

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: 2017. november 24. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Matematika szakkör a 9. évfolyamon

Hogyan válogassunk feladatokat egy szakkörre?

Szakkörre azok a tanulók járnak, akik tehetségesebbek, érdeklődőbbek az átlagnál. A szakkört nem kötelező választani, szabad döntés hozza erre a foglalkozásra a gyerekeket. Ez a két tény befolyásolja a feladatsorok összeállítását:

1. A Középiskolai Matematikai Lapok matematika feladataiból válogathatunk. Ösztönözzük a pontversenyben való részvételt.

A www.komal.hu honlapon ismerkedhetünk a lappal. A KöMal történetéről rövid ismertető olvasható a honlap ezen oldalán: <https://www.komal.hu/info/miazakomal.h.shtml>. A pontversenybe digitálisan lehet benevezni.

A kilencedikes tanulókat a K és a C feladatok beküldésére buzdítuk. Természetesen a B feladatokkal is foglalkozhatnak, de a K és B pontversenyben egyszerre nem vehetnek részt. Az A feladatok pedig csak a legelszántabbaknak valók.

Foglalkozunk a beküldött dolgozatok formai követelményeivel is. Beszéljünk az internetes munkafüzetről.

Megemlíthetjük a TeX matematikai szövegszerkesztőt. Egy „minitanfolyam” itt nézhető meg: <https://www.komal.hu/munkafuzet/munkafuzet.cgi?a=tk>.

Korábbi években ennek a korosztálynak **Gyakorlatok** néven tűzött ki feladatokat a KöMal. Sok érdekes, nem is olyan nehéz feladat van ezek között, hasznos ezekből is válogatni.

2. Készüljünk az adott korosztály versenyekre.

A versenyeket három típusba sorolhatjuk:

- Arany Dániel Matematikaverseny egyéni verseny. A verseny három fordulójában kitűzött feladatok megoldását szövegesen indokolni kell. Arra szoktatja a tanulókat, hogy nem elég ráérezni a megoldásra, következetes logikával indokolni is kell minden gondolatot.
- Egyéni tesztversenyek. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny kétfordulós, a Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny egyfordulós. Ezeken a versenyeken a könnyebb feladatoktól a nehezebb feladatokig halad a feladatsor, így több feladatban az a tanuló is sikeres lesz, aki nem feltétlenül nagyon jó matematikából, de érdeklődik a tantárgy iránt.
- Csapatversenyek. Ilyen például a Bolyai Matematika Csapatverseny, ahol 13 tesztfeladatot és egy, a megoldás indoklását is kérő feladatot kell megoldani. A megadott válaszlehetőségek között több jó is lehet. Ez a verseny a közösségépítés terepe is, hiszen a közös munka szükséges ahhoz, hogy az adott időben mindegyik feladattal érdemben lehessen foglalkozni.

3. A tanórai anyagot mélyebb szinten, nehezebb feladatokon keresztül közelíthetjük meg.

Mind a tankönyvekben, mind a feladatgyűjteményekben vannak olyan feladatok, amelyek a heti 3-4 órában nem tárgyalhatók. A szakkör ezekre a feladatokra is lehetőséget ad. Az adott témában válogathatunk régebbi versenyfeladatokat, érettségi feladatokat is.

4. Legyenek ünnepi alkalmak játékos feladatokkal, logikai problémákkal.

Ezek az alkalmak lazíthatunk az indoklás szigorúságán, elfogadhatjuk a megérzésből ötleteket.

5. Ismerkedhetünk a matematikai szakirodalommal, feladatgyűjteményekkel.

Vannak olyan kiadványok, amelyek a versenyek feladatait és megoldásait tartalmazzák, például Zrínyi Ilona Matematikaverseny, Bolyai Matematika Csapatverseny. Korábbi években jelentek meg egy-egy témakört feldolgozó „szakköri füzetek” is. Érdekes ezeket akár könyvtárból is előkeresni. Az 5. feladatsor hét különböző könyvből tartalmaz válogatást egy kötetlenebb foglalkozásra.

6. A tanulók tudásához illesszük a válogatásunkat. A leggyengébb résztvevőnek is legyen megoldható feladat a foglalkozáson, a letehetősebb is kapjon újdonságot. Mindenkinek legyen kihívás a feladatsor, de ne legyen nyomasztó teher.

Ez az anyag öt szakköri összeállítást tartalmaz, amely egy-egy szakkör anyaga lehet a különböző céloknak megfelelően összeállítva. A feladatok először megoldással szerepelnek. A dokumentum végén pedig megoldás nélkül megtalálhatóak a feladatsorok, így nyomtathatók egy-egy szakkörre.

I. Válogatott feladatok a KöMal-ból:

1. Andi mosógépe a program lejártá után még 5 percig zárva tartja az ajtót, és csak ezután lehet kinyitni. Andi ezt tudja, így a mosásra szánt időbe ezt is bekalkulálja. Amikor a mosógép kijelzőjén az látszik, hogy a program időtartalmából 90% már eltelt, Andi mosásra szánt idejének még a 20%-a van hátra. Hány perces a mosógép programja?

KöMal 2016. december; K.524.

Megoldás:

A mosógép programja t perces, mosógép $t + 5$ perc múlva áll le. A program időtartamának 90%-a Andi mosási idejének a 80%-a:

$$0,9t = 0,8(t + 5).$$

Az egyenletet megoldva $t = 40$, tehát a program 40 perces.

Ellenőrzés:

Ha a mosási idő 90%-a eltelt, akkor 36 perc eltelt, tehát 4 perc van hátra. A leállásig még 9 perc van hátra, ami a 45 percnél valóban a 20%-a.

2. Melyik szorzat a nagyobb:

$$555\,555\,555\,553 \cdot 666\,666\,666\,669 \quad \text{vagy} \quad 555\,555\,555\,557 \cdot 666\,666\,666\,664?$$

KöMal 2011. november; C.1095.

Megoldás:

Vezessük be az $n = 111\,111\,111\,111$ jelölést. Ekkor a bal oldali kifejezés:

$$(5n - 2) \cdot (6n + 3) = 30n^2 + 3n - 6.$$

A jobb oldali kifejezés:

$$(5n + 2) \cdot (6n - 2) = 30n^2 + 2n - 4$$

A baloldali kifejezés $n - 2 = 111\,111\,111\,109$ -cel nagyobb.

3. Pistike eredeti módon számlál az ujjain. 1-gyel kezdi a hüvelykujján, ezután a 2-t, és a 3-at a mutatóujján, a 4-et, 5-öt és a 6-ot a középső ujján, a 7-et a gyűrűsujján, a 8-at és a 9-et a kisujján. Ezután visszafelé folytatja, a 10-et, 11-et, 12-t megint a gyűrűsujján, 13-at a középsőn, 14-et és 15-öt a mutatón, 16-ot, 17-et, 18-at a hüvelykujján, 19-et ismét a mutatóujján és így tovább. Melyik ujján számolja a 2004-et?

KöMal 2004. október; C.775.

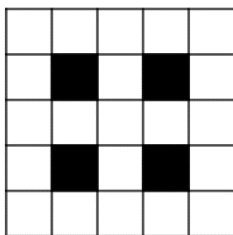
Megoldás:

A leírtak szerint 3 ujjon 6-ot számol Pistike. $2004:6 = 334$, tehát 334 ilyen periódus történik a számolás során, egy ilyen szakaszban 3 ujjon megy végig. Így az a kérdés, hogy a $3 \cdot 334 = 1002$. ujj melyik. Egy kézen így megy végig Pistike:

hüvelykujj; mutatóujj; középső ujj; gyűrűsujj; kisujj; gyűrűsujj; középső ujj; mutatóujj.

Most egy 8 hosszúságú periódust kaptunk. 1002 nyolccal osztva 2-t ad maradékul. Így a mutatóujján számolja a 2004-et Pistike.

4. Összeragasztottunk 125 db 1 cm élhosszúságú kockát egy nagyobb, tömör kockává, majd a nagy kockába az oldallapjaira merőlegesen négyzetes keresztmetszetű lyukakat fúrtunk úgy, hogy a lyukak teljesen átmennek a kockán. A lyukak elkészítése után a kocka minden lapja így nézett ki (a fekete négyzetek jelölik a lyukak helyét):



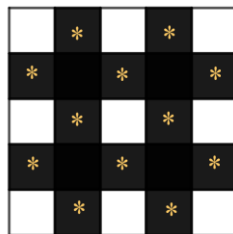
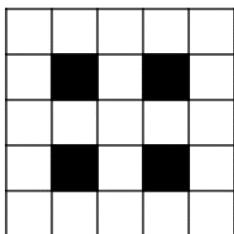
A lyukak elkészítése után az egész megmaradt testet piros festékbe mártottuk.

- Hány cm^3 a kapott test térfogata?
- Hány cm^2 lett piros festékes?

KöMal 2011. március; K.291.

Megoldás:

- Számoljuk össze rétegenként a testet alkotó kis kockákat:



Az első ábrának megfelelő rétegekben, ilyen három van, 21 kocka maradt. A második ábrán pedig 9 darab (két ilyen réteg van). Így a test térfogata $3 \cdot 21 + 2 \cdot 9 = 81 \text{ cm}^3$.

A felső és az alsó réteg (az első ábra szerint) $21 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 57$ festett kis négyzetet (1 cm^2) tartalmaz. A középső rétegen csak a széle és négy lyuk festett: $4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2$. A második ábra szerinti két rétegen a széleken 3-3 négyzet, belül pedig a csillaggal jelölt

„hiányzó” kockák négy oldala festett, így összesen $4 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = 60$ festett négyzet található ezekben a rétegekben.

Összesen $2 \cdot 57 + 36 + 2 \cdot 60 = 270 \text{ cm}^2$ festékes.

5. Egy dobozban piros és sárga golyók vannak. ha kivennénk 1 piros golyót, akkor a bennmaradó golyók hetedrésze lenne piros. Ha ehelyett kivennénk 5 sárga golyót, akkor a bennmaradók hatodrésze lenne piros. Hány golyó van a dobozban?

KöMal 2012. szeptember; K.301.

Megoldás:

A piros golyók száma p , a sárga golyók száma s .

Ha egy piros golyót kiveszünk, akkor:

$$p - 1 = \frac{1}{7}(p + s - 1), \text{ innen } s = 6p - 6.$$

Ha kiveszünk 5 sárga golyót:

$$p = \frac{1}{6}(p + s - 5), \text{ azaz } s = 5p + 5.$$

A két egyenlet alapján:

$$6p - 6 = 5p + 5$$

$$p = 11$$

$$s = 60.$$

A dobozban 71 golyó van.

Ellenőrzés:

Ha egy pirosat kiveszünk, a dobozban marad 10 piros és 60 sárga. Ekkor valóban az egy heted rész lesz piros. Ha kiveszünk 5 sárgát, akkor 11 piros és 55 sárga lesz a dobozban, azaz a golyók egy hatod része lesz piros.

6. Egy apa jelenleg öt évvel idősebb, mint három fia együttev. Tíz, húsz, illetve harminc év múlva az apa életkora a legidősebb, a második, illetve a harmadik fia életkorának kétszerese lesz. Hány éves most az apa és hány évesek a fiai?

KöMal 2016. március; C.1343.

Megoldás I.:

Az apa életkora a év, a fiainak az életkora b, c, d .

$$a = b + c + d + 5$$

10 év múlva:

$$a + 10 = 2(b + 10)$$

20 év múlva:

$$a + 20 = 2(c + 20)$$

30 év múlva:

$$a + 30 = 2(d + 30)$$

Fejezzük ki a gyerekek életkorát az apa életkorával:

$$b = \frac{a + 10}{2} - 10; \quad c = \frac{a + 20}{2} - 20; \quad d = \frac{a + 30}{2} - 30$$

Helyettesítsük be az első egyenletbe:

$$a = \frac{a+10}{2} - 10 + \frac{a+20}{2} - 20 + \frac{a+30}{2} - 30 + 5$$

$$a = \frac{3a+60}{2} - 55$$

$$2a = 3a + 60 - 110$$

$$a = 50$$

$$b = 20; c = 15; d = 10.$$

Az apa 50 éves, a fiai 20, 15 illetve 10 évesek.

