dx = \int (\sin x - \sin x \cdot \cos^2 x) dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$

d) Alakítsuk át az integrandust kisebb hatványú kifejezéssé a $\cos 2x$ -re vonatkozó addíciós tétel segítségével!

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \, dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x + 1}{8} \right) \, dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{8}x + c = \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{e) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \, dx &= \int \frac{\cos x \cdot (1 - \sin^2 x)}{\sin x} \, dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \sin x \cos x \right) \, dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2}\sin 2x \right) \, dx = \\ &= \ln |\sin x| + \frac{1}{4}\cos 2x + c\end{aligned}$$

5. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{1}{1 + \cos x}$

b) $\sin^5 x \cdot \cos x$

c) $\operatorname{tg} x$

d) $\frac{1}{\sin^2 x \cdot \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$

Megoldás:

$$\begin{aligned}\text{a) } \int \frac{1}{1 + \cos x} \, dx &= \int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \, dx = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) \, dx = \\ &= -\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} + c. \quad (\text{Az utolsó integrandus második tagja } f' \cdot f^{-2} \text{ alakú})\end{aligned}$$

b) Az integrandus $f' \cdot f^5$ alakú: $\int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{6}\sin^6 x + c$

c) Az integrandus $\frac{f'}{f}$ alakra hozható: $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c$

d) Az integrandus $\frac{f'}{\sqrt[4]{f}}$ alakra hozható:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}} \, dx = -\int -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}} \, dx = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + c$$

Gyakorló feladatok:

4. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\cos^2 x$

b) $\cos^3 x$

c) $\cos^4 x$

d) $\operatorname{ctg}^2 x$

e) $\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

f) $\operatorname{ctg} x$

Racionális törtfüggvények integrálása

Kidolgozott feladatok:

6. Keressük meg az $\frac{1}{x^2 + x - 2}$ függvény határozatlan integrálját a $[2, \infty)$ intervallumon!

[az egyszerűség kedvéért választottuk pont ezt az intervallumot; máshol a módszer hasonlóan működik]

Megoldás:

A nevező szorzattá alakítható: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. A nevező szorzatalakját felhasználva a törtet két tört összegére tudjuk bontani:

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} \right)$$

$$\text{Tehát } \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln(x - 1) - \frac{1}{3} \ln(x + 2) + c.$$

Hasonlóan kaphatjuk meg olyan racionális törtfüggvények határozatlan integrálját, melyek nevezője másodfokú és két valós gyöke van, a számlálóban pedig egy konstans áll. [A két valós gyök esetébe a kettős gyököt is beleértjük.]

7. Keressük meg a $\frac{2x + 5}{x^2 + x - 2}$ függvény határozatlan integrálját a $[2, \infty)$ intervallumon!

Megoldás:

Írjuk fel a törtet két tört összegeként:

$$\frac{2x + 5}{x^2 + x - 2} = \frac{2x + 5}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{2(x + 2) + 1}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x + 2)(x - 1)}$$

Az előzőekben már láttuk, hogy

$$\int \frac{1}{(x + 2)(x - 1)} dx = \frac{1}{3} \ln(x - 1) - \frac{1}{3} \ln(x + 2) + c \text{ és } \int \frac{2}{(x - 1)} dx = 2 \ln(x - 1) + c.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2x + 5}{x^2 + x - 2} dx = 2 \ln(x - 1) + \frac{1}{3} \ln(x - 1) - \frac{1}{3} \ln(x + 2) + c = \frac{7}{3} \ln(x - 1) - \frac{1}{3} \ln(x + 2) + c$$

Hasonlóan kaphatjuk meg olyan racionális törtfüggvények határozatlan integrálját, melyek nevezője két valós gyökkel rendelkező másodfokú, a nevezője pedig első fokú polinom. [A két valós gyök esetébe a kettős gyököt is beleértjük.]

