

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: 2018. október 19. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



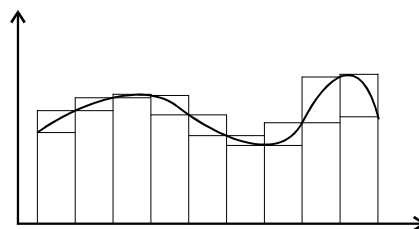
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Az integrálszámítás alkalmazásai

I. A határozott integrál

A függvénygrafikon alatti terület

A középiskolai tanulmányok során a legtöbbször folytonos függvényekkel találkozunk, ezért a továbbiakban elsősorban folytonos függvényekre vonatkozóan teszünk kijelentéseket.



Bizonyos problémák esetén felmerül bennünk az az igény, hogy egy koordináta-rendszerben felrajzolt függvény grafikonja alatti területet meghatározzuk. Ez egészen pontosan azt jelenti, hogy azon síkidom területére vagyunk kíváncsiak, amelyet az $[a;b]$ intervallum szélein az y tengellyel húzott párhuzamos egyenesek, az x tengely és a függvénynek az adott intervallum feletti grafikonja határolnak. Ezen terület szemléletes meghatározásához olyan téglalapok területeinek összegeit használhatjuk, melyek az említett síkidomon belül vannak, továbbá olyan téglalapok területeinek összegeit, melyek az említett síkidomot lefedik. A síkidom területe nagyobb vagy egyenlő, mint a benne levő téglalapok területének összege, és kisebb vagy egyenlő, mint az őt lefedő téglalapok területének összege. Célunk a továbbiakban, hogy ezt a területfogalmat és egyben területszámítási módot bevezessük és megalapozzuk, továbbá viszonylag egyszerű és hatékony módszereket adjunk a terület kiszámítására.

Alsó és felső közelítő összeg

Def. Legyenek az $[a,b]$ intervallum belső pontjai az $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ pontok $[n \in \mathbb{N}^+]$. Ekkor az $x_0 = a$, $x_n = b$ jelöléssel az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumok $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztását jelentik, az x_i pontok pedig a felosztáshoz tartozó osztópontok.

A bevezetőben elmondottak szerint a függvény grafikonja alatti síkidom területét a síkidomba beírt téglalapok és a síkidomot lefedő téglalapok területének összege segítségével szeretnénk meghatározni. Egy-egy megfelelő téglalap egyik oldala az x tengelyre illeszkedő $[x_i, x_{i+1}]$ intervallum (szakasz) lesz. A síkidom belsejébe eső, $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon álló téglalapok magassága nem lehet nagyobb, mint a függvény $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon felvett legkisebb értéke (mert ekkor „belelőgnának” a grafikonba). A síkidomot lefedő téglalapok magassága nem lehet kisebb, mint a függvény $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon felvett legnagyobb értéke (mert ekkor ezek is „belelőgnának” a grafikonba). A síkidom belsejében levő téglalapok összege nem lesz nagyobb, mint a síkidom területe, a síkidomot lefedő téglalapok területének összege pedig nem lesz kisebb, mint a síkidom területe. Ha közel szeretnénk kerülni az adott síkidom területéhez az említett téglalap összegekkel, akkor a belső téglalapok magasságát a függvény részintervallumain felvett legkisebb függvényértéknek, a külső téglalapok magasságát pedig a függvény részintervallumain felvett legnagyobb függvényértéknek kell választanunk.

Def. Legyen az f függvény értelmezve az $[a, b]$ intervallumon, és itt legyen f folytonos. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ felosztását. Legyen továbbá m_i az f függvény minimuma az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon, és legyen M_i az f függvény maximuma ugyanitt.

Ekkor az $s = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ összeget az f függvény adott felosztáshoz tartozó alsó közelítő összegének, a $S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ összeget az f függvény adott felosztáshoz tartozó felső közelítő összegének nevezzük.

Megjegyzés: A definícióból következően egy adott felosztáshoz tartozó alsó és felső közelítő összegekre fennáll az $S \geq s$ összefüggés.

Def. Ha egy felosztás osztópontjaihoz újabb osztópontokat veszünk, a felosztás finomítását kapjuk.

Tétel: Vegyük az $[a, b]$ intervallum egy felosztását, legyen az ehhez tartozó alsó közelítő összeg s , a felső közelítő összeg pedig S . Finomítsuk a felosztást újabb osztópontok hozzávételével, a finomításhoz tartozó alsó közelítő összeg legyen s' , a felső közelítő összeg pedig S' . Ekkor $S \geq S' \geq s' \geq s$.

Def. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum két felosztását. A két felosztás közös finomításának nevezzük azt a felosztást, amely a két felosztás összes osztópontját tartalmazza.

Tétel: Tekintsük az $[a, b]$ intervallum két felosztását. Legyen az egyik felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg S_1 , a másik felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg s_2 . Tekintsük a két felosztás közös finomítását, legyen az ehhez tartozó alsó közelítő összeg s , a felső közelítő összeg pedig S . Ekkor $S_1 \geq S \geq s \geq s_2$.

Következmény: Tetszőleges felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg legalább akkora, mint egy másik, tetszőleges felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg.

A határozott integrál fogalma

Ha egy felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeget veszünk, az mindenképpen kisebb vagy egyenlő, mint a grafikon alatti terület, a felső közelítő összeg mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a grafikon alatti terület. A korábban mondottak és ezen szemlélet alapján az alsó közelítő összegek mind legfeljebb akkorák, mint a terület, a felső közelítő összegek pedig mind legalább akkorák, mint a terület. Megállapíthatjuk tehát, hogy a grafikon alatti terület csak olyan szám lehet, amely a kétféle közelítő összegek közé esik (a közelítő összegekkel való egyenlőséget megengedve). A területnek azonban egyértelműnek kell lennie, tehát csak akkor kaphatjuk meg a területet ilyen számítással, ha pontosan egy ilyen szám van.

Def. Legyen az f függvény korlátos $[a, b]$ -n. Az f integrálható $[a, b]$ -n, ha pontosan egy olyan I szám létezik, amelyre az $[a, b]$ tetszőleges felosztása esetén fennáll az $S \geq I \geq s$ egyenlőtlenség. Az I számot az f $[a, b]$ -n vett határozott integráljának nevezzük, és $\int_a^b f$ -fel vagy $\int_a^b f(x)dx$ -szel jelöljük.

Megjegyzés: A görbe alatti terület nagysága a határozott integrál értékével egyezik meg. A továbbiakban egyelőre a határozott integrál fogalmát fogjuk használni, bár bevezetése erősen kapcsolódott a területhez. Mivel a területszámítási kérdésekhez felhasználjuk majd a fent definiált határozott integrál néhány tulajdonságát, ezért előbb erre térünk ki, majd a tulajdonságok ismertetése után ismét visszatérünk a területszámítási feladatokhoz. Erre kidolgozott és gyakorló feladatok a III. fejezetben találhatók.

Példa:

Tekintsük az $f(x) = c$ függvényt az $[a, b]$ tetszőleges intervallumon. Nyilvánvaló, hogy az $[a, b]$ tetszőleges felosztása esetén M_i és m_i értéke minden i esetén c . Tehát az alsó és felső közelítő

összegek tetszőleges felosztás esetén: $S = s = \sum_{i=1}^n c \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b - a)$. Nyil-

vánvaló tehát, hogy az f függvény integrálható $[a, b]$ -n és a határozott integrálja $\int_a^b c dx = c(b - a)$.

Megjegyzés: A görbe alatti terület egy téglalap, melynek egyik oldala $b - a$, másik oldala c hosszúságú, így a kapott eredményt az elemi területszámítási ismereteink is igazolják.

Az integrálhatóság eldöntésére, illetve a határozott integrál kiszámítására az eddigiekben egy elvi módszert láthattunk. Azonban a gyakorlatba az nehéz közvetlenül átültetni, hiszen a felosztások száma végtelen sok, emellett a fajtájuk is igen sokféle lehet. Olyan módszert kéne tehát találnunk, amely leegyszerűsíti a számolást, és lehetővé teszi, hogy könnyen megállapíthassuk egy függvény integrálhatóságát és határozott integráljának értékét. A határozott integrál további tulajdonságait kihasználva bizonyos függvények esetén egyszerűbb módszer is található.

A határozott integrál és a műveletek kapcsolata

Tétel: Ha f integrálható $[a, b]$ -n és c tetszőleges valós szám, akkor cf is integrálható $[a, b]$ -n és

$$\int_a^b (cf)(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Tétel: Ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, akkor $f + g$ is integrálható $[a, b]$ -n és

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Tétel: Ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, akkor fg is integrálható $[a, b]$ -n.