Megoldás II.:

Most is ezzel az egyenletrendszerrel indulunk:

$$a = b + c + d + 5$$

$$a + 10 = 2(b + 10)$$

$$a + 20 = 2(c + 20)$$

$$a + 30 = 2(d + 30)$$

Adjuk össze az egyenleteket:

$$4a + 60 = 3b + 3c + 3d + 125$$

Felhasználva az első egyenletet:

$$4a + 60 = 3a + 110$$

Innen:

$$a = 50; b = 20; c = 15; d = 10.$$

Az apa 50 éves, a fiai 20, 15 illetve 10 évesek.

7. János, Péter, Tamás, Gyuri, István testvérek. Egyszer valamelyikük betört egy ablakot. Apjuk kérdésére, hogy ki volt a tettes, a következőket mondták:

János: Péter vagy Tamás volt.

Péter: Sem Gyuri, sem én nem voltam.

Tamás: Mindketten hazudtok.

István: Nem, az egyik közülük igazat mond, de a másik nem.

Gyuri: Nem, István, nincs igazad.

Anyjuk ehhez hozzátette:

Fiaim közül 3 valóban igazat mondott, de abban, amit a másik kettő mondott, nem bízom.

Ki törte be az ablakot?

KöMal 1981. október; Gy.1922.

Megoldás I.:

Állapítsuk meg a válaszok igazságtartalmát annak függvényében, hogy ki lehet a tettes:

A válaszok igaz vagy hamis volta	A feltételezett tettes				
	János	Péter	Tamás	István	Gyuri
János	H	I	I	H	H
Péter	I	H	I	I	H
Tamás	H	H	H	H	I
István	I	I	H	I	H
Gyuri	H	H	I	H	I

A táblázatból látható, hogy az anya állítása csak abban az esetben igaz, ha Tamás a tettes, a többi esetben hárman hazudnának.

Megjegyzés:

A feladat szövegéből nem következik, hogy pontosan ketten hazudnak, az is lehetne, hogy egy vagy egy sem hazudik a fiúk közül.

Megoldás II.:

István és Gyuri állítása ellentmond egymásnak, így az egyikük hazudik. Ha Tamás igazat mondana, akkor János és Péter is hazudna, így hárman hazudnának. Így Tamás hazudik és István és Gyuri közül az egyik szintén nem mond igazat, tehát János és Péter igazat mond. Péter szerint ő nem volt, ezért János állítása miatt csak Tamás lehetett.

8. A 7-tel osztható K szám kettes számrendszerbeli alakja a következő:

$$K = 10110101010101xyz110.$$

Határozzuk meg az x, y, z számjegyeket.

KöMal 1991. október; Gy.2718.

Megoldás:

A K szám értéke tízes számrendszerben:

$$2^{19} + 2^{17} + 2^{16} + 2^{14} + 2^{12} + 2^{10} + 2^8 + 2^6 + x \cdot 2^5 + y \cdot 2^4 + z \cdot 2^3 + 2^2 + 2^1.$$

Nézzük meg, hogy a 2-hatványok milyen maradékot adnak 7-tel osztva. A maradékok az alábbiak szerint periodikusan ismétlődnek:

$$2^0 = 1; 2^3; 2^6 \dots 2^{3n} \text{ maradéka } 1;$$

$$2^1 = 2; 2^4; 2^7 \dots 2^{3n+1} \text{ maradéka } 2;$$

$$2^2 = 4; 2^5; 2^8 \dots 2^{3n+2} \text{ maradéka } 4.$$

Így a K szám maradéka megegyezik a

$$2 + 4 + 2 + 4 + 1 + 2 + 4 + 1 + 4x + 2y + z + 6 = 4x + 2y + z + 21 + 5$$

kifejezés 7-es maradékával. Tehát a $4x + 2y + z + 5$ kifejezésnek kell 7-tel oszthatónak lennie.

x, y, z értéke 0 vagy 1 lehet, így $5 \leq 4x + 2y + z + 5 \leq 12$. Ebben a tartományban csak a 7 felel meg, tehát $4x + 2y + z = 2$. Ez éppen a 2 szám felírása kettes számrendszerben, tehát

$$x = 0; y = 1; z = 0.$$

II. Az Arany Dániel Matematikaversenyre készülünk

1. Hányféleképpen olvasható ki Arany Dániel neve az alábbi ábráról, ha az olvasás során csak jobbra és lefelé haladhatunk?

```

A   R   A   N
R   A   N   Y
A   N   Y   D   Á   N   I   E   L
                Á   N   I   E   L
                N   I   E   L
                I   E   L
                E   L
                L

```

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2016/2017. I. forduló, Kezdők, I-II.kategória

Megoldás I:

```

1   1   1   1
1   2   3   4
1   3   6   10  10  10  10  10  10
                10  20  30  40  50
                10  30  60  100
                10  40  100
                10  50
                10

```

Minden betű helyére írjuk be, hogy hányféle módon tudunk oda eljutni az olvasás során. Az induló A betűhöz 1-et írunk. Minden betűhöz a tőle balra és a felette lévő helyről léphetünk, így az itt lévő számok összege adja meg, hogy hányféle úton juthatunk az adott helyre. A kiolvasást az L betűnél végezzük, így $10 + 50 + 100 + 100 + 50 + 10 = 320$ -féle módon olvasható ki Arany Dániel neve.

Megoldás II:

A **D** betűig 3-at lépünk jobbra és kettőt lefelé tetszőleges sorrendben. Ezt $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ féle módon tehetjük meg. Ezután minden lépésnél két irányba, jobbra és lefelé léphetünk. Így 5-öt lépünk, ezt $2^5 = 32$ féleképpen tehetjük meg. Minden egyes **D**-hez vezető utat 32 féle módon folytathatunk, így $10 \cdot 32 = 320$ –féle kiolvasás van.

2. Egy osztályban minden diák jár a háromféle szakkör valamelyikére: 17-en matematikára, 13-an fizikára és 11-en kémiára. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak éppen négyszerese azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Hányan járnak mindhárom szakkörre és mennyi az osztálylétszám, ha az osztályba járó fiúk egyharmad része szemüveges, valamint a nem szemüveges fiúk száma egyenlő a lányok számával?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013. II. forduló, Kezdők, I-II.kategória

Megoldás:

Ha az osztályba járó fiúk egyharmad része szemüveges, akkor a fiúk száma osztható hárommal. Jelöljük a fiúk számát $3x$ -el. A nem szemüveges fiúk száma így $2x$, ami megegyezik a lányok számával. Az osztálylétszám ezek szerint $5x$, ami azt jelenti, hogy osztható 5-tel.

Ha a mindhárom szakkörre járók száma y , akkor a pontosan kétféle szakkörre járók száma $4y$. Ha összeadjuk a szakkörre járók számát: $17 + 13 + 11 = 41$, akkor ebben a két szakkörre járókat

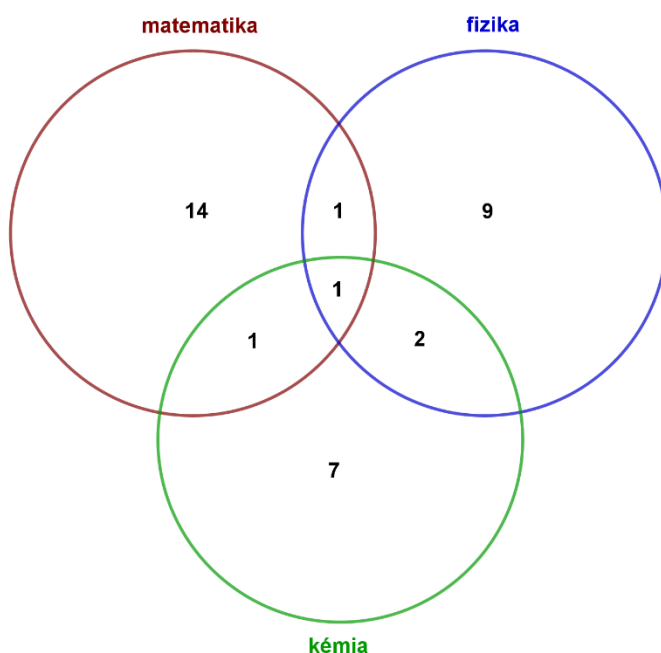
kétszer, a három szakkörre járókat háromszor számoltuk. Az osztálylétszámot akkor kapjuk meg, ha a két szakkörre járókat egyszer, a három szakkörre járókat kétszer levonjuk:

$$41 - 4x - 2x = 41 - 6x.$$

Ennek a kifejezésnek 5-tel oszthatónak kell lennie. Ez $x = 1$ és $x = 6$ esetében teljesül. $x = 6$ esetén a pontosan két szakkörre járók száma 24 lenne, ami nem lehet, hiszen egy szakkörre maximum 17-en járnak.

Így az osztálylétszám 35, és 1 diák jár mindhárom szakkörre.

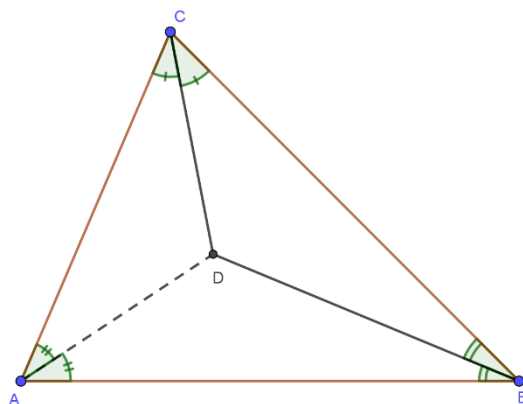
Az alábbi halmazábra mutatja, hogy ez megvalósulhat (A pontosan két szakkörre járók eloszlása többféle módon is megvalósulhat):



3. Az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge 70° . A B és C csúcsnál lévő szögek szögfelezőinek metszéspontja legyen D . Mekkora a C csúcsnál lévő szög, ha $AD = BD$?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1981/1982. I. forduló, Kezdők

Megoldás:



A háromszög belső szögfelezői egy ponton mennek át, Így az AD szakasz a BAC szögfelezője, $DAB = 35^\circ$. $AD = BD$, tehát az ABD háromszög egyenlő szárú, az alapon fekvő szögei egyenlők: $DAB = 35^\circ = DBA$. Ebből következik, hogy $ABC = 70^\circ$ és a háromszög harmadik szöge $ACB = 40^\circ$.

4. Határozza meg azokat a valós számpárokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlet:

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + |y^2 - x^2| = 0.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1996/97. I. forduló, Kezdők I-II-III. kategória

Megoldás:

Az egyenletet írhatjuk ebben az alakban:

$$(x^2 + 3x)^2 + |y^2 - x^2| = 0.$$

Egy szám négyzete és abszolút értéke sem lehet negatív, így az összegük csak úgy lehet nulla, ha mindkét tag nulla:

$$x^2 + 3x = x(x + 3) = 0$$

$$y^2 - x^2 = 0$$

Az első egyenlet $x = 0$ és $x = -3$ esetben teljesül.

Ha $x = 0$, akkor $y = 0$. Ha $x = -3$, akkor $y = +3$ vagy -3 . Így az egyenletnek három megoldása van:

$$x_1 = 0; y_1 = 0 \quad x_2 = -3; y_2 = -3 \quad x_3 = -3; y_3 = +3.$$

5. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x + y + z = 2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013. III.(döntő) forduló, Kezdők II.kategória

Megoldás:

Az $x + y + z = 2$ feltétel miatt $x - 1 = 1 - y - z$, $y - 1 = 1 - x - z$, $z - 1 = 1 - x - y$. Ezt felhasználva fenti kifejezés így írható:

$$\frac{1}{xy - x - y + 1} + \frac{1}{yz - y - z + 1} + \frac{1}{zx - z - x + 1}.$$

A nevezőket szorzattá alakítjuk és közös nevezőre hozunk:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \\ & \frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}. \end{aligned}$$

Legyen ez a tört a p prímszám reciproka, ekkor

$$(x-1)(y-1)(z-1) = -p.$$

Ez csak akkor teljesül, ha a tényezők valamilyen sorrendben $1, -1, p$ vagy $1, 1, -p$ vagy $-1, -1, -p$.