8. Keressük meg a $\frac{x+2}{x^2+x+1}$ függvény határozatlan integrálját!

Megoldás:

A nevezőnek nincs valós gyöke, ebben az esetben tehát nem működik az előzőekben alkalmazott módszer. Alakítsuk át úgy a törtet, hogy a számlálóban a nevező deriváltja szerepeljen!

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1+3}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1) + c$.

Meg kell tehát határozni $\frac{1}{x^2+x+1}$ határozatlan integrálját. Ehhez alakítsuk át a törtet!

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\frac{4}{3} \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

Tehát $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx$. Az integrandus lineáris belső függvénnyel rendel-

kező összetett függvény, a belső függvény $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ennek eredményeképpen azt kapjuk, hogy

$$\frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \cdot \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Tehát a végeredmény: $\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \cdot \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$.

Hasonlóan lehet kiszámítani olyan racionális törtfüggvény határozatlan integrálját, melynek nevezőjében olyan másodfokú polinom áll, melynek nincs valós gyöke, és a számláló első vagy másodfokú polinom.

9. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{1}{2-3x^2}$

b) $\frac{x^3}{x^8-2}$

c) $\frac{x^2}{1+x}$

d) $\frac{(4-x)^2}{4-x^2}$

Megoldás:

a) Parciális törtekre bontással:

$$\int \frac{1}{2-3x^2} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)(\sqrt{2}+\sqrt{3}x)} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \ln|\sqrt{2} - \sqrt{3}x| + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \ln|\sqrt{2} + \sqrt{3}x| \right) + c$$

- b) A nevezőt parciális törtekre bontjuk úgy, hogy a számlálóban a nevezők deriváltja jelenhessen meg!

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^8 - 2} dx &= \int \frac{x^3}{(x^4 - \sqrt{2})(x^4 + \sqrt{2})} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{x^3}{x^4 - \sqrt{2}} - \frac{x^3}{x^4 + \sqrt{2}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int \left(\frac{4x^3}{x^4 - \sqrt{2}} - \frac{4x^3}{x^4 + \sqrt{2}} \right) dx = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\ln|x^4 - \sqrt{2}| - \ln|x^4 + \sqrt{2}| \right) + c \end{aligned}$$

- c) Átalakítással vagy polinomosztással redukálhatjuk a számlálót:

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + c$$

- d) A számlálót négyzetre emelés után polinomosztással redukáljuk, majd a maradék tagot parciális törtekre bontjuk:

$$\begin{aligned} \int \frac{(4-x)^2}{4-x^2} dx &= \int \frac{x^2 - 8x + 16}{4-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{-8x+20}{(2-x)(2+x)} \right) dx = \int \left(-1 + \frac{1}{2-x} + \frac{9}{2+x} \right) dx = \\ &= -x - \ln|x-2| + \ln|x+2| + c \end{aligned}$$

A $\frac{-8x+20}{(2-x)(2+x)}$ kifejezés parciális törtekre bontásának menete:

$$\text{Írjuk fel } \frac{-8x+20}{(2-x)(2+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x} = \frac{A(2+x) + B(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{(A-B)x + 2A+2B}{(2-x)(2+x)} \text{ alakban.}$$

Ekkor a számlálónak azonosnak kell lenniük, azaz $A-B=-8$ és $2A+2B=20$. A kapott egyenletrendszert megoldva $A=1$ és $B=9$ adódik.

Gyakorló feladatok

5. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{x^3}{3+x}$

b) $\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$

c) $\frac{1}{(x-1)(x+3)}$

d) $\frac{1}{(x^2+1) \cdot (x^2+2)}$

A parciális integrálás módszere

Tétel: [Parciális integrálás szabálya] Ha f és g differenciálható az I intervallumon, és itt fg' primitív függvénye létezik, akkor $f'g$ primitív függvénye is létezik és $\int f'g = fg - \int fg'$.

Kidolgozott feladatok:

10. Határozzuk meg $x \cdot \sin x$ határozatlan integrálját!

Megoldás:

Legyen $f(x) = -\cos x$ és $g(x) = x$. Ekkor $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 1$, tehát a fenti jelölésekkel $\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c$.

11. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $x \cdot e^{-x}$

b) $x^2 \cdot e^{-2x}$

c) $\ln x$

d) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

Megoldás:

a) A parciális integrálás módszerével: $f' = e^{-x}$, $f = -e^{-x}$, $g = x$, $g' = 1$

$$\int x \cdot e^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

b) A parciális integrálás módszerével: $f' = e^{-2x}$, $f = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $g = x^2$, $g' = 2x$

$$\int x^2 \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx$$

Ez utóbbit folytatva a parciális integrálás módszerével: $f' = e^{-2x}$, $f = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $g = x$, $g' = 1$

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x e^{-2x} + \int \frac{1}{2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c$$

Ezt visszaírva a korábbi kifejezésbe, a végeredmény: $-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c$

c) A parciális integrálás módszerével: $f' = 1$, $f = x$, $g = \ln x$, $g' = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

d) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1}{x^2} (\ln x)^2 dx$ A parciális integrálás módszerével:

$$f' = \frac{1}{x^2}, f = -\frac{1}{x}, g = \ln^2 x, g' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x^2} (\ln x)^2 dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x + 2 \int \frac{1}{x^2} \ln x dx$$

Ez utóbbit folytatva a parciális integrálás módszerével:

$$f' = \frac{1}{x^2}, f = -\frac{1}{x}, g = \ln x, g' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$$

Ezt visszaírva a korábbi kifejezésbe, a végeredmény: $-\frac{1}{x} \ln^2 x - \frac{2}{x} \ln x - \frac{2}{x} + c$

12. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $x \cos x$

b) $x^2 \cdot \sin 2x$

c) $\arctg x$

d) $x \cdot \arctg x$

Megoldás:

a) A parciális integrálás módszerével: $f' = \cos x, f = \sin x, g = x, g' = 1$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

b) A parciális integrálás módszerével: $f' = \sin 2x, f = -\frac{\cos 2x}{2}, g = x^2, g' = 2x$

$$\int x^2 \cdot \sin 2x dx = -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \int x \cos 2x dx$$

Ez utóbbit folytatva a parciális integrálás módszerével: $f' = \cos 2x, f = \frac{\sin 2x}{2}, g = x, g' = 1$

$$\int x \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} + c$$

Ezt visszaírva a korábbi kifejezésbe, a végeredmény: $-\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} + c$

c) A parciális integrálás módszerével: $f' = 1, f = x, g = \arctg x, g' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \arctg x dx = \int 1 \cdot \arctg x dx = x \cdot \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

d) A parciális integrálás módszerével: $f' = x, f = \frac{x^2}{2}, g = \arctg x, g' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}\int x \cdot \arctan x \, dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + c\end{aligned}$$

Gyakorló feladatok:

6. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $x^3 \cdot e^{-x^2}$

b) $x \cdot \ln x$

c) $x^2 \cdot \ln x$

d) $\sqrt{x} \cdot \ln^2 x$

Integrálás helyettesítéssel

Tétel: [Helyettesítéssel való integrálás módszere] Ha $g(x)$ differenciálható az I intervallumon, $f(x)$ primitív függvénye létezik $g(I)$ -n és ez $F(x) + c$, akkor $f(g(x)) \cdot g'(x)$ primitív függvénye is létezik I -n és $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$.

Megjegyzés: A tételt kétféle módon használhatjuk fel. Egyszer úgy, hogy valamely f függvény primitív függvényét keresve egy olyan g függvényt keresünk, melyre az $f(g(x)) \cdot g'(x)$ primitív függvénye könnyen megadható, és ebbe g inverzét írva megkapjuk a keresett, f -hez tartozó primitív függvényt. Másodszor pedig úgy, hogy adott valamely f függvény, melynek ismert a primitív függvénye, és az $f(g(x)) \cdot g'(x)$ függvény primitív függvényét keressük.