Fontos megjegyzés:

Eddig a differenciál-, illetve integrálszámítás és a műveletek kapcsolatánál csupa olyan esettel találkoztunk, amelynél az összeg-, szorzat- stb. függvény megfelelő származtatott mennyisége kiszámítható volt az eredeti függvények megfelelő származtatott mennyiségének segítségével. Azonban

$\int_a^b (fg)(x)dx$ nem számítható ki $\int_a^b f(x)dx$ és $\int_a^b g(x)dx$ segítségével, pontosabban fogalmazva nincs

olyan általánosan érvényes eljárás, mellyel a szorzatfüggvény integrálja az eredeti függvények integráljának segítségével kiszámítható lenne. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy a két függvény integráljának értéke nem határozza meg a szorzatfüggvény integrálját. Ez egy egyszerű példával megmutatható.

Legyen például először $f(x) \equiv g(x) \equiv \frac{1}{2}$, és számítsuk ki f , g és fg határozott integrálját a $[0, 1]$ intervallumon. Nyilvánvaló, hogy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$ és $\int_0^1 (fg)(x)dx = \frac{1}{4}$.

Most legyen $f(x) \equiv g(x) \equiv x$, és számítsuk ki ugyanezen határozott integrálok értékét. Itt most nem

részletezett számítással kapjuk: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 (fg)(x)dx = \frac{1}{3}$. (A két integrál értéke az

egyenletes felosztássorozathoz tartozó alsó, illetve felső közelítő összegek sorozatának határértékeként könnyen kiszámítható.)

Azt kaptuk tehát, hogy mindkét esetben $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$, de az első esetben $\int_0^1 (fg)(x)dx = \frac{1}{4}$,

a második esetben $\int_0^1 (fg)(x)dx = \frac{1}{3}$.

Ha lenne általános képlet $\int_a^b (fg)(x)dx$ -nek $\int_a^b f(x)dx$ és $\int_a^b g(x)dx$ értékéből történő kiszámítására,

akkor mindkét esetben ugyanazt kellett volna kapnunk. Azonban különböző eredményekhez jutottunk, így nem létezik az igényeinket kielégítő általános eljárás.

A fentiekhez hasonló tételt nem mondhatunk ki két függvény hányadosának integrálhatóságára, hiszen többek között azt sem tudjuk garantálni, hogy ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, akkor a hányadosfüggvény korlátos $[a, b]$ -n, így f és g integrálhatóságának nyilván nem következménye a hányadosuk integrálhatósága. Viszont bizonyos feltételek teljesülése esetén a hányados integrálható, nevezetesen:

Tétel: Ha g integrálható $[a, b]$ -n, és itt $|g| \geq c > 0$, akkor $\frac{1}{g}$ is integrálható $[a, b]$ -n.

A fenti tétel és a szorzat integrálhatóságára mondott tétel következménye:

Tétel: Ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, és itt $|g| \geq c > 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is integrálható $[a, b]$ -n.

Megjegyzés: Sajnos itt nincs általános kiszámítási mód, akárcsak a szorzatfüggvény integráljánál.

A fentiekkel szemben két, minden intervallumon integrálható függvényből képzett összetett függvény nem szükségképpen integrálható. (Erre most nem mutatunk konkrét példát, csak azt állítást közöljük.)

$f(g(x))$ integrálhatóságára csak akkor következtethetünk, ha az integrálhatóságon kívül további tulajdonságokat feltételezünk f -ről és g -ről. Például:

Tétel: Ha g integrálható $[a, b]$ -n és f folytonos egy $g([a, b])$ -t tartalmazó zárt intervallumon, akkor $f(g(x))$ is integrálható $[a, b]$ -n.

Tétel: Ha f integrálható $[a, b]$ -n, akkor $|f|$ is integrálható $[a, b]$ -n.

Megjegyzés: A tétel megfordítása nem igaz.

A határozott integrál intervallumon való additivitása

Tétel: Ha f integrálható $[a, b]$ -n és $[c, d]$ az $[a, b]$ egy részingervalluma, akkor f integrálható $[c, d]$ -n is.

Tétel: Ha f integrálható $[a, b]$ -n és $c \in (a, b)$, akkor f integrálható $[a, c]$ -n és $[c, b]$ -n is, és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Tétel: Ha f integrálható $[a, c]$ -n és $[c, b]$ -n, akkor f integrálható $[a, b]$ -n és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Def. Legyen f integrálható $[a, b]$ -n. Ekkor vezessük be az alábbi határozott integrálokat:

$$\text{Legyen } \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx, \text{ és legyen } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

A bevezetett új jelöléseinkkel, illetve a határozott integrál „kiterjesztett” értelmezésével az alábbi általános tételhez jutunk:

Tétel: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, amennyiben az egyes integrálok léteznek (a , b és c tetszőleges valós számok).

II. A Newton-Leibniz-formula

Az eddigiekben láthattunk már néhány példát a határozott integrál kiszámítására. Érezhető azonban, hogy az alsó vagy felső közelítő összegekkel történő számolások elég bonyolultak és nehézkesek. A továbbiakban olyan módszerről lesz szó, amely leegyszerűsíti az integrál kiszámítását.

Def. (Integrálfüggvény) Legyen f integrálható $[a, b]$ -n. Ekkor tudjuk, hogy minden $a \leq x \leq b$ esetén f integrálható az $[a, x]$ intervallumon. Az $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ függvény az f integrálfüggvénye.

Tétel: Ha f integrálható $[a, b]$ -n, akkor f integrálfüggvénye folytonos $[a, b]$ -n.

Tétel: Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor f integrálható $[a, b]$ -n.

Tétel: Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor f integrálfüggvénye folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n, és $I'(x) = f(x)$.

Ha a fenti tételt megvizsgáljuk, az alábbi érdekes kapcsolatot fedezhetjük fel:

Az integrálfüggvény definícióját tekintve nyilvánvaló, hogy $\int_a^b f(t)dt = I(b) - I(a)$. Másrészt viszont

láttuk, hogy ha f folytonos, akkor $I'(x) = f(x)$, vagyis a határozott integrál értékét egy olyan függvénynek az intervallum szélein felvett függvényértékei különbségeként kapjuk, melynek deriváltja a integrálandó függvény.

Ez a megfigyelés általánosabban is igaz, nevezetesen:

Tétel: [Newton-Leibniz formula] Ha f integrálható $[a, b]$ -n, F folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és itt $F'(x) = f(x)$, akkor $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Az $F(b) - F(a)$ kifejezés szokásos jelölése $[F(x)]_a^b$.

Kidolgozott feladatok:

1. Legyen $f(x) = c$. Számítsuk ki a határozott integrálját az $[a, b]$ intervallumon!

Megoldás:

$F(x) = cx$ -re teljesül, hogy $F'(x) = f(x)$. Tudjuk, hogy f folytonos, tehát f integrálható $[a, b]$ -n, így a Newton-Leibniz formula értelmében $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = c(b - a)$.

2. Legyen $f(x) = x^{10}$. Számítsuk ki a határozott integrálját az $[1, 2]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel f folytonos, f integrálható az $[1, 2]$ intervallumon. Ha $F(x) = \frac{1}{11}x^{11}$, akkor $F'(x) = f(x)$. A

Newton-Leibniz formula értelmében $\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = \frac{2^{11} - 1}{11}$.

A kidolgozott feladatokból is látható, hogy a Newton-Leibniz formula lényegesen egyszerűbb számolási lehetőséget nyújt, mint az alsó, illetve felső közelítő összegek határértékének megadása. Persze néha az is nehézséget okoz, hogy találjunk olyan függvényt, amelynek deriváltja az általunk integrálni kívánt függvény, de a legtöbb, a középiskolában előforduló függvény esetén viszonylag egyszerű módszerekkel találhatunk ilyet.

„Az integrálszámítás alapjai” című anyagban szerepelt már az alábbi tétel:

Tétel: Legyen F az f függvény primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon. G primitív függvénye f -nek az $[a, b]$ intervallumon akkor és csak akkor, ha van olyan c konstans, hogy az $[a, b]$ intervallumon $G(x) = F(x) + c$.

A tételből látható, hogy f primitív függvényei csak egy konstansban térhetnek el egymástól, tehát ha f egy primitív függvényét meghatározzuk, megkaphatjuk az összes primitív függvényét ennek segítségével. Most már az is érthető, hogy a Newton-Leibniz formulában szereplő F primitív függvény miért lehet tetszőleges: ha ugyanis helyette egy G primitív függvényt írunk, akkor valamely c -re $G(x) = F(x) + c$, és ezért $F(b) - F(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = G(b) - G(a)$.

