

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: 2017. november 24. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Trigonometriai számítások

I. Mit érdemes tudnunk trigonometriai számításokhoz?

1. Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése.

Ne csak betűkkel, hanem szavakkal is tudjuk megfogalmazni a definíciót, mert ez biztonságot ad abban, hogy egy ábrán a megfelelő szögfüggvényt használjuk.

2. Szögfüggvények általános értelmezése, előjelek, trigonometrikus függvények viselkedésének ismerete. Geometriai számításokban a $0^\circ - 360^\circ$ tartományt használjuk.

3. Nevezetes szögek szögfüggvényeinek ismerete.

- $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$. Ezek ismerete, tudása alapvető.
- $15^\circ, 75^\circ, 18^\circ, 36^\circ, 72^\circ$. Ezekről „jó” tudni, hogyan vezethetem le vagy hol találhatom meg.

4. Szinusztétel.

5. Koszinusztétel.

A hegyesszögek szögfüggvényeit, a szinusztételt, a koszinusztételt akár egy feladaton belül is fel kell tudnunk ismerni és használni.

6. Trigonometrikus azonosságok használata.

- összeg és különbség szögfüggvényei
- kétszeres szögek, félszögek szögfüggvényei
- összeg és különbség szorzattá alakítása

Egy szűkebb kört érdemes „fejből” tudni. A többitől azt jó tudni, hogy van ilyen, és megtalálom a függvény táblázatban.

7. Háromszög területének kiszámítása szögfüggvény használatával.

8. Trigonometrikus egyenletek megoldási módszerei.

9. Az eredményeink szinte mindig közelítő értékek, mert a szögfüggvények értéke csak kivételes esetekben pontos érték és a számítások során is további közelítéseket kell tennünk. Ezt tudva kell döntenünk arról, hogy számítási lépéseink során a részeredményeket milyen pontosan számoljuk ki, a végeredményt milyen pontossággal adjuk meg.

A definíciók tételek pontos megfogalmazása megtalálható az alábbi honlapokon:

https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/12.pdf 1-5. oldal

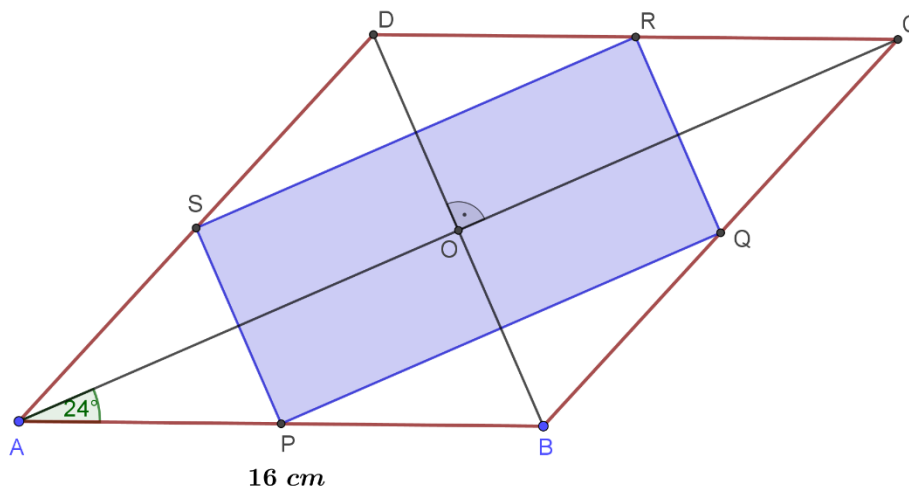
https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/13.pdf 1-5. oldal

Ebben a feladatanyagban igyekeztünk ennek a témának változatos áttekintését adni. A **Kidolgozott feladatok** fejezet 10 feladatban tekinti át a legfontosabb területeket. Részletes indoklás található minden feladatnál. A válogatás tartalmaz érettségi feladatokat és versenyfeladatokat is. A **Gyakorló feladatok** fejezet feladatanyaga – 12 feladat – további gyakorlásra ad lehetőséget. Ezeket feladatokat önálló munkára ajánljuk, ezért ebben a fejezetben csak a feladatok szövege szerepel. A feladatok számozása folytatja a kidolgozott feladatok számozását. A megoldásokat a **Gyakorló feladatok megoldásai fejezetben** adjuk meg.

II. Kidolgozott feladatok

1. Egy rombusz oldalának hossza 16 cm, hegyesszöge 48° . Az oldalainak felezőpontjait összekötve egy téglalapot kapunk. Mekkora a téglalap területe?

Megoldás:



A rombusz átlói merőlegesen egymásra, felezik egymást és felezik a rombusz szögeit. Ennek alapján az ABO háromszög derékszögű és egyik hegyesszöge 24° . Szögfüggvényeket használva:

$$BO = 16 \cdot \sin 24^\circ, \quad AO = 16 \cdot \cos 24^\circ.$$

A háromszög középvonala párhuzamos a háromszög megfelelő oldalával és annak fele. Így

$$SP = RQ = \frac{1}{2}BD = BO = 16 \cdot \sin 24^\circ,$$

$$PQ = SR = \frac{1}{2}AC = AO = 16 \cdot \cos 24^\circ.$$

Ezek a szakaszok párhuzamosak az átlókkal, tehát $PQ \perp PS$, valóban téglalap keletkezik, amelynek a területe:

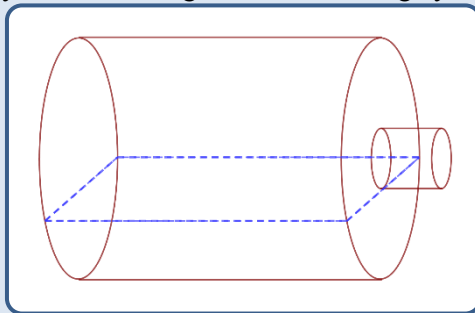
$$T = 16 \cdot \sin 24^\circ \cdot 16 \cdot \cos 24^\circ \approx 95,12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ebben a kifejezésben észrevehető a kétszeres szög szinuszára vonatkozó azonosság, ezzel egyszerűbb alakban is megadhatjuk a végeredményt:

$$T = 16 \cdot 8 \cdot 2 \cdot \sin 24^\circ \cdot \cos 24^\circ = 128 \cdot \sin 48^\circ \approx 95,12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2. Egy pillepalack olyan forgáshenger, amelynek alapköre 8 cm átmérőjű. A palack fedőkörén található a folyadék kiöntésére szolgáló, szintén forgáshenger alakú nyílás. A két hengernek közös a tengelye. A kiöntő nyílás alapkörének átmérője 2 cm. A palack magassága a kiöntő nyílás nélkül 30 cm. A palack vízszintesen fekszik úgy, hogy annyi folyadék van benne, amennyi még éppen nem folyik ki a nyitott kiöntő nyíláson keresztül.

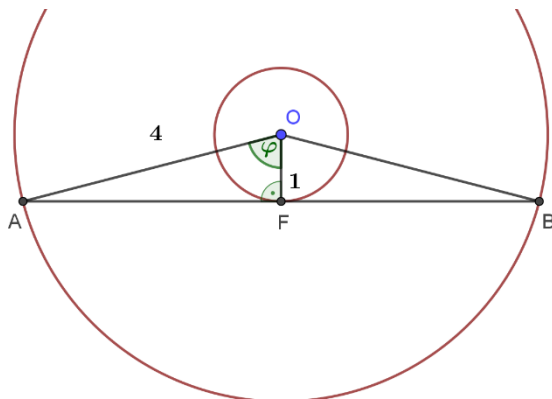
Hány deciliter folyadék van a palackban? (Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)



Emelt szintű érettségi 2011. október 18., a 7.feladat része

Megoldás:

Egy olyan hengerszerű test térfogatát keressük, amelynek az alaplapja egy körszelet és magassága 30 cm.



A körszelet egy 4 cm sugarú körben 2φ középponti szöghöz tartozik. OF merőleges az AB húrra, felezi az AOB -et. Az AB húr a középponttól 1 cm távolságra van. Az AOF háromszögből:

$$\cos \varphi = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 75,52^\circ.$$

A körszelet területét úgy kapjuk meg, ha az AOB körcikk területéből kivonjuk az AOB háromszög területét. Ez lesz a hengerszerű test (amelyet a folyadék alakja ad meg) alapterülete .

$$T_{alap} = \frac{2\varphi}{360^\circ} \cdot 4^2 \pi - \frac{4^2 \cdot \sin 2\varphi}{2} = 17,22 \text{ (cm}^2\text{)}$$

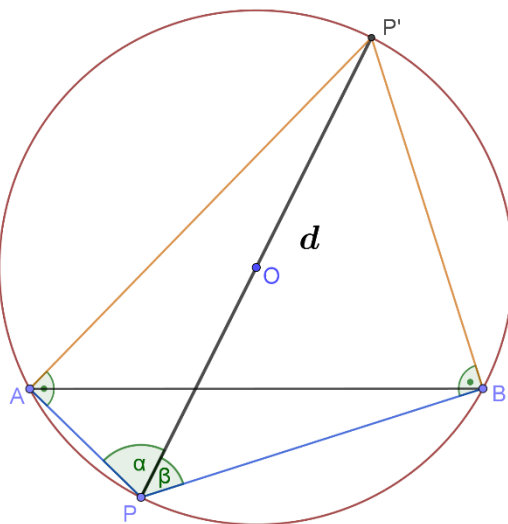
A folyadék térfogata:

$$V = T_{alap} \cdot m = 17,22 \text{ cm}^2 \cdot 30 \text{ cm} = 516,6 \text{ cm}^3 = 0,5166 \text{ dm}^3 = 5,166 \text{ dl} .$$

Az eredményt deciliterben és egy tizedes jegyre kerekítve kell megadnunk. A palackban 5,2 dl folyadék van.