Kidolgozott feladatok:

13. Határozzuk meg $\sqrt{1-x^2}$ primitív függvényét a $[0, 1]$ intervallumon!

Megoldás:

Legyen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ és $g(x) = \sin x$ [$g(x)$ a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon változik, ha $f(x)$ a $[0, 1]$

intervallumon]. Ekkor $f(g(x)) \cdot g'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \cos x = \cos^2 x$.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c = \frac{x}{2} + \frac{2 \sin x \sqrt{1-\sin^2 x}}{4} + c = F(g(x)) + c$$

Ahhoz, hogy f primitív függvényét megkapjuk, az $F(g(x))$ -be $g^{-1}(x)$ -et, azaz jelen esetben x helyébe $\arcsin x$ -et kell írunk. Ekkor az $F(x) = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$ függvényhez jutunk.

Megjegyzés: A szabály látszólag bonyolult, nem túlzottan követhető. Viszont a módszer egyszerűsíthető bizonyos technikai trükkökkel, melynek végén a helyes eredményt kapjuk. [Ez az ún. „fizikus módszer”, mert a fizikusok a gyakorlati számítások során ezt alkalmazzák.] Lássuk tehát, hogyan lehet egyszerűsíteni a számolást!

$\int \sqrt{1-x^2} dx$ értékét kell kiszámítanunk. Vezessünk be új változót, $x = \sin t$ helyettesítéssel. Ekkor mindkét oldalt „differentiálva” a $\frac{dx}{dt} = \cos t$ egyenlőséget kapjuk, az egyenlőség mindkét oldalát dt -vel „megszorozva” $dx = \cos t dt$. Ezt visszairjuk x , illetve dx helyébe, és ekkor az alábbi formát kapjuk:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{2 \sin t \sqrt{1-\sin^2 t}}{4} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

Látható tehát, hogy egyrészt az új változó bevezetésével sokkal áttekinthetőbbé válik a számolás, másrészt az alkalmazott technika jobban követhetővé teszi, hogy az egyes kifejezések hogyan változnak a számolás során, illetve ennek segítségével állapíthatjuk meg, hogy egyáltalán mit is kell csinálni.

Nagyon fontos azonban megjegyezni, hogy ez itt pusztán szimbolikus számítási módszer, a $\frac{dx}{dt}$ függvény dt -vel való „megszorzásának” illetve a dt -vel való „egyszerűsítésnek” konkrét matematikai jelentése nincs. Az egyszerűsége és áttekinthetősége azonban amellet szól, hogy alkalmazzuk, és használjuk a középiskolás feladatmegoldás esetén is. Az alkalmazása során azonban mindig hangsúlyozni kell a szimbolikus jellegét, csakúgy, mint például a „végtelen” szimbólumának bevezetésekor.

14. Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrált!

$$\int (x \cdot \sqrt{2-5x}) dx$$

Megoldás:

Alakítsuk át $\sqrt{2-5x} = y$ $\left(x = \frac{2-y^2}{5}, dx = -\frac{2}{5} y dy \right)$ helyettesítéssel:

$$\int x \cdot \sqrt{2-5x} dx = \frac{2}{25} \int (y^4 - 2y^2) dy = \frac{2}{125} y^5 - \frac{4}{75} y^3 + c = \frac{2}{125} \sqrt{(2-5x)^5} - \frac{4}{75} \sqrt{(2-5x)^3} + c$$

15. Keressük meg az $\frac{e^x - e^{2x}}{1 - e^{2x}}$ függvény határozatlan integrálját a $(0, \infty)$ intervallumon!

Megoldás:

Helyettesítsünk $t = e^x$ -et! Ekkor $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t} dt$.

$$\int \frac{e^x - e^{2x}}{1 - e^{2x}} dx = \int \frac{t - t^2}{1 - t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t(1-t)}{(1-t)(1+t)} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t) + c = \ln(1+e^x) + c$$

Megjegyzés: Ha e^x racionális törtfüggvényét kell integrálni, akkor a $t = e^x$ helyettesítés racionális törtfüggvény integrálására vezet.