Tétel: [Newton-Leibniz formula] Ha f integrálható $[a, b]$ -n, itt van primitív függvénye és ez F , akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Látható, de nem árt hangsúlyozni, hogy az f függvény határozott és határozatlan integrálja két teljesen különböző dolgot takar: a határozott integrál egy *szám*, míg a határozatlan integrál adott tulajdonságú *függvények halmaza*. A két fogalom között kapcsolatot a Newton-Leibniz formula létesít folytonos függvények esetén.

III. Terület- és térfogatszámítás

Ha az f függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor az f grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, valamint az x tengely által határolt síkidom területe az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál értékével adható meg.

Mielőtt azonban rátérnénk a számításokra, tennünk kell egy megjegyzést. Az integrálszámítással kapott terület úgynevezett előjeles terület, mégpedig értéke negatív, ha a síkidom az x tengely alatt, pozitív, ha az x tengely felett helyezkedik el. (Ez a határozott integrál definíciójának segítségével könnyen megmutatható.) Ezek alapján elképzelhető, hogy egy síkidom területére 0-t kapunk, ha azt integrállal számítjuk ki, holott valójában a kérdéses terület nagysága nem 0. (pl. $f(x) = x$ grafikonja, az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenesek valamint az x tengely által határolt síkidom területe 1, míg az integrálszámítással kapott terület az előjeles értékek miatt 0.) Ezt tehát a gyakorlati alkalmazások során figyelembe kell vennünk: azt a síkidomot, melynek területét meg akarjuk kapni, olyan részekre kell bontanunk, amelyek teljes egészében az x tengely alatt, illetve felett helyezkednek el, majd ezek területének abszolút értékét kell összegezni.

Kidolgozott feladatok:

1. Határozzuk meg az x tengely, az $f(x) = x^2 + 3x + 5$ függvény grafikonja, az $x = -2$ és az $x = 3$ egyenletű egyenesek által meghatározott síkidom területét!

Megoldás:

Az $x^2 + 3x + 5$ kifejezés diszkriminánsa negatív, ezért az $f(x) = x^2 + 3x + 5$ függvény grafikonja teljes egészében az x tengely felett helyezkedik el. A keresett terület nagyságát ezért az $\int_{-2}^3 (x^2 + 3x + 5)dx$ határozott integrál adja meg.

$$\int_{-2}^3 (x^2 + 3x + 5)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x \right]_{-2}^3 = \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + 15 - \left(\frac{-8}{3} + \frac{12}{2} - 10 \right) = 44\frac{1}{6}.$$

2. Határozzuk meg az x tengely, az y tengely, az $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ függvény grafikonja és az $x = 6$ egyenletű egyenes által meghatározott síkidom területét!

Megoldás:

Az $-x^2 + 4x + 5$ kifejezés gyökei -1 és 5 , ezért az $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ függvény grafikonja a vizsgált tartományon részben az x tengely felett, részben alatta helyezkedik el. A keresett terület nagyságát ezért az $\left| \int_0^5 (-x^2 + 4x + 5)dx \right| + \left| \int_5^6 (-x^2 + 4x + 5)dx \right|$ összeg adja meg.

$$\int_0^5 (-x^2 + 4x + 5) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 5x \right]_0^5 = \frac{-125}{3} + \frac{100}{2} + 25 - 0 = 33\frac{1}{3}.$$

$$\int_5^6 (-x^2 + 4x + 5) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 5x \right]_5^6 = \frac{-216}{3} + \frac{144}{2} + 30 - \left(\frac{-125}{3} + \frac{100}{2} + 25 \right) = -3\frac{1}{3}$$

Tehát a kereset terület nagysága: $\left| 33\frac{1}{3} \right| + \left| -3\frac{1}{3} \right| = 33\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} = 36\frac{2}{3}.$

3. Határozzuk meg az x tengely és az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja által közbezárt síkidom területét az $x \in [0; 2\pi]$ tartományon!

Megoldás:

Az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja az $x \in [0; \pi]$ tartományon az x tengely felett, az $x \in [\pi; 2\pi]$ tartományon az x tengely alatt halad, így a keresett terület nagyságát az $\left| \int_0^{\pi} \sin x dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right|$ összeg adja meg.

$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$, $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -1 - 1 = -2$, a keresett terület nagysága tehát $|2| + |-2| = 4$.

4. Igazoljuk, hogy egy parabolából a tengelyére merőleges egyenessel levágott szelet területe kétharmada a szelet köré írható téglalap területének!

Megoldás:

A parabola legyen az $y = x^2$ egyenletű parabola, a szeletet levágó egyenes pedig legyen az $y = a$ egyenletű egyenes. (Mivel bármely két parabola hasonló egymáshoz, ez nem jelent semmiféle korlátozást.) Az egyenes a parabolát a $(-\sqrt{a}, a)$ és $(\sqrt{a}, a)$ pontokban metszi. A téglalap területe $2\sqrt{a} \cdot a$, a parabola és az x tengely, illetve az $x = -\sqrt{a}$ és $x = \sqrt{a}$ egyenletű egyenesek által hatá-

rolt síkidom területe $T = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{2}{3} a\sqrt{a}$.

A parabola szelet területe a téglalap területéből levonva a fent kiszámított terület, azaz $2a\sqrt{a} - \frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$, ami valóban kétharmad része a téglalap területének.

Gyakorló feladatok:

1. Határozzuk meg az x tengely, az $f(x) = 9x^2 - 3x - 2$ függvény grafikonja, az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenletű egyenesek által meghatározott síkidom területét!

2. Határozzuk meg az x tengely, az y tengely, az $f(x) = 2\cos x + 1$ függvény grafikonja és a $x = 2\pi$ egyenes által közbezárt síkidom területét!
3. Az $f(x) = 0,2 \cdot (x^3 + x^2 - 17x + 15)$ függvény zérushelyei -5 , 1 és 3 . Határozzuk meg a függvény grafikonja és az x tengely által határolt zárt síkidom területét!
4. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x+5}$ és a $g(x) = x+3$ függvények grafikonja, valamint az x tengely által határolt síkidom területét!

Két integrálható függvény grafikonja közti síkidom területe

Legyenek f és g az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények, és legyen $[a, b]$ minden pontjában $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Határozzuk meg az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, valamint a két függvény grafikonja által határolt S síkidom területét!

Tekintsük az f függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, valamint az x tengely által meghatározott síkidomot. Ennek területét a $T_1 = \int_a^b f(x) dx$ képlettel határozhatjuk meg. Tekintsük a g függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, valamint az x tengely által meghatározott síkidomot. Ennek területét a $T_2 = \int_a^b g(x) dx$ képlettel határozhatjuk meg. A két függvény grafikonja közötti terület a két

síkidom területének különbsége, azaz $T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f - g)(x) dx$. Tehát a két függvény grafikonja közötti síkidom területét a két függvény különbségének határozott integrálja adja.

Legyen továbbra is $[a, b]$ minden pontjában $f(x) \geq g(x)$. Mi a helyzet akkor, ha a függvények grafikonja részben vagy teljesen az x tengely alatt halad? Ekkor az előjeles területek miatt nem teljesen nyilvánvaló, hogy a két függvény grafikonja közötti területet hogyan is kell meghatároznunk. Alkalmazzunk azonban egy trükkös számolást. Nyilván találunk olyan c értéket, melyre igaz, hogy $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$ (például g -nek az $[a, b]$ intervallumon felvett minimumának ellentettje megfelelő). Ekkor az f és g függvények grafikonját az y tengellyel párhuzamosan c -vel felfelé tolva kapjuk az $f(x) + c$ és $g(x) + c$ függvények grafikonját, melyekre nyilván igaz az előzőekben leírt $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$ feltétel. Ekkor viszont alkalmazhatjuk a fent vázolt összefüggést a grafikonok által közbezárt területre:

$$T = \int_a^b (f(x) + c) dx - \int_a^b (g(x) + c) dx = \int_a^b ((f(x) + c) - (g(x) + c)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b (f - g)(x) dx$$

Azt kaptuk tehát, hogy ebben az esetben is (függetlenül a két függvény grafikonjának x tengelyhez képesti elhelyezkedésétől) a két függvény grafikonja közötti síkidom területét a két függvény különbségének határozott integrálja adja.