Az első esetben szimmetria miatt tegyük fel, hogy

$$x - 1 = 1; \quad y - 1 = -1; \quad z - 1 = p,$$

akkor $x = 2$; $y = 0$; $z = p + 1$. Az $x + y + z = 2$ feltétel miatt $p + 3 = 2$, $p = -1$, de ekkor p nem prímszám.

A második esetben:

$$x - 1 = 1; \quad y - 1 = 1; \quad z - 1 = -p,$$

ekkor $x = 2; \quad y = 2; \quad z = 1 - p$. Az $x + y + z = 2$ feltétel miatt $5 - p = 2$, $p = 3$, ez megoldás, ekkor $z = -2$.

A harmadik esetben

$$x - 1 = -1; \quad y - 1 = -1; \quad z - 1 = -p,$$

ekkor $x = 0; \quad y = 0; \quad z = 1 - p$. Az $x + y + z = 2$ feltétel miatt $1 - p = 2$, $p = -1$, tehát ez nem megoldás.

Összefoglalva x, y, z közül kettőnek az értéke 2, a harmadik -2 . Ezekkel az értékekkel a kifejezés értéke a 3 prímszám.

Ellenőrzés:

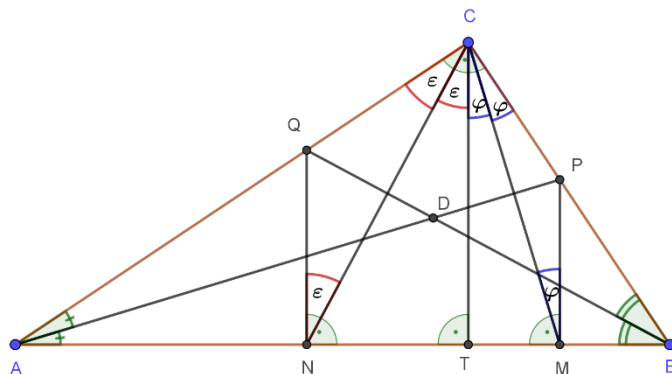
$$\begin{aligned} \frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1} &= \frac{1}{4 - 2 - 1} + \frac{1}{-4 + 2 - 1} + \frac{1}{-4 + 2 - 1} = \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Valóban a 3 reciprokát kapjuk.

6. Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge derékszög. A CAB és ABC szögek belső szögfelezői a szemközti oldalakat a P és Q pontokban metszik. A P és Q pontokból az AB oldalra állított merőlegesek talppontjai legyenek az M és N pontok. Határozzuk meg az MCN szög nagyságát!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2015/2016. II. forduló, Kezdők I-II.kategória

Megoldás I:

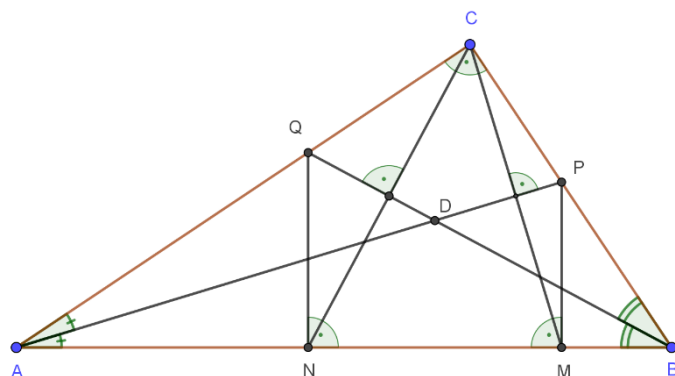


Az AP szögfelező, ezért P a szögszáráktól egyenlő távol van, $PC = PM$. A PMC háromszög két oldala egyenlő, ezért egyenlő szárú, az alapon fekvő szögei egyenlők: $MCP\angle = PMC\angle = \varphi$. Hasonlóan indokolható, hogy $QCN\angle = QNC\angle = \varepsilon$.

Megrajzoljuk a háromszög CT magasságát. $CT \parallel PM$, mert mindkettő merőleges AB -re. Ezt felhasználva $TCM\angle = CMP\angle = \varphi$, mert váltószögek. Hasonlóan igazolható, hogy $QNC\angle = NCT\angle = \varepsilon$.

$ACB\angle = 90^\circ = 2\varepsilon + 2\varphi$, tehát $\varepsilon + \varphi = 45^\circ$. Ebből megkapjuk, hogy $NCM\angle = \varepsilon + \varphi = 45^\circ$.

Megoldás II:



Az AMP és APC háromszögek egybevágóak, mert az AP oldaluk közös és két-két szögük egyenlő. Ezért az $AMPC$ négyszög deltoid, az átlói merőlegesek: $AP \perp CM$. Hasonlóan igazolható, hogy $NC \perp BQ$. Tehát az MCN és a BDP merőleges szárú hegyesszögek, tehát egyenlők.

Az ABC háromszög derékszögű, ezért a két hegyesszög összege 90° . A szögfelezés miatt $DAB + DBA = 45^\circ$. Az ABD külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével, tehát $BDP = 45^\circ$. Így az $MCN = 45^\circ$ is teljesül.

7. Legyenek a és b páratlan egész számok, melyek relatív prímek, azaz $(a, b) = 1$. Bizonyítsa be, hogy az $A = a^{2^{2008}} - b^{2^{2008}}$ számnak legalább 2008 különböző prímosztója van.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2007/2008. II.(döntő) forduló, Kezdők III.kategória

Megoldás:

Többször alkalmazzuk az $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ azonosságot, szorzattá alakítjuk a kifejezést:

$$\begin{aligned} a^{2^{2008}} - b^{2^{2008}} &= (a^{2^{2007}} - b^{2^{2007}}) \cdot (a^{2^{2007}} + b^{2^{2007}}) = \\ &= (a^{2^{2006}} - b^{2^{2006}}) \cdot (a^{2^{2006}} + b^{2^{2006}}) \cdot (a^{2^{2007}} + b^{2^{2007}}) = \dots \\ &\dots = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot \dots \cdot (a^{2^{2006}} + b^{2^{2006}}) \cdot (a^{2^{2007}} + b^{2^{2007}}) \end{aligned}$$

Így egy 2008 tényezős szorzatot kaptunk.

Egy páratlan szám négyzete és minden páros kitevőjű hatványa 4-gyel osztva 1-et ad maradékul.

Ezt az állítást a binomiális tétel alapján így bizonyíthatjuk:

$$(2k + 1)^{2l} = (2k)^{2l} + \binom{2l}{1} (2k)^{2l-1} + \dots + \binom{2l}{i} (2k)^{2l-i} + \dots + 2l \cdot 2k + 1.$$

A felírásból látható, hogy minden tag osztható 4-gyel, kivéve az utolsót, így a maradék valóban 1.

Két ilyen szám összege 4-gyel osztva 2-t ad maradékul. A fenti szorzat utolsó 2007 tényezőjére ez teljesül. Ezért ezeknek van páratlan prímosztójuk. Megmutatjuk, hogy ezeknek a tényezőknek nem lehet azonos páratlan prímosztójuk.

Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy p a $(a^{2^k} + b^{2^k})$ és a $(a^{2^l} + b^{2^l})$ közös osztója, ahol $k < l$. Ekkor $(a^{2^k} + b^{2^k})(a^{2^k} - b^{2^k}) = (a^{2^{k+1}} - b^{2^{k+1}})$ is osztható p -vel. Így tovább lépegetve megkapjuk, hogy $(a^{2^{k+2}} - b^{2^{k+2}}), \dots, (a^{2^l} - b^{2^l})$ is osztható p -vel.

Ekkor $p \mid a^{2^l} + b^{2^l} + a^{2^l} - b^{2^l} = 2a^{2^l}$. Amiből következik, hogy $p \mid a$, de akkor $p \mid b$ is teljesül. a és b relatív prímek, így ellentmondásra jutottunk.

Tehát a fenti szorzat utolsó 2007 tényezőjének különbözőek a páratlan prímosztói. Így kapunk legalább 2007 darab különböző páratlan prímosztót. A szorzat tényezői párosak, így a 2-es prímszám is a szorzat egyik osztója. Ezzel valóban találtunk 2008 különböző prímosztót.

III. Tesztversenyre készülünk – algebra és számelmélet feladatokkal

1. Mennyi az n értéke, ha $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$?

($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, azaz $n!$ az n darab legkisebb pozitív egész számszorzata.)

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2008, 9-10.osztály

Megoldás:

Gondolatban bontsuk fel az $n!$ tényezőit prímtényezőkre. Ebből kapjuk a $2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ szorzatot. A 11 és 13 szerepel a szorzatban, ezért $n \geq 13$. 7^2 az jelzi, hogy két 7-tel osztható szám van 1 és n között, ezek a 7 és 14. Az 5^3 azt jelzi, hogy három 5-tel osztható szám van a tényezők között, ezek az 5, 10, 15. A 17 nem szerepel a tényezők között, ezek alapján $15 \leq n < 17$. Két esetet kell megnéznünk, a 15-t és a 16-ot.

A $15!$ -ban minden második tényező páros, tehát tartalmaz egy 2-es prímszámot, minden negyedik tartalmaz két 2-est, minden nyolcadik pedig hármat. Így $15!$ -ban a 2-es kitevője:

$$\left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{8} \right\rfloor = 7 + 3 + 1 = 11.$$

A feladatban szereplő szorzatban 16 a kitevő, így még 4 kettes hiányzik, ez csak $n = 16$ esetében teljesül. Még ellenőrizzük a 3 kitevőjét:

$$\left\lfloor \frac{15}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{9} \right\rfloor = 5 + 1 = 6.$$

Ez megfelel a fenti prímtényező felbontásnak, tehát valóban $n = 16$. A helyes válasz **D**.

2. Hány számjegy szerepel a tizedesvessző után az $\frac{1}{1024000}$ szám tizedestört alakjában, az utolsó értékes jeggyel bezárólag?

- (A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2013, 9-10.osztály

Megoldás:

$1024 = 2^{10}$, $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, így $1024000 = 2^{13} \cdot 5^3$. A törtet úgy kell bővítenünk, hogy a nevezőben egy 10-hatvány legyen:

$$\frac{1}{1024000} = \frac{1}{2^{13} \cdot 5^3} = \frac{5^{10}}{10^{13}}.$$

Ez azt jelenti, hogy 5^{10} -t 13-szor osztottuk 10-zel, a tizedesvessző 13 hellyel balra kerül. Tehát a tizedesvessző után 13 jegy szerepel. A jó válasz **C**.

3. Az a, b, c, d pozitív számokra teljesül, hogy $a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$. Az a, b, c, d számok közül melyik a legnagyobb?

(A) a (B) b (C) c (D) d
(E) Nem lehet egyértelműen megállapítani.

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2016, 9-10. osztály

Megoldás:

$d = a + 9$, tehát a és d közül d a nagyobb. $b^2 = c^2 + 4$, azaz b és c közül a b a nagyobb. Azt kell eldöntenünk, hogy b és d közül melyik a nagyobb.

$d^2 = a^2 + 18a + 81$, $b^2 = a + 6$. b és d pozitív számok, ezért az a kérdés, hogy mikor lesz

$$a^2 + 18a + 81 > a + 6$$

$$a^2 + 17a + 75 > 0$$

Az $a^2 + 17a + 75 = (a + 8,5)^2 + 2,75$ kifejezés mindig pozitív, így a négy szám közül a d a legnagyobb. A jó válasz **D**.

4. Mennyi az $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ művelet sor eredménye, ha a és b nullától különböző számokra $ab = a - b$?

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 2

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2015, 9. osztály megyei forduló

Megoldás:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - a^2 b^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a - b)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$$

A jó válasz **E**.