Gyakorló feladatok:

7. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}$

b) $x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}$

c) $x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}$

d) $x^3 \cdot (1-5x^2)^{10}$

A gyakorló feladatok megoldása

Az I. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása:

1. A differenciahányadosok vizsgálatával döntsük el, hogy az alábbi függvények differenciálhatók-e a megadott pontban!

a) $f(x) = x^2 + 5x, a = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}, a = 0$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, a = -2$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{ha } x < 1 \\ 3x - 1, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}, a = 1$

Megoldás:

a) $\frac{x^2 + 5x - 4 - 10}{x - 2} = \frac{x^2 - 4 + 5x - 10}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2) + 5(x-2)}{x-2} = x + 2 + 5 = x + 7$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 7) = 9$. Tehát f differenciálható a 2-ben, és $f'(2) = 9$.

b) $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{-3}{-1}}{x+2} = \frac{\frac{x-1-3(x+1)}{(x+2)(x+1)}}{x+2} = \frac{-2x-4}{(x+2)(x+1)} = \frac{-2}{x+1}$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2}{x + 1} = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} 3 = 3$$

Mivel a jobb- és baloldali differenciálhányadosok megegyeznek, a függvény differenciálható az 1-ben, és $f'(1) = 3$.

A II. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Határozzuk meg az alábbi hányadosfüggvények deriváltfüggvényét! Állapítsuk meg azt a halmazt is, melyen a függvények differenciálhatók!

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$b) g(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x} + 1}$$

$$c) h(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

Megoldás:

- a) Mivel a számláló és a nevező mindenütt értelmezve van, és a teljes értelmezési tartományán deriválható, továbbá a nevezőben levő függvény mindig pozitív, ezért a hányadosfüggvény mindenütt deriválható, és deriváltja

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1) \cdot 2x - 2x \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

- b) A hányadosfüggvény értelmezési tartománya a négyzetgyök miatt: $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^-$. A számláló mindenütt, a nevező a $\mathbf{R}^+$ halmazon deriválható. A nevező ezen a halmazon pozitív, ezért a hányadosfüggvény itt mindenhol deriválható.

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1) \cdot (x^2 + 2x + 3)' - (\sqrt{x} + 1)' \cdot (x^2 + 2x + 3)}{(\sqrt{x} + 1)^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 1) \cdot (2x + 2) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2 + 2x + 3)}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{3x^2 + 4x\sqrt{x} + 2x + 4\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$$

- c) A számláló mindenütt pozitív és deriválható, a nevező mindenütt deriválható, de 2 és 1 zérushelyei, vagyis itt a hányadosfüggvény nincs értelmezve, emiatt a 2-nél és az 1-nél nem is deriválható. Mindenhol máshol viszont deriválható, és a deriváltja:

$$h'(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3)' - (x^2 - 3x + 2)' \cdot (x^2 - 2x + 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot (2x - 2) - (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

2. A differenciálási szabályok segítségével állapítsuk meg az alábbi függvények deriváltját!

a) $f(x) = (x+1) \cdot (x+2)^2 \cdot (x+3)^3$

b) $g(x) = (1-x) \cdot (1-x^2)^2 \cdot (1-x^3)^3$

c) $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

d) $j(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

Megoldás:

a) Használjuk a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó összefüggést!

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'[(x+2)^2(x+3)^3] + (x+1)[(x+2)^2(x+3)^3]' = \\ &= (x+2)^2(x+3)^3 + (x+1)[2(x+2)(x+3)^3 + 3(x+2)^2(x+3)^2] = \\ &= (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3 + 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 \end{aligned}$$

b) Használjuk a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó összefüggést!

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1-x)'[(1-x^2)^2(1-x^3)^3] + (1-x)[(1-x^2)^2(1-x^3)^3]' = \\ &= -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 + (1-x)[2(1-x^2)(-2x)(1-x^3)^3 + (1-x^2)^2 \cdot 3(1-x^3)^2(-3x^2)] = \\ &= -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 - 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3 - 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2 \end{aligned}$$

c) Használjuk az összetett függvény deriváltjára vonatkozó összefüggést!

