

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: 2017. november 24. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Szöveges feladatok

I. Hogyan oldjunk meg szöveges feladatokat?

A szöveges feladatok megoldási módszerei igen változatosak. Egy-egy nehéz feladatnál sokszor egyedi módon kell a problémához hozzáállnunk, egyedi utat kell találnunk. Ennek ellenére érdemes rutint szereznünk és rendszerezni megoldási ötleteinket. Álljunk gyakorlatiasan a feladathoz:

1. Olvassuk el a feladatot. Értsük meg. Állapítsuk meg, hogy **mit kérdez**.
2. Gondoljuk meg, hogy a feladat szövege miatt kell-e lényeges kikötést tennünk a várható megoldásokra – ha szükséges, adjuk meg az **alaphalmazt**, amelyben a megoldást keressük.
3. Tekintsük át az adatokat, nézzük meg, hogy **milyen összefüggések** vannak közöttük. Lehet, hogy egy táblázat, egy ábra segít a megértésben.
4. Válasszunk megoldási módszert:
 - a) Eljuthatunk a megoldáshoz **következtetéssel**.
 - b) Gondolkozhatunk **viSSzafele**.
 - c) Használhatunk **egyenletet, egyenletrendszert**.
 - d) Lehet, hogy egy **grafikus** megoldás könnyebb, kiemelhet lényeges összefüggéseket.
5. Ha a megoldást **közelítő értékkel** adjuk meg, figyeljünk arra, hogy milyen pontossággal érdemes kerekítenünk.
6. **Ellenőrizzük** a kapott megoldást, az alaphalmaz megszorításaira is figyeljünk.
7. **Válaszoljunk**.

Akkor vagyunk jó feladatmegoldók, ha merünk gondolkozni, egyedi utakon is elindulni. Ez azonban nem zárja ki azt, hogy eszköztárunkba beépüljenek a sokszor előforduló feladattípusokra kialakult jelölések, megoldási módok, amelyeket másoktól láttunk, és ilyeneket magunk is alkothatunk. A következő fejezetekben példákon keresztül rendszerezünk néhány alkalmas módszert.

A **Kidolgozott feladatok** fejezet 10 feladatban mutatja be a legfontosabb ismereteket ebben a témában. Részletesek az indoklások, több feladat esetében többféle megoldás is szerepel. Megmutatjuk azt is, hogyan ellenőrizzük a kapott eredményt. Ennek a fejezetnek a feladatait megoldva, a megoldásokat figyelmesen átolvasva rendszerezhetjük, bővíthetjük az ismereteinket a szöveges feladatok megoldásában.

A **Gyakorló feladatok** fejezet feladatanyaga – 20 feladat – az elmélyítést szolgálja. Ezeket a feladatokat önálló munkára ajánljuk, ezért ebben a fejezetben csak a feladatok szövege szerepel. A feladatok számozása folytatja a kidolgozott feladatok számozását, így könnyebb hivatkozni a feladatokra. A megoldásokat a **Gyakorló feladatok megoldásai fejezetben** adjuk meg.

A feladatanyagban többek között az alábbi módszerekre mutatunk példát:

1. A feladat szövegében szereplő összefüggések alapján el kell végeznünk a megfelelő számolási műveleteket. Egyenlet felírására és annak megoldására nincs szükség. Pl. **1. feladat.**
2. A feladat szövege szerint változik egy ismeretlen szám. A végeredményt ismerjük, a számra vagyunk kíváncsiak. Ilyenkor visszafelé kell lépkednünk a megoldásban. Pl. **2. feladat; 11. feladat.**
3. Törtrész, arány, százalék számításának az ismerete szükséges. Pl. **3. feladat; 19. feladat.**
4. A számok helyiértékes írását alkalmazhatjuk. Pl. **7. feladat.**
5. Maradékos osztást végezhetünk. Pl. **22. feladat.**
6. Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok. Pl. **8. feladat; 28. feladat.**
7. Keverési feladatok. Pl. **9. feladat; 18. feladat.**
8. Mozgásos feladatok. Pl. **10. feladat; 23. feladat.**
9. Hány éves, ha...? – típusú feladatok. Pl. **20. feladat.**
10. Diophantoszi egyenletek – a megoldást az egész számok között keressük. Pl. **6. feladat.**
11. Geometriai számítások. Pl. **21. feladat.**
12. Kombinatorikai gondolatok. Pl. **3. feladat.**

Az egyenletmegoldás módszereiről itt is olvashatunk:

https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/07.pdf

1-3. oldal

Minden olvasót biztatunk arra, hogy ne törekedjen minden áron egyenletek, egyenletrendszerek felírására, a logikai következtetések alkalmazását is tartsa hatékonnak. És természetesen gyűjtse saját ötleteit és a másoktól látott szép módszereket is.

II. Kidolgozott feladatok

1. Egy televíziós játékban 5 kérdést tehet fel a játékvezető. A játék során a versenyző, ha az első kérdésre jól válaszol, 40 000 forintot nyer. Minden további kérdés esetén döntenie kell, hogy a játékban addig megszerzett pénzének 50, 75 vagy 100 százalékát teszi-e fel. Ha jól válaszol, feltett pénzének kétszeresét kapja vissza, ha hibázik, abba kell hagynia a játékot, és a fel nem tett pénzt viheti haza.
- a) Mennyi pénzt visz haza az a játékos, aki mind az öt feltett kérdésre jól válaszol, s bátran kockáztatva mindig a legnagyobb tétet teszi meg?
 - b) Az a játékos, aki mindig helyesen válaszol, de óvatos, és a négy utolsó fordulóban pénzének csak 50%-át teszi fel, hány forintot visz haza?
 - c) A vetélkedő során az egyik versenyző az első négy kérdésre jól válaszolt. A második kérdésnél a pénzének 100%-át, a 3., 4. és 5. kérdés esetén pénzének 75%-át tette fel. Az 5. kérdésre sajnos rosszul válaszolt. Hány forintot vihetett haza ez a játékos?
 - d) Egy versenyző mind az 5 fordulóban jól válaszol, és közben minden fordulóban azonos eséllyel teszi meg a játékban megengedett lehetőségek valamelyikét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elnyerhető maximális pénzt viheti haza?

Középszintű érettségi 2006. május 9.

Megoldás:

- a) Az első fordulóban nyert 40 000 Ft-ot négyszer megduplázza, így $40\,000 \cdot 2^4 = 640\,000$ Ft-ot visz haza a versenyző.
- b) Ha a pénzének az 50%-át teszi fel, akkor ez megduplázódik, 100% lesz és hozzáadódik a nem kockáztatott 50%-hoz. Így az adott forduló után a korábbi pénzének 150%-ával, azaz másfélszeresével fog rendelkezni. Tehát ez a játékos $40\,000 \cdot 1,5^4 = 202\,500$ forinttal zárja a játékot.
- c) Ha a játékos a pénzének a 75%-át teszi fel, akkor nyerés esetén a pénzének az 1,75-szorosával, vesztes esetén a pénzének a 0,25-szorosával fog rendelkezni a forduló után. Így ez a játékos $40\,000 \cdot 2 \cdot 1,75^2 \cdot 0,25 = 61\,250$ forintot visz haza.
- d) Minden fordulóban, a másodiktól kezdve, $\frac{1}{3}$ eséllyel teszi meg a legnagyobb tétet, így $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0,0123$ valószínűséggel nyer maximális összeget.

Megjegyzés:

Elképzelhető, hogy valakinek mindezt könnyebb lépésről lépésre átgondolnia. Ilyenkor érdemes táblázatot készíteni. Ezt a c) feladatrészt esetén mutatjuk meg:

forduló	tét	A fordulóban nyert összeg	A versenyző pénze a forduló végén
1.		40 000 Ft	40 000 Ft
2.	40 000 Ft	80 000 Ft	80 000 Ft
3.	60 000 Ft	120 000 Ft	$20\,000 + 120\,000 = 140\,000$ Ft
4.	105 000 Ft	210 000 Ft	$35\,000 + 210\,000 = 245\,000$ Ft
5.	183 750 Ft	0 Ft	61 250 Ft

2. Egy apa minden pénzét gyermekeire hagyta a következő végrendelet szerint:

- a legidősebb kapjon 10 000 Ft-ot és a maradék egytized részét,
- a második kapjon 20 000 Ft -ot és az új maradék egytized részét,
- a harmadik kapjon 30 000 Ft-ot és az új maradék egytized részét, és így tovább.

Ily módon mindegyik gyerek ugyanannyi pénzt kapott. Hány gyermeke volt az apának?

OKTV 1985. I. forduló

*A feladat szövegét megfigyelve azt kell megértenünk, hogy minden gyerek öröksége **két részből áll: valahányszor 10 000 forintból és az új maradék egytizedéből.***

Ennek a feladatnak az alábbi három megoldásánál azt is megnézzük, hogyan lehet és hogyan érdemes az ismeretlent megválasztani.

Megoldás I:

Ha a gyerekek számából indulnánk ki, és szigorúan a feladat szövegét követnénk, akkor nem jutunk könnyen használható összefüggéshez. Ezért az elosztandó pénzösszeg jelölésére vezessünk be ismeretlent, legyen az örökség F forint.