5. Mennyivel egyenlő $x^3 + \frac{1}{x^3}$, ha $x + \frac{1}{x} = 3$?

(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 27

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009, 9. osztály megyei forduló

Megoldás:

$$27 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 3$$

$$\text{Tehát } x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18.$$

A jó válasz **B**.

6. Mennyi az $\frac{5}{1 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 11} + \dots + \frac{5}{2001 \cdot 2006}$ összeg?

(A) $\frac{25}{26}$ (B) $\frac{2005}{2006}$ (C) $\frac{2006}{2007}$ (D) $\frac{2007}{2008}$ (E) 1

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008, 9. osztály országos forduló

Megoldás:

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5} = \frac{n+5-n}{n \cdot (n+5)} = \frac{5}{n \cdot (n+5)}$ összefüggés alapján átalakítjuk a kifejezést:

$$\frac{5}{1 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 11} + \dots + \frac{5}{2001 \cdot 2006} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2006}.$$

Az összevonás után csak az első és utolsó tag marad meg:

$$1 - \frac{1}{2006} = \frac{2005}{2006}.$$

A jó válasz **B**.

7. Hány olyan n egész szám van, amelyre az $\frac{5n^2+13n}{n+3}$ kifejezés helyettesítési értéke is egész szám?

(A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) végtelen sok

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010, 9. osztály országos forduló

Megoldás:

$$\frac{5n^2 + 13n}{n + 3} = \frac{5n^2 + 15n - 2n - 6 + 6}{n + 3} = 5n - 2 + \frac{6}{n + 3}$$

$5n - 2$ mindig egész, ezért azt keressük, hogy $\frac{6}{n+3}$ mikor lesz egész. Ekkor $n + 3$ osztója 6-nak. A lehetséges értékek:

$$n + 3 = 6; -6; 3; -3; 2; -2; 1; -1.$$

Ebből nyolc megoldás adódik:

$$n = 3; -9; 0; -6; -1; -5; -2; -4.$$

A jó válasz **D**.

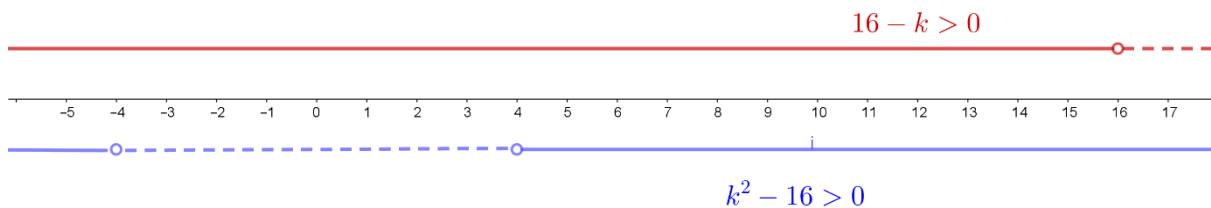
8. Az alábbiak közül k mely értéke esetén lesz $16 - k$ és $k^2 - 16$ ellentétes előjelű?

(A) -10 (B) -5 (C) -3 (D) 5 (E) 20

Bolyai Matematika Csapatverseny 2015, körzeti forduló

Megoldás:

Megtehetjük egy tesztversenyen azt, hogy az öt értéket behelyettesítjük és eldöntjük, hogy megfelel-e. Most legyünk „igényesebbek”. Alábbi számegyenes mellett ábrázoljuk $16 - k$ és $k^2 - 16$ előjelét. A folytonos vonallal a pozitív értéket, a szaggatott vonallal a negatív értéket jelöljük.



Leolvashatjuk az ábráról, hogy a két kifejezés ellentétes előjelű, ha

$$-4 < k < 4 \quad \text{vagy} \quad k > 16.$$

A megadott számok közül -3 és 20 esik ebbe a tartományba. Tehát a jó megoldás **C** és **E**.

9. Az alábbiak közül mennyi lehet $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} - \frac{|abc|}{abc}$ értéke, $abc \neq 0$?

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

Bolyai Matematika Csapatverseny 2017, körzeti forduló

Megoldás:

Ha $a, b, c > 0$, akkor $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} - \frac{|abc|}{abc} = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$.

Ha a, b, c közül kettő pozitív, egy negatív, akkor $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} - \frac{|abc|}{abc} = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$.

Ha a, b, c közül egy pozitív, kettő negatív, akkor $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} - \frac{|abc|}{abc} = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$.

Ha $a, b, c < 0$, akkor $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} - \frac{|abc|}{abc} = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

Tehát a jó megoldás **A** és **E**.

10. Az a, b, c egész számok olyanok, hogy az $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$ tört értéke egész szám. Bizonyítsátok be, hogy ekkor $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ is egész szám!

Bolyai Matematika Csapatverseny 2016, országos döntő

Megoldás:

$$1 = \left(\frac{a+b+c}{a+b+c} \right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} + \frac{2ab+2bc+2ac}{(a+b+c)^2}$$

Szorozzuk meg az egyenletet $(a+b+c)$ -vel:

$$a+b+c = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} + \frac{2ab+2bc+2ac}{a+b+c}$$

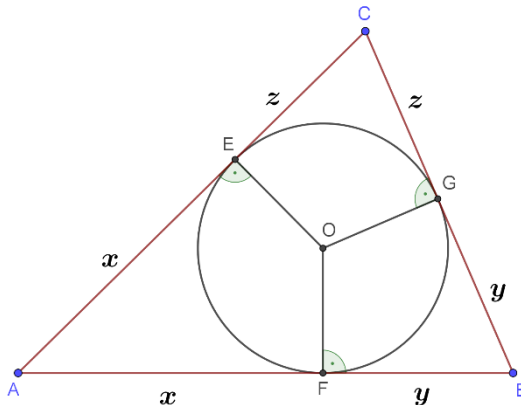
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = a+b+c - 2 \cdot \frac{ab+bc+ac}{a+b+c}.$$

A jobb oldal két egész szám különbsége, tehát a bal oldal is egész.

IV. A háromszögek beírt és hozzáírt körei

1. A háromszög oldalainak hossza a, b, c . Mekkora részekre osztják az oldalakat a háromszög beírt körének érintési pontjai?

Megoldás:



A külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. Az ábrán ezeket a szakaszokat x, y, z jelöli.

$$BC = a = y + z$$

$$AC = b = x + z$$

$$AB = c = x + y$$

Az egyenleteket összeadva:

$$a + b + c = 2x + 2y + 2z.$$

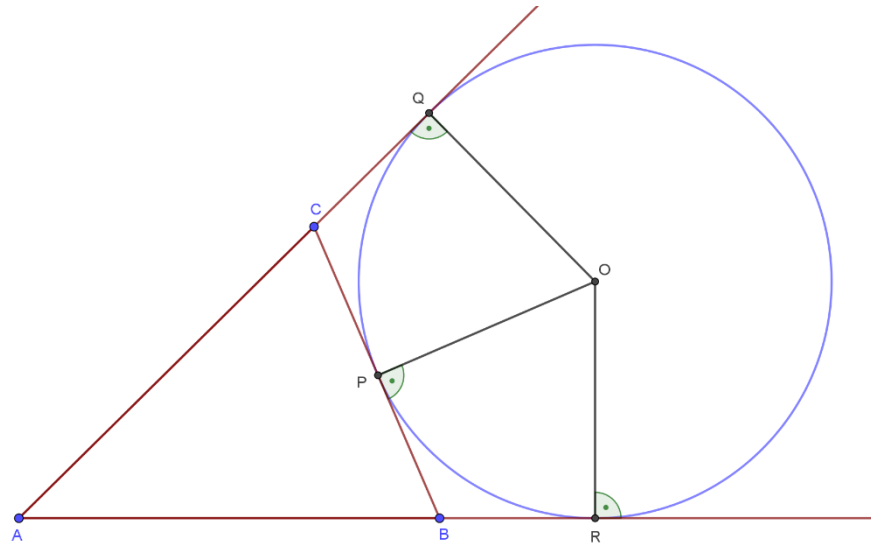
A kerület felét jelöljük s -sel, így:

$$2s = a + b + c = 2x + 2y + 2z \Rightarrow s = x + y + z.$$

$a = y + z$, ezért $x = s - a$. Hasonlóan $y = s - b$, $z = s - c$.

2. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy hozzáírt köre a meghosszabbított oldalakat azok metszéspontjától fél kerületnyi távolságra érinti. Milyen messze vannak az érintési pontok a háromszög másik két csúcsától?

Megoldás:



A külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért:

$$AR = AQ, \quad BP = BR \quad \text{és} \quad CQ = CP.$$

Ezt felhasználva a háromszög kerülete:

$$AB + BC + CA = AB + BP + PC + CA = AB + BR + CQ + CA = AR + AQ.$$

Ha a háromszög fél kerületét s -sel jelöljük és figyelembe vesszük, hogy $AR = AQ$, akkor:

$$AR = AQ = s.$$

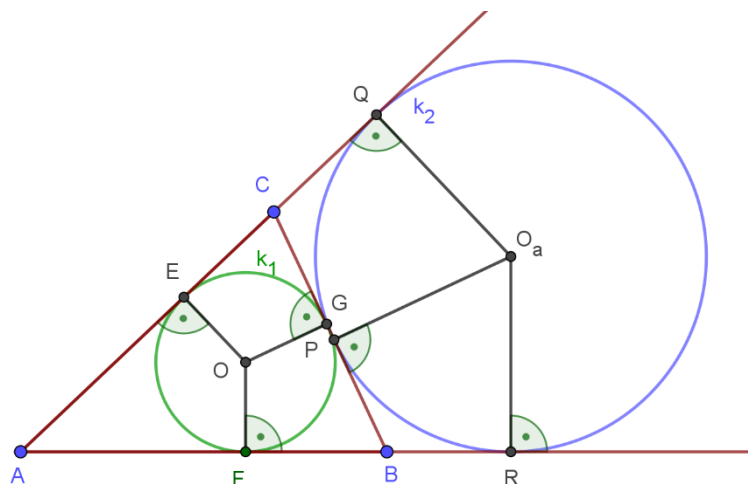
A háromszög oldalait a szokásos módon a , b , c -vel jelölve:

$$BR = BP = AR - AB = s - c,$$

$$CQ = CP = CQ - AC = s - b.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög ugyanazon oldalát a beírt és hozzáírt kör egy-egy csúctól azonos távolságra érinti, és az érintési pontok távolsága a másik két oldal különbségével egyenlő!

Megoldás:

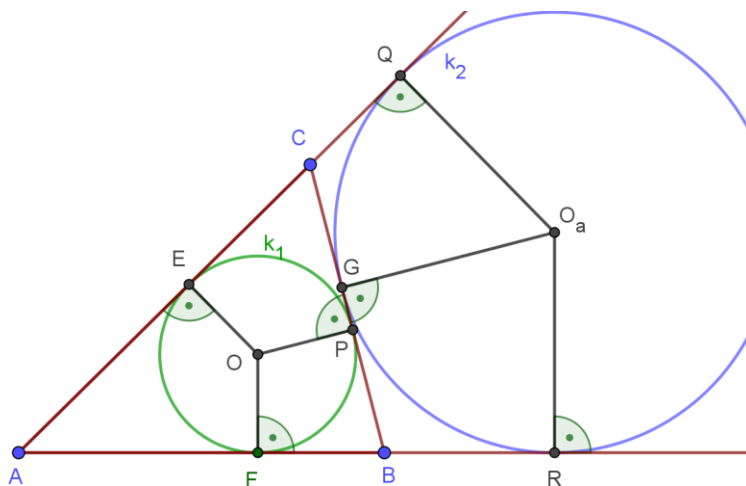


A háromszög oldalait szokásos módon jelölve az 1. és 2. feladat alapján:

$$BP = BR = s - c, \quad CG = s - c,$$

így a két érintési pont a B és C csúctól valóban egyenlő távol van.