Kidolgozott feladatok:

5. Határozzuk meg az alábbi görbék által határolt síkidomok területét!

$$y = 2x - x^2, y = -x$$

Megoldás:

A görbék metszéspontja: $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$ megoldása $x = 0, y = 0$ és $x = 3, y = -3$ vagyis a metszés-

pontok $(0,0)$ és $(3,-3)$. A két függvény között a $[0;3]$ intervallumon a $2x - x^2 \geq -x$ egyenlőtlenség áll fenn, tehát a síkidom területe:

$$T = \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)] dx = \int_0^3 [3x - x^2] dx = \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = 4 \frac{1}{2}$$

6. Határozzuk meg az alábbi görbék által határolt síkidomok területét!

$$y = x, y = x + \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy a megadott intervallumon $x \leq x + \sin^2 x$ és $x = x + \sin^2 x$, ha $x = \pi$ és $x = 0$. Tehát a keresett terület:

$$T = \int_0^\pi (x + \sin^2 x - x) dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

7. Határozzuk meg az alábbi görbék által határolt síkidomok területét!

$$y^2 = x^2(4 - x^2); (-2 \leq x \leq 2)$$

Megoldás:

Ha $y^2 = x^2(4 - x^2)$, akkor ez két görbedarabból összerakott görbét jelent: $y = -x\sqrt{4 - x^2}$ és $y = x\sqrt{4 - x^2}$. Nyilvánvaló, hogy az x és az y tengelyre is szimmetrikus az általuk meghatározott síkidom, tehát az $\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx$ éppen a keresett terület negyedrészt adja. Tehát:

$$T = 4 \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx = 4 \left[-\frac{1}{3} \sqrt{4 - x^2}^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

Gyakorló feladatok:

5. Határozzuk meg az alábbi görbék által közbezárt síkidomok területét!

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ és $g(x) = 2x^2 + 9x - 5$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ és $g(x) = 3x - 3$

c) $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \sqrt{3} \cos x$ által közbezárt síkidomnak az $x \in [0; 2\pi]$ tartományba eső zárt része.

Forgástest térfogata

A térfogatszámítás esetén hasonló módszert alkalmazhatunk, mint az előző pontban tettük. A testek térfogatának meghatározásához a testbe, illetve a test köré már ismert térfogatú alakzatokat rajzolunk, ezek térfogatának segítségével a keresett térfogatot alulról, illetve felülről becsüljük. Ismertnek vesszük a kocka, a sokszögalapú egyenes hasáb, illetve a henger térfogatát: ezek az integrálszámítás ismeretei nélkül is, a sorozatok és a határérték-számítás segítségével is meghatározhatóak, illetve definiálhatóak.

Def. Legyen $f(x) \geq 0$ és folytonos az $[a, b]$ intervallumon. Forgástestnek nevezzük az $A = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ pontthalmazt.

Megjegyzés: A definíció szemléletesen azt jelenti, hogy ha az f függvény grafikonját az x tengely körül megforgatjuk, akkor ez egy felületet ír le; e felület, illetve az $x = a$ és $x = b$ egyenletű síkok által közrefogott térrészt nevezzük forgástestnek.

Számítsuk ki a fenti módon definiált forgástest térfogatát!

Vegyük az $[a, b]$ intervallum egy $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ felosztását. Mivel f folytonos $[a, b]$ -n, ezért minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon létezik maximuma, illetve minimuma, ezeket jelölje rendre M_i , illetve m_i . Ha tekintjük az $x = x_i$ egyenletű síkokat, akkor ezek a forgástestet $x_i - x_{i-1}$ vastagságú „szeletekre” vágják fel. Egy-egy ilyen „szelet” ΔV_i térfogatát felülről tudjuk becsülni egy őt tartalmazó $x_i - x_{i-1}$ magasságú, M_i alapkör-sugarú henger térfogatával, alulról tudjuk becsülni egy $x_i - x_{i-1}$ magasságú, m_i alapkör-sugarú, a „szelet” által tartalmazott henger térfogatával. Ezeket figyelembe véve a ΔV_i térfogatra a $m_i^2 \pi (x_i - x_{i-1}) \leq \Delta V_i \leq M_i^2 \pi (x_i - x_{i-1})$ alsó, illetve felső becslést, a forgástest

$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = V$ térfogatára a $\sum_{i=1}^n m_i^2 \pi (x_i - x_{i-1}) \leq V \leq \sum_{i=1}^n M_i^2 \pi (x_i - x_{i-1})$ alsó, illetve felső becslést kapjuk.

Mivel f folytonos $[a, b]$ -n, ezért f^2 is folytonos $[a, b]$ -n, tehát itt integrálható. Másrészt $f(x) \geq 0$ miatt igaz, hogy az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon f^2 maximuma, illetve minimuma megegyezik f maximumának, illetve minimumának négyzetével, azaz M_i^2 -tel, illetve m_i^2 -tel. Ekkor a V -re kapott alsó, illetve felső becslés éppen az $f^2 \cdot \pi$ függvény tartozó alsó, illetve felső közelítő összege. Mivel a becslés igaz minden felosztásra és $f^2 \cdot \pi$ integrálható, csak egy olyan szám van, amely megfelelő, tehát

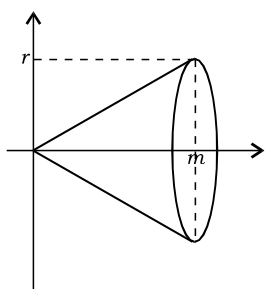
$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

Megjegyzés: A forgástest térfogatát szemléleten alapuló okoskodással kaptuk meg. A középiskolában ez elfogadható gondolatmenet, noha matematikailag nem teljesen precíz. Itt az integrálszámítás egy alkalmazását láttuk, melynek célja a megszerzett ismeretek felhasználása bizonyos célokra, ebben a szemlélet segítségünkre volt. A továbbiakban többször fogjuk alkalmazni ezt a módszert testek térfogatának kiszámítására.

Kidolgozott feladatok:

8. Számítsuk ki az r alapkör-sugarú, m magasságú egyenes kőrkúp térfogatát!

Megoldás:

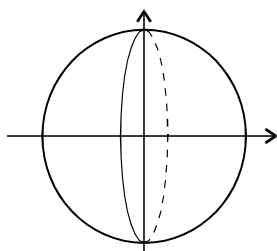


Az r alapkör-sugarú, m magasságú egyenes kőrkúp olyan forgástest, mely az $f(x) = \frac{r}{m}x$ függvény $[0, m]$ intervallumon vett grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkezik. Ennek megfelelően a térfogatát a $V = \pi \cdot \int_0^m \left(\frac{r}{m}x\right)^2 dx$ kifejezés értéke adja meg.

$$V = \pi \cdot \int_0^m \left(\frac{r}{m}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{m^2} \cdot \int_0^m x^2 dx = \pi \frac{r^2}{m^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m = \pi \frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{m^3}{3} = \frac{r^2 \pi m}{3}$$

9. Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát!

Megoldás:



Az R sugarú gömb olyan forgástest, mely az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ függvény $[-R, R]$ intervallumon vett grafikonjának (félkör) x tengely körüli megforgatásával keletkezik. A térfogata:

$$V = \pi \cdot \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^R = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

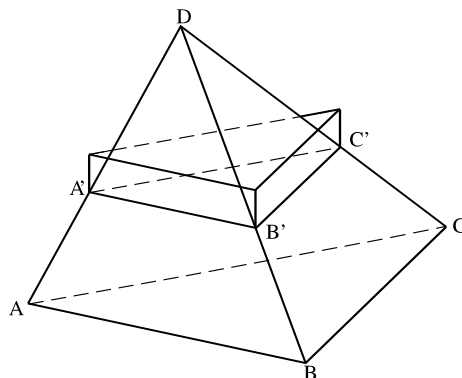
Gyakorló feladatok:

6. Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának x tengely körüli forgatásával kapott forgástestek térfogatát!

a) $y = 3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, (0 \leq x \leq 2)$ b) $y = \sin x, (0 \leq x \leq \pi)$ c) $y = x\sqrt{x-2}, (2 \leq x \leq 4)$

A gúla térfogata

Állapítsuk meg először egy háromoldalú gúla (tetraéder) térfogatát! Legyen a gúla alaplapja az ABC háromszög, csúcsa a D pont. Vegyük a gúlának az alaplappal párhuzamos, D -től x távolságban levő síkmetszetét. Ez a metszet egy háromszög, amely hasonló az alaplaphoz, a hasonlóság aránya $\frac{x}{m}$, ahol m a gúla ABC alaplaphoz tartozó magassága [ezt a keletkező és az eredeti tetraéder hasonlóságából kapjuk]. Ha a metszetháromszög területét $t(x)$ -szel, az alaplap területét t -vel jelöljük, akkor:



$$t(x) = t \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^2 = t \cdot \frac{x^2}{m^2}.$$