3. A P pont végigfut egy kör félkörnél rövidebb AB ívén. Legyen P' a P -vel átellenes pont a körön. Bizonyítsuk be, hogy $AP' \cdot BP' - AP \cdot BP$ állandó!

OKTV 2013/2014, III kategória, I. forduló



Megoldás:

A kör átmérőjét jelöljük d -vel, legyen $\angle APP' = \alpha$, $\angle BPP' = \beta$. PP' a kör átmérője, ezért a Thálész-tétel miatt APP' és BPP' háromszögek derékszögűek. A szögfüggvények definíciója alapján:

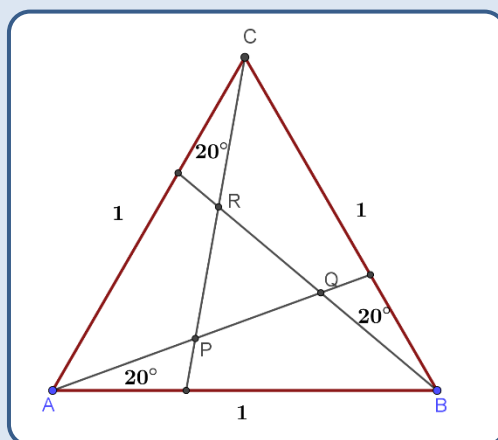
$$AP' = d \cdot \sin \alpha; \quad BP' = d \cdot \sin \beta; \quad AP = d \cdot \cos \alpha; \quad BP = d \cdot \cos \beta.$$

Ezeket felhasználva:

$$AP' \cdot BP' - AP \cdot BP = d^2(\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta) = -d^2 \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Az $\alpha + \beta$ szög nagysága a kerületi szögek tétele alapján állandó miközben a P pont az AB íven mozog, így ez a kifejezés valóban állandó.

4. Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható PQR háromszöget kaptuk.



Számítsa ki a PQR háromszög oldalainak a hosszát!

Emelt szintű érettségi 2017. május 9., a 8.feladat része

Megoldás:

A szabályos háromszög szögei 60° -osak, ezért $\angle ABQ = 40^\circ$, így $\angle AQB = 120^\circ$. Az ABQ háromszögben a szinusztétel alapján:

$$\frac{BQ}{AB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow BQ = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} \cdot AB = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} = 0,3949,$$

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow AQ = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} \cdot AB = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} = 0,7422.$$

Az ABC háromszög forgásszimmetriája miatt $AP = BQ$, így

$$PQ = AQ - AP = AQ - BQ = 0,3473.$$

Az ábra forgásszimmetriája miatt a PQR háromszög szabályos, tehát minden oldala 0,3473.

Megjegyzés:

A PQ -ra kapott kifejezést egyszerűbb alakra tudjuk hozni, ha az addíciós tételeket és $\sin 120^\circ$ pontos értékét használjuk:

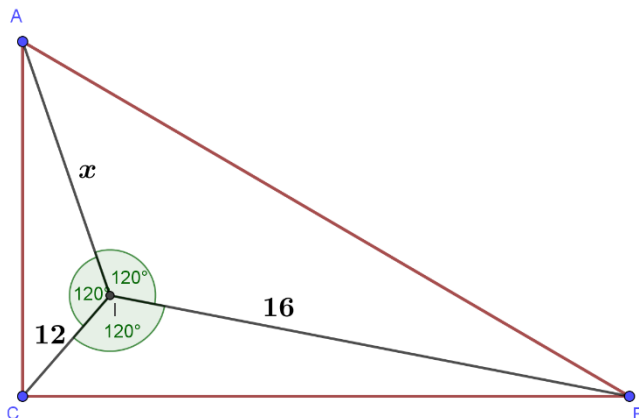
$$PQ = \frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \cdot \sin 10^\circ.$$

5. Az ABC derékszögű háromszög derékszögű csúcsa C , izogonális pontja I . (A háromszög izogonális pontja az a pont, amelyből a háromszög minden oldala azonos szög alatt látszik.) Tudjuk, hogy $IC = 12$ mm, $IB = 16$ mm. Adjuk meg az IA szakasz hosszát.

KÖMAL 2017. május, C.1425

Megoldás:

Az izogonális pontból minden oldal 120° -os szögben látszik.



Az AI szakaszt jelöljük x -el. Az ABI ; BCI ; CIA háromszögekre felírjuk a koszinusztételt:

$$AB^2 = x^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot x \cdot \cos 120^\circ = x^2 + 256 + 16 \cdot x$$

$$BC^2 = 12^2 + 16^2 - 2 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ = 592$$

$$AC^2 = 12^2 + x^2 - 2 \cdot 12 \cdot x \cdot \cos 120^\circ = 144 + x^2 + 12x$$

Írjuk fel a derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt:

$$x^2 + 256 + 16 \cdot x = 592 + 144 + x^2 + 12x$$

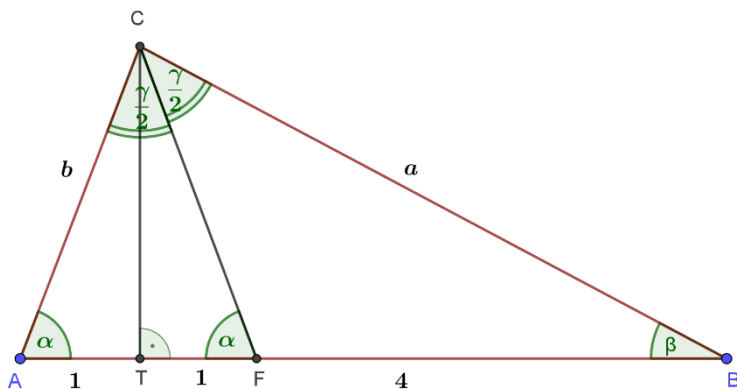
$$x = 120$$

Tehát az IA szakasz hossza 120 mm.

6. Egy háromszög egy csúcsból kiinduló magasságvonala és szögfelezője a háromszöget három kisebb háromszögre bontja, melyek területeinek aránya 1:1:4. Határozzuk meg a háromszög szögeit!

OKTV 1987., I. forduló

Megoldás I:



A kis háromszögekben azonos a magasság, ezért a területek aránya megegyezik az AT, TF, FB szakaszok arányával. Legyen $AB = 6$ egység. Az AFC háromszögben a magasság az alapot felezi, ezért ez a háromszög egyenlő szárú, az alapon fekvő szögei egyenlők (α). A szögfelezőtétel szerint a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, tehát $a : b = 4 : 2 = 2 : 1$.

A háromszögre felírjuk a szinuszételt:

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta = 2 \Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \beta. \quad (*)$$

Egy háromszög külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével. Ezt alkalmazzuk az FBC háromszögre: $\alpha = \beta + \frac{\gamma}{2}$, tehát $\frac{\gamma}{2} = \alpha - \beta$.

Az AFC háromszögben $2\alpha + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$. Az előző összefüggést felhasználva $3\alpha - \beta = 180^\circ$, azaz $\beta = 3\alpha - 180^\circ$. Ezt a (*) egyenletbe behelyettesítjük:

$$\sin \alpha = 2 \sin(3\alpha - 180^\circ) = -2 \sin 3\alpha.$$

Felhasználjuk a $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ azonosságot:

$$\sin \alpha = -6 \sin \alpha + 8 \sin^3 \alpha.$$

$\sin \alpha \neq 0$, ezért oszthatjuk az egyenletet vele:

$$7 = 8 \sin^2 \alpha.$$

α egy háromszög szöge, ezért $\sin \alpha$ nem lehet negatív, tehát $\sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$, $\alpha \approx 69,30^\circ$.

$\sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}}$, ebből $\beta \approx 27,89^\circ$. A harmadik szög $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 82,81^\circ$.

Megoldás II:

A háromszög AB oldalát válasszuk 6 egységnek. Az előző megoldásból felhasználjuk, hogy $\angle CAF = \angle CFA = \alpha$ és $\beta = 3\alpha - 180^\circ$. Az ATC háromszögben és a BTC háromszögben szögfüggvényeket használva:

$$CT = AT \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$CT = BT \cdot \operatorname{tg} \beta = 5 \cdot \operatorname{tg} \beta = 5 \cdot \operatorname{tg}(3\alpha - 180^\circ) = 5 \cdot \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Tehát:

$$\operatorname{tg} \alpha = 5 \cdot \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Innen a $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ azonosságot felhasználva és $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ -val osztva:

$$1 = 5 \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Átrendezve és figyelembe véve, hogy α hegyesszög ($\operatorname{tg} \alpha > 0$):

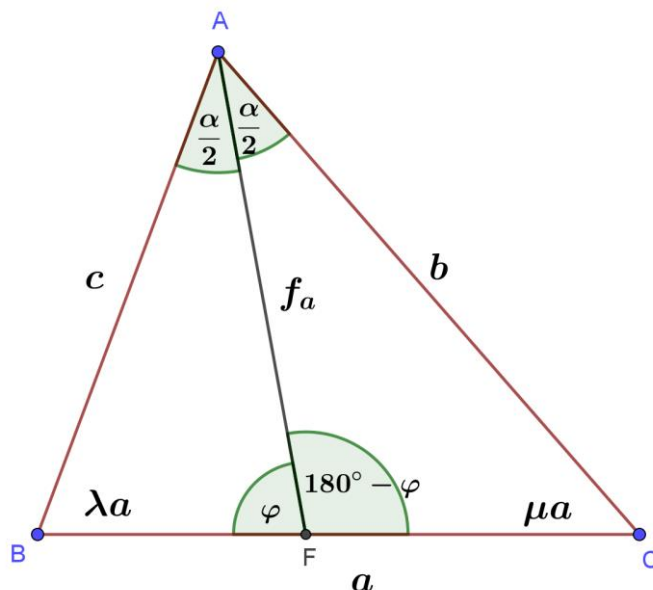
$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7} \Rightarrow \alpha \approx 69,30^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5} \Rightarrow \beta \approx 27,89^\circ,$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 82,81^\circ.$$