$GP = CB - CG - BP = a - 2(s - c) = a + 2c - 2s = a + 2c - a - b - c = c - b$. Ez az ábra azt az esetet mutatja, amikor $c > b$. Ha $c < b$, akkor az ábra alapján így számolhatunk:



$$BP = s - b, \quad CG = CQ = s - b,$$

$$GP = CB - CG - BP = a - 2(s - b) = a + 2b - 2s = a + 2b - a - b - c = b - c.$$

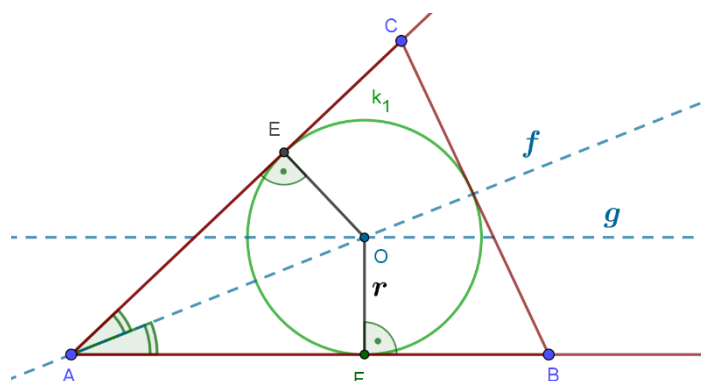
(Ezt az esetet arra hivatkozva is beláthattuk volna, hogy betűcserével nyilvánvalóan ezt fogjuk kapni. Mégis érdemes megnézni, hogy a b és c nagyságrendjének változásával hogyan változik az érintési pontok sorrendje.)

Ha $b = c$, akkor a két érintési pont egybeesik, így távolságuk 0.

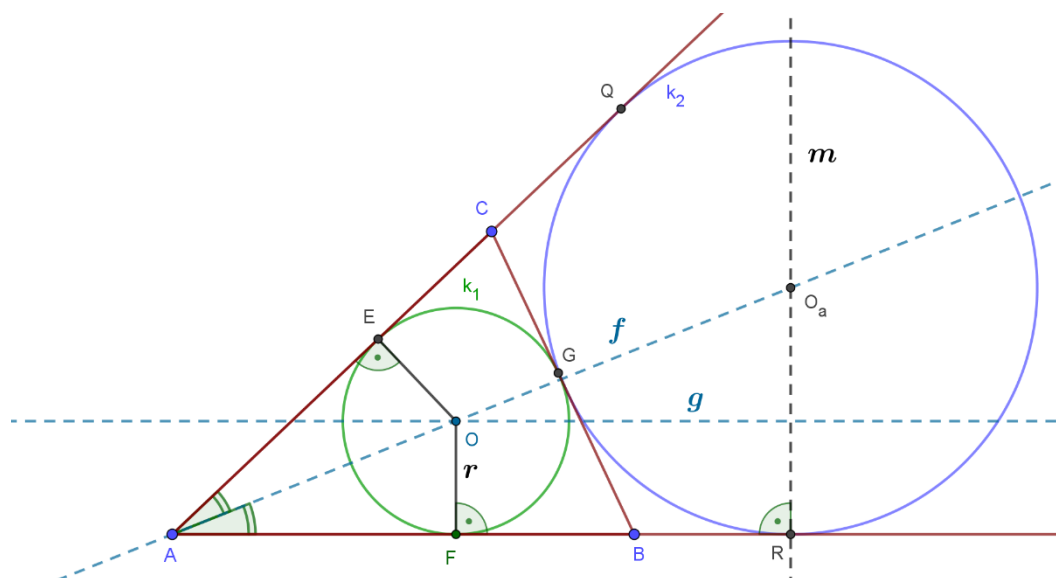
Ezzel beláttuk a feladat állítását.

4. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, a beírt kör sugara és az egyik szöge!

Megoldás:



Megrajzoljuk az adott BAC -et. A beírható kör középpontja a szögfelezőn van, ezért megszerkesztjük az f szögfelezőt. A kör középpontja a szögszáráktól az adott sugárnyi(r) távolságra van, ezért az AB szögszártól r távolságra párhuzamost szerkesztünk (g). Az f és g egyenesek metszéspontja a beírt kör középpontja (O). Az O pont körül r sugárral megszerkesztjük a beírt kört.



Tudjuk, hogy a CB oldalt érintő hozzáírt kör az A ponttól s távolságra érinti a szögszárákat (3.feladat), és középpontja a szögfelezőn van. Ezért megfelezzük a kerületet, és az A csúctól felmérjük az AB félegyenesre, így megkapjuk a hozzáírt kör érintési pontját, R -et. Ebben a pontban merőlegest állítunk a szögszárra. Ez az m merőleges a szögfelezőből kimetszi a hozzáírt kör O_a középpontját. O_a középpontú, O_aR sugarú kört szerkesztünk, ez a háromszög hozzáírt köre.

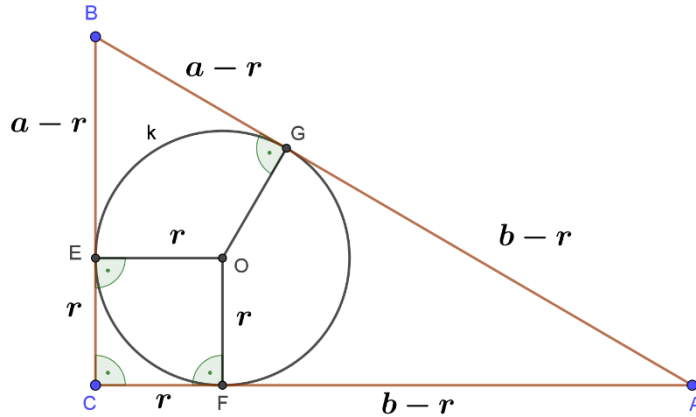
A háromszög BC oldala a két kör közös belső érintője. A szokásos módon szerkesszük meg a közös belső érintőt, ami kimetszi a szög száraiból a B és C pontokat. A két közös belső érintő két egybevágó háromszöget határoz meg, így elég az egyiket megszerkesztenünk.

5. Igazoljuk, hogy derékszögű háromszögben

- a beírt kör átmérőjének és az átfogónak az összege a befogók összegével egyenlő!
- az átfogóhoz írt kör átmérője a háromszög területével egyenlő!
- az átfogóhoz tartozó hozzáírt kör és a beírt kör sugarának különbsége az átfogó!

Megoldás:

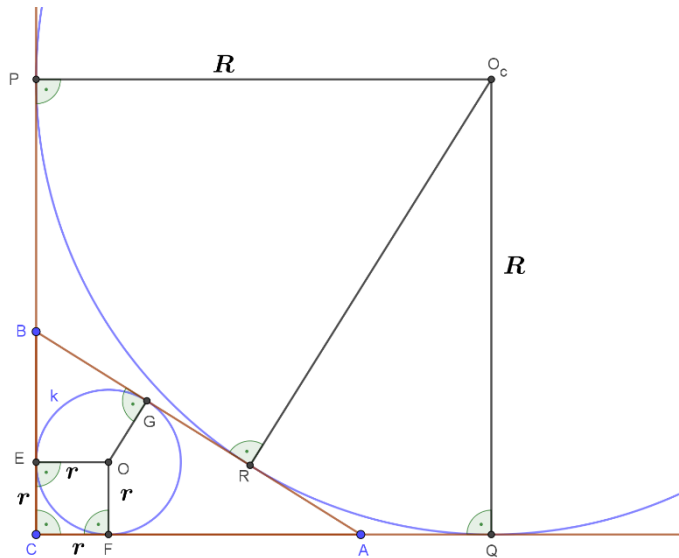
- a) A háromszög befogói a és b , az átfogó c .



Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért a $CEOD$ négyszög négyzet, minden oldala a beírt kör sugarával, r -rel egyenlő. Ekkor $AF = b - r$, $BD = a - r$. A körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők: $AF = AG = b - r$; $BE = BG = a - r$.

Ezek alapján $AB = c = a - r + b - r = a + b - 2r$, átrendezve $c + 2r = a + b$.

- b) Az alábbi ábrán az átfogóhoz írt kör sugara R .



CQO_cP négyzet, szögei derékszögek és oldalai a hozzáírt kör sugarával egyenlők. A külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők: $AR = AQ$, $BR = BP$. A háromszög kerülete $CA + AR + RB + BC = CA + AQ + BP + BC = CQ + CP = 2R$.

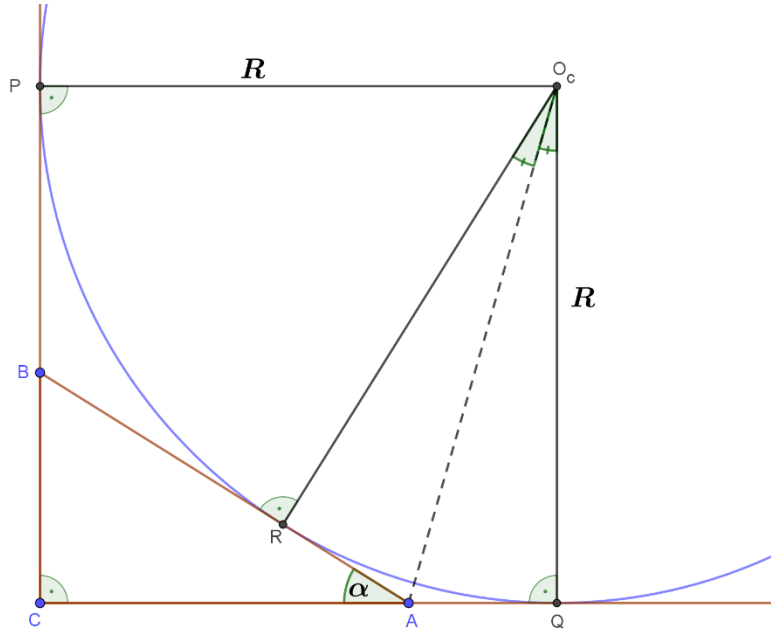
- c) Az a) feladatrészt alapján $2c + 2r = a + b + c$, tehát $c + r = s$. Az b) szerint $R = s$.

Ezeket az összefüggéseket felhasználva $R = c + r$, így $R - r = c$ valóban teljesül.

6. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogóhoz írt kör sugara, továbbá az egyik hegyesszög!

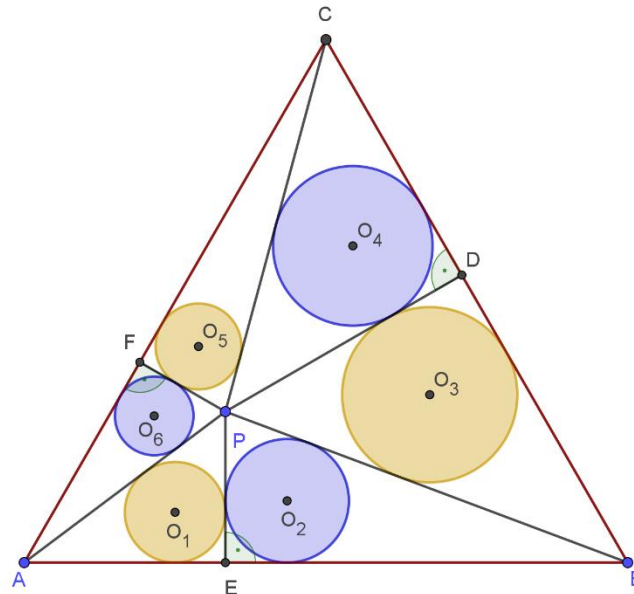
Megoldás:

Az 5.feladat alapján szerkesszük meg a CQO_cP négyzetet a megadott sugár segítségével.



$CAB\angle = RO_cQ\angle = \alpha$, mert merőleges szárú hegyesszögek. AQO_cR deltoid, ezért AO_c felezi az $RO_cQ\angle$ -et. Így az O_cQ szakaszra az O_c pontban felmérve az $\alpha/2$ szöget, megkapjuk a CQ szakaszon az A pontot. A CA befogóra rá mérve az α szöget megszerkesztjük a derékszögű háromszög átfogóját.