Osszuk most fel a gúla magasságát n részre az $X_0 = D, X_1, X_2, \dots, X_n$ pontokkal ([jelölje az $X_i D$ távolságot x_i), és tekintsük a gúla ezen osztópontokon átmenő, alaplappal párhuzamos síkmetszeteit. Ezek a síkmetszettek „szeletekre” vágják a gúlát, melyek magassága $x_i - x_{i-1}$. Egy ilyen „szelet” térfogatát felülről becsülhetjük az alaplapjára felfelé állított $x_i - x_{i-1}$ magasságú hasáb térfogatával, mely hasáb tartalmazza a gúla adott szeletét (azért van ilyen, mert a gúla „felfelé keskenyedő”; ez a hasáb a gúlától függően lehet egyenes vagy ferde hasáb). Ennek a hasábnak a térfogata $t(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, tehát a gúla térfogatát a $\sum_{i=1}^n t(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ összeggel becsülhetjük felülről. Ehhez hasonlóan egy „szelet” térfogatát a fedőlapjára lefelé állított, a „szelet” belsejében levő egyenes vagy ferde hasáb térfogatával tudjuk alulról becsülni. Ennek megfelelően a gúla térfogatára alsó becslést ad a $\sum_{i=1}^n t(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})$

összeg. Azaz a gúla V térfogatára a $\sum_{i=1}^n t(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq V \leq \sum_{i=1}^n t(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ egyenlőtlenséget kapjuk, tetszőleges $X_0 = D, X_1, X_2, \dots, X_n$ osztópontok esetén, tetszőleges n -re. Figyelembe véve,

hogy a $t(x) = t \cdot \frac{x^2}{m^2}$ függvény szigorúan monoton nő és integrálható a $[0, m]$ intervallumon, a gúla

térfogatára adott alsó, illetve felső becslések éppen a $t(x) = t \cdot \frac{x^2}{m^2}$ alsó, illetve felső integrálközelítő összegei a $[0, m]$ intervallumon. Mivel csak egy olyan szám van, amely az alsó, illetve felső közelítő

összegek közé esik, és ez a határozott integrál, ezért $V = \int_0^m t(x) dx = \int_0^m t \cdot \frac{x^2}{m^2} dx = \frac{t}{m^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^m = \frac{1}{3} t \cdot m$.

Ehhez hasonlóan közvetlenül kiszámíthatjuk tetszőleges sokszög alapú gúla térfogatát.

IV. Határozott integrálra vonatkozó integrálási szabályok

(kiegészítő anyag)

A középiskolában a kötelező tananyagban szereplő, és ennek mentén haladva használt függvények között nem jellemző, hogy az alábbi módszerek alkalmazása szükséges lenne. Azonban az emelt szintű érettségire készülő tanulók matematikai tanulmányaikat egyetemen folytatva mindenképpen találkoznak olyan függvényekkel, melyek esetében elengedhetetlen az alábbi módszerek használata. Az *integrálszámítás alapjai* című, korábban elkészült dokumentumban ezen módszerek határozatlan integrálokra vonatkozó formái már szerepeltek, ezért itt bemutatjuk a módszerek működését és használatát határozott integrál esetében is.

A Newton-Leibniz formula segítségével kapcsolatot találtunk a primitív függvény, illetve a határozott integrál között. Általában olyan függvények határozott integrálját számítjuk ki, melyek eleget tesznek a Newton-Leibniz formula feltételeinek, ezért érdemes néhány olyan szabályt, illetve módszert végigtekinteni, amely a primitív függvény megkeresésében van segítségünkre.

Tétel: (Parciális integrálás módszere) Ha f és g differenciálható az $[a, b]$ intervallumon és itt f' és

g' integrálható, akkor
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Kidolgozott feladat:

1. Számítsuk ki $e^x \cos x$ határozott integrálját a $[0, 2\pi]$ intervallumon!

Megoldás:

Legyen $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$. Ekkor $f'(x) = e^x$, $g'(x) = -\sin x$. Azaz a fentiek szerint

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^x \sin x dx$$

Hasonlóan kapjuk, hogy
$$\int_0^{2\pi} e^x \sin x dx = [e^x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx.$$

Azaz az előző kifejezésbe visszahelyettesítve

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{2\pi} + [e^x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx$$

$$2 \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{2\pi} + [e^x \sin x]_0^{2\pi} = e^{2\pi} - 1$$

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = \frac{1}{2} [e^{2\pi} - 1]$$

Gyakorló feladatok:

1. Határozzuk meg a parciális integrálás módszere segítségével az alábbi integrálokat!

a) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

b) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x+3} dx$

c) $\int_0^2 x e^x dx$

Tétel: (Helyettesítéssel való integrálás módszere) Ha g differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, f integrálható $g([a, b])$ -n és itt van primitív függvénye, valamint $f(g(t)) \cdot g'(t)$ integrálható $[a, b]$ -n és

itt van primitív függvénye, akkor
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Kidolgozott feladat:

2. Számítsuk ki az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cdot (\cos^2 t + 1)^2 dt$ integrál értékét helyettesítéssel!

Megoldás:

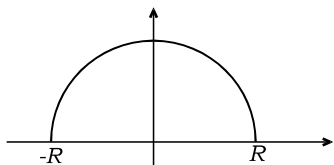
A megoldás során az úgynevezett „fizikus módszert” fogjuk alkalmazni. (Az Integrálszámítás alapjai című anyagban került bemutatásra.) Legyen $x = \cos^2 t$! Ekkor $dx = -2 \cos t \sin t dt = -\sin 2t dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cdot (\cos^2 t + 1)^2 dt &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + 1)^2 \cdot (-\sin 2t) dt = - \int_1^0 (x+1)^2 dx = \int_0^1 (x+1)^2 dx = \\ &= \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

A helyettesítés utáni határokat úgy érdemes megállapítani, hogy megnézzük, milyen értékek között változik a helyettesített kifejezés, illetve ennek megfelelően az új változó. Jelen esetben $x = \cos^2 t$, ezért ha t 0-tól $\frac{\pi}{2}$ -ig változik, akkor $x = \cos^2 t$ $\cos^2 0$ -tól $\cos^2 \frac{\pi}{2}$ -ig, azaz 1-től 0-ig változik. Itt mint látható, előfordulhat, hogy „fordított irányú” integrált kapunk, azaz az integrál alsó határa nagyobb, mint a felsőé, de ez csak egy negatív előjelet jelent, tehát nem okoz gondot.

3. Számítsuk ki az origó középpontú, R sugarú kör területét!

Megoldás:



Nyilvánvaló, hogy a teljes kört mint függvényt nem tudjuk értelmezni. Számítsuk ki tehát a félkör területét!

Az R sugarú, origó középpontú félkört az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ függvény grafikonja és az x tengely határolja. Mivel ez végig az x ten-

gely felett van, ezért a területe $T = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Helyettesítsünk: $x = R \sin \varphi$, $dx = R \cos \varphi d\varphi$. Ekkor x értéke $-R$ -től R -ig, φ értéke $-\frac{\pi}{2}$ -től $\frac{\pi}{2}$ -ig változik. Itt $\cos \varphi \geq 0$, tehát:

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \varphi} \cdot R \cos \varphi d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 \varphi d\varphi = R^2 \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = R^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

8. Milyen arányban osztja ketté az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör területét?

Megoldás:

Nilvánvaló, hogy ha az x és y tengelyeket megcseréljük, azaz az ábrát 90° -kal elforgatjuk, akkor a kiszámítandó területek aránya nem változik. Ekkor a parabola egyenlete $y = \frac{x^2}{2}$, a kör egyenlete változatlan. Számítsuk ki a metszéspontok koordinátáit!

$2y = x^2$, $x^2 + y^2 = 8$, innen $y = -4, y = 2$. Nilvánvaló, hogy az $y = -4$ nem jó, hiszen a parabola-nak nincs az x tengely alatt pontja. Az $y = 2$ értékhez tartozó x értékek 2 és -2 . Tehát a metszéspontok $(2,2)$ és $(-2,2)$. Mivel a parabola és a felette levő körív által határolt síkidom teljes egészében az x tengely felett helyezkedik el, ennek területét meghatározhatjuk a $\sqrt{8-x^2}$ és az $\frac{x^2}{2}$ függvények grafikonja által határolt síkidom területeként.

$$T = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^2 \sqrt{8-x^2} dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = \int_{-2}^2 \sqrt{8-x^2} dx - \frac{8}{3}.$$

Az első integrál értékének kiszámításához helyettesítsünk: $x = \sqrt{8} \sin t, dx = \sqrt{8} \cos t dt$. Ekkor $\sin t$ megy $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ -től $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -ig, azaz t megy $-\frac{\pi}{4}$ -től $\frac{\pi}{4}$ -ig.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{8-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8-8\sin^2 t} \cdot \sqrt{8} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 8 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4(1 + \cos 2t) dt = \\ &= \left[4t + 2 \sin 2t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4 \end{aligned}$$

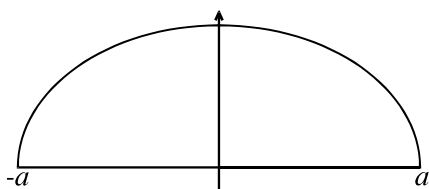
Tehát a terület $T = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = \frac{6\pi + 4}{3}$. A kör másik részének területe:

$$T' = r^2 \pi - T = 8\pi - \frac{6\pi + 4}{3} = \frac{18\pi - 4}{3}.$$

A két terület aránya: $\frac{T'}{T} = \frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$.

9. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis területét!

Megoldás:



Az ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tekintsük az ellipszis „pozitív felét”, azaz az $y \geq 0$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ görbe és az x tengely által határolt síkidomot. Ennek területe az

$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ függvény $[-a, a]$ intervallumon vett integráljával adható meg.

$T = \int_{-a}^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx$. Helyettesítsünk: $x = a \sin t, dx = a \cos t dt$. t értéke $-\frac{\pi}{2}$ -től $\frac{\pi}{2}$ -ig változik.

$$\begin{aligned} T &= \int_{-a}^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a}\sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} a \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ab \cos^2 t dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ab \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{ab\pi}{2} \end{aligned}$$

Tehát az egész ellipszis területe $ab\pi$.

Gyakorló feladatok:

2. Határozzuk meg a helyettesítéses integrálás módszerével az alábbi integrálokat!

a) $\int_1^5 x\sqrt{2x-1} dx$

b) $\int_{-1}^0 9900x^{98} \cdot (x^{99} + 1)^{100} dx$

V. Az integrálszámítás egyéb alkalmazásai

Megtett út kiszámítása

A fizikában találkoztunk azzal a problémával, hogy számítsuk ki a test által megtett utat, ha ismerjük minden időpillanatban a sebességét, azaz ismerjük a $v(t)$ függvényt. Ezt úgy tehetjük meg, hogy felosztjuk az adott időtartamot kis Δt_i időintervallumokra, ezeken úgy tekintjük a sebességet, mint állandó mennyiséget, tehát ez idők alatt a test $\Delta s_i = v \cdot \Delta t_i$ utakat tesz meg. Ha összegezzük a Δs_i utakat, megkapjuk a test által megtett összes utat. Ha pontosabban akarjuk megkapni ezt a távolságot, akkor a Δt_i időintervallumok hosszát minél rövidebbnek kell választani. Ezzel tulajdonképpen a $v(t)$ függvény integrálközelítő összegeit állítjuk elő. A megtett utat ezért a $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ képlettel kaphatjuk meg.

Kidolgozott feladat:

1. Számítsuk ki, mekkora utat tesz meg az a test az indulásától számított első 3 másodperc alatt, melynek sebességét a $v(t) = 0,5t^2 + 4t + 3$ függvény írja le!

Megoldás:

A test által megtett utat az $s = \int_0^3 (0,5t^2 + 4t + 3) dt$ határozott integrál adja meg.

$$s = \int_0^3 (0,5t^2 + 4t + 3) dt = \left[\frac{1}{6}t^3 + 2t^2 + 3t \right]_0^3 = \frac{27}{6} + 18 + 9 = 31,5 \text{ méter}$$

2. Számítsuk ki, mekkora utat tesz meg a függőlegesen lefelé $2 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel elhajított test mozgásának 5. és 6. másodperce alatt!

Megoldás:

A szabadon eső test sebessége $v(t) = 10t + 2$. A test által mozgásának 5. és 6. másodpercében megtett utat az $s = \int_4^6 (10t + 2) dt$ határozott integrál adja meg.

$$s = \int_4^6 (10t + 2) dt = \left[5t^2 + 2t \right]_4^6 = 180 + 12 - 80 - 8 = 104 \text{ méter.}$$

Munkavégzés kiszámítása

Legyen egy vízszintesen mozgó testre ható erő $F(x)$ a kiindulási ponttól x távolságban, és legyen F folytonos! Számítsuk ki, hogy a kiindulóponttól a , illetve b távolságra levő pontok között mekkora az F erő által végzett munka!

Az a és b közti távolságot (az x tengelyen az $[a, b]$ intervallumot) osszuk fel $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ osztópontok segítségével. Az $[x_i - x_{i-1}]$ intervallumon végzett ΔW_i munka az F függvény $[x_i - x_{i-1}]$ intervallumon felvett maximális, illetve minimális értékével ($\min_i F$, illetve $\max_i F$) becsülhető: $\min_i F \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \Delta W_i \leq \max_i F \cdot (x_i - x_{i-1})$

(A ΔW_i munka nagyobb vagy egyenlő, mint az $x_i - x_{i-1}$ úton $\min_i F$ nagyságú erő által végzett munka, de kisebb vagy egyenlő, mint a $\max_i F$ által végzett munka.)

A teljes W munkavégzésre a $\sum_{i=1}^n \min_i F \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq W \leq \sum_{i=1}^n \max_i F \cdot (x_i - x_{i-1})$ becslés adható. Mivel a bal-, illetve jobboldalon F alsó, illetve felső integrálközelítő összege áll, így a korábban már alkalmazott gondolatmenet értelmében $W = \int_a^b F(x) dx$.

Kidolgozott feladatok:

3. Számítsuk ki, mekkora munkát végzünk, ha egy 10 m hosszú súlyos kötelet egyenletesen felhúzzunk a kútból! (A kötel méterenkénti tömege 3 kg.)

Megoldás:

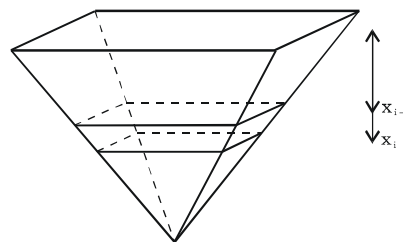
Az általunk kifejtett erő az egyenletes mozgás miatt mindig megegyezik a kútba lógó kötél darab súlyával. Ha ez x hosszúságú [méterben mérve], akkor a súlya [$g = 10 \frac{m}{s^2}$ figyelembevételével]

$$30x. \text{ Tehát a végzett munka: } W = \int_0^{10} 30x dx = \left[15x^2 \right]_0^{10} = 1500 \text{ J}$$

4. Számítsuk ki, mekkora munkát kell végeznünk ahhoz, hogy kiszivattyúzzunk egy csúcsán álló négyzet alapú gúla alakú víztartályt, melynek alap- és oldaléle egyaránt 1 m hosszú!

Megoldás:

Tegyük be a gúlát egy koordinátarendszerbe, melynek origója a gúla alaplappjának középpontja, az x tengely a gúla alaphoz tartozó magasságának egyenesével esik egybe, és pozitív iránya lefelé mutat! A gúla magassága legyen m . Osszuk fel a gúla magasságát n részre az $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = m$ pontokkal. Vegyük a gúla alaplappal párhuzamos síkmetszeteit ezeken a pontokon át, ezek „szeletekre” vágják a gúlát. Számítsuk ki, hogy egy ilyen „szelet” kiemeléséhez mekkora munkát kell végezni!