7. Adjuk meg a háromszög szögfelezőjének a hosszát az oldalak hosszának ismeretében.

Megoldás:



A háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Az ábra jelöléseit használva:

$$BF = \lambda a = \frac{c}{b+c} \cdot a, \quad CF = \mu a = \frac{b}{b+c} \cdot a.$$

Az ABF és az ACF háromszögre felírjuk a koszinusztételt:

$$f_a^2 + \lambda^2 a^2 - 2f_a \cdot \lambda a \cdot \cos \varphi = c^2$$

$$f_a^2 + \mu^2 a^2 - 2f_a \cdot \mu a \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = b^2$$

Felhasználjuk, hogy $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$. Az első egyenletet μ -vel, a másodikat λ -val megszorozzuk:

$$\mu f_a^2 + \mu \lambda^2 a^2 - 2f_a \cdot \lambda \mu a \cdot \cos \varphi = \mu c^2$$

$$\lambda f_a^2 + \mu^2 \lambda a^2 + 2f_a \cdot \lambda \mu a \cdot \cos \varphi = \lambda b^2$$

Összeadjuk a két egyenletet:

$$(\lambda + \mu) f_a^2 + \lambda \mu (\lambda + \mu) a^2 = \lambda b^2 + \mu c^2$$

Felhasználjuk, hogy $\lambda + \mu = 1$:

$$f_a^2 = \lambda b^2 + \mu c^2 - \lambda \mu a^2 \quad (*)$$

Behelyettesítjük a $\lambda = \frac{c}{b+c}$ és $\mu = \frac{b}{b+c}$ értékeket:

$$f_a^2 = \frac{cb^2}{b+c} + \frac{bc^2}{b+c} - \frac{bca^2}{(b+c)^2} = bc \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$$

$$f_a^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

Ha a háromszög területére bevezetjük a szokásos $2s$ jelölést, akkor

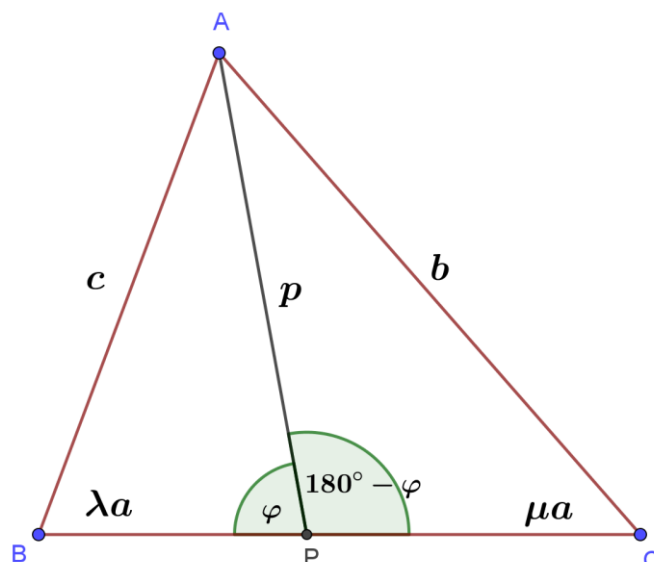
$$a + b + c = 2s \quad \text{és} \quad b + c - a = 2s - 2a.$$

$$f_a^2 = \frac{4bc \cdot s \cdot (s - a)}{(b + c)^2}$$

$$f_a = \frac{2}{b + c} \sqrt{bc \cdot s \cdot (s - a)}.$$

Megjegyzés:

A (*) összefüggés alkalmas λ és μ értékkel megadja az A pont és a BC oldal egy tetszőleges pontjának a távolságát. Ezt Stewart-tételnek is nevezik és az alábbi formában is használják:

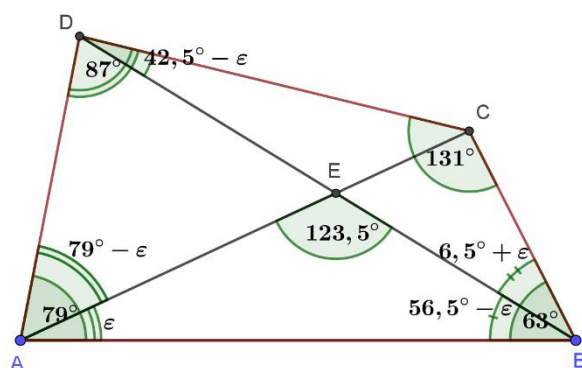


$$AP^2 \cdot BC = AB^2 \cdot PC + AC^2 \cdot PB - BC \cdot BP \cdot CP$$

8. Az $ABCD$ konvex négyszög egymás utáni szögei: $\alpha = 79^\circ$, $\beta = 63^\circ$, $\gamma = 131^\circ$, továbbá az AB oldal az átlók E metszéspontjából $\varepsilon = 123,5^\circ$ alatt látszik. Számítsuk ki a CAB szöget.

KÖMAL 1981. április, F.2311.

Megoldás:



A négyszög negyedik szöge 87° . Jelöljük ε -nal a CAB -et. Felhasználva, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180° , az ábrán jelölt szögeket ki tudjuk számítani ε segítségével.

A szinusztétel alapján az ABC és ACD háromszögekből:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin 63^\circ} \Rightarrow BC = \frac{\sin \varepsilon}{\sin 63^\circ} \cdot AC$$

$$\frac{DC}{AC} = \frac{\sin(79^\circ - \varepsilon)}{\sin 87^\circ} \Rightarrow DC = \frac{\sin(79^\circ - \varepsilon)}{\sin 87^\circ} \cdot AC$$

Ezekkel az értékekkel felírjuk a szinusztételt az BCD háromszögre:

$$\frac{BC}{DC} = \frac{\sin(42,5^\circ - \varepsilon)}{\sin(6,5^\circ + \varepsilon)} = \frac{\frac{\sin \varepsilon}{\sin 63^\circ} \cdot AC}{\frac{\sin(79^\circ - \varepsilon)}{\sin 87^\circ} \cdot AC} = \frac{\sin \varepsilon \cdot \sin 87^\circ}{\sin(79^\circ - \varepsilon) \cdot \sin 63^\circ}$$

Az összefüggést átrendezve:

$$\sin 63^\circ \cdot \sin(42,5^\circ - \varepsilon) \cdot \sin(79^\circ - \varepsilon) = \sin 87^\circ \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin(6,5^\circ + \varepsilon).$$

Az addíciós tételeket használva, beírva a közelítő értékeket és rendezve az egyenletet:

$$\begin{aligned} \sin 63^\circ \cdot (\sin 42,5^\circ \cdot \cos \varepsilon - \cos 42,5^\circ \cdot \sin \varepsilon) \cdot (\sin 79^\circ \cdot \cos \varepsilon - \cos 79^\circ \cdot \sin \varepsilon) = \\ = \sin 87^\circ \cdot \sin \varepsilon \cdot (\sin 6,5^\circ \cdot \cos \varepsilon + \cos 6,5^\circ \cdot \sin \varepsilon). \end{aligned}$$

$$0,8669 \cdot \sin^2 \varepsilon + 0,8728 \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon - 0,5909 \cdot \cos^2 \varepsilon = 0$$

Ha egy trigonometrikus egyenletben szinusz és koszinusz is szerepel, akkor érdemes arra gondolni, hogy a hányadosuk tangens és ezzel az ötlettel egyetlen szögfüggvényt tartalmazó egyenletet kaphatunk. Az egyenletet $\cos^2 \varepsilon$ -nal osztva:

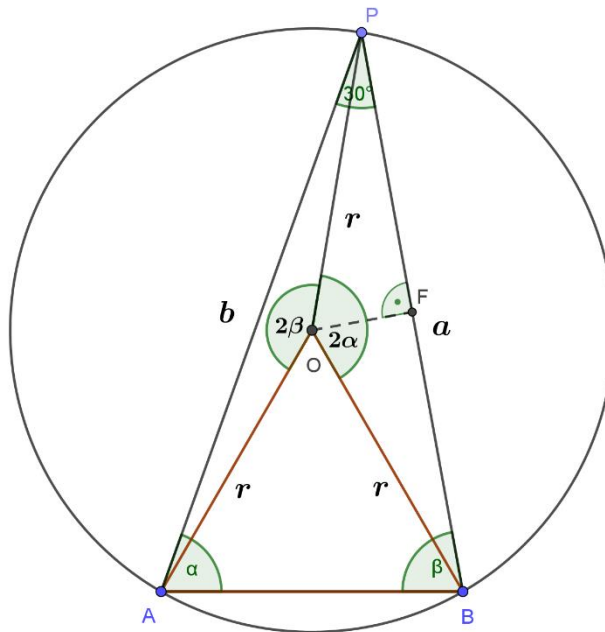
$$0,8669 \cdot \operatorname{tg}^2 \varepsilon + 0,8728 \cdot \operatorname{tg} \varepsilon - 0,5909 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a pozitív gyöke $\operatorname{tg} \varepsilon = 0,4670$, amiből $\varepsilon = 25^\circ$.

9. Egy 5 egység sugarú kör AB ívéhez tartozó 30° -os kerületi szög P csúcspontja mozog a körön. Mekkora a $PA + PB$ maximális értéke?

Felvételi (és érettségi) 1999. május 25.