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[\left(\left(x^{\frac{1}{2}} + x \right)^{\frac{1}{2}} + x \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \left[\left(x^{\frac{1}{2}} + x \right)^{\frac{1}{2}} + x \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(x^{\frac{1}{2}} + x \right)^{\frac{1}{2}} + x \right]' = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(x^{\frac{1}{2}} + x \right)^{\frac{1}{2}} + x \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(x^{\frac{1}{2}} + x \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} + x \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(x^{\frac{1}{2}} + x \right)^{\frac{1}{2}} + x \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(x^{\frac{1}{2}} + x \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \right) \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad j'(x) &= \frac{(1+x-x^2)' \cdot (1-x+x^2) - (1+x-x^2) \cdot (1-x+x^2)'}{(1-x+x^2)^2} = \\ &= \frac{(1-2x) \cdot (1-x+x^2) - (1+x-x^2) \cdot (-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2} \end{aligned}$$

3. A differenciálási szabályok segítségével állapítsuk meg az alábbi függvények deriváltját!

a) $f(x) = \cos 2x - 2 \sin x$

b) $g(x) = \sin(\cos^2[\operatorname{tg}^3 x])$

Megoldás:

a) $f'(x) = -2 \sin 2x - 2 \cos x = -4 \sin x \cos x - 2 \cos x = -2 \cos x (2 \sin x + 1)$

b)
$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(\cos^2[\operatorname{tg}^3 x]) \cdot (\cos^2[\operatorname{tg}^3 x])' = \cos(\cos^2[\operatorname{tg}^3 x]) \cdot 2 \cos[\operatorname{tg}^3 x] \cdot (\cos[\operatorname{tg}^3 x])' = \\ &= \cos(\cos^2[\operatorname{tg}^3 x]) \cdot 2 \cos[\operatorname{tg}^3 x] \cdot (-\sin[\operatorname{tg}^3 x]) \cdot [\operatorname{tg}^3 x]' = \\ &= \cos(\cos^2[\operatorname{tg}^3 x]) \cdot 2 \cos[\operatorname{tg}^3 x] \cdot (-\sin[\operatorname{tg}^3 x]) \cdot 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -3 \cos(\cos^2[\operatorname{tg}^3 x]) \cdot (\sin[2 \operatorname{tg}^3 x]) \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \end{aligned}$$

4. A differenciálási szabályok segítségével állapítsuk meg az alábbi függvények deriváltját!

a) $f(x) = \log_2 x + 2^x + \log_2 2^x$

b) $g(x) = \log_5(5^x + 1)$

c) $h(x) = 2 \cdot 3^x + 5^{4x+7} - 2^{x^2+3x+1}$

d) $k(x) = (\log_4 x) \cdot 8^x$

Megoldás:

a) $f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} + \ln 2 \cdot 2^x + 1$ (az utolsó tag esetén a $\log_2 2^x = x$ átalakítást használva, vagy az összetett függvény deriváltjával)

b) $g'(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{5^x + 1} \cdot (5^x + 1)' = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{5^x + 1} \cdot \ln 5 \cdot 5^x = \frac{5^x}{5^x + 1}$

c)
$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \cdot \ln 3 \cdot 3^x + \ln 5 \cdot 5^{4x+7} \cdot (4x+7)' - \ln 2 \cdot 2^{x^2+3x+1} \cdot (x^2 + 3x + 1)' = \\ &= 2 \ln 3 \cdot 3^x + 4 \ln 5 \cdot 5^{4x+7} - \ln 2 \cdot 2^{x^2+3x+1} \cdot (2x+3) \end{aligned}$$

d) $k'(x) = \left(\frac{1}{\ln 4} \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot 8^x + (\log_4 x) \cdot \ln 8 \cdot 8^x$