A „szelet” ΔV_i térfogata a már korábban szerepelt módon a

$$t_a \cdot \frac{(m-x_i)^2}{m^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \Delta V_i \leq t_a \cdot \frac{(m-x_{i-1})^2}{m^2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

egyenlőtlenséggel becsülhető [t_a a gúla alapterülete, $t_a = a^2$]. A ΔV_i térfogat $\rho \Delta V_i$ tömeget jelent, amelyet valamely x_i és x_{i-1} közé eső távolságra kell felemelni. Tehát a $\rho \Delta V_i$ tömegű „szelet” kiszivattyúzásához szükséges ΔW_i munkára teljesül a

$$\rho \Delta V_i x_{i-1} g \leq \Delta W_i \leq \rho \Delta V_i x_i g$$

egyenlőtlenség. Ha figyelembe vesszük a ΔV_i alsó, illetve felső becslését, akkor a

$$\rho g t_a \cdot \frac{(m-x_i)^2}{m^2} \cdot x_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \Delta W_i \leq \rho g t_a \cdot \frac{(m-x_{i-1})^2}{m^2} \cdot x_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

becslést kapjuk, ezt összegezve a ΔV_i térfogatokra, illetve ΔW_i munkákra, a teljes munka:

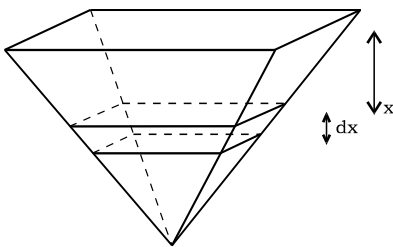
$$\frac{\rho g t_a}{m^2} \sum_{i=1}^n (m-x_i)^2 \cdot x_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq W \leq \frac{\rho g t_a}{m^2} \sum_{i=1}^n (m-x_{i-1})^2 \cdot x_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

A baloldali kifejezés az $f(x) = \frac{\rho g t_a}{m^2} x(m-x)^2$ függvény alsó, a jobboldali kifejezés ugyanezen függvény felső integrálközelítő összege. A korábban mondottak értelmében tehát

$$W = \int_0^m \frac{\rho g t_a}{m^2} x(m-x)^2 = \frac{\rho g t_a}{m^2} \cdot \left[\frac{1}{2} m^2 x^2 - \frac{2}{3} m x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_0^m = \frac{\rho g t_a m^2}{12}. \text{ Kiszámítható, hogy } m = \frac{\sqrt{2}}{2} a,$$

$$\text{ennek felhasználásával } W = \frac{\rho g a^4}{24}.$$

Megjegyzés: Korábban már esett szó „fizikus módszerek”-ről, így itt is megemlíthetünk egy technikailag egyszerűbb számítási módot. A fentiekből látható volt, hogy a viszonylagos matematikai pontosságra való törekvésünk bonyolítja a becsléseket, illetve összegzéseket. A „fizikus gondolatmenet” a fenti feladat megoldására a következő:



Vegyünk az alaplaptól x távolságban egy dx vastagságú (dx „végtelenül kicsiny mennyiség”) réteget. Ennek térfogata $t(x) \cdot dx$

($t(x) = t_a \frac{(m-x)^2}{m^2}$, ahogy azt már az előzőekben láttuk), a felemeléséhez szükséges ún. elemi munkavégzés $dW = t(x) \cdot dx \cdot \rho \cdot g \cdot x$ (x

magasságba kell felemelni a $t(x) \cdot dx \cdot \rho$ nagyságú tömeggel rendelkező réteget). Tehát

$$dW = t_a \frac{(m-x)^2}{m^2} \rho g x \cdot dx. \text{ Mindkét oldalt összegezve (integrálva) a } W = \int_0^m t_a \frac{(m-x)^2}{m^2} \rho g x dx \text{ össze-}$$

függést kapjuk, melynek értékét a fentiekben már kiszámítottuk. Ez a módszer láthatóan egyszerűbben hozza ki a helyes eredményt, azonban van benne egy-két olyan gondolati ugrás, amely a szigorúan vett matematikai értékét csökkenti.

5. Mekkora munkavégzés árán lehet egy m tömegű testet a Föld felszínéről h magasságba emelni? (A Föld sugara R .)

Megoldás:

A Föld középpontjától x távolságra a testre ható gravitációs erő $F = \gamma \frac{mM}{x^2}$, ahol M a Föld tömege.

Ha egy kis dx távolsággal elmozdítjuk a testet, akkor a közben végzett munka $dW = Fdx = \gamma \frac{mM}{x^2} dx$. Ennek megfelelően a már korábban látottak szerint a munkavégzést az

$\int_R^{R+h} \gamma \frac{mM}{x^2} dx$ kifejezéssel adhatjuk meg.

$$\int_R^{R+h} \gamma \frac{mM}{x^2} dx = \gamma mM \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_R^{R+h} = -\gamma \frac{mM}{R+h} + \gamma \frac{mM}{R}$$

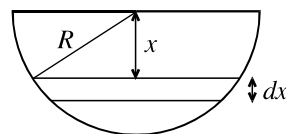
6. Egy vályú félbevágott henger alakú, hossza a , sugara R . Mekkora munkával lehet kiszivattyúzni a vályút megtöltő vízmennyiséget?

Megoldás:

Vegyünk a vályú tetejétől x távolságban egy dx vastagságú vízréteget. Ennek szélessége (az ábrán levő derékszögű háromszögből olvashatóan)

$2\sqrt{R^2 - x^2}$, térfogata $2a\sqrt{R^2 - x^2} dx$, a kiemeléséhez szükséges

munkavégzés $dW = \rho g x \cdot 2a\sqrt{R^2 - x^2} dx$. A teljes munkavégzés



$$W = \int_0^R \rho g x \cdot 2a\sqrt{R^2 - x^2} dx = 2\rho g a \cdot \left[-\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - x^2}^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{2}{3} \rho g a R^3.$$

VI. A „végtelenig vett integrál” (kiegészítő anyag)

Vannak olyan esetek, amikor valamely fizikai mennyiség összegzését pl. minden 1-nél nagyobb értékre szeretnénk elkészíteni. Az eddigiekben erre nem nyílt mód, hiszen az integrál értékét csak valamely $[a, b]$ intervallumon számítottuk ki, és a most felvetett probléma valamely a -ra az $[a, \infty)$ intervallumon való integrálást jelentene. Mód van arra azonban, hogy ilyen típusú integrálokat is meghatározzunk.

Def. Az f függvényt az $[a, \infty)$ intervallumon impropriusan integrálhatónak nevezzük, ha minden

$x > a$ számra f integrálható az $[a, x]$ intervallumon, és a $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$ határérték létezik és véges.

Ekkor ezt a határértéket az f függvény $[a, \infty)$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük, és

$\int_a^\infty f(t) dt$ -vel jelöljük.

Hasonlóan definiálható a $(-\infty, a]$ intervallumon vett improprius integrál.

Kidolgozott feladatok:

1. Legyen $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Impropriusan integrálható-e az $[1, \infty)$ intervallumon?

Megoldás:

Minden $x > 1$ esetén f integrálható az $[1, x]$ intervallumon, mert folytonos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$

Tehát f impropriusan integrálható az $[1, \infty)$ intervallumon és improprius integrálja 1.

2. Legyen $f(t) = \frac{1}{t}$. Impropriusan integrálható-e az $[1, \infty)$ intervallumon?

Megoldás:

Minden $x > 1$ esetén f integrálható az $[1, x]$ intervallumon, mert folytonos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x) = \infty$$

Mivel a fenti határérték nem véges, ezért f impropriusan nem integrálható az $[1, \infty)$ intervallumon.

Az improprius integrál fogalmának segítségével ilyen értelemben integrálhatunk a $(-\infty, \infty)$ intervallumon is:

Def. Az f impropriusan integrálható a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, ha értelmezve van $\mathbf{R}$ -en, minden $[a, b]$ intervallumon integrálható, és léteznek az $\int_0^\infty f(t)dt$, illetve $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ improprius integrálok. Az f $(-\infty, \infty)$ intervallumon vett improprius integrálja a két említett improprius integrál összege, jelölése: $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$.

Megjegyzés: A definícióban a 0 helyett bármelyik másik valós szám szerepelhet.

Eddig a függvények integrálját azért nem tudtuk értelmezni valamely $[a, \infty)$ intervallumon, mert a függvény úgymond nem volt értelmezve a $+\infty$ -ben; azonban a határérték segítségével valamiféleképpen integrálhatóvá tettünk bizonyos függvényeket. Ugyanezt – a korábbiakkal analóg módon – megtehetjük akkor is, ha valamely a pontban a függvény nincs értelmezve.

Def: Legyen $f : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény. Az f függvényt impropriusan integrálhatónak nevezzük az $(a, b]$ intervallumon, ha f minden $\varepsilon > 0$ esetén integrálható az $[a + \varepsilon, b]$ intervallumon, és létezik a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) dt \text{ véges határérték. Jelölése: } \int_a^b f(t) dt.$$

Hasonlóan definiálható az f függvény $[a, b)$ intervallumon vett improprius integrálja.

Megjegyzés: Korábban már szerepelt olyan tétel, hogy ha $f [a, b]$ -n értelmezett, korlátos függvény és minden $\varepsilon > 0$ esetén az $[a + \varepsilon, b]$ intervallumon integrálható, akkor az $[a, b]$ intervallumon is integrálható. A mostani definíciónk ennél többet mond, hiszen nem követeltük meg azt, hogy a függvény a -ban is értelmezve legyen, valamint azt sem, hogy korlátos legyen az (a, b) -n, illetve $[a, b)$ -n. Bizonyos értelemben véve tehát a korábbi tételünk általánosítása az improprius integrál definíciója.