Megoldás I:



A háromszög oldalait és szögeit az ábra szerint a szokásos módon jelöljük. Az azonos íven nyugvó kerületi szög fele a középponti szögnek, így $\angle BOP = 2\alpha$. BF a középpontból a húrra bocsátott

merőleges, ami felezi a húrt. A BOF derékszögű háromszögből $BF = r \cdot \sin \alpha$, ezért $a = 2r \cdot \sin \alpha$. (Belátható, hogy ez az összefüggés $\alpha \geq 90^\circ$ esetén is igaz.) $b = 2r \cdot \sin \beta$ szintén teljesül. Ezeket használva:

$$a + b = 2r \cdot (\sin \alpha + \sin \beta).$$

A szinuszok összegét alakítsuk szorzattá és használjuk fel, hogy $\alpha + \beta = 150^\circ$:

$$a + b = 4r \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 4r \cdot \sin 75^\circ \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

α és β a háromszög szögei, ezért $-180^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$. Ebben a tartományban $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ akkor a legnagyobb, ha $\alpha - \beta = 0$, azaz $\alpha = \beta = 75^\circ$, $a = b$. Ekkor $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$.

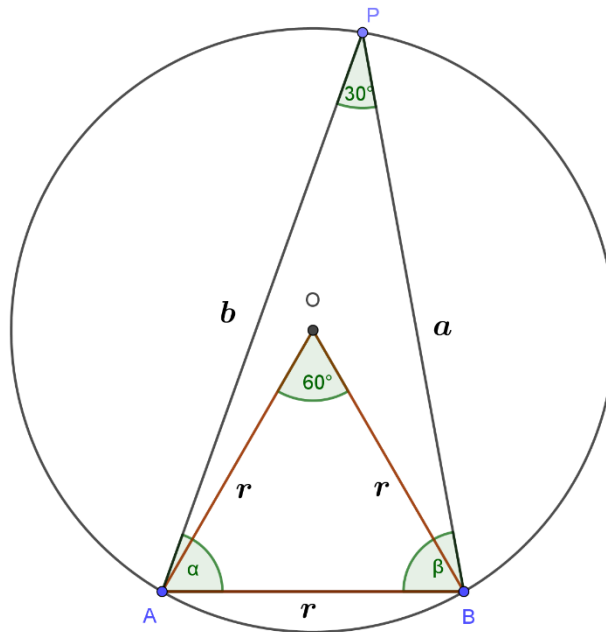
$\sin 75^\circ$ pontos értékét az addíciós tétel alapján számoljuk ki:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Felhasználva az $r = 5$ értéket $PA + PB$ maximális értéke:

$$4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 19,32 \text{ egység.}$$

Megoldás II:



Az azonos íven nyugvó kerületi szög fele a középponti szögnek, ezért $\angle APB = 30^\circ$. Ebből következik, hogy az $AOB\Delta$ szabályos, $AB = r$. Az a és b szakaszokat szinusztétel alapján kiszámítva:

$$\frac{a}{r} = \frac{\sin \alpha}{\sin 30^\circ}; \quad \frac{b}{r} = \frac{\sin \beta}{\sin 30^\circ}$$

$$a + b = \frac{r \cdot (\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin 30^\circ}.$$

$\beta = 150^\circ - \alpha$ összefüggést felhasználva:

$$\begin{aligned}
a + b &= 2r \cdot (\sin \alpha + \sin(150^\circ - \alpha)) = \\
&= 2r \cdot (\sin \alpha + \sin 150^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 150^\circ \cdot \sin \alpha) = \\
&= 2r \cdot \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha \right) = 2r \cdot \left(\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \right)
\end{aligned}$$

A zárójelben lévő kifejezést egyetlen szög szinuszaként írhatjuk fel az alábbi módszerrel:

$$\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}.$$

Emeljük ki a zárójelből ennek a kifejezésnek a négyzetgyökét:

$$2r \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \cos \alpha \right).$$

Ilyenkor létezik olyan φ hegyesszög, amelyre teljesül:

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad \text{és} \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Ebben az esetben

$$a + b = 2r \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sin(\alpha + \varphi).$$

$\sin(\alpha + \varphi)$ maximális értéke 1 és $a + b$ maximális értéke $2r \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 10 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Az első megoldásban látszólag ettől eltérő megoldást kaptunk, ezért még egy átalakítást elvégezzünk:

$$10 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = 5 \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = 5 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Megmutatható, hogy $\varphi = 15^\circ$. (Alkalmazzuk a $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$ összefüggést.) A maximális értéket akkor kapjuk, ha $\alpha + 15^\circ = 90^\circ$, azaz $\alpha = 75^\circ$ és így $B = 75^\circ$.

Most is azt kaptuk, hogy $PA + PB$ maximális értéke $5 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 19,32$ egység és ilyenkor $PA = PB$.

10. Bizonyítsa be, hogy ha az $ABCD$ paralelogramma hosszabbik átlója AC , C merőleges vetülete AB -n E , AD -n F , akkor

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

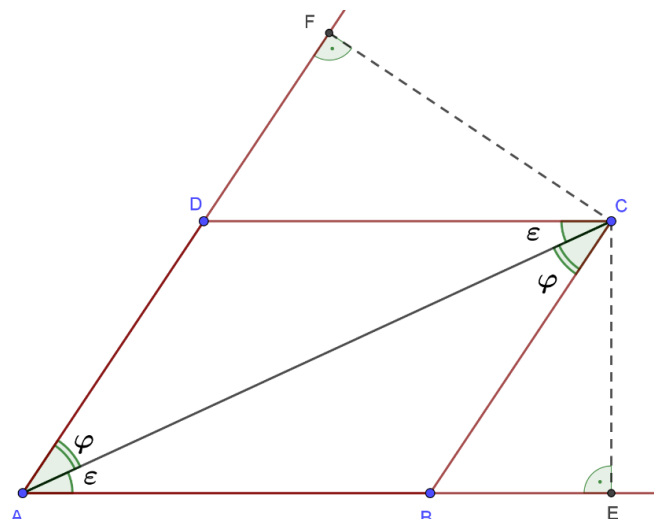
Igaz-e az állítás az $AC < BD$ esetben?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012, haladók I. kategória, III. forduló

Megoldás:

Osszuk el az $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$ egyenletet AC^2 -nel:

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AC} + \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AF}{AC} = 1. \quad (*)$$



Az ábra jelöléseit használva: $\angle BAC = \angle ACD = \varepsilon$, $\angle DAC = \angle ACB = \varphi$, mert váltószögek. Az ABC és ACD háromszögekből szinusz-tétel alapján:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \varphi}{\sin(180^\circ - \varepsilon - \varphi)} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\varepsilon + \varphi)}, \quad \frac{AD}{AC} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin(180^\circ - \varepsilon - \varphi)} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varphi)}.$$

Az AEC és AFC derékszögű háromszögekből:

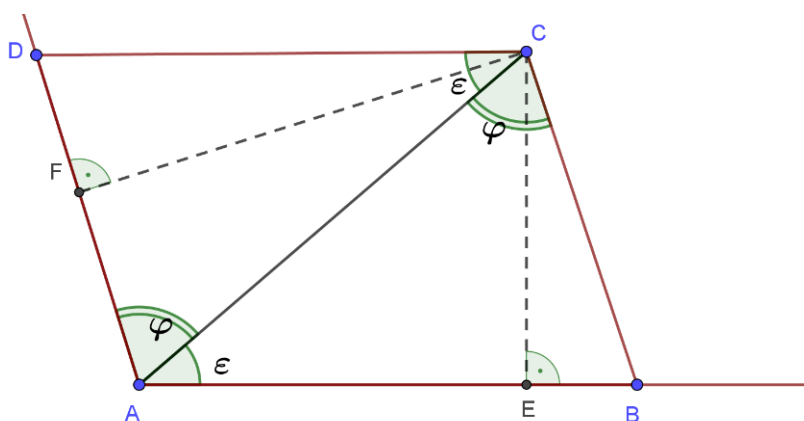
$$\frac{AE}{AC} = \cos \varepsilon, \quad \frac{AF}{AC} = \cos \varphi.$$

A (*) egyenletbe behelyettesítve és az addíciós tételt alkalmazva:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin(\varepsilon + \varphi)} \cdot \cos \varepsilon + \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varphi)} \cdot \cos \varphi = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sin(\varepsilon + \varphi)} = \frac{\sin(\varepsilon + \varphi)}{\sin(\varepsilon + \varphi)} = 1.$$

Ezzel a (*) összefüggést bebizonyítottuk, amiből következik a feladat állítása.

Az alábbi ábráról látszik, hogy az állítás az átlók nagyságviszonyától függetlenül igaz.

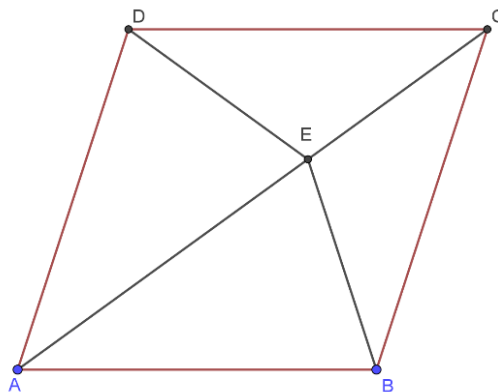


Megjegyzés:

A feladatnak van elemi geometriai megoldása is. 10. évfolyamon ilyen megközelítés várható, de szögfüggvények használatával azonban egyszerűbb megoldást kapunk.

III. Gyakorló feladatok

11. Egy háromszögben az A csúcsból induló súlyvonal egyenlő hosszú az AB oldallal. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{tg} \beta = 3 \cdot \operatorname{tg} \gamma$.
12. Jelölje a az $ABCD$ rombusz oldalának a hosszát. Az AC átlón kijelöltük azt az E pontot, amelyre $AE = a$ és $EB = EC = ED = 1$ egység. Hány egység hosszú a rombusz oldala?