A legidősebb $10\,000 + \frac{1}{10}(F - 10\,000)$ forintot kap,

a második pedig $20\,000 + \frac{1}{10}\left(F - 10\,000 - \frac{1}{10}(F - 10\,000) - 20\,000\right)$ forintot, és az örökségük egyenlő:

$$10\,000 + \frac{1}{10}(F - 10\,000) = 20\,000 + \frac{1}{10}\left(F - 10\,000 - \frac{1}{10}(F - 10\,000) - 20\,000\right)$$

$$\frac{1}{10}(F - 10\,000) = 10\,000 + \frac{1}{10}\left(F - 10\,000 - \frac{1}{10}(F - 10\,000) - 20\,000\right)$$

$$\frac{1}{10}(F - 10\,000) = 10\,000 + \frac{1}{10}(F - 10\,000) - \frac{1}{100}(F - 10\,000) - 2\,000$$

$$\frac{1}{100}(F - 10\,000) = 8\,000$$

$$F - 10\,000 = 800\,000$$

$$F = 810\,000$$

A legidősebb fiú $10\,000 + \frac{1}{10} \cdot (810\,000 - 10\,000) = 90\,000$ forintot kap.

Így $810\,000 : 90\,000 = 9$ gyermeke volt az apának.

Ellenőrzés:

Az első gyerek kap $10\,000 + \frac{1}{10} \cdot (810\,000 - 10\,000) = 90\,000$ forintot és marad $720\,000$ Ft.

A második gyerek kap $20\,000 + \frac{1}{10} \cdot (720\,000 - 20\,000) = 90\,000$ forintot, marad $630\,000$ Ft.

A harmadik gyerek kap $30\,000 + \frac{1}{10} \cdot (630\,000 - 30\,000) = 90\,000$ forintot, marad $540\,000$ Ft.

Már látjuk, hogy minden gyerek egyforma örökséget kap, a megoldásunk jó.

Megoldás II:

A második megoldásban mégis megpróbálunk a gyerekek számából kiindulni. Ne adjuk fel, jelöljük a gyerekek számát n -nel és gondolkozzunk visszafelé:

A legkisebb gyerek $n \cdot 10\,000$ forintot kap, és ezután nem marad szétosztandó összeg. Ez az összeg a $\frac{9}{10}$ -e az öt korban megelőző gyerek esetében a szöveg szerinti maradéknak.

Így a korban utolsó előtti gyerek öröksége $(n - 1) \cdot 10\,000 + \frac{1}{9} \cdot n \cdot 10\,000$ forint. A feltételek szerint:

$$n \cdot 10\,000 = (n - 1) \cdot 10\,000 + \frac{1}{9} \cdot n \cdot 10\,000$$

$$n = n - 1 + \frac{1}{9} \cdot n$$

$$1 = \frac{1}{9} \cdot n$$

$$n = 9.$$

Az apának 9 gyermeke volt.

Ellenőrzést az első megoldás szerint végezzük.

Megoldás III:

Talán nincs is szükség egyenletre.

Az utolsó előtti gyerek $(n - 1) \cdot 10\,000$ forintot kap és a maradék egytizedét. Az utolsó gyereknek $n \cdot 10\,000$ forint jut és nincs maradék. Ha mindketten ugyanannyit örökölnék, akkor az egytized rész $10\,000$ forint. Az utolsó gyereknek a kilencetized marad, tehát $9 \cdot 10\,000 = 90\,000$ forint. Ebből az is következik, hogy kilenc gyermeke van az apának.

Most az **ellenőrzést** is érdemes visszafelé végezni:

A 9. gyerek $90\,000$ forintot kap. Ez az előző maradék $9/10$ -e.

Így az egytized rész $10\,000$ Ft. A 8. gyerek kap $80\,000 + 10\,000 = 90\,000$ forintot.

A maradék $9/10$ -e $2 \cdot 90\,000$ Ft, tehát az egytized rész $2 \cdot 10\,000$ forint. A 7. gyerek kap $70\,000 + 2 \cdot 10\,000 = 90\,000$ forintot. És így tovább...

3. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Ha a résztvevők csak feleannyian lennének, akkor az eredetileg lejátszandó játszmák 24%-ára kerülne sor. Hány versenyző indult eredetileg a versenyen?

Arany Dániel Matematikaverseny 2006/2007, haladók I. kategória, 1.forduló

Megoldás:

Jelöljük az indulók számát n -nel ($n > 0$ egész szám). Ekkor egy versenyző $(n - 1)$ másikkal játszik. Ha mindegyik játékost figyelembe vesszük, $n(n - 1)$ játszma adódna, de ekkor egy játszmát két versenyzőnél is számoltunk. Így a játszmák száma $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ha feleannyi résztvevő lenne, akkor ugyanilyen gondolatmenettel $\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{2}$ játszmát kapunk. A feladat szerint

$$\frac{\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)}{2} = 0,24 \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

$n \neq 0$, ezért osztjuk $\frac{n}{2}$ -vel az egyenlet mindkét oldalát, majd rendezzük az egyenletet:

$$\frac{n}{4} - \frac{1}{2} = 0,24 \cdot (n - 1)$$

$$n - 2 = 0,96n - 0,96$$

$$0,04n = 1,04$$

$$n = 26$$

Tehát 26 versenyző indult.

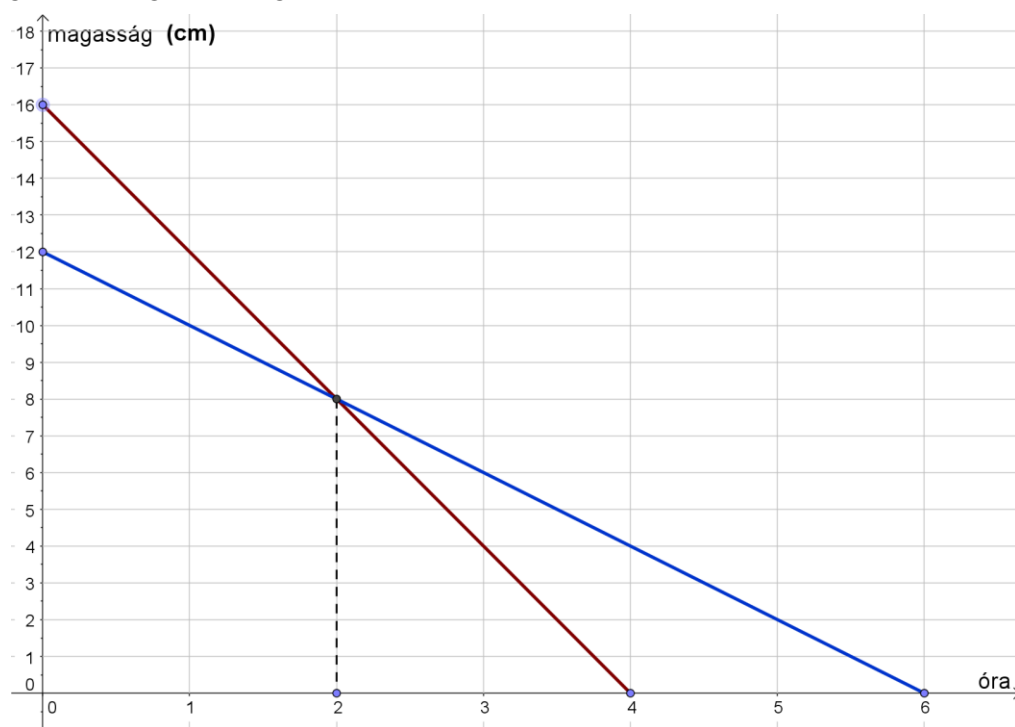
Ellenőrzés:

26 versenyző $\frac{26 \cdot 25}{2} = 325$ játszmát játszik, 13 versenyző pedig $\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ -at. 325-nek a 24 %-a valóban 78.

4. Van két gyertyánk, az egyik 16 cm magas, a másik 12 cm. Az egyik 4 óra alatt ég le, a másik 6 óra alatt. Ha a két gyertyát egyszerre meggyújtjuk, mennyi idő múlva lesz a két gyertya egyenlő magas? (A gyertyák egyenletesen égnek.)

Megoldás I:

Most grafikus megoldás a legrövidebb:



Az első gyertya magasságát az idő függvényében a (0; 16) és (4; 0) pontokat összekötő szakasz, a másodikét a (0; 12) és (6; 0) pontokat összekötő szakasz mutatja.

A metszéspont első koordinátája azt a pillanatot adja meg, amikor a két gyertya azonos magasságú, tehát a meggyújtás után két órával lesz egyenlő a két gyertya magassága.

Ellenőrzés:

Grafikus megoldásnál azért ellenőrzünk, mert sok esetben ilyen módszerrel csak közelítő megoldást kaphatunk.

Két óra alatt az első gyertyának a fele ég el, így 8 cm marad belőle. A második gyertyának az egyharmada, 4 cm ég el, így 8 cm marad. Valóban azonos a két gyertya magassága.

Megoldás II:

Adjunk algebrai megoldást is. A két gyertya t óra múlva lesz azonos magasságú.

Az első gyertyának a $\frac{t}{4}$ -ed része, $\frac{t}{4} \cdot 16 = 4t$ cm ég el, marad $16 - 4t$ cm.