Kidolgozott feladatok:

3. Impropriusan integrálható-e a $(0, 1]$ intervallumon az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény?

Megoldás:

Az f függvény minden $1 > \varepsilon > 0$ számra az $[\varepsilon, 1]$ intervallumon integrálható, mert itt folytonos.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

Tehát az f függvény impropriusan integrálható a $(0, 1]$ intervallumon, és improprius integráljának értéke.

4. Impropriusan integrálható-e a $(0, 1]$ intervallumon az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény?

Az f függvény minden $1 > \varepsilon > 0$ számra az $[\varepsilon, 1]$ intervallumon integrálható, mert itt folytonos.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln x]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\ln \varepsilon) = +\infty$$

Tehát az f függvény nem integrálható impropriusan a $(0, 1]$ intervallumon.

Az improprius integrálokat jellemzően a fizikai számításokban (pl. potenciál kiszámítása), illetve a valószínűségszámításban lehet felhasználni. Érdekes alkalmazása még a végtelen sorok konvergenciájával való összefüggésének felhasználása.

A gyakorló feladatok megoldása

A III. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Határozzuk meg az x tengely, az $f(x) = 9x^2 - 3x - 2$ függvény grafikonja, az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenletű egyenesek által meghatározott síkidom területét!

Megoldás:

Az $9x^2 - 3x - 2$ kifejezés gyökei $-\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$, ezért az $f(x) = 9x^2 - 3x - 2$ függvény grafikonja a vizsgált tartományon $-\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ között az x tengely alatt, egyébként felette helyezkedik el. A keresett terület nagyságát ezért az egyes részintervallumokon vett határozott integrálok abszolút értékének összege adja meg.

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{3}} (9x^2 - 3x - 2) dx = \left[3x^3 - \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^{-\frac{1}{3}} = \frac{-1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \left(-3 - \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{26}{9}.$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (9x^2 - 3x - 2) dx = \left[3x^3 - \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{8}{9} - \frac{4}{6} - \frac{4}{3} - \left(\frac{-1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right) = -\frac{3}{2}$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 (9x^2 - 3x - 2) dx = \left[3x^3 - \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_{\frac{2}{3}}^1 = 3 - \frac{3}{2} - 2 - \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{6} - \frac{4}{3} \right) = \frac{11}{18}.$$

Tehát a keresett terület nagysága: $\frac{26}{9} + \frac{3}{2} + \frac{11}{18} = 5$.

2. Határozzuk meg az x tengely, az y tengely, az $f(x) = 2\cos x + 1$ függvény grafikonja és a $x = 2\pi$ egyenes által közbezárt síkidom területét!

Megoldás:

$2\cos x + 1 = 0$ a $[0; 2\pi]$ intervallumon akkor teljesül, ha $x = \frac{2\pi}{3}$ vagy $x = \frac{4\pi}{3}$. A két említett érték között a függvény grafikonja az x tengely alatt, egyébként pedig felette halad. Emiatt a keresett terület nagyságát az

$$\left| \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (2\cos x + 1) dx \right| + \left| \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (2\cos x + 1) dx \right| + \left| \int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} (2\cos x + 1) dx \right| \text{ összeg adja meg.}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (2\cos x + 1) dx = \left[2\sin x + x \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3},$$

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (2 \cos x + 1) dx = \left[2 \sin x + x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = -\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} - \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \right) = -2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3},$$

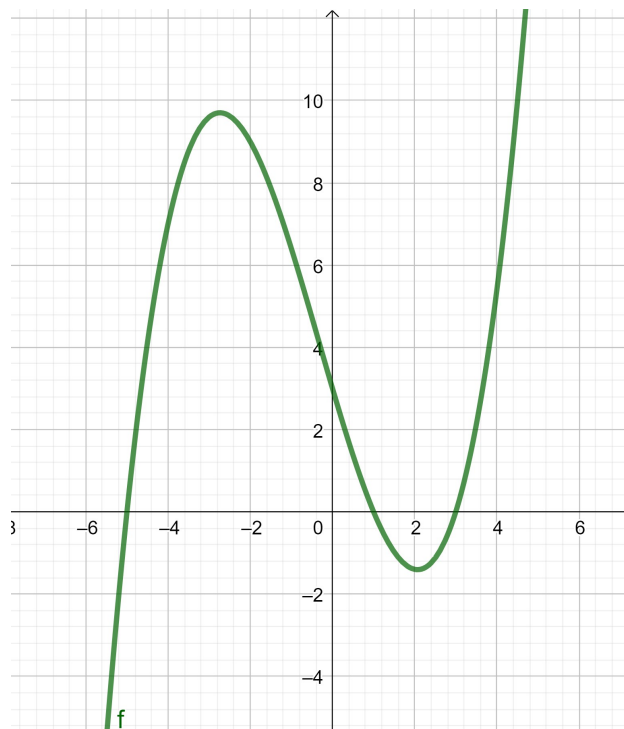
$$\int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} (2 \cos x + 1) dx = \left[2 \sin x + x \right]_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} = 2\pi - \left(-\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

A keresett terület nagysága tehát $\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \left| -2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \right| + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} = 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}.$

3. Az $f(x) = 0,2 \cdot (x^3 + x^2 - 17x + 15)$ függvény zérushelyei -5 , 1 és 3 . Határozzuk meg a függvény grafikonja és az x tengely által határolt zárt síkidom területét!

Megoldás:

A vizsgált síkidom két egymáshoz egy pontban csatlakozó részből áll:



A síkidom területét két határozott integrál összegeként tudjuk meghatározni, figyelembe véve, hogy az egyik rész az x tengely alatt helyezkedik el:

$$\begin{aligned} & \int_{-5}^1 0,2 \cdot (x^3 + x^2 - 17x + 15) dx + \left| \int_1^3 0,2 \cdot (x^3 + x^2 - 17x + 15) dx \right| \\ & \int_{-5}^1 0,2 \cdot (x^3 + x^2 - 17x + 15) dx = 0,2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{17}{2}x^2 + 15x \right]_{-5}^1 = \\ & = 0,2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{17}{2} + 15 - \left(\frac{625}{4} - \frac{125}{3} - \frac{17}{2} \cdot 25 - 75 \right) \right) = 36 \end{aligned}$$

$$\left| \int_1^3 0,2 \cdot (x^3 + x^2 - 17x + 15) dx \right| = \left| 0,2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{17}{2}x^2 + 15x \right]_1^3 \right| =$$

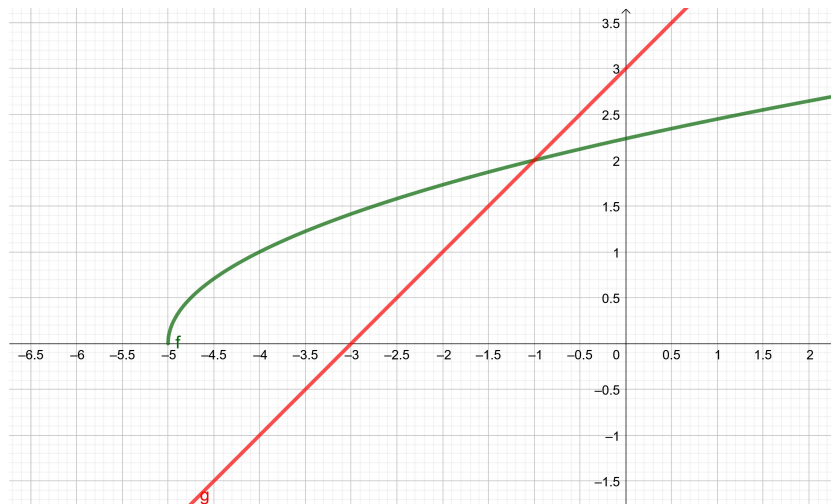
$$= \left| 0,2 \cdot \left(\frac{81}{4} + \frac{27}{3} - \frac{17}{2} \cdot 9 + 45 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{17}{2} + 15 \right) \right) \right| = \frac{28}{15}$$

Tehát a keresett terület $\frac{28}{15} + 36 = 37\frac{13}{15}$.

4. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x+5}$ és a $g(x) = x+3$ függvények grafikonja, valamint az x tengely által határolt síkidom területét!

Megoldás:

$f(x) = \sqrt{x+5}$ és az x tengely metszéspontja $x = -5$ -nél van. $\sqrt{x+5} = x+3$, rendezve (az $x+3 \geq 0$, azaz $x \geq -3$ feltétel mellett) $0 = x^2 + 5x + 4$, $x = -4$ és $x = -1$, de a feltétel miatt csak $x = -1$ megfelelő. $g(x) = x+3$ az $x = -3$ -nál metszi az x tengelyt. Ellenőrizhető, hogy a $[-5; -1]$ intervallumon $