7. Legyen P az ABC szabályos háromszög egy belső pontja, D, E, F pontok pedig a P -ből a BC, CA és AB oldalakra állított merőlegesek talppontjai. Bizonyítsuk be, hogy a PAE, PBD, PCF , illetve PBE, PCD, PAF háromszögek beírt köreinek sugarait összegezve ugyanazt az értéket kapjuk!



Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2013/2014. II. (döntő) forduló, Kezdők III.kategória

Megoldás:

A derékszögű háromszögekbe írt körök sugarát az 5. feladat a) része alapján határozzuk meg. Ha a derékszögű háromszög oldalai a, b, c , a beírt kör sugara r , akkor $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Felírjuk ezt a feladatban szereplő hat háromszögre:

$$r_1 + r_3 + r_5 = \frac{1}{2}(AE + EP - AP) + \frac{1}{2}(BD + DP - BP) + \frac{1}{2}(CF + FP - CP)$$

$$r_2 + r_4 + r_5 = \frac{1}{2}(BE + EP - BP) + \frac{1}{2}(CD + DP - CP) + \frac{1}{2}(AF + FP - AP).$$

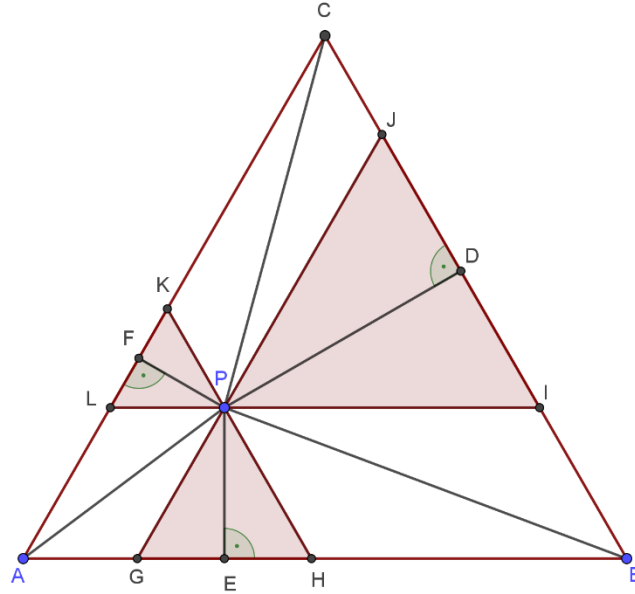
Azt kell belátnunk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(AE + EP - AP) + \frac{1}{2}(BD + DP - BP) + \frac{1}{2}(CF + FP - CP) = \\ &= \frac{1}{2}(BE + EP - BP) + \frac{1}{2}(CD + DP - CP) + \frac{1}{2}(AF + FP - AP). \end{aligned}$$

Átrendezve:

$$AE + BD + CF = BE + CD + AF \quad (*)$$

A P ponton keresztül húzzunk párhuzamosakat a háromszög oldalaival, így keletkezik három újabb szabályos háromszög az ABC háromszögön belül.



A nagy háromszög szimmetriája miatt $AG = CJ, BI = AL, CK = BH$.

A szabályos háromszög magassága felezi az oldalt. Ezt felhasználva: $GE = EH; ID = DJ, KF = FL$.

Ezekkel a szakaszokkal kifejezzük a (*) egyenletben szereplő szakaszokat:

$$AE + BD + CF = AG + GE + BI + ID + CK + KF,$$

$$BE + CD + AF = BH + HE + CJ + JD + AL + LF.$$

Láthatóan a két összeg ugyanazokat a tagokat tartalmazza, így a (*) egyenlőség igaz. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

V. Lazítsunk egy-egy könnyed szakkörön szünet vagy ünnep előtt

1. Rajzoljuk le egy óra számlapját, és kérjünk meg valakit, hogy gondoljon egy egész számot 1 és 12 között (a határokat is beleértve). Többször egymás után koppantani fogunk ceruzánkkal a számlapon, neki minden koppintásra eggyel tovább kell számolnia. Ha például 8-at gondolt, akkor az első koppintáskor már 9-re kell gondolnia, a második koppantáskor 10-re, és így tovább. Amikor eléri a 20-at, akkor ceruzánk a számlapnak éppen arra a számára fog mutatni, amire eredetileg gondolt. Hogyan koppintsunk, hogy csakugyan így legyen?

Hódi Endre: Matematikai mozaik című könyvéből

Megoldás:

A 20-at leghamarabb a nyolcadik koppintásra érheti el a játékosunk, mégpedig akkor, ha a 12-re gondolt. Ha a 11-re gondolt, akkor a 20-at a 9-edik koppintásra éri el és így tovább. Így az első hét alkalommal tetszőleges helyre koppinthatunk, nyolcadikra a 12-re, a kilencedikre a 11-re, a tizedikre a 10-re ... koppintsunk.

2. Az eszpresszóban

Az asztalnál négyen ülnek: Sándor, Gábor, László és Zoltán.

A pincér épp hozza, amit rendelték: egy pohár bort, egy korsó sört, egy meggylét és egy coca-colát, valamint egy szendvicset, egy tányéron négy krémest, egy másik tányéron három pogácsát és egy adag fagylaltot.

- Ki mit rendelt, uraim? – kérdi, mert a rendelést társa vette fel.
- Mindenki ételt és italt, és mindenki másfélét – mondják kórusban a társaság tagjai.
- Ettől persze nem lettem sokkal okosabb – gondolja a pincér, de azért lendületesen elkezd szétszórni a tálcája tartalmát.
 - 1) – Figyelmeztetem, én antialkoholista vagyok – mondja Zoltán.
 - 2) – Akkor bizonyára nem az öné a pogácsa sem, hiszen az bor vagy sör mellé való.
 - Pedig én nem ahhoz rendeltem – mondja a társaság Zoltán mellett ülő tagja, és elveszi a pogácsát.
 - 3) – Én az édes dolgokat nem eszem – jelenti ki László.
 - 4) – Sajnos, pogácsát elfelejtettem rendelni, de a meggylé az enyém – mondja az egyik vendég.
 - 5) – Nem rendeltem süteményt – tiltakozik Sándor, és közben az eléje tett borospoharat is eltolja.

Meglehetősen nagy a zűrzavar, de a pincér türelmesen és szolgálatkészen próbál a vendégek kedvére tenni – bár némileg tanácstalan.

Tudunk-e neki segíteni?

Bizám György-Herczeg János Játék és logika 85 feladatban című könyvéből

Megoldás:

Indulásként megállapíthatjuk:

Zoltán nem rendelt bort és sört (1) alapján.

Zoltán nem rendelt pogácsát (2) szerint.

A pogácsát nem a borhoz, nem a sörhöz rendelték. (2)

László nem rendelt coca-colát, krémest, fagylaltot. (3)

A pogácsa mellé nem meggylét rendeltek. (4)

Sándor nem rendelt krémest, pogácsát, bort. (5)

A megállapításainkat táblázatokban foglaljuk össze. Beszínezzük szürkével azt a cellát, amely eset nem valósítható meg. Beírjuk azt a számot is, amire ezt alapozzuk.

	bor	sör	meggylé	coca-cola		szendvics	krémes	pogácsa	fagylalt
Sándor	5						5	5	
Gábor				+				+	
László				3			3		3
Zoltán	1	1						2	

	szendvics	krémes	pogácsa	fagylalt
bor			2	
sör			2	
meggylé			4	
coca-cola			+	

Így jól látható, hogy pogácsa mellé coca-colát rendeltek. Ebbe a cellába egy piros + jelet teszünk. Pogácsa Gáborhoz és Lászlóhoz tartozhatna, de László nem rendelt coca-colát, így Gábor rendelt pogácsát és coca-colát. ide is piros + jelet teszünk.

	bor	sör	meggylé	coca-cola		szendvics	krémes	pogácsa	fagylalt
Sándor	5						5	5	
Gábor				+				+	
László				3			3		3
Zoltán	1	1	+				+	2	

	szendvics	krémes	pogácsa	fagylalt
bor			2	
sör			2	
meggylé		+	4	
coca-cola			+	

Gábor nem rendelt mást, és a pogácsa sem tartozhat másféle italhoz. Pogácsát és a coca-colát sem rendelhet más. Így újabb eseteket tudunk kizárni, ezek a késsel jelölt cellák. Innen látható, hogy a Zoltán meggylevet és krémest rendelt.

	bor	sör	meggylé	coca-cola		szendvics	krémes	pogácsa	fagylalt
Sándor	5	+					5	5	+
Gábor				+				+	
László	+			3		+	3		3
Zoltán	1	1	+				+	2	

	szendvics	krémes	pogácsa	fagylalt
bor	+		2	
sör			2	+
meggylé		+	4	
coca-cola			+	

Most további cellákat zárhatunk ki Zoltán rendelésének ismeretében (sárga szín). Ezek szerint Sándor fagylaltot és sört rendelt. Ezután Lászlónak bor és szendvics marad. Ez a harmadik táblázati részben is megfelelő.

Összefoglalva: Sándor sört és fagylaltot, Gábor coca-colát és pogácsát, László bort és szendvicset, Zoltán meggy levet és krémest rendelt.

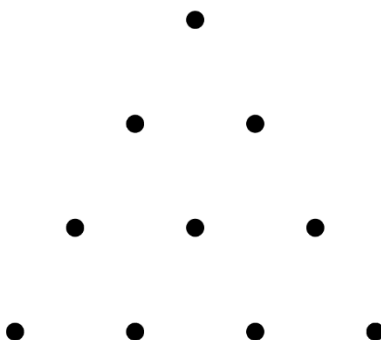
Megjegyzés:

Bizám György és Herczeg János könyvében még egy párbeszéd van a feladatban:

(*)– Nem meleg a söröd? – kérdi az egyik vendég a másikat. – Csak a te fagylaltod legyen ilyen hideg – nyugtatja az meg.

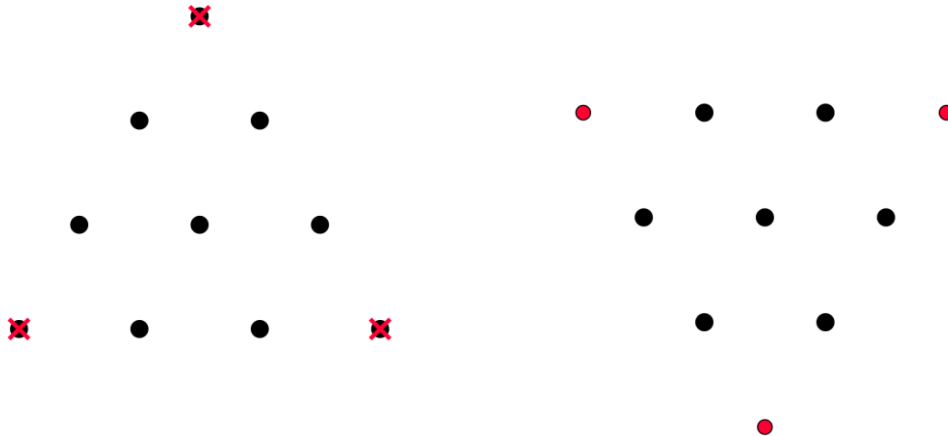
Ez azt jelenti, hogy nem ugyanaz rendelte a sört és a fagylaltot. Megoldásunkból látjuk, hogy ha ezt a feltételt is teljesíteni akarjuk, akkor ellentmondásra jutunk. Tehát ekkor a pincér nem tudja teljesíteni a feladatot.

3. Az asztalra letettünk 10 db egyforma pénzérmét az ábrán látható módon. Ezekből 3 érmét helyezünk máshová úgy, hogy egy más helyzetű, az eredetivel egybevágó szabályos háromszöget kapjunk.