A második gyertyának $\frac{t}{6}$ -od része, $\frac{t}{6} \cdot 12 = 2t$ cm ég el, marad $12 - 2t$ cm.

Akkor egyenlő a magasság, amikor:

$$16 - 4t = 12 - 2t$$

$$4 = 2t$$

$$t = 2$$

A meggyújtás után 2 órával lesz azonos a két gyertya magassága.

5. Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítéskor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.
- Hány sor van a fenyők parcellájában?
 - Hány platánfát telepítettek?

Középszintű érettségi 2006.október 25.

Megoldás:

Most több ismeretlent kell használnunk. A feladat szövegéből látható, hogy a fenyőfákat tartalmazó parcellát érdemes ehhez alapul venni. Legyen ebben a parcellában s sor és minden sorban f fa.

Az adatok rendszerezésében pedig egy táblázat fog segíteni:

	sor	egy sorban ennyi fa van	összesen
fenyő	s	f	$s \cdot f$
tölgy	$s - 4$	$f - 5$	$(s - 4)(f - 5)$
platán	$s + 3$	$f + 2$	$(s + 3)(f + 2)$

A feltételek szerint:

$$(s - 4)(f - 5) = s \cdot f - 360$$

$$(s + 3)(f + 2) = s \cdot f + 228$$

Felbontjuk a zárójeleket és rendezzük az egyenleteket:

$$sf - 4f - 5s + 20 = sf - 360$$

$$sf + 3f + 2s + 6 = sf + 228$$

$$4f + 5s = 380 \quad / \cdot 3 \quad *$$

$$3f + 2s = 222 \quad / \cdot 4$$

Az egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerével oldjuk meg:

$$12f + 15s = 1140$$

$$12f + 8s = 888$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikat:

$$7s = 252$$

$$s = 36$$

Ezt az értéket a * egyenletbe visszahelyettesítve megkapjuk f értékét:

$$4f + 5 \cdot 36 = 380$$

$$f = 50$$

Töltsük ki ezekkel az adatokkal a fenti táblázatot:

	sor	egy sorban ennyi fa van	összesen
fenyő	36	50	$36 \cdot 50 = 1800$
tölgy	32	45	$32 \cdot 45 = 1440$
platán	39	52	$39 \cdot 52 = 2028$

A táblázat adatai mutatják, hogy a feladat feltételei valóban teljesülnek. Mindegyik parcellában ismerjük a fák számát, de figyeljünk arra, hogy mi volt a kérdés, arra válaszoljunk:

- a) A fenyőfák parcellájában 36 sor van.
- b) 2028 platánfát telepítettek.

6. Egyszer néhány fiú horgászni ment a közeli tóhoz. Egyikük 6 halat fogott, a többiek fejenként 13-at. Egy másik alkalommal egy másik fiúcsapat ment horgászni, ezúttal egyikük 5 halat fogott, a többiek fejenként 10-et. Tudjuk még, hogy mindkét alkalommal ugyanannyi halat fogtak, méghozzá 100-nál többet, de 200-nál nem többet. Hányan mentek horgászni az első alkalommal és hányan a második alkalommal?

Kalmár László Matematikaverseny 2008, 8. osztály, megyei forduló

Megoldás:

Az első alkalommal n , a második alkalommal k fiú ment horgászni. A fogott halak számára az alábbi feltételek teljesülnek (n és k pozitív egész számok):

$$100 < 6 + (n - 1) \cdot 13 \leq 200 \quad \Rightarrow \quad 9 \leq n \leq 15$$

$$100 < 5 + (k - 1) \cdot 10 \leq 200 \quad \Rightarrow \quad 11 \leq k \leq 20$$

$$6 + (n - 1) \cdot 13 = 5 + (k - 1) \cdot 10$$

Rendezve az egyenletet:

$$13n - 2 = 10k$$

13-nak olyan többszörösét keressük, amelyekből 2-t kivonva tízzel osztható számot kapunk. Ez a nagyságrendi megkötést is figyelembe véve csak $n = 14$ és $k = 18$ esetén teljesül. Tehát az első alkalommal 14-en, a második alkalommal 18-an mentek horgászni.

7. Egy háromjegyű szám első és harmadik jegyének az összege 7, a második jegye 6. Ha felcseréljük az első és a harmadik számjegyet és az eredeti számból kivonjuk az így kapott háromjegyű számot, akkor 297-et kapunk. Melyik ez a szám?

Megoldás:

Ha a százask helyén álló szám x , akkor az egyesek helyén álló szám $7 - x$. Az eredeti és a felcseréléssel kapott szám értékét felírjuk a helyiértékeket figyelembe véve:

$$100x + 60 + 7 - x = 99x + 67$$

$$100(7 - x) + 60 + x = 760 - 99x.$$

A két szám különbsége:

$$99x + 67 - (760 - 99x) = 297$$

$$198x - 693 = 297$$

$$198x = 990$$

$$x = 5$$

Így a háromjegyű szám 562.

Ellenőrzés:

$5 + 2 = 7$, $562 - 265 = 297$. A megoldásunk jó.

8. Egy medencét két csövön keresztül 4 óra 48 perc alatt töltenek meg vízzel. Ha csak egy csövet használnak, akkor az egyik csövön át 4 órával hamarabb telik meg a medence, mint a másikon.
- a) Mennyi idő alatt töltené meg külön-külön a két cső a medencét?
- b) Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha a kisebb kapacitású csapot 2 órával később nyitják meg?

Megoldás:

a) Az első csövön keresztül x óra alatt, a másodikon keresztül $x + 4$ óra alatt telne meg a medence.

1 óra alatt az első csövön a medencébe az $\frac{1}{x}$ -szed része, a másodikon pedig az $\frac{1}{x+4}$ -ed része folyik.

4 óra 48 perc, $\left(4 + \frac{48}{60}\right) = 4,8$ óra alatt $\frac{4,8}{x}$ -szed része, illetve $\frac{4,8}{x+4}$ -ed része.

A medence akkor van tele, ha ez a két rész együtt 1 egészet ad:

$$\frac{4,8}{x} + \frac{4,8}{x+4} = 1$$

$$4,8 \cdot (x + 4) + 4,8x = x \cdot (x + 4)$$

$$9,6x + 19,2 = x^2 + 4x$$

$$x^2 - 5,6x - 19,2 = 0$$

A másodfokú egyenlet két gyöke:

$$x = 8 \quad \text{és} \quad x = -2,4.$$

A negatív megoldásnak nincs jelentése ebben a feladatban.

Az egyik csövön keresztül 8 óra, a másikon keresztül 12 óra alatt telne meg a medence, ha csak az egyiket használnák.

Ellenőrzés:

Az első csövön keresztül $\frac{4,8}{8} = 0,6$ rész jut a medencébe 4 óra 48 perc alatt, a másodikon keresztül $\frac{4,8}{12} = 0,4$ rész. $0,6 + 0,4 = 1$, tehát a medence valóban megtelt ennyi idő alatt.

b) A kisebb kapacitású cső az, amelyiken keresztül hosszabb idő alatt telik meg a medence, tehát 12 óra alatt.

Jelöljük t -vel azt az időt, amíg a nagyobb kapacitású cső működik.

Ekkor az egyik cső $\frac{t}{8}$ -ad, a másik a $\frac{t-2}{12}$ -ed részét tölti meg a medencének. t óra alatt akkor lesz tele, ha

$$\frac{t}{8} + \frac{t-2}{12} = 1$$

$$6t + 4(t-2) = 48$$

$$10t - 8 = 48$$

$$10t = 56$$

$$t = 5,6$$

Tehát az egyik cső 5,6 óráig, azaz 5 óra 36 percig üzemel, a másik pedig 3,6 óráig, azaz 3 óra 36 percig.

Ellenőrzés:

$\frac{5,6}{8} = 0,7$, $\frac{3,6}{12} = 0,3$. $0,7 + 0,3 = 1$, tehát ilyen feltételek mellett valóban megtelik a medence.

9. Két arany-ezüst ötvözet van. Az elsőben 3:4, a másodikban 2:5 ezen fémek aránya. Mennyit vegyünk az egyes ötvözetekből, ha 50 kg olyan ötvözetet szeretnénk készíteni, amelyben az arany és az ezüst aránya 5:7?

Megoldás:

Az első ötvözetből x kg-ot, a másodikból $50 - x$ kg-ot vegyünk. Figyeljünk az összetevők aranytartalmára:

Az első ötvözet $\frac{3}{7}$ része arany, tehát $\frac{3}{7}x$ kg aranyat tartalmaz.

A második ötvözet aranytartalma $\frac{2}{7} \cdot (50 - x)$ kg.

Az előállított anyagban pedig $50 \cdot \frac{5}{12}$ kg aranyra kell lennie, ami az összetevőkből adódik:

$$\frac{3}{7}x + \frac{2}{7} \cdot (50 - x) = 50 \cdot \frac{5}{12}$$

$$3x + 2 \cdot (50 - x) = \frac{1750}{12} \quad \left(145\frac{5}{6}\right)$$

$$3x + 100 - 2x = 145,83 \quad \left(45\frac{5}{6}\right)$$

$$x = 45,83$$

$$50 - x = 4,17$$

Az eredményünk végtelen szakaszos tizedes tört. Elméleti szempontból ez a „pontos” érték. Szöveges feladat esetében érdemes meggondolni, hogy az adataink mennyire lehetnek pontosak, ennek megfelelően kerekítsünk.