5. A differenciálási szabályok segítségével állapítsuk meg az alábbi függvények deriváltját!

a) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

b) $g(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$

c) $h(x) = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

d) $k(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$

Megoldás:

a) $f'(x) = \frac{(\ln[\ln x])'}{\ln[\ln x]} = \frac{1}{\ln[\ln x]} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln[\ln x] \cdot \ln x \cdot x}$

$$\begin{aligned} \text{b) } g'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \cdot (1+\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h'(x) &= \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \\ &= -\frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2x\sqrt{(x-1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } k'(x) &= \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot \left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot \left(e^x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right) = \\ &= \frac{e^x}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot \frac{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \end{aligned}$$

IV. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (1-x)(1-2x)(1-3x) & \text{b) } \frac{x+1}{\sqrt{x}} & \text{c) } \frac{x^2+3}{x^2-1} \\ \text{d) } \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} & \text{e) } \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} & \end{array}$$

Megoldás:

a) Végezzük el a beszorzást!

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx = \int (1-6x+11x^2-6x^3) dx = x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+c$$

b) Osszuk le tagonként!

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$$

$$\text{c) } \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1} \right) dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx = x + 2 \ln |x-1| - 2 \ln |1+x| + c$$

d) Osszunk le tagonként!

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int \frac{2 \cdot 2^x - \frac{1}{5} \cdot 5^x}{10^x} dx = \int \left(2 \cdot 5^{-x} - \frac{1}{5} \cdot 2^{-x} \right) dx = -\frac{2}{\ln 5} \cdot 5^{-x} - \frac{1}{5 \ln 2} \cdot 2^{-x} + c$$

e) Alkalmazzuk az $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ algebrai azonosságot!

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + c$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$

b) $\frac{1}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$

Megoldás:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} dx = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \sqrt{2-5x} + c = -\frac{2}{5} \cdot \sqrt{2-5x} + c$

b) $\int \frac{1}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} dx = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot (5x-2)^{-\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + c$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

b) $\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x}$

c) $\frac{e^x}{2+e^x}$

Megoldás:

a) Az integrandus $f' \cdot f^{-2}$ alakra hozható: $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + c$

b) Az integrandus $f' \cdot \sin f$ alakra hozható: $\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} dx = -\int -\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x^2} + c$

c) Az integrandus $\frac{f'}{f}$ alakú: $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx = \ln(2+e^x) + c$

4. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\cos^2 x$

b) $\cos^3 x$

c) $\cos^4 x$

d) $\operatorname{ctg}^2 x$

e) $\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

f) $\operatorname{ctg} x$

Megoldás:

a) $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

$$b) \int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx = \int (\cos x - \cos x \cdot \sin^2 x) \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

c) Alakítsuk át az integrandust kisebb hatványú kifejezéssé a $\cos 2x$ -re vonatkozó addíciós tétel segítségével!

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \int \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \, dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x + 1}{8} \right) \, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{8}x + c = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \end{aligned}$$

$$d) \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c$$

$$e) \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c$$

$$f) \text{ Az integrandus } \frac{f'}{f} \text{ alakú: } \int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c$$

5. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

$$a) \frac{x^3}{3+x}$$

$$b) \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$$

$$c) \frac{1}{(x-1)(x+3)}$$

$$d) \frac{1}{(x^2+1) \cdot (x^2+2)}$$

Megoldás:

a) Átalakítással vagy polinomosztással redukálhatjuk a számlálót:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{3+x} \, dx &= \int \frac{x^3 + 27 - 27}{x+3} \, dx = \int \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9) - 27}{x+3} \, dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3} \right) \, dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27 \ln |x+3| + c \end{aligned}$$

b) A számlálóból leválasztjuk a nevezőt a négyzetre emelés után, a maradék pedig $f' \cdot \frac{1}{f}$ alakú:

$$\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} \, dx = \int \left(1 + \frac{2x}{1+x^2} \right) \, dx = x + \ln(1+x^2) + c$$

c) Bontsuk parciális törtekre:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)} \, dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) \, dx = \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln |x+3| + c$$

d) Bontsuk parciális törtekre:

$$\int \frac{1}{(x^2+1) \cdot (x^2+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2+1} \right) dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2}x) + c$$

6. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $x^3 \cdot e^{-x^2}$

b) $x \cdot \ln x$

c) $x^2 \cdot \ln x$

d) $\sqrt{x} \cdot \ln^2 x$

Megoldás:

a) A parciális integrálás módszerével: $f' = x \cdot e^{-x^2}$, $f = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, $g = x^2$, $g' = 2x$

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} dx = \int x^2 \cdot x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

b) A parciális integrálás módszerével: $f' = x$, $f = \frac{x^2}{2}$, $g = \ln x$, $g' = \frac{1}{x}$

$$\int x \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

c) A parciális integrálás módszerével: $f' = x^2$, $f = \frac{x^3}{3}$, $g = \ln x$, $g' = \frac{1}{x}$

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

d) A parciális integrálás módszerével:

$$f' = \sqrt{x}, f = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, g = \ln^2 x, g' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \ln^2 x - \frac{4}{3} \int \sqrt{x} \ln x dx$$

Ez utóbbit folytatva a parciális integrálás módszerével:

$$f' = \sqrt{x}, f = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, g = \ln x, g' = \frac{1}{x}$$

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \ln x - \frac{2}{3} \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c$$

Ezt visszaírva a korábbi kifejezésbe, a végeredmény: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} \ln^2 x - \frac{8}{9}\sqrt{x^3} \ln x - \frac{16}{27}\sqrt{x^3} + c$

7. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}$

b) $x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}$

c) $x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}$

d) $x^3 \cdot (1-5x^2)^{10}$

Megoldás:

a) Alakítsuk át az integrandust a $\sqrt[3]{1-3x} = y \left(x = \frac{1-y^3}{3}, dx = -y^2 dy \right)$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}} dx = \frac{1}{3} \int (y^4 - y) dy = \frac{1}{15} y^5 - \frac{1}{6} y^2 + c = \frac{1}{15} \sqrt[3]{(1-3x)^5} - \frac{1}{6} \sqrt[3]{(1-3x)^2} + c$$

b) Alakítsuk át $\sqrt[3]{1+x^2} = y \left(x = \sqrt{y^3-1}, dx = \frac{3y^2}{2\sqrt{y^3-1}} dy \right)$ helyettesítéssel:

$$\int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx = \frac{3}{2} \int (y^6 - y^3) dy = \frac{3}{14} y^7 - \frac{3}{8} y^4 + c = \frac{3}{14} \sqrt[3]{(1+x^2)^7} - \frac{3}{8} \sqrt[3]{(1+x^2)^4} + c$$

c) Alakítsuk át az integrandust a $\sqrt[3]{1-x} = y \left(x = 1-y^3, dx = -3y^2 dy \right)$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x} dx &= \int (-3y^9 + 6y^6 - 3y^3) dy = -\frac{3}{10} y^{10} + \frac{6}{7} y^7 - \frac{3}{4} y^4 + c = \\ &= -\frac{3}{10} (\sqrt[3]{1-x})^{10} + \frac{6}{7} (\sqrt[3]{1-x})^7 - \frac{3}{4} (\sqrt[3]{1-x})^4 + c \end{aligned}$$

d) $1-5x^2 = y \left(x = \sqrt{\frac{1-y}{5}}, dx = -\frac{1}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{1-y}} dy \right)$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot (1-5x^2)^{10} dx &= \frac{1}{50} \int (y^{11} - y^{10}) dy = \frac{1}{600} \cdot y^{12} - \frac{1}{550} \cdot y^{11} + c = \\ &= \frac{1}{600} \cdot (1-5x^2)^{12} - \frac{1}{550} \cdot (1-5x^2)^{11} + c \end{aligned}$$