- (A) 1 (B) $\sqrt{5} - 1$ (C) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{9}{5}$
 (E) Az előzőek közül egyik sem.

Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 2015, 11. osztály, megyei forduló

13. Egy háromszög két oldalának hossza 15 cm, 25 cm, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal 17 cm. Mekkora a harmadik oldal?
14. Egy húrnégyszög oldalai 5 cm, 13 cm, 17 cm és 9 cm. Mekkora a szögei? Mekkora a húrnégyszög köré írható kör sugara?
15. Egy egyenessel vágjunk ketté egy háromszöget két egyenlő területű részre úgy, hogy az egyeneseknek a háromszögön belüli szakasza a lehető legrövidebb legyen.

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 1992., Komárom, 12. évfolyam

16. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b , ahol $a < b$. Mekkora a derékszöget harmadoló egyenesek háromszögbe eső szakaszai közül a rövidebb?

OKTV, 1974. I. forduló

17. Az egyenlő szárú derékszögű ABC háromszög AB átfogója 14 cm. Vegyük fel a háromszög köré írt körnek a C pontot nem tartalmazó ívén a D pontot úgy, hogy a $\angle DCA = 30^\circ$ legyen. Mekkora a DCA háromszög területe?
18. Egy derékszögű háromszöget átfogójának felező merőlegesével egy háromszögre és egy négyszögre vágunk. A négyszög átlóinak az aránya

$$(1 + \sqrt{3}) : 2\sqrt{2}.$$

Mekkora a derékszögű háromszög hegyesszögei?

KÖMAL 2007. november, C. 919.

19. András és Bálint éjszakai túrán vettek részt. Sík terepre érve a távolban két különböző irányban is tűzijátékot vettek észre, és meg akarták állapítani a két tűzijáték helyszínének a távolságát. Megmérték, hogy a fény felvillanása után az egyik irányból 18, a másik irányból 14 másodperc alatt ért hozzájuk a petárdák durranásának hangja. A hang terjedési sebességét $340 \frac{m}{s}$ -nak vették, a fény terjedéséhez szükséges időt elhanyagolták. Aztán – mivel szögmérőműszerük nem volt – András az egyik, Bálint a másik tűzijáték irányába indulva megtett 32–32 lépést, majd megmérték, hogy így egymástól 60 lépés távolságra kerültek. (Természetesen igyekeztek egyforma hosszúságú lépésekkel mérni.)

András és Bálint mérési adatai alapján számolja ki a két tűzijáték távolságát kilométer pontossággal!

Emelt szintű érettségi 2009. május 5., idegen nyelvű feladatsor

20. Egy szabályos hétszög területe 4095 egység. A sokszög két szomszédos csúcsa A és B , a középpontja K . Az ABK háromszög körülírt körén, a hétszög belsejében fekvő P pontra

$$\frac{AP - PB}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Mekkora lehet az APB háromszög területe?

KÖMAL 2013. január, B. 4507..

21. Egy egyenes körkúpba írjon be egy félgömböt úgy, hogy az illeszkedjék a kúp alapkörének síkjára, gömbfelülete pedig érintse a kúp palástját! A kúp felszíne úgy aránylik a félgömb görbe felületének felszínéhez, mint 18:5. Határozza meg a kúp nyílásszögét!

Felvételi (és érettségi) 1998. május 26.

22. A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérőjelzést!

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót?

Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg!

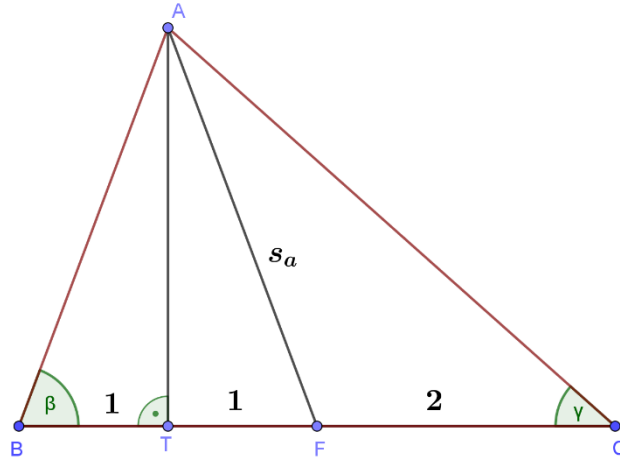
Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el!

Emelt szintű érettségi 2012. október 16.

IV. Gyakorló feladatok megoldásai

11. Egy háromszögben az A csúsból induló súlyvonal egyenlő hosszú az AB oldallal. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{tg} \beta = 3 \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

Megoldás:



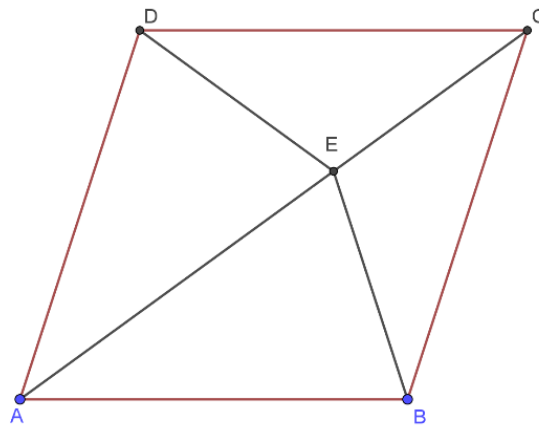
A BC oldal hosszát válasszuk 4 egységnek, a BC oldal felezőpontját jelöljük F -fel. $s_a = AB$, ezért a BFA háromszög egyenlőszárú, az AT magasságvonal felezi a BF alapot.

Így $BT = 1, TF = 1, FC = 2$. Ezt felhasználva:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AT}{1}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{AT}{3}.$$

Innen következik a feladat állítása: $\operatorname{tg} \beta = 3 \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

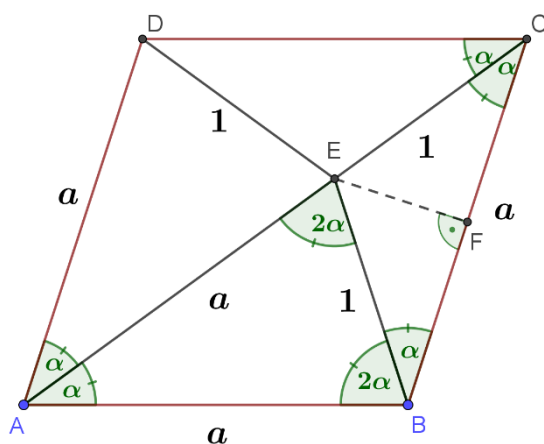
12. Jelölje a az $ABCD$ rombusz oldalának a hosszát. Az AC átlón kijelöltük azt az E pontot, amelyre $AE = a$ és $EB = EC = ED = 1$ egység. Hány egység hosszú a rombusz oldala?



- (A) 1 (B) $\sqrt{5} - 1$ (C) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{9}{5}$
 (E) Az előzőek közül egyik sem.

Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 2015, 11. osztály, megyei forduló

Megoldás:



A rombusz átlói felezik a rombusz szögeit, az ábrán a fél szögeket α -val jelöljük. Az EBC háromszög egyenlőszárú, az alapon fekvő szögek egyenlők, $\angle EBC = \angle ECB = \alpha$. Az $\angle AEB = 2\alpha$, mert az EBC háromszög külső szöge, így egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével. Az ABC háromszög is egyenlőszárú, így $\angle ABE = \angle ECB = 2\alpha$. Az ABE háromszögben a belső szögek összege $5\alpha = 180^\circ$, tehát $\alpha = 36^\circ$.

Az E pontból merőlegest bocsátunk a BC oldalra, ez a merőleges felezi az oldalt. Az EBF háromszögben

$$\frac{a}{2} = \cos 36^\circ \Rightarrow a = 2 \cdot \cos 36^\circ.$$

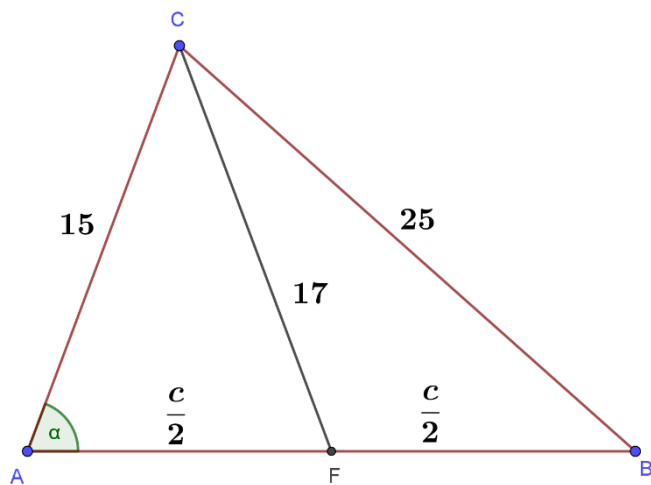
$\cos 36^\circ$ pontos értéke $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, így a rombusz oldala $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a helyes válasz a C.

Megjegyzés:

A https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika2/pdfs/05.pdf feladatsor 15. feladata tartalmazza a $\cos 36^\circ$ pontos értékének levezetését.

13. Egy háromszög két oldalának hossza 15 cm, 25 cm, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal 17 cm. Mekkora a harmadik oldal?

Megoldás:



Az ABC és AFC háromszögre felírjuk a koszinusztételt:

$$25^2 = 15^2 + c^2 - 2 \cdot 15 \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$17^2 = 15^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot 15 \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos \alpha$$

A második egyenletet szorozzuk meg 2-vel és vonjuk ki az első egyenletből:

$$25^2 - 2 \cdot 17^2 = -15^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$c^2 = 544 \quad \Rightarrow \quad c \approx 23,3.$$

A háromszög harmadik oldala 23,3 cm hosszú.

Megjegyzés:

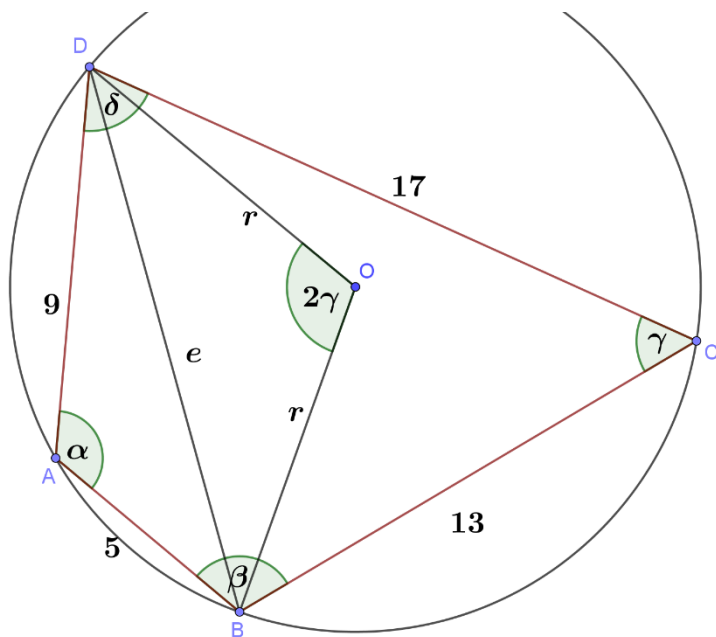
Ugyanezzel a módszerrel levezethető, hogy ha a háromszög oldalainak a hossza a, b, c , a C csúsból induló súlyvonal s_c , akkor

$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Továbbá itt is alkalmazható lenne a 7. kidolgozott feladatban megfogalmazott Stewart-tétel.

14. Egy húrnégyszög oldalai 5 cm, 13 cm, 17 cm és 9 cm. Mekkora a szögei? Mekkora a húrnégyszög köré írható kör sugara?

Megoldás:



A húrnégyszög szemben lévő szögeinek összege 180° , ezért $\gamma = 180^\circ - \alpha$. Az ABD és BCD háromszögekre felírjuk a koszinusztételt és felhasználjuk, hogy $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$:

$$e^2 = 25 + 81 - 90 \cdot \cos \alpha = 169 + 289 + 442 \cdot \cos \alpha.$$

$$532 \cdot \cos \alpha = -352$$

$$\cos \alpha = -0,6617$$

$$\alpha = 131,43^\circ \quad \Rightarrow \quad \gamma = 48,57^\circ.$$

Hasonlóan számolva:

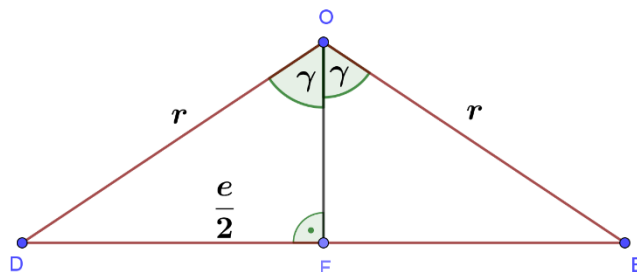
$$25 + 169 - 130 \cdot \cos \beta = 289 + 80 + 360 \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = -0,3571$$

$$\beta = 110,92^\circ \Rightarrow \delta = 69,08^\circ.$$

A fenti egyenletrendszerből az e átló kiszámolható, $e = 12,87$.

Az ugyanazon íven nyugvó középponti szög kétszer akkora, mint a kerületi szög, ezért $\angle BOD = 2\gamma$.



A DOB háromszögből:

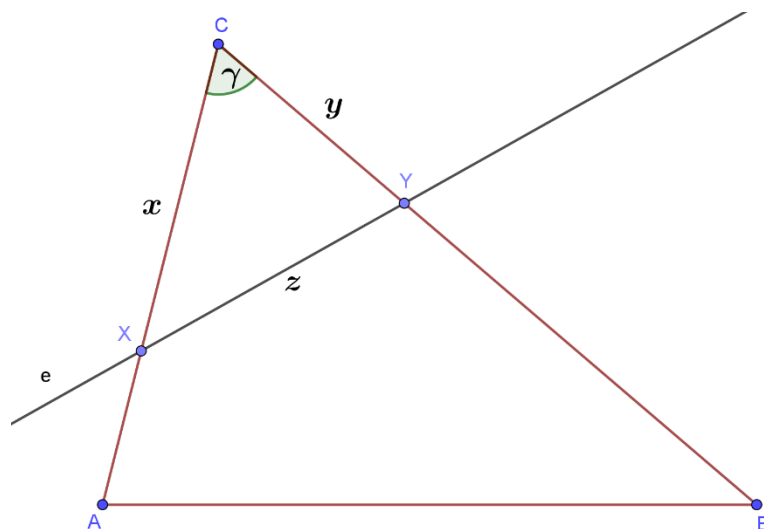
$$\frac{e/2}{r} = \sin \gamma \Rightarrow r = \frac{e}{2 \sin \gamma} = 8,58.$$

A húrnégyszög szögei $131,43^\circ$; $110,92^\circ$; $48,57^\circ$; $69,08^\circ$. A húrnégyszög köré írható kör sugara $8,58$ cm.

15. Egy egyenessel vágjunk ketté egy háromszöget két egyenlő területű részre úgy, hogy az egyeneseknek a háromszögön belüli szakasza a lehető legrövidebb legyen.

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 1992., Komárom, 12.évfolyam

Megoldás:



Az e egyenes felezi a háromszög területét, az AC oldalból x hosszúságú, a BC oldalból y hosszúságú szakaszt metsz ki, a háromszögbe eső szakasza z . Az ABC háromszög C csúcsánál γ szög van.

$$T_{ABC} = \frac{ab \sin \gamma}{2}, \quad T_{XYC} = \frac{xy \sin \gamma}{2},$$

így $ab = 2xy$, tehát $2xy$ állandó érték.

Koszinusztétellel kifejezzük a z szakaszt:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \gamma = x^2 + y^2 - 2xy + 2xy(1 - \cos \gamma) = (x - y)^2 + ab(1 - \cos \gamma).$$

A második tag állandó, ezért a kéttagú kifejezés akkor lesz a legkisebb, amikor az első tag a legkisebb. $(x - y)^2$ sohasem negatív, legkisebb értéke a 0, akkor, ha $x = y = \sqrt{\frac{ab}{2}}$.

Még meg kell vizsgálnunk, hogy a háromszög melyik csúcsánál vágjunk ilyen elv szerint.

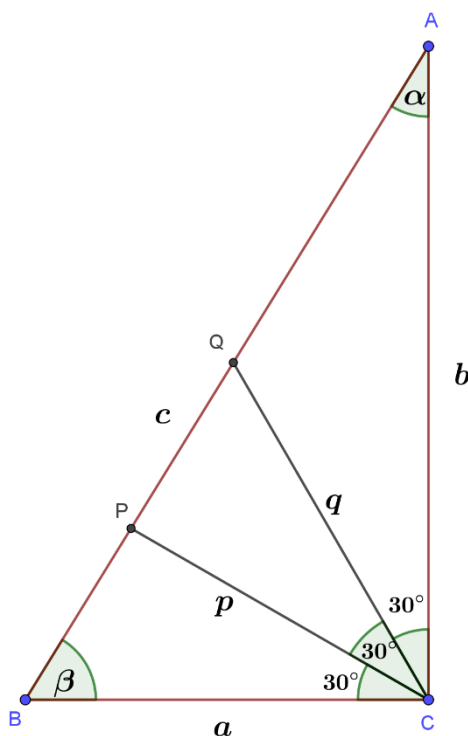
$$z_{\min}^2 = ab(1 - \cos \gamma) = 2 \cdot \frac{ab \sin \gamma}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1 - \cos \gamma}{2}}{\sin \gamma} = 4 \cdot T_{ABC} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}} = 2 \cdot T_{ABC} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

A háromszögnek azt a szögét keressük, amelyre a $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ a legkisebb. A tangens függvény növekvő függvény, ezért a háromszög legkisebb szögénél vágjuk le az ábra szerinti háromszöget ahhoz, hogy a legkisebb szakaszt kapjuk.

16. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b , ahol $a < b$. Mekkora a derékszöget harmadoló egyenesek háromszögbe eső szakaszai közül a rövidebb?

OKTV, 1974. I.forduló

Megoldás I:



Használjuk az ábra jelöléseit: $\angle QPC = \beta + 30^\circ$, $\angle PQC = \alpha + 30^\circ$, mert a háromszög külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével. $b > a$, ezért $\beta + 30 > \alpha + 30$, tehát $q > p$. A rövidebb szakaszt, p -t kell meghatároznunk.

A PBC háromszögben a szinusztétel alapján:

$$\frac{p}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin(180^\circ - 30^\circ - \beta)} = \frac{\sin \beta}{\sin(150^\circ - \beta)} = \frac{\sin \beta}{\sin 150^\circ \cdot \cos \beta + \cos 150^\circ \cdot \sin \beta}.$$

Az ABC derékszögű háromszögből:

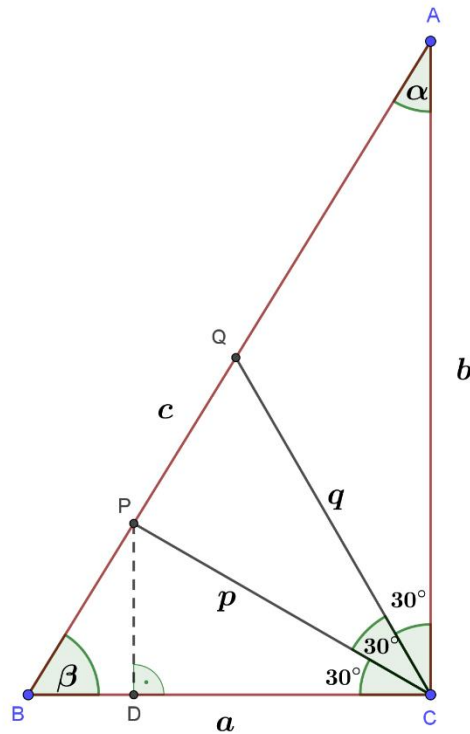
$$\sin \beta = \frac{b}{c}; \quad \cos \beta = \frac{a}{c},$$

tehát

$$\frac{p}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{c} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{b}{c}} = \frac{2b}{a + \sqrt{3} \cdot b}$$

$$p = \frac{2ab}{a + \sqrt{3} \cdot b}.$$

Megoldás II:



Az előző megoldásból elfogadjuk, hogy p a rövidebb szakasz. Merőlegest bocsátunk a P pontból a BC szakaszra. Az ábra jelöléseit használva:

$$DC = p \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} p, \quad PD = p \cdot \sin 30^\circ = \frac{p}{2},$$

$$BD = BC - DC = a - \frac{\sqrt{3}}{2} p,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{PD}{BD} = \frac{\frac{p}{2}}{a - \frac{\sqrt{3}}{2} p} = \frac{p}{2a - p\sqrt{3}}.$$

Az egyenletet átrendezve:

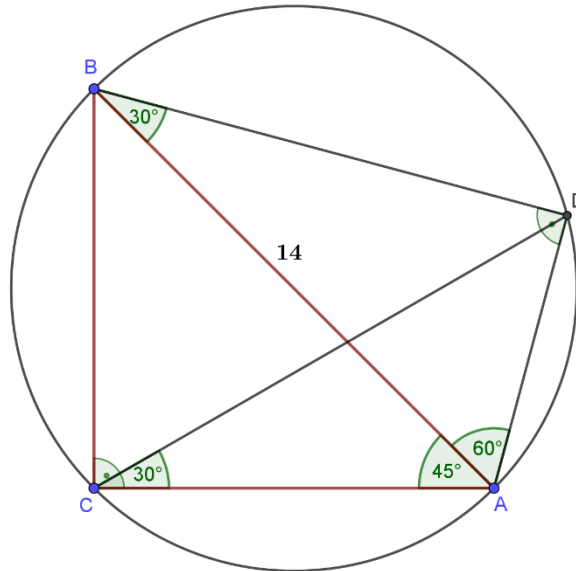
$$2ab - pb\sqrt{3} = ap$$

$$2ab = p(a + b\sqrt{3})$$

$$p = \frac{2ab}{a + b\sqrt{3}}.$$

17. Az egyenlő szárú derékszögű ABC° háromszög AB átfogója 14 cm . Vegyük fel a háromszög köré írt körnek a C pontot nem tartalmazó ívén a D pontot úgy, hogy a $DCA\angle = 30^\circ$ legyen. Mekkora a DCA háromszög területe?

Megoldás:



A $CAB\angle = 45^\circ$, mert az ABC háromszög egyenlőszárú és derékszögű. Az $ACD\angle$ és $ABD\angle$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, ezért egyenlők, mindkettő 30° . Thalész tétele miatt AB a körülírt kör átmérője, így $ADB\angle = 90^\circ$ is teljesül. Az ADB háromszög harmadik szöge $BAD\angle = 60^\circ$. Ezek alapján $CAD\angle = 105^\circ$. Az ADB derékszögű háromszögben:

$$AD = 14 \cdot \sin 30^\circ = 7 \text{ (cm)}.$$

Az ABC háromszögben

$$CA = 14 \cdot \cos 45^\circ = 7\sqrt{2}.$$

Két oldalból és a közbezárt szögből kiszámítjuk a DCA háromszög területét:

$$t = \frac{7\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \sin 105^\circ}{2} \approx 33,47 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Pontos értéket is meg tudunk adni:

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$t = \frac{7\sqrt{2} \cdot 7}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{49(2\sqrt{3} + 2)}{8} = \frac{49(\sqrt{3} + 1)}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

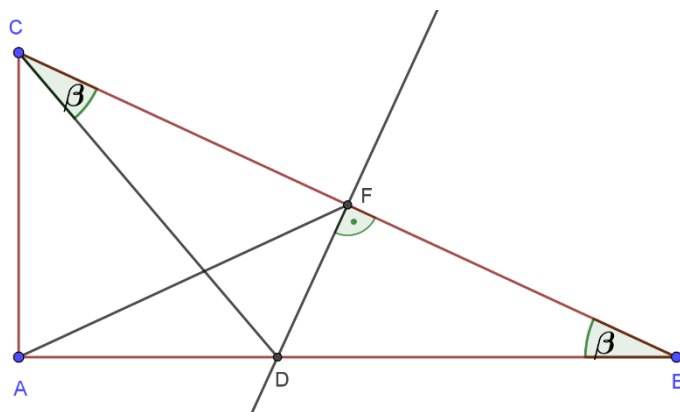
18. Egy derékszögű háromszöget átfogójának felező merőlegesével egy háromszögre és egy négyszögre vágunk. A négyszög átlóinak az aránya

$$(1 + \sqrt{3}) : 2\sqrt{2}.$$

Mekkorák a derékszögű háromszög hegyesszögei?

KÖMAL 2007. november, C. 919.

Megoldás:



A szakaszfelező merőleges minden pontja egyenlő távol van a szakasz végpontjától, ezért $CD = DB$. Tehát a CDB háromszög egyenlőszárú, az alapon fekvő szögek egyenlők, $\angle DCB = \angle DBC = \beta$.

Thalész tétele miatt $CF = AF$, ezek a Thalész-kör sugarai. A négyszög átlóinak aránya:

$$(1 + \sqrt{3}) : 2\sqrt{2} = AF : CD = CF : CD = \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\beta = 15^\circ.$$

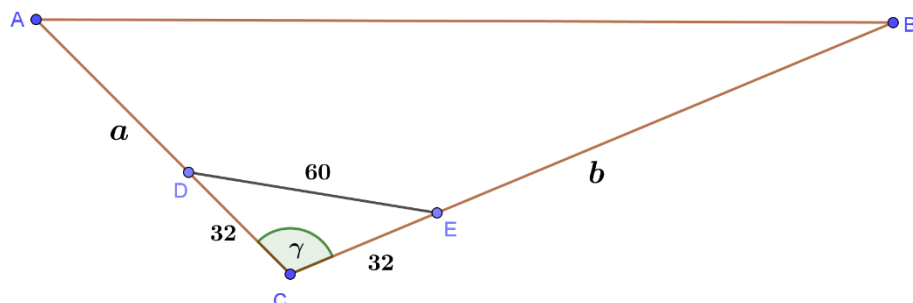
A derékszögű háromszög hegyesszögei $15^\circ, 75^\circ$.

19. András és Bálint éjszakai túrán vettek részt. Sík terepre érve a távolban két különböző irányban is tűzijátékot vettek észre, és meg akarták állapítani a két tűzijáték helyszínének a távolságát. Megmérték, hogy a fény felvillanása után az egyik irányból 18, a másik irányból 14 másodperc alatt ért hozzájuk a petárdák durranásának hangja. A hang terjedési sebességét $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -nak vették, a fény terjedéséhez szükséges időt elhanyagolták. Aztán – mivel szögmérő műszerük nem volt – András az egyik, Bálint a másik tűzijáték irányába indulva megtett 32–32 lépést, majd megmérték, hogy így egymástól 60 lépés távolságra kerültek. (Természetesen igyekeztek egyforma hosszúságú lépésekkel mérni.)

András és Bálint mérési adatai alapján számolja ki a két tűzijáték távolságát kilométer pontossággal!

Emelt szintű érettségi 2009. május 5., idegen nyelvű feladatsor

Megoldás:



Az A és B pontokban van a tűzijáték. András és Bálint a C pontban nézik, innen 32-32 lépést téve a D illetve az E pontba jutnak.

A CDE háromszögből koszinusztétellel meghatározzuk a γ szög koszinuszát:

$$60^2 = 2 \cdot 32^2 - 2 \cdot 32^2 \cdot \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = -\frac{97}{128}.$$

A hangsebesség alapján:

$$a = 14 \cdot 340 \text{ m} = 4760 \text{ m}, \quad b = 18 \cdot 340 \text{ m} = 6120 \text{ m}.$$

Az ABC háromszögből koszinusztétel alapján:

$$AB^2 = 4760^2 + 6120^2 - 2 \cdot 4760 \cdot 6120 \cdot \left(-\frac{97}{128}\right)$$

$$AB \approx 10210 \text{ m}.$$

Az eredményt kilométer pontossággal adjuk meg, a két tűzijáték távolsága 10 km.

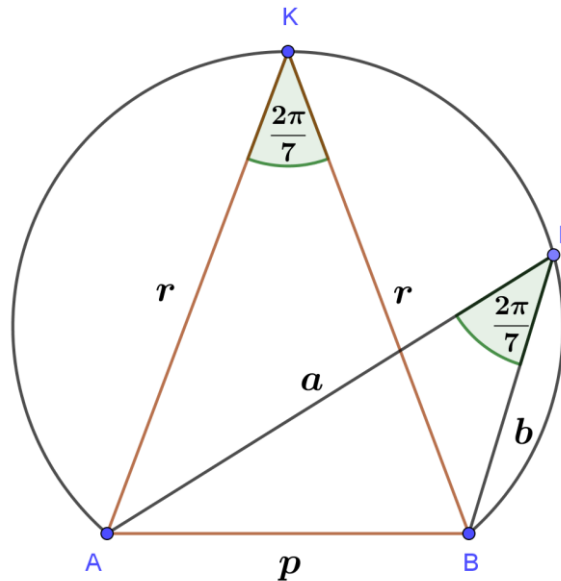
20. Egy szabályos hétszög területe 4095 egység. A sokszög két szomszédos csúcsa A és B , a középpontja K . Az ABK háromszög körülírt körén, a hétszög belsejében fekvő P pontra

$$\frac{AP - PB}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Mekkora lehet az APB háromszög területe?

KÖMAL 2013. január, B. 4507..

Megoldás:



A hétszög köré írható körének sugara r , oldalának hossza p . Az ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek egyenlők, ezért $\angle AKB = \angle APB = \frac{2\pi}{7}$.

Az ABP háromszög területét két oldalból és a közbezárt szögből fogjuk kiszámítani:

$$t = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \frac{2\pi}{7}.$$

Hét darab, az AKB háromszöggel egybevágó háromszög alkotja a szabályos hétszöget, ezért a területe:

$$t = 7 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{7}}{2} = 7 \cdot \frac{r^2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}}{2} = 7 \cdot r^2 \cdot \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} = 4095$$

A kapott összefüggésből meg tudjuk határozni a kör sugarát:

$$r = \sqrt{\frac{585}{\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}}}$$

A hétszög oldala:

$$p = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{7} = 2 \cdot \sqrt{\frac{585}{\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}}} \cdot \sin \frac{\pi}{7} = 2 \cdot \sqrt{585 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}}.$$

Az ABP háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \frac{2\pi}{7} = p^2. \quad (1)$$

A feladat feltételéből:

$$\begin{aligned} a - b &= \frac{2}{3}p \\ a^2 - 2ab + b^2 &= \frac{4}{9}p^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Az (1) egyenletből kivonjuk a (2) egyenletet és kifejezzük ab értékét:

$$\begin{aligned} 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right) ab &= \frac{5}{9}p^2, \\ ab &= \frac{\frac{5}{9}p^2}{2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right)}. \end{aligned}$$

Az ABP háromszög területét ezzel az értékkel határozzuk meg:

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{5}{9}p^2}{2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right)} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} = \frac{5}{36} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right)} \cdot p^2.$$

A $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ azonosság alapján, p^2 értékének felhasználásával:

$$t = \frac{5}{36} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \cdot p^2 = \frac{5}{36} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \cdot 2340 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} = 325.$$

Az ABP háromszög területe 325 egység.

- 21.** Egy egyenes körkúpba írjon be egy félgömböt úgy, hogy az illeszkedjék a kúp alapkörének síkjára, gömbfelülete pedig érintse a kúp palástját! A kúp felszíne úgy aránylik a félgömb görbe felületének felszínéhez, mint 18:5. Határozza meg a kúp nyílásszögét!

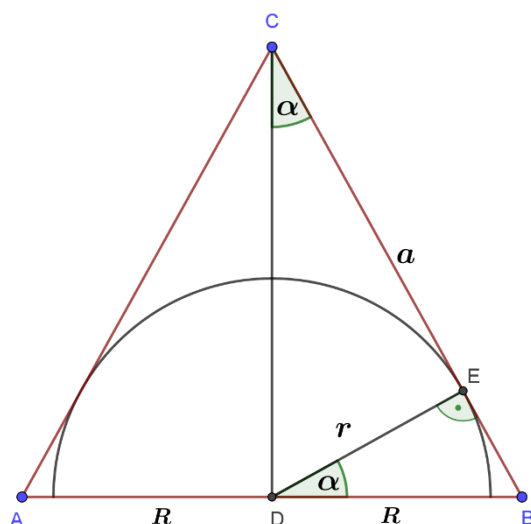
Felvételi (és érettségi) 1998. május 26.

Megoldás:

Legyen a kúp alapkörének sugara R az alkotója a , a gömb sugara r , a kúp nyílásszögének fele α .

A kúp felszíne $A_1 = R(R + a)\pi$, a félgömb görbe felületének felszíne $A_2 = 2r^2\pi$.

Az alábbi ábrán a testek metszete látható:



R -rel kifejezzük a többi adatot: $a = \frac{R}{\sin \alpha}$; $r = R \cdot \cos \alpha$. Ezt felhasználva:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R \left(R + \frac{R}{\sin \alpha} \right) \pi}{2R^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \pi} = \frac{18}{5}$$

$$\frac{\sin \alpha + 1}{2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{18}{5}$$

$$5 \cdot (\sin \alpha + 1) = 36 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$5(\sin \alpha + 1) = 36(1 - \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = 36(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) \sin \alpha$$

$\sin \alpha + 1 \neq 0$, ezért oszthatunk vele és átrendezzük az egyenletet:

$$36 \cdot \sin^2 \alpha - 36 \sin \alpha + 5 = 0$$

Innen:

$$\sin \alpha = \frac{5}{6} \quad \text{vagy} \quad \sin \alpha = \frac{1}{6},$$

$$\alpha = 56,44^\circ \quad \text{vagy} \quad \alpha = 9,59^\circ.$$

A kúp nyílásszöge $112,88^\circ$ vagy $19,18^\circ$.

- 22.** A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

- a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérőjelzést!

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

- b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót?

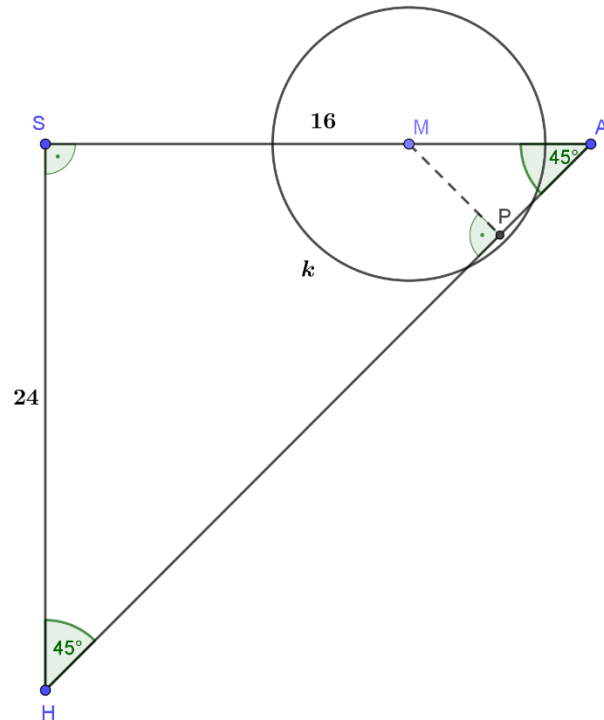
Válaszát fokban, egésze kerekítve adja meg!

Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el!

Emelt szintű érettségi 2012. október 16.

Megoldás:

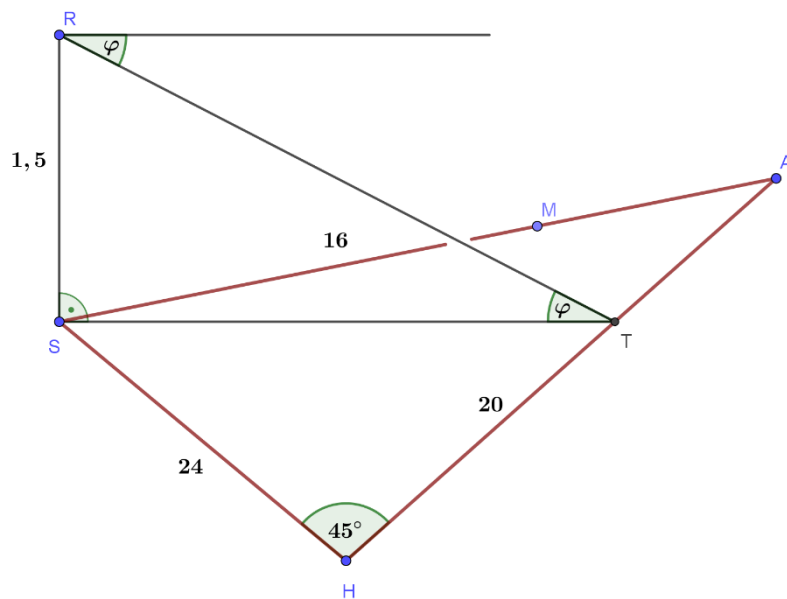
a)



A sziget helye a H pont, a mentőcsónaké az M pont, a hajó kezdetben a H pontban van, útvonala a HA egyenes. A vészjel az M középpontú, 6 km sugarú k körön belül észlelhető.

HSA egyenlőszárú, derékszögű háromszög, ezért $SA = 24(\text{km})$, $MA = 8(\text{km})$. A mentőcsónak távolsága a hajó útvonalától $MP = MA \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \approx 5,66 < 6$. Ezért a hajó észlelheti a segélykérőjelzést.

b) A repülő helye R , a hajó a T pontban van.



A φ depressziós szög egyenlő az STR -gel, mert váltószögek. Az ST szakaszt az SHT háromszögből koszinusztétellel számoljuk ki:

$$ST^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos 45^\circ$$

$$ST = 17,24 \text{ (km)}$$

Az STR derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{RS}{ST} = \frac{1,5}{17,24} = 0,0870$$

$$\varphi = 4,97^\circ \approx 5^\circ.$$

A műszerek a hajót 5° -os depressziós szög alatt látják.