Most válasszunk két tizedes jegy pontosságot. 45,83 kg-ot vegyünk az első és 4,17 kg-ot a második ötvözetből.

Ellenőrzés:

A 45,83 kg ötvözetben $45,83 \cdot \frac{3}{7} \approx 19,64$ kg arany, a 4,17 kg ötvözetben $4,17 \cdot \frac{2}{7} \approx 1,19$ kg arany van. Így az 50 kg ötvözetben 20,83 kg arany lesz. A feladat szerint $50 \cdot \frac{5}{12} \approx 20,83$ kg aranyra kell lennie, tehát a megoldásunk az adott közelítéssel pontos. Természetesen, ha a pontos értékekkel $\left(45\frac{5}{6}\right)$ ellenőriztünk volna, akkor az ellenőrzés is pontos értéket adna.

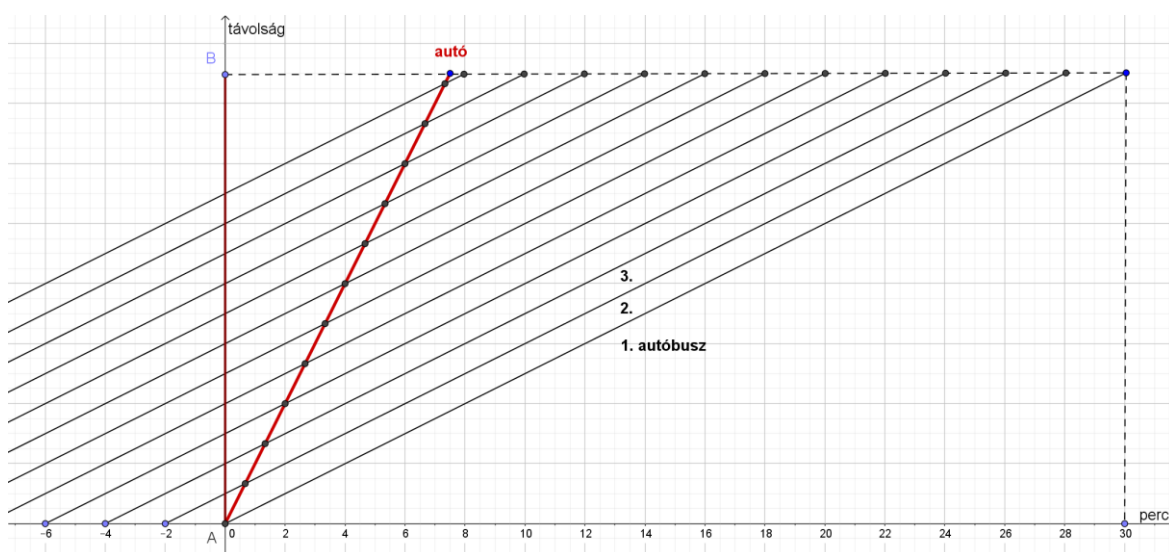
- 10.** Egy autóbusz 30 perc alatt teszi meg az utat a kiinduló állomástól a végállomásig. A kiinduló állomásról 2 percenként indítják az autóbuszokat. Az egyik autóbusszal egy időben indul a kiinduló állomásról egy autó, amelynek sebessége négyszer akkora, mint az autóbuszé. Hány autóbust előz meg az autó a végállomásig?

Megoldás I:

Az autó negyed annyi idő alatt teszi meg a távolságot, mint egy busz, azaz 7,5 perc alatt. Azokat az autóbuszokat fogja megelőzni az autó, amelyek az indulásakor már útban vannak és az érkezésükig még legalább 7,5 perc van hátra. Az autóbuszok 2 percenként indulnak, így az első megelőzött autóbusz az, amelyikkel együtt indul, az utolsó, amelyik 22 perccel ezelőtt indult, azaz 12 autóbust előz meg.

Megoldás II:

Használjunk grafikont:



Az első tengelyen mérjük az időt, a második tengelyen a távolságot. Az időtengely 0 pontját az autó indulásához tesszük. Az **A** (a koordináta-rendszer kezdőpontja) a kiindulási állomás, **B** a végállomás. Az autó 7,5 perc alatt teszi meg az AB távolságot, az autóbuszok 30 perc alatt. A grafikonról leszámolható, hogy az autó 12 autóbust előz meg, ezt mutatják a metszéspontok (az autóval együtt induló buszt is figyelembe vesszük).

Ez a grafikon az előző megoldás gondolatmenetét is világosabbá teszi.

III. Gyakorló feladatok

11. Soma ezt mondja: Ha a születési évszámomhoz nyolcat adok, az így kapott szám első és utolsó jegyét felcserélem, és ezután kivonok belőle tizenkettőt, akkor éppen ezret kapok. Melyik évben született Soma?
12. Kukori és Kotkoda egy tojással teli kosárral érkezett a piacra. Az első vevőjük Kopasznyakú volt, aki megvette a tojások felét és még két tojást. A második vevőjük Kendermagos volt, aki megvette az első vásárlásból megmaradt tojások felét és még két tojást. A harmadik vásárló, Hápogi megvette a második vásárlásból megmaradt tojások felét és még két tojást. A negyedik vásárló, Csőrike megvette a Hápogi vásárlása után megmaradt tojások felét és még két tojást. Csőrike vásárlása után Kotkoda örömmel állapította meg, hogy kiürült a kosár. Mennyi tojást vitt el Kukori és Kotkoda a kosárban a piacra?

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2013., Győr, 9.évfolyam

13. Mihály gazdának van néhány lova. Minden lónak naponta egy-egy tarisznya zabot ad, és így egy láda zab 20 napra elég. A múlt hónapban vett még egy lovat, így a láda zab már 18 nap alatt elfogyott, mert mint eddig, mindegyik lónak minden nap egy-egy tarisznya zabot ad. Hány lova van Mihály gazdának?

Varga Tamás Matematikaverseny 2009., iskolai forduló, 8. osztály

14. Egy dobozban 64 darab pénzérme gyűlt össze, 100 forintosok, 50 forintosok és 10 forintosok. Az érmék között kétszer annyi 50 forintos volt, mint 100-as. Mindezt egy 2000 forintos papírpénzre tudtuk beváltani. Hány darab százasunk, ötvenesünk és tízesünk volt beváltás előtt?
15. Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

Emelt szintű érettségi 2012. október 16.

16. Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre.

Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben?

Középszintű érettségi 2012. október 16., 16. feladat a) része

17. Egy faluban polgármestert választanak. A két jelölt Károly és Sándor. A lakosok nagyon aktívak, 90%-uk elment szavazni. A szavazatokból 128 lett érvénytelen. Károlyra 248-cal többen szavaztak érvényesen, mint Sándorra. Károlyra a teljes lakosság 49%-a voksolt. Hány szavazatot kapott?

KÖMAL 2016. szeptember, C.1364

18. A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg úgy tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 Ft/kg, a II. osztályút 650 Ft/kg, a III. osztályút pedig 450 Ft/kg egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti

össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte.

Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg. Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

Emelt szintű érettségi 2016. május 3., 1.feladat c) része

19. Egy város sportklubjának 640 fős tagságát felnőttek és diákok alkotják. A tagság 55%-a sportol rendszeresen. A rendszeresen sportoló tagok számának és a sportklub teljes taglétszámának az aránya $\frac{11}{8}$ -szor akkora, mint a rendszeresen sportoló felnőttek számának aránya a felnőtt klubtagok számához viszonyítva. A rendszeresen sportolók aránya a felnőtt tagságban fele akkora, mint amekkora ez az arány a diákok között.
Hány felnőtt és hány diák tagja van ennek a sportklubnak?

Emelt szintű érettségi 2011. május 3.

20. Juli most kétszer olyan idős, mint Kriszti volt 2 évvel ezelőtt. Életkoruk összege 5 év múlva 36 év lesz. Hány évesek most?
21. Hány oldalú az a sokszög, amelynek 12-vel több átlója van, mint ahány oldala?
22. A 2014-et felírtuk három természetes szám összegeként úgy, hogy ha az első számot elosztjuk a másodikkal, akkor hányadosként és maradékként is 8-at kapunk. Ha pedig a harmadik számot osztjuk az elsővel, akkor a hányados 6, a maradék pedig 20. Mivel egyenlő ez a három természetes szám?

Kalmár László Matematikaverseny 2014., 8. osztály, döntő

23. Egy régi vár kútjába követ ejtünk. A kő csobbanását 2 s múlva halljuk. Milyen mély a kút?
(A nehézségi gyorsulás értéke $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$, a hang terjedési sebessége $340 \frac{m}{s}$.)
24. Két folyóparti város távolsága 240 km. Ezt az utat a menetrendszerinti hajó oda-vissza 25 óra alatt teszi meg. Mekkora sebességgel haladna ez a hajó álló vízben, ha a folyó 4 km/h sebességgel folyik?
25. Megy a gőzös Kanizsára a 21 km-re lévő Zalakomárról. Az utat 16 perc alatt teszi meg úgy, hogy indulástól egyenletesen gyorsul, majd 90 km/h állandó sebességgel halad, végül egyenletesen lassulva megáll. Mennyi ideig megy a gőzös 90 km/h sebességgel?