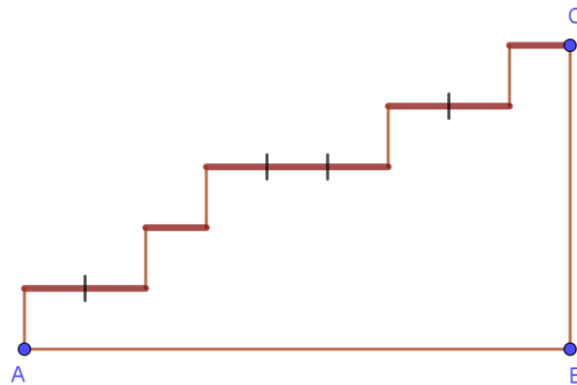


Róka Sándor 2000 feladat az elemi matematika köréből

Megoldás:



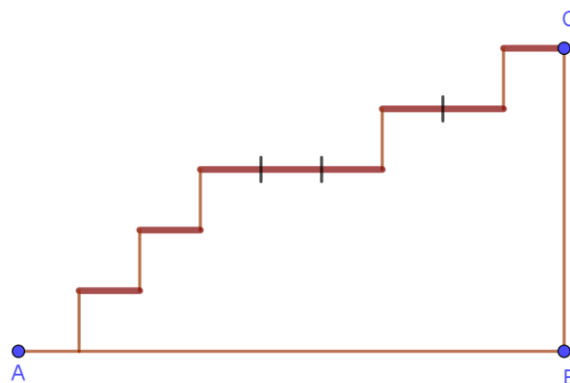
4. Az A és B pont között lépcsőt akarunk építeni. Az AC távolság 4,5 méter, a CB távolság 1,5 méter. Az egyes lépcsőfokok 30 cm magasak, szélességük 50 cm egész számú többszöröse. Hányféleképpen építhetjük meg a lépcsőt?



N.J.Vilenkin Kombinatorika

Megoldás:

1,5 méterben a 30 cm ötször van meg, ezért öt lépcsőfokra van szükségünk. 4,5 méterben az 50 cm kilencszer van meg, tehát tíz helyen lehet a lépcső emelkedése. Az is lehet, hogy az első lépcső ugrása nem az A pontban van:



Ebből a tíz helyből kell kiválasztanunk ötöt úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít.

Az első helyet 10, a másodikat 9, ..., az ötödiket 6 helyből választhatjuk, ez $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ lehetőség. Ekkor minden esetet többször kaptunk meg – annyi-szor, ahányszor öt elemet sorbarende-zhetünk. Ezt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ féle módon tehetjük meg. Így a lehetséges kiválasztások száma $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$.

Megjegyzés:

Ha ezt a törtet $5!$ -al bővítjük, akkor $\frac{10!}{5! \cdot 5!}$ alakban tudjuk írni, erre a $\binom{10}{5}$ jelet használjuk, és binomiális együtthatónak hívjuk.

5. Két oszlopban helyeztünk el számokat, mindkét oszlop ugyanazokból a számokból áll. A forma kedvéért a bal oldali oszlopban elhagytuk a helyi értéket jelző nullákat. Például a legelső szám nem 1-et, hanem 100 000 000-t jelent.

Melyik oszlopban nagyobb az összeg?

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Először csak szemre becsüljük meg, azaz összeadás nélkül próbáljuk eldönteni, hogy melyik lehet nagyobb. A becslés után végezzük el az összeadást.

B.A. Korgyemskij Matematikai fejtörők

Megoldás:

Ha figyelmesek vagyunk, az összeadás elvégzése nélkül válaszolhatunk. Hasonlítsuk össze helyi értékenként a két oszlopot:

Az egyesek helyén bal oldalon 9 van, a jobb oldalon kilenc darab 1-es, ezek egyenlők.

A tízesek helyén a bal oldalon két 8-as, a jobb oldalon nyolc 2-es, ezek is egyenlők.

A százask helyén három 7-es, illetve hét 3-as, ezek értéke is megegyezik.

Így folytathatjuk minden helyi értéken, tehát a két összeg egyenlő.

6. Egy hajó a part közelében horgonyoz. Oldalról 10 fokú kötélhágcsó lóg a vízbe. A fokok egymástól 30 cm-re vannak, s az utolsó fok éppen a víz színéig ér.

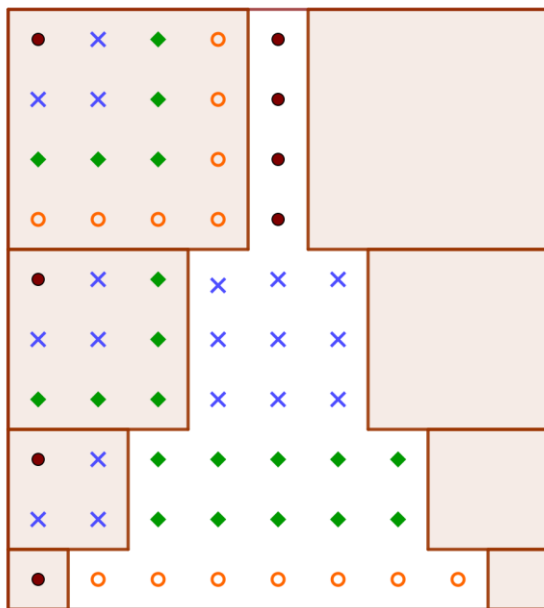
A tenger ma csendes, csak a kezdődő dagály mozgatja a víztükröt. A dagály óránként 15 cm-rel emeli a víz szintjét. Mennyi idő múlva kerül víz alá a hágcsó harmadik foka?

Róka Sándor Logi-sztorik

Megoldás:

A dagály a hajót a kötélhágcsóval együtt emeli, így mindvégig a 10-ik fokig fog a víz érni. Sosem fogja elérni a harmadik fokot.

7. A XIII. században Jang Huj és Csu Si-csie (Kína) már ismertek olyan eljárást, amely az első n természetes szám négyzetének az összegét adta meg. Az alábbi ábra segítségével adjuk meg a módszert.



Dr. Lévárdi László – Sain Márton Matematika-történeti feladatok

Megoldás:

Az ábrán $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ látható a téglalapban kétszer elhelyezve. Azt sejtjük, hogy a középső rész területe is ugyanennyi.

Szintén az ábráról leolvasható, hogy

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 3$$

$$3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

Az összeghez tartozó négy darab 1-es, három darab 3-as, két darab 5-ös, egy darab 7-es segítségével a középső rész kirakható. Meggondolható, hogy az általánosan s igaz:

$$n^2 = 1 + 3 + \dots + (2n - 1),$$

és középen mindig a kellő számú páratlan számot kapjuk:

$$n \cdot 1, (n - 1) \cdot 3, (n - 2) \cdot 5 \dots$$

Így az első n természetes szám négyzetének összegét a fenti téglalap területének harmada adja.

A téglalap egyik oldala az első n természetes szám összege, ami $\frac{n(n+1)}{2}$, a másik oldala $(2n + 1)$.

Tehát:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

VI. Feladatlapok

1. feladatlap

1. Andi mosógépe a program lejártá után még 5 percig zárva tartja az ajtót, és csak ezután lehet kinyitni. Andi ezt tudja, így a mosásra szánt időbe ezt is bekalkulálja. Amikor a mosógép kijelzőjén az látszik, hogy a program időtartalmából 90% már eltelt, Andi mosásra szánt idejének még a 20%-a van hátra. Hány perces a mosógép programja?

KöMal 2016. december; K.524.

2. Melyik szorzat a nagyobb:

$$555\,555\,555\,553 \cdot 666\,666\,666\,669 \quad \text{vagy} \quad 555\,555\,555\,557 \cdot 666\,666\,666\,664?$$

KöMal 2011. november; C.1095.

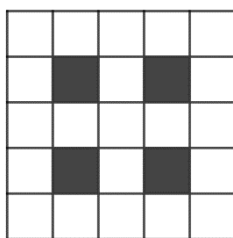
3. Pistike eredeti módon számlál az ujjain. 1-gyel kezdi a hüvelykujján, ezután a 2-t, és a 3-at a mutatóujján, a 4-et, 5-öt és a 6-ot a középső ujján, a 7-et a gyűrűsujján, a 8-at és a 9-et a kisujján. Ezután visszafelé folytatja, a 10-et, 11-et, 12-t megint a gyűrűsujján, 13-at a középsőn, 14-et és 15-öt a mutatón, 16-ot, 17-et, 18-at a hüvelykujján, 19-et ismét a mutatóujján és így tovább. Melyik ujján számolja a 2004-et?

KöMal 2004. október; C.775.

4. Egy dobozban piros és sárga golyók vannak. ha kivennénk 1 piros golyót, akkor a bennmaradó golyók hetedrésze lenne piros. Ha ehelyett kivennénk 5 sárga golyót, akkor a bennmaradók hatodrésze lenne piros. Hány golyó van a dobozban?

KöMal 2012. szeptember; K.301.

5. Összeragasztottunk 125 db 1 cm élhosszúságú kockát egy nagyobb, tömör kockává, majd a nagy kockába az oldallapjaira merőlegesen négyzetes keresztmetszetű lyukakat fúrtunk úgy, hogy a lyukak teljesen átmennek a kockán. A lyukak elkészítése után a kocka minden lapja így nézett ki (a fekete négyzetek jelölik a lyukak helyét):



A lyukak elkészítése után az egész megmaradt testet piros festékbe mártottuk.

- a) Hány cm^3 a kapott test térfogata?
b) Hány cm^2 lett piros festékes?

KöMal 2011. március; K.291.

6. Egy apa jelenleg öt évvel idősebb, mint három fia együttvéve. Tíz, húsz, illetve harminc év múlva az apa életkora a legidősebb, a második, illetve a harmadik fia életkorának kétszerese lesz. Hány éves most az apa és hány évesek a fiai?

KöMal 2016. március; C.1343.

7. A 7-tel osztható K szám kettes számrendszerbeli alakja a következő:

$$K = 10110101010101xyz110.$$

Határozzuk meg az x, y, z számjegyeket.

KöMal 1991. október; Gy.2718.

8. János, Péter, Tamás, Gyuri, István testvérek. Egyszer valamelyikük betört egy ablakot. Apjuk kérdésére, hogy ki volt a tettes, a következőket mondták:

János: Péter vagy Tamás volt.

Péter: Sem Gyuri, sem én nem voltam.

Tamás: Mindketten hazudtok.

István: Nem, az egyik közülük igazat mond, de a másik nem.

Gyuri: Nem, István, nincs igazad.

Anyjuk ehhez hozzátette:

Fiaim közül 3 valóban igazat mondott, de abban, amit a másik kettő mondott, nem bízom.

Ki törte be az ablakot?

KöMal 1981. október; Gy.1922.

2. feladatlap

1. Hányféleképpen olvasható ki Arany Dániel neve az alábbi ábráról, ha az olvasás során csak jobbra és lefelé haladhatunk?

```

A   R   A   N
R   A   N   Y
A   N   Y   D   Á   N   I   E   L
                Á   N   I   E   L
                N   I   E   L
                I   E   L
                E   L
                L

```

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2016/2017. I. forduló, Kezdők, I-II.kategória

2. Egy osztályban minden diák jár a háromféle szakkör valamelyikére: 17-en matematikára, 13-an fizikára és 11-en kémiára. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak éppen négyszerese azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Hányan járnak mindhárom szakkörre és mennyi az osztálylétszám, ha az osztályba járó fiúk egyharmad része szemüveges, valamint a nem szemüveges fiúk száma egyenlő a lányok számával?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013. II. forduló, Kezdők, I-II.kategória

3. Az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge 70° . A B és C csúcsnál lévő szögek szögfelezőinek metszéspontja legyen D . Mekkora a C csúcsnál lévő szög, ha $AD = BD$?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1981/1982. I. forduló, Kezdők

4. Határozza meg azokat a valós számpárokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlet:

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + |y^2 - x^2| = 0.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1996/97. I. forduló, Kezdők I-II-III. kategória

5. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x + y + z = 2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013. III.(döntő) forduló, Kezdők II.kategória

6. Az ABC háromszög C csúcsánál lévő szöge derékszög. A CAB és ABC szögek belső szögfelezői a szemközti oldalakat a P és Q pontokban metszik. A P és Q pontokból az AB oldalra állított merőlegesek talppontjai legyenek az M és N pontok. Határozzuk meg az MCN szög nagyságát!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2015/2016. II. forduló, Kezdők I-II.kategória

7. Legyenek a és b páratlan egész számok, melyek relatív prímek, azaz $(a, b) = 1$. Bizonyítsa be, hogy az $A = a^{2^{2008}} - b^{2^{2008}}$ számnak legalább 2008 különböző prímosztója van.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2007/2008. II.(döntő) forduló, Kezdők III.kategória

3. feladatlap

1. Mennyi az n értéke, ha $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$?

($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, azaz $n!$ az n darab legkisebb pozitív egész számszorzata.)