KÖMAL 2005 május, C.812

26. Péter és az öccse, Miklós versenyt futott 1 km-es távon. Péter 50 másodperces előnyt adott, és így még 50 m-re volt a céltól, amikor öccse befutott. „Lebecsültem erődet – szólt – , holnap csak 100 m előnyt kapsz.” Másnap Miklós valóban bátyja után ért célba 16 másodperccel. A versenytáv mely pontján előzte meg a második napon Péter az öccsét? (Feltesszük, hogy egyéni teljesítményük a két napon ugyanaz volt.)

Arany Dániel Matematikaverseny 1980., kezdők, 1. forduló

27. Egy 75 km/h sebességgel haladó vonat 5 óra 12 perckor ér be egy 8 km hosszú alagútba teljes egészében, és 5 óra 18 perckor éri el az alagút kijáratát. Milyen hosszú a vonat?

ABACUS matematikai lapok 2016. március, C.1281.

28. András és Béla sakkoznak. Andrásnak 6 másodperccel kevesebb, Bélának 10 perccel több időre van szüksége ahhoz, hogy saját figuráit felállítsa a sakktáblára, mint amennyi időre akkor lenne szüksége, ha az összes sakkfigurát közösen raknák fel. Mennyi idő alatt rakja fel ki-ki a saját sakkfiguráit?

Arany Dániel Matematikaverseny 1978., kezdők, 1. forduló

29. Egy adott földterület felásását három munkás végzi. Éppen elkészülnek a munkával, ha az első 5 napot, a második 7 napot, a harmadik 4 napot dolgozik. Akkor is éppen elkészülnének a munkával, ha az első 7 napot, a második 9 napot, a harmadik 2 napot dolgozna. Hány napot kellene a munka elvégzéséhez a harmadik munkásnak dolgoznia, ha az első csak 2 napot, a második pedig csak 4 napot dolgozna?

OKTV 2015/2016, I kategória, II. forduló

30. Egy óra nagy-, kis- és másodpercmutatója közös tengelyen van. 12 órakor fedik egymást. Legközelebb mikor lesz fedésben a három mutató?

KÖMAL 1999. szeptember, C.547

IV. A gyakorló feladatok megoldásai

11. Soma ezt mondja: Ha a születési évszámomhoz nyolcat adok, az így kapott szám első és utolsó jegyét felcserélem, és ezután kivonok belőle tizenkettőt, akkor éppen ezret kapok. Melyik évben született Soma?

Megoldás.

Gondolkozzunk visszafelé:

Adjunk hozzá tizenkettőt: 1012.

Cseréljük vissza az első és utolsó jegyet: 2011.

Vonjunk ki nyolcat: 2003.

Soma 2003-ban született.

12. Kukori és Kotkoda egy tojással teli kosárral érkezett a piacra. Az első vevőjük Kopasznyakú volt, aki megvette a tojások felét és még két tojást. A második vevőjük Kendermagos volt, aki megvette az első vásárlásból megmaradt tojások felét és még két tojást. A harmadik vásárló, Hápogi megvette a második vásárlásból megmaradt tojások felét és még két tojást. A negyedik vásárló, Csőrike megvette a Hápogi vásárlása után megmaradt tojások felét és még két tojást. Csőrike vásárlása után Kotkoda örömmel állapította meg, hogy kiürült a kosár. Mennyi tojást vitt el Kukori és Kotkoda a kosárban a piacra?

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2013., Győr, 9.évfolyam

Megoldás:

Most is gondolkozzunk visszafelé.

Hápogi vásárlása után megmaradt tojások fele 2 tojás, tehát összesen 4 tojás maradt meg, ezt vette meg Csőrike.

Hápogi megvette a második vásárlásból megmaradt tojások felét és még két tojást. Az előző gondolatmenet szerint 4 tojás maradt. Ez azt jelenti, hogy a második vásárlásból megmaradt tojások fele 6, így összesen 12 tojás maradt meg Kendermagos vásárlása után.

Ugyanígy gondolkozva az első vásárlás után a tojások fele 14, így összesen 28 tojás maradt Kopasznyakú vásárlása után.

Ezt a gondolatot még egyszer alkalmazva megkapjuk, hogy eredetileg $(28 + 2) \cdot 2 = 60$ tojás volt eredetileg.

Ellenőrzés:

Kopasznyakú vett 60: $2 + 2 = 32$ tojást, maradt 28.

Kendermagos vett 28: $2 + 2 = 16$ tojást, maradt 12.

Hápogi vett 12: $2 + 2 = 8$ tojást és maradt 4.

Csőrike megvette ennek a felét és még 2 tojást, ezzel valóban elfogyott minden tojás.

Kukori és Kotkoda 60 tojást vitt a kosárban a piacra.

13. Mihály gazdának van néhány lova. Minden lónak naponta egy-egy tarisznya zabot ad, és így egy láda zab 20 napra elég. A múlt hónapban vett még egy lovat, így a láda zab már 18 nap alatt elfogyott, mert mint eddig, mindegyik lónak minden nap egy-egy tarisznya zabot ad. Hány lova van Mihály gazdának?

Varga Tamás Matematikaverseny 2009. iskolai forduló, 8. osztály

Megoldás I:

Ha Mihály gazdának n lova van most, akkor korábban $n - 1$ lova volt. Így a láda tartalmát kétféle módon fejezhetjük ki

$$20 \cdot (n - 1) = 18 \cdot n$$

$$n = 10$$

Mihály gazdának most 10 lova van.

Megoldás II:

Eredetileg 20 napra elég a láda tartalma. Ha eggyel több ló van, akkor a korábban is meglévő lovak 2 napi zabmennyisége lesz elég ennek a lónak 18 napra (a régi lovak a régi feltételekkel eszik a maguk adagját). Így $18 : 2 = 9$ lova volt korábban Miklós gazdának, az új lóval együtt pedig 10.

14. Egy dobozban 64 darab pénzérme gyűlt össze, 100 forintosok, 50 forintosok és 10 forintosok. Az érmék között kétszer annyi 50 forintos volt, mint 100-as. Mindezt egy 2000 forintos papírpénzre tudtuk beváltani. Hány darab százasunk, ötvenesünk és tízesünk volt beváltás előtt?

Megoldás:

A 100 forintosok számát jelöljük x -el. Ekkor az 50 forintosok száma $2x$, a 10 forintosok száma $64 - 3x$.

A pénzérme értéké:

$$100 \cdot x + 50 \cdot 2x + 10 \cdot (64 - 3x) = 2000$$

$$x = 8$$

8 darab 100 forintos, 16 darab 50 forintos és 40 darab 10 forintos volt a dobozban.

Ellenőrzés:

$$8 \cdot 100 + 16 \cdot 50 + 40 \cdot 10 = 2000.$$

15. Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

Emelt szintű érettségi 2012. október 16.

Megoldás:

A két szám x és $29 - x$.

Ha az elsőből 15-öt elveszünk és a másodikhoz 15-öt adunk, a kapott számok: $x - 15$ és $29 - x + 15 = 44 - x$.

Az eredeti két szám szorzata $x \cdot (29 - x)$, az új számok szorzata $(x - 15)(44 - x)$.

A feladat szerint:

$$\begin{aligned}(x - 15)(44 - x) &= 5 \cdot x \cdot (29 - x). \\ 44x - 660 - x^2 + 15x &= 145x - 5x^2 \\ 4x^2 - 86x - 660 &= 0\end{aligned}$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$-6 \text{ és } 27,5.$$

Ellenőrzés:

Ha $x = -6$, akkor a másik szám 35, ezek szorzata -210 .

Ha a számokat a szöveg alapján változtatjuk, -21 -et és 50 -öt kapunk, így a szorzat -1050 , ami valóban ötszöröse az előzőnek.

Ha $x = 27,5$, akkor a másik szám $1,5$, ezek szorzata $41,25$.

Az új számok $12,5$ és $16,5$, ekkor a szorzat $206,25$ és ez ötszöröse az előzőnek.

Tehát a két szám -6 és 35 vagy $27,5$ és $1,5$.

16. Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre.

Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben?

Középszintű érettségi 2012. október 16., 16. feladat a) része

Megoldás:

Stefi x percet beszélt csúcsidőben és $120 - x$ percet csúcsidőn kívül. Tudjuk, hogy mindkét kategóriában 2000 Ft-ot beszélt.

Így egy beszélgetés csúcsidőben $\frac{2000}{x}$ forintba, csúcsidőn kívül $\frac{2000}{120-x}$ forintba kerül. A feladat szövege szerint az első költség 25 forinttal drágább, mint a második:

$$\begin{aligned}\frac{2000}{x} &= \frac{2000}{120-x} + 25 \\ 2000 \cdot (120 - x) &= 2000x + 25x \cdot (120 - x) \\ 25x^2 - 7000x + 240000 &= 0 \\ x^2 - 280x + 9600 &= 0\end{aligned}$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: 240 és 40. Összesen 120 percet beszélt, ezért a 240 nem lehet megoldás.

Stefi 40 percet beszélt csúcsidőben (80 percet csúcsidőn kívül).

Ellenőrzés:

Egy beszélgetés csúcsidőben $2000:40 = 50$ Ft, csúcsidőn kívül $2000:80 = 25$ Ft. Valóban, ez utóbbi 25 forinttal olcsóbb.

17. Egy faluban polgármestert választanak. A két jelölt Károly és Sándor. A lakosok nagyon aktívak, 90%-uk elment szavazni. A szavazatokból 128 lett érvénytelen. Károlyra 248-cal többen szavaztak érvényesen, mint Sándorra. Károlyra a teljes lakosság 49%-a voksolt. Hány szavazatot kapott?

KÖMAL 2016. szeptember, C.1364

Megoldás:

A falunak x lakosa van. $0,9x$ lakos ment el szavazni. 128 szavazat lett érvénytelen, Károlyra $0,49x$ ember szavazott, Sándorra pedig $0,49x - 248$. Tehát

$$0,9x = 128 + 0,49x + 0,49x - 248$$

$$x = 1500$$

Az 1500-nak a 49%-a $1500 \cdot 0,49 = 735$.

Károly 735 szavazatot kapott.

Ellenőrzés:

Sándor $735 - 248 = 487$ szavazatot kapott. 128 érvénytelen szavazat volt.

$735 + 487 + 128 = 1350$, ami az 1500-nak valóban a 90%-a.

18. A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg úgy tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 Ft/kg, a II. osztályút 650 Ft/kg, a III. osztályút pedig 450 Ft/kg egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte.

Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg. Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

Emelt szintű érettségi 2016. május 3., 1.feladat c) része

Megoldás:

Vegyük észre, hogy nincs szükség arra az információra, hogy a III. osztályú eper mennyisége 33 kg. Arányokkal fogunk számolni, az eper konkrét mennyiségére nem lesz szükségünk a megoldáshoz.

Ha összesen x kg eper van, akkor $0,35x$ kg I. osztályú, $\frac{3}{8}x$ II. osztályú, a maradék pedig III. osztályú.

Tehát $x - 0,35x - \frac{3}{8}x = 0,275x$ kg lesz III. osztályú.

Az eredetileg tervezett bevétel:

$$0,35x \cdot 800 + \frac{3}{8}x \cdot 650 + 0,275x \cdot 450 = 647,5x \text{ Ft.}$$

Ha 15% -al kevesebb bevétellel is megelégszünk, akkor az eredeti terv 85%-ára számítunk, így 1 kg eper akciós ára:

$$\frac{647,5x \cdot 0,85}{x} = 550,375 \approx 550 \text{ Ft.}$$

Megjegyzés:

Természetesen ki lehet számítani pontosan azt, hogy hány kg volt az egyes eperfajtákból és ezt felhasználva következtethetünk az akciós árra. Ekkor szükségünk van arra az adatra is, hogy 33 kg a III. osztályú eper mennyisége.

19. Egy város sportklubjának 640 fős tagságát felnőttek és diákok alkotják. A tagság 55%-a sportol rendszeresen. A rendszeresen sportoló tagok számának és a sportklub teljes taglétszámának az aránya $\frac{11}{8}$ -szor akkora, mint a rendszeresen sportoló felnőttek számának aránya a felnőtt klubtagok számához viszonyítva. A rendszeresen sportolók aránya a felnőtt tagságban fele akkora, mint amekkora ez az arány a diákok között.
Hány felnőtt és hány diák tagja van ennek a sportklubnak?

Emelt szintű érettségi 2011. május 3.

Megoldás:

A sportklubnak f felnőtt és $640 - f$ diák tagja van.

A rendszeresen sportolók száma $640 \cdot 0,55 = 352$.

A rendszeresen sportoló felnőttek aránya a felnőtt tagok között $0,55 \cdot \frac{11}{8} = 0,55 \cdot \frac{8}{11} = 0,4$.

A diákok között a sportolók aránya $2 \cdot 0,4 = 0,8$.

Ezek ismeretében számoljuk ki a rendszeresen sportolók számát:

$$0,4 \cdot f + 0,8 \cdot (640 - f) = 352$$

$$f = 400$$

$$640 - f = 240.$$

A sportklubnak 400 felnőtt és 240 diák tagja van.

Ellenőrzés:

A rendszeresen sportolók közül felnőtt $400 \cdot 0,4 = 160$, diák $240 \cdot 0,8 = 192$. Ez együtt valóban 352, ami a tagság 55%-a.

20. Juli most kétszer olyan idős, mint Kriszti volt 2 évvel ezelőtt. Életkoruk összege 5 év múlva 36 év lesz. Hány évesek most?

Megoldás:

Készítsünk táblázatot az életkorokról. Három időpontra kell figyelniük: 2 évvel ezelőtt, most, illetve 5 év múlva. Jelöljük x -szel Kriszti életkorát 2 évvel ezelőtt, tehát Juli most $2x$ éves. Ezzel a két adattal adjuk meg a többi életkort.

	2 évvel ezelőtt	most	5 év múlva
Juli	$2x - 2$	$2x$	$2x + 5$
Kriszti	x	$x + 2$	$x + 7$

A feltételek szerint:

$$2x + 5 + x + 7 = 36$$

$$x = 8$$

Ezzel az adattal kitöltjük a fenti táblázatot:

	2 évvel ezelőtt	most	5 év múlva
Juli	14	16	21
Kriszti	8	10	15

A táblázatból látható, hogy a feladat feltételei teljesülnek.

Juli most 16 éves, Kriszti pedig 10 éves.

21. Hány oldalú az a sokszög, amelynek 12-vel több átlója van, mint ahány oldala?

Megoldás:

Egy n oldalú sokszögnek $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ átlója van, tehát

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = n + 12$$

$$n^2 - 3n = 2n + 24$$

$$n^2 - 5n - 24 = 0$$

$$n = 8 \text{ vagy } n = -3.$$

Csak a pozitív megoldásnak van itt értelme. A sokszög nyolcoldalú.

22. A 2014-et felírtuk három természetes szám összegeként úgy, hogy ha az első számot elosztjuk a másodikkal, akkor hányadosként és maradékként is 8-at kapunk. Ha pedig a harmadik számot osztjuk az elsővel, akkor a hányados 6, a maradék pedig 20. Mivel egyenlő ez a három természetes szám?

Kalmár László Matematikaverseny 2014., 8. osztály, döntő

Megoldás:

Legyen a három szám x, y, z , ekkor $x + y + z = 2014$.

$$x = 8y + 8$$

$$z = 6x + 20$$

Felhasználva az x -re kapott kifejezést:

$$z = 6(8y + 8) + 20 = 48y + 68$$

A három szám összege:

$$8y + 8 + y + 48y + 68 = 2014$$

$$57y + 76 = 2014$$

$$y = 34; \quad x = 8 \cdot 34 + 8 = 280; \quad z = 6 \cdot 280 + 20 = 1700$$

Az első szám 280, a második szám 34, a harmadik szám 1700.

23. Egy régi vár kútjába követ ejtünk. A kő csobbanását 2 s múlva halljuk. Milyen mély a kút?

(A nehézségi gyorsulás értéke $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$, a hang terjedési sebessége $340 \frac{m}{s}$.)

Megoldás:

A megoldásban felhasználjuk, hogy a szabadon eső test t másodperc alatt $\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ utat, a v sebességgel egyenletesen mozgó test pedig $v \cdot t$ utat tesz meg.

A kő szabadon esik t másodpercig, majd a koppanás hangja $(2 - t)$ másodperc alatt jut a fülünkbe a hang terjedési sebességével. A kő és a hang ugyanannyi utat tesz meg:

$$\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 = 340 \cdot (2 - t)$$

$$4,905 \cdot t^2 + 340t - 680 = 0$$

A másodfokú egyenlet pozitív megoldása $t \approx 1,9454$ s. Közelítő értéket kaptunk. Még tovább kell számolnunk vele, ezért több tizedes jegyet hagyunk meg.

Ennyi ideig esik a kő, tehát a megtett út: $\frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (1,9454 s)^2 \approx 18,6 m$.

A hang $340 \frac{m}{s} \cdot (2s - 1,9454s) \approx 18,6 m$.

Matematikai szempontból azt mondhatjuk, hogy a kút 18,6 m mély. Ha „gyakorlatiasan” fogalmazunk, akkor azt mondjuk, hogy a kút 18 és fél méter mély.

24. Két folyóparti város távolsága 240 km. Ezt az utat a menetrendszerinti hajó oda-vissza 25 óra alatt teszi meg. Mekkora sebességgel haladna ez a hajó álló vízben, ha a folyó 4 km/h sebességgel folyik?

Megoldás:

Ha a hajó sebessége álló vízben v km/h, akkor

a folyó sodrásának irányában $v + 4$ km/h a sebesség, az út megtételéhez $\frac{240}{v+4}$ óra kell, azzal szemben $v - 4$ km/h a sebesség, az út megtételéhez pedig $\frac{240}{v-4}$ óra szükséges.

Oda vissza az út 25 óra:

$$\frac{240}{v+4} + \frac{240}{v-4} = 25 \quad / \cdot (v+4)(v-4)$$

A megoldásokat a $v > 0, v \neq 4$ feltételek mellett keressük.

$$240(v-4) + 240(v+4) = 25(v+4)(v-4)$$

$$480v = 25v^2 - 400$$

$$25v^2 - 480v - 400 = 0$$

$$5v^2 - 96v - 80 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: 20 és $-0,8$, de a feladat feltételeinek csak a pozitív megoldás megfelelő.

A hajó sebessége álló vízben 20 km/h.

Ellenőrzés:

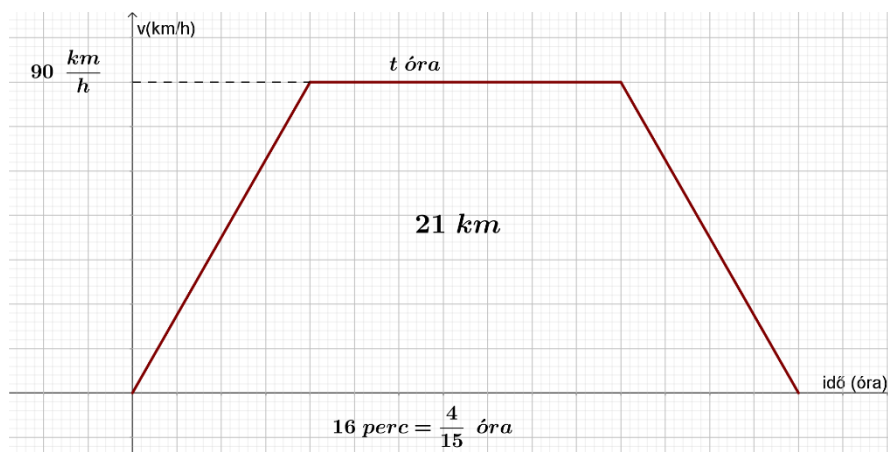
A folyón lefelé haladva $240:20 = 12$ óra a menetidő, a folyón felfelé haladva pedig $240:16 = 15$ óra. Tehát oda-vissza az út valóban 27 óra.

25. Megy a gőzös Kanizsára a 21 km-re lévő Zalakomárról. Az utat 16 perc alatt teszi meg úgy, hogy indulástól egyenletesen gyorsul, majd 90 km/h állandó sebességgel halad, végül egyenletesen lassulva megáll. Mennyi ideig megy a gőzös 90 km/h sebességgel?

KÖMAL 2005 május, C.812

Megoldás I:

Ábrázoljuk a gőzös mozgását sebesség-idő grafikonon. A 16 percet váltsuk át órára: $\frac{16}{60} = \frac{4}{15}$ óra.



Tudjuk, hogy a megtett út számértéke a grafikon alatti terület számértékével egyezik meg. Ez a síkidom most egy trapéz. Fontos, hogy ha a sebesség mértékegysége km/h, akkor az időt órában adjuk meg. A trapéz két alapja $\frac{4}{15}$ óra és t óra, a magasság pedig 90 km/h, tehát a terület:

$$\frac{\left(\frac{4}{15} + t\right) \cdot 90}{2} = 21$$

Az egyenletet rendezzük:

$$24 + 90t = 42$$

$$90t = 18$$

$$t = \frac{1}{5} \text{ óra} = 12 \text{ perc}$$

A gőzös 12 percig megy 90 km/h sebességgel.

Megoldás II:

A gőzös t_1 óráig gyorsít 90 km/h sebességre, t óráig 90 km/h sebességgel halad, t_2 óra alatt egyenletesen lassítva megáll. $t_1 + t + t_2 = 16 \text{ perc} = \frac{4}{15} \text{ óra}$.

Az első és a harmadik szakaszon egyenletesen gyorsít, illetve egyenletesen lassít, ezért az átlagsebesség ezeken a szakaszokon 45 km/h.

A megtett út:

$$45 \cdot t_1 + 90 \cdot t + 45 \cdot t_2 = 21$$

$$45 \cdot (t_1 + t + t_2) + 45 \cdot t = 21$$

$$45 \cdot \frac{4}{15} + 45t = 21$$

$$t = \frac{1}{5} \text{ óra} = 12 \text{ perc}$$

Megjegyzés:

Mindkét megoldásból látható, hogy ezekből az adatokból nem tudjuk megmondani, hogy mennyi ideig tartott a gyorsítás és a lassítás külön-külön.

26. Péter és az öccse, Miklós versenyt futott 1 km-es távon. Péter 50 másodperces előnyt adott, és így még 50 m-re volt a céltól, amikor öccse befutott. „Lebecsültem erődet – szolt – ,holnap csak 100 m előnyt kapsz.” Másnap Miklós valóban bátyja után ért célba 16 másodperccel. A versenytáv mely pontján előzte meg a második napon Péter az öccsét? (Feltesszük, hogy egyéni teljesítményük a két napon ugyanaz volt.)

Arany Dániel Matematikaverseny 1980., kezdők, I. forduló

Megoldás:

Péter x másodperc alatt, Miklós y másodperc alatt futja le az 1 km-t.

Az első esetben Miklós lefutotta a távot y másodperc alatt. Péter pedig 50 másodperccel később indult és 50 méterrel lemaradt, azaz 950 m utat $y - 50$ másodperc alatt tett meg. Ez az ő menetidejének $\frac{95}{100}$ -a:

$$\frac{95}{100}x = y - 50$$

A második esetben Péter lefutotta a távot x másodperc alatt. Miklós $x + 16$ másodperc alatt csak 900 métert futott, ehhez $\frac{9}{10}y$ másodpercre volt szüksége:

$$x + 16 = \frac{9}{10}y$$

Az első egyenletből y -t kifejezzük és a második egyenletbe behelyettesítjük:

$$x + 16 = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{95}{100}x + 50 \right)$$

$$x + 16 = 0,855x + 45$$

$$0,145x = 29$$

$$x = 200$$

$$y = 240$$

Péter az egész távot 200 másodperc, Miklós 240 másodperc alatt futja. Erre az eredményre szükségünk van, de ne felejtsük el, hogy nem ez a kérdés.

Péter a rajttól s méterre érte utol Miklóst a második napon. Péter 100 méter előnyt adott, amit Miklós a fenti eredmények alapján 24 másodperc alatt futott le, tehát Péter 24 másodperccel később indult.

Az s métert Péter $\frac{s}{1000} \cdot 200 = \frac{s}{5}$ másodperc alatt futja, Miklós $\frac{s}{1000} \cdot 240 = \frac{6s}{25}$ másodperc alatt.

$$\frac{6s}{25} = \frac{s}{5} + 24$$

$$s = 600.$$

Tehát a rajttól 600 méterre előzte meg Péter Miklóst.

Ellenőrzés:

Az első napon Miklós 240 másodperc alatt megtette a távot. Péter $240 - 50 = 190$ másodpercet futott, ezalatt $\frac{190}{200} \cdot 1000 = 950$ métert tesz meg, valóban 50 méterrel marad le.

A második napon Péter 200 másodperc alatt célba ért. Miklós 900 métert $0,9 \cdot 240 = 216$ másodperc alatt futott le, így valóban 16 másodperccel később ért célba.

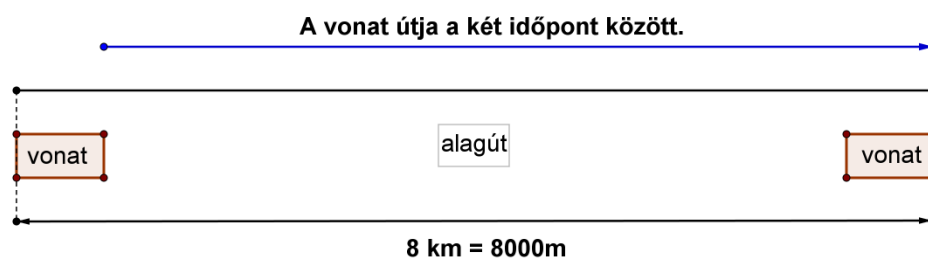
600 métert Péter $0,6 \cdot 200 = 120$ másodperc alatt fut le. Ha Miklós 100 méter előnyt kapott, akkor 500 métert kellett megtennie, ehhez $0,5 \cdot 240 = 120$ másodpercre van szüksége. Tehát a rajttól 600 méterre valóban találkoznak.

27. Egy 75 km/h sebességgel haladó vonat 5 óra 12 perckor ér be egy 8 km hosszú alagútba teljes egészében, és 5 óra 18 perckor éri el az alagút kijáratát. Milyen hosszú a vonat?

ABACUS matematikai lapok 2016. március, C.1281.

Megoldás:

Érdemes ábrát készíteni, ezzel jobban el tudjuk képzelni, hogy mi történik:



A vonat két helyzete között 6 perc telik el. Ez $\frac{1}{10}$ óra, ami alatt a vonat 7,5 km = 7500 m utat tesz meg. Ezt éppen a vonat hosszát egészíti ki az alagút hosszára.

Tehát a vonat 500 m hosszú.

28. András és Béla sakkoznak. Andrásnak 6 másodperccel kevesebb, Bélának 10 perccel több időre van szüksége ahhoz, hogy saját figuráit felállítsa a sakktáblára, mint amennyi időre akkor lenne szüksége, ha az összes sakkfigurát közösen raknák fel. Mennyi idő alatt rakja fel ki-ki a saját sakkfiguráit?

Arany Dániel Matematikaverseny 1978., kezdők, 1. forduló

Megoldás I:

Közösen t másodperc alatt tennék fel az összes figurát. András a saját figuráit $(t - 6)$ másodperc alatt, Béla $t + 10$ másodperc alatt teszi fel. Az összes figurát kétszer ennyi idő alatt tennék fel egyedül.

1 másodperc alatt az összes figurának András az $\frac{1}{2(t-6)}$ -od részét, Béla az $\frac{1}{2(t+10)}$ -ed részét teszi fel,

t másodperc alatt pedig a $\frac{t}{2(t-6)}$ -ed részét, illetve $\frac{t}{2(t+10)}$ -ed részét. Ezek együtt 1 egészt adnak:

$$\frac{t}{2(t-6)} + \frac{t}{2(t+10)} = 1$$

$$t(t+10) + t(t-6) = 2(t-6)(t+10)$$

$$2t^2 + 4t = 2t^2 + 8t - 120$$

$$t = 30$$

András egyedül a saját figuráit $30 - 6 = 24$ másodperc, Béla pedig $30 + 10 = 40$ másodperc alatt teszi fel.

Ellenőrzés:

András 30 másodperc alatt az összes bábu $\frac{30}{2 \cdot 24} = \frac{5}{8}$ részét teszi fel, Béla pedig a $\frac{30}{2 \cdot 40} = \frac{3}{8}$ részét. $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$, így 30 másodperc alatt valóban felrakják közösen az összes bábút.

Megoldás II:

A feladat szerint Béla 16 másodperccel hosszabb ideig rakja fel a saját figuráit, mint András. Nézzük meg, hogyan rakják fel együtt az összes figurát. Legyen az a módszer, hogy közösen kezdenek hozzá, de először csak a saját figuráikat rakják. Amikor András befejezte, akkor még Bélának 16 percre lenne szüksége, de András besegít, így együtt 6 perc alatt végeznek. Ez azt jelenti, hogy Bélának $\frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ -szor annyi idő kell egyedül (akárhány bábú esetén) a bábuk felrakásához, mint ha ezt közösen tennék. Ha az összes bábút t másodperc alatt teszik fel közösen, akkor ezt Béla $\frac{8t}{3}$ idő alatt oldaná meg. Ha csak a saját bábúit (fele annyit) rak fel, akkor $\frac{4t}{3}$ - idő szükséges. A feladat szerint ez 10 perccel hosszabb, mintha közösen az összes bábút rakná fel. Tehát $\frac{t}{3} = 10$, $t = 30$.

András 24 másodperc, Béla 40 másodperc alatt rakja fel a saját bábúit.

29. Egy adott földterület felásását három munkás végzi. Éppen elkészülnek a munkával, ha az első 5 napot, a második 7 napot, a harmadik 4 napot dolgozik. Akkor is éppen elkészülnének a munkával, ha az első 7 napot, a második 9 napot, a harmadik 2 napot dolgozna. Hány napot kellene a munka elvégzéséhez a harmadik munkásnak dolgoznia, ha az első csak 2 napot, a második pedig csak 4 napot dolgozna?

OKTV 2015/2016, I kategória, II. forduló

Megoldás:

Az első munkás x nap alatt, a második y nap alatt, a harmadik z nap alatt végzi el egyedül a munkát.

1 nap alatt a munka $\frac{1}{x}$ -ed, $\frac{1}{y}$ -ad, $\frac{1}{z}$ -ed részét végzik el.

Ha az első 5 napot, a második 7 napot, a harmadik 4 napot dolgozik, akkor elkészülnek, azaz:

$$\frac{5}{x} + \frac{7}{y} + \frac{4}{z} = 1$$

Ha az első 7 napot, a második 9 napot, a harmadik 2 napot dolgozna, akkor is készen lennének.

$$\frac{7}{x} + \frac{9}{y} + \frac{2}{z} = 1$$

Három ismeretlenünk van, de csak két egyenletünk. Ez általában nem elég az ismeretlenek meghatározásához. Háttha nem is lesz erre szükségünk.

Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a = \frac{1}{x} ; \quad b = \frac{1}{y} \quad c = \frac{1}{z}$$

Ekkor az egyenleteink:

$$5a + 7b + 4c = 1$$

$$7a + 9b + 2c = 1$$

Célunk, egy ismeretlennel, c -vel kifejezni a többit. Az első egyenletet 7-tel, a másodikat 5-tel szorozzuk és kivonjunk egymásból:

$$\begin{array}{r} 35a + 49b + 28c = 7 \\ 35a + 45b + 10c = 5 \end{array} \quad -$$

$$4b + 18c = 2$$

$$b = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}c.$$

Ezt behelyettesítjük az első egyenletbe:

$$5a + \frac{7}{2} - \frac{63}{2}c + 4c = 1$$

$$5a = -\frac{5}{2} + \frac{55}{2}c$$

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2}c.$$

Tehát

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{z}.$$

Tegyük fel, hogy a harmadik munkásnak n napot kell dolgoznia, ha az első 2 napot, a második pedig 4 napot dolgozik és így elkészülnek:

$$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} + \frac{n}{z} = 1.$$

Felhasználjuk az előbb kapott értékeket:

$$-1 + 11 \cdot \frac{1}{z} + 2 - 18 \cdot \frac{1}{z} + \frac{n}{z} = 1$$

$$\frac{n-7}{z} = 0$$

Ez csak $n = 7$ esetén teljesül.

Az x és y ismerete nélkül meg tudtuk mondani, hogy ebben az esetben a harmadik munkásnak 7 napig kell dolgoznia.

Még meg kell néznünk, hogy van-e a feltételeknek megfelelő x, y, z . Ha nem lenne, akkor azt kellene mondanunk, hogy a feladatnak nincs megoldása.

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{11-z}{2z} \Rightarrow x = \frac{2z}{11-z}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{z-9}{2z} \Rightarrow y = \frac{2z}{z-9}$$

x és y pozitív számok, ezért $9 < z < 11$. Az egész számok között $z = 10$ jó. Ekkor $x = y = 20$. (Elvileg z nem csak egész szám lehet, de ha gyakorlatiasan állunk a kérdéshez, azaz x, y és z esetén is egész számot várunk, akkor azt mondhatjuk, hogy az első és a második munkás 20 - 20 óra, a harmadik munkás pedig 10 óra alatt készülne el egyedül a terület felásásával.)

Ekkor

$$\frac{5}{20} + \frac{7}{20} + \frac{4}{10} = 1$$

$$\frac{7}{20} + \frac{9}{20} + \frac{2}{10} = 1$$

$$\frac{2}{20} + \frac{4}{20} + \frac{7}{10} = 1$$

Most már bátran kimondhatjuk, hogy a harmadik munkásnak 7 napig kell dolgoznia az adott feltételek mellett.

30. Egy óra nagy-, kis- és másodpercmutatója közös tengelyen van. 12 órakor fedik egymást. Legközelebb mikor lesz fedésben a három mutató?

KÖMAL 1999. szeptember, C.547

Megoldás:

Először a nagy- és a kismutatóra figyeljünk. A két mutató akkor áll újra egy helyen, amikor a kismutató egyszer vagy többször lekörözte a nagymutatót.

A nagymutató 1 perc alatt $0,5^\circ$ -ot, a kismutató 6° -ot tesz meg. Amikor 12 óra után t perc telt el, akkor a nagymutató $0,5 \cdot t^\circ$ -ot, a kismutató $6 \cdot t^\circ$ -ot fordult. Ha a kismutató k -szor körözte le a nagyot, akkor $k \cdot 360^\circ$ -kal többet fordult el:

$$0,5 \cdot t + k \cdot 360 = 6 \cdot t$$

$$5,5 \cdot t = k \cdot 360$$

$$t = k \cdot \frac{720}{11}$$

(Ez például azt jelenti, hogy $k = 1$ esetén $t \approx 65,45$ perc, tehát 13 óra 5 perc 27 másodpercnél fedik egymást a nagy- és a kismutató.)

Most ugyanezt a gondolatot a nagymutató és a másodpercmutató esetén alkalmazzuk. A másodpercmutató 1 perc alatt 360° -ot fordul. Ha t perc alatt n -szer körözte le a nagymutatót, akkor:

$$0,5 \cdot t + n \cdot 360 = 360 \cdot t$$

$$355,5 \cdot t = n \cdot 360$$

$$t = n \cdot \frac{720}{711}$$

Ha a három mutató együtt áll, akkor ennek a két feltételnek egyszerre kell teljesülnie megfelelő k és n pozitív egész számokra.

$$k \cdot \frac{720}{11} = n \cdot \frac{720}{711}$$

$$711 \cdot k = 11 \cdot n$$

711 nem osztható 11-gyel, ezért k osztható 11-gyel. Így a legkisebb értéket akkor kapjuk, ha $k = 11$, és ebből $t = 720$ perc=12 óra. Tehát a három mutató 12 óra múlva fog újra találkozni.