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2008, 9-10. osztály

2. Hány számjegy szerepel a tizedesvessző után az $\frac{1}{1024000}$ szám tizedestört alakjában, az utolsó értékes jeggyel bezárólag?

- (A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2013, 9-10. osztály

3. Az a, b, c, d pozitív számokra teljesül, hogy $a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$. Az a, b, c, d számok közül melyik a legnagyobb?

- (A) a (B) b (C) c (D) d

(E) Nem lehet egyértelműen megállapítani.

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2016, 9-10. osztály

4. Mennyi az $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ művelet sor eredménye, ha a és b nullától különböző számokra $ab = a - b$?

- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 2

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2015, 9. osztály megyei forduló

5. Mennyivel egyenlő $x^3 + \frac{1}{x^3}$, ha $x + \frac{1}{x} = 3$?

- (A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 27

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009, 9. osztály megyei forduló

6. Mennyi az $\frac{5}{1 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 11} + \dots + \frac{5}{2001 \cdot 2006}$ összeg?

- (A) $\frac{25}{26}$ (B) $\frac{2005}{2006}$ (C) $\frac{2006}{2007}$ (D) $\frac{2007}{2008}$ (E) 1

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008, 9. osztály országos forduló

7. Hány olyan n egész szám van, amelyre az $\frac{5n^2 + 13n}{n+3}$ kifejezés helyettesítési értéke is egész szám?

- (A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) végtelen sok

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010, 9. osztály országos forduló

8. Az alábbiak közül k mely értéke esetén lesz $16 - k$ és $k^2 - 16$ ellentétes előjelű.

- (A) -10 (B) -5 (C) -3 (D) 5 (E) 20

Bolyai Matematika Csapatverseny 2015, körzeti forduló

9. Az alábbiak közül mennyi lehet $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} - \frac{|abc|}{abc}$ értéke, $abc \neq 0$?

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

Bolyai Matematika Csapatverseny 2017, körzeti forduló

10. Az a, b, c egész számok olyanok, hogy az $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$ tört értéke egész szám. Bizonyítsátok be, hogy ekkor $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ is egész szám!

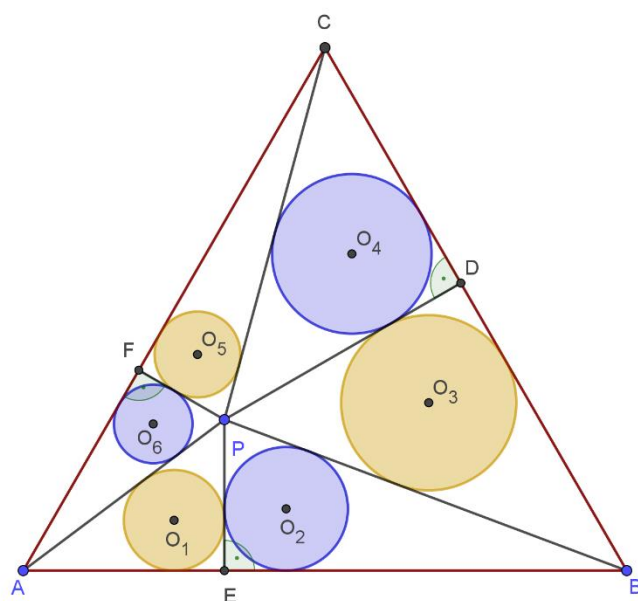
Bolyai Matematika Csapatverseny 2016, országos döntő

4. feladatlap

1. A háromszög oldalainak hossza a , b , c . Mekkora részekre osztják az oldalakat a háromszög beírható körének érintési pontjai?
2. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy hozzáírt köre a meghosszabbított oldalakat azok metszéspontjától fél kerületnyi távolságra érinti. Milyen messze vannak az érintési pontok a háromszög másik két csúcsától?
3. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög ugyanazon oldalát a beírt és hozzáírt kör egy-egy csúctól azonos távolságra érinti és az érintési pontok távolsága a másik két oldal különbségével egyenlő!
4. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, a beírt kör sugara és az egyik szöge!

A háromszög BC oldala a két kör közös belső érintője. A szokásos módon szerkesszük meg a közös belső érintőt, ami kimetszi a szög száraiból a B és C pontokat. A két közös belső érintő két egybevágó háromszöget határoz meg, így elég az egyiket megszerkeszteniünk.

5. Igazoljuk, hogy derékszögű háromszögben
 - a) a beírt kör átmérőjének és az átfogónak az összege a befogók összegével egyenlő!
 - b) az átfogóhoz írt kör átmérője a háromszög területével egyenlő!
 - c) az átfogóhoz tartozó hozzáírt kör és a beírt kör sugarának különbsége az átfogó!
6. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogóhoz írt kör sugara, továbbá az egyik hegyesszög!
7. Legyen P az ABC szabályos háromszög egy belső pontja, D, E, F pontok pedig a P -ből a BC, CA és AB oldalakra állított merőlegesek talppontjai. Bizonyítsuk be, hogy a PAF, PBD, PCF , illetve PAE, PBF, PCD háromszögek beírt köreinek sugarait összegezve ugyanazt az értéket kapjuk!



Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2013/2014. II. (döntő)forduló, Kezdők III.kategória

5. feladatlap

1. Rajzoljuk le egy óra számlapját, és kérjünk meg valakit, hogy gondoljon egy egész számot 1 és 12 között (a határokat is beleértve). Többször egymás után koppantani fogunk ceruzánkkal a számlapon, neki minden koppintásra eggyel tovább kell számolnia. Ha például 8-at gondolt, akkor az első koppintáskor már 9-re kell gondolnia, a második koppantáskor 10-re, és így tovább. Amikor eléri a 20-at, akkor ceruzánk a számlapnak éppen arra a számára fog mutatni, amire eredetileg gondolt. Hogyan koppintsunk, hogy csakugyan így legyen?

Hódi Endre: Matematikai mozaik című könyvéből

2. Az eszpresszóban

Az asztalnál négyen ülnek: Sándor, Gábor, László és Zoltán.

A pincér épp hozza, amit rendelték: egy pohár bort, egy korsó sört, egy meggylét és egy coca-colát, valamint egy szendvicset, egy tányéron négy krémet, egy másik tányéron három pogácsát és egy adag fagylaltot.

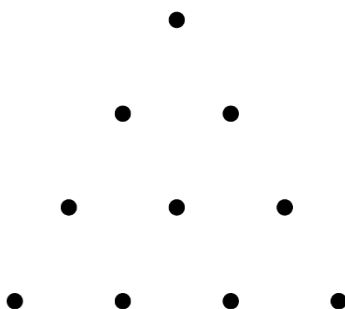
- Ki mit rendelt, uraim? – kérdi, mert a rendelést társa vette fel.
 - Mindenki ételt és italt, és mindenki másfélét – mondják kórusban a társaság tagjai.
 - Ettől persze nem lettem sokkal okosabb – gondolja a pincér, de azért lendületesen elkezd szétszórni a tálcája tartalmát.
- 1) – Figyelmeztetem, én antialkoholista vagyok – mondja Zoltán.
 - 2) – Akkor bizonyára nem az öné a pogácsa sem, hiszen az bor vagy sör mellé való.
– Pedig én nem ahhoz rendeltem – mondja a társaság Zoltán mellett ülő tagja, és elveszi a pogácsát.
 - 3) – Én az édes dolgokat nem eszem – jelenti ki László.
 - 4) – Sajnos, pogácsát elfelejtettem rendelni, de a meggylé az enyém – mondja az egyik vendég.
 - 5) – Nem rendeltem süteményt – tiltakozik Sándor, és közben az eléje tett borospoharat is eltolja.

Meglehetősen nagy a zűrzavar, de a pincér türelmesen és szolgálatkészen próbál a vendégek kedvére tenni – bár némileg tanácstalan.

Tudunk-e neki segíteni?

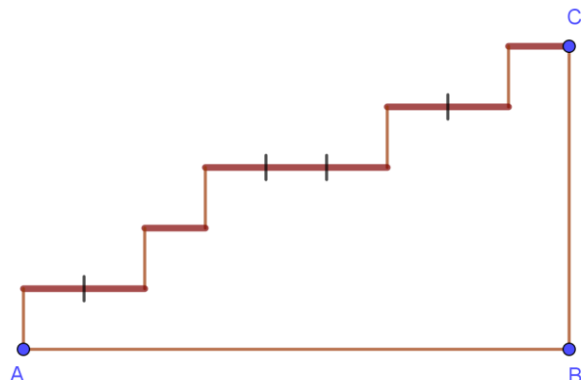
Bizám György-Herczeg János Játék és logika 85 feladatban című könyvéből

3. Az asztalra letettünk 10 db egyforma pénzért az ábrán látható módon. Ezekből 3 érmét helyezünk máshová úgy, hogy egy más helyzetű, az eredetivel egybevágó szabályos háromszöget kapjunk.



Róka Sándor 2000 feladat az elemi matematika köréből

4. Az A és B pont között lépcsőt akarunk építeni. Az AC távolság 4,5 méter, a CB távolság 1,5 méter. Az egyes lépcsőfokok 30 cm magasak, szélességük 50 cm egész számú többszöröse. Hányféleképpen építhetjük meg a lépcsőt?



N.J.Vilenkin Kombinatorika

5. Két oszlopban helyeztünk el számokat, mindkét oszlop ugyanazokból a számokból áll. A forma kedvéért a bal oldali oszlopban elhagytuk a helyi értéket jelző nullákat. Például a legsós szám nem 1-et, hanem 10 000 000-t jelent.

Melyik oszlopban nagyobb az összeg?

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Először csak szemre becsüljük meg, azaz összeadás nélkül próbáljuk eldönteni, hogy melyik lehet nagyobb. A becslés után végezzük el az összeadást.

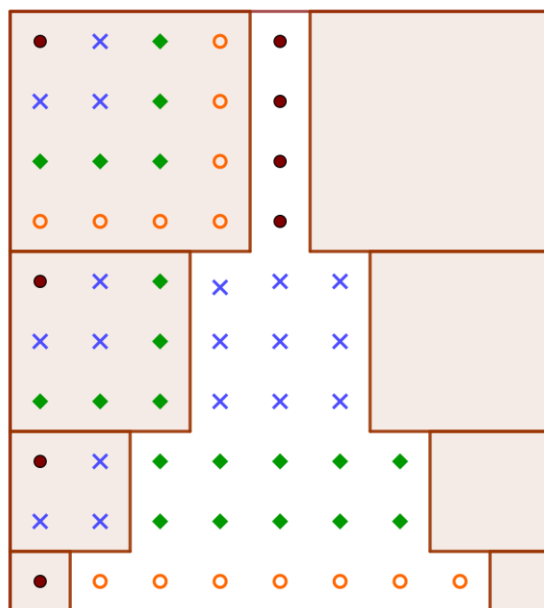
B.A. Korgyemskij Matematikai fejtörők

6. Egy hajó a part közelében horgonyoz. Oldalról 10 fokú kötélhágcsó lóg a vízbe. A fokok egymástól 30 cm-re vannak, s az utolsó fok éppen a víz színéig ér.

A tenger ma csendes, csak a kezdődő dagály mozgatja a víztükröt. A dagály óránként 15 cm-rel emeli a víz szintjét. Mennyi idő múlva kerül víz alá a hágcsó harmadik foka?

Róka Sándor Logi-sztorik

7. A XIII. században Jang Huj és Csu Si-csie (Kína) már ismertek olyan eljárást, amely az első n természetes szám négyzetének az összegét adta meg. Az alábbi ábra segítségével adjuk meg a módszert.



Dr. Lévárdi László – Sain Márton Matematika-történeti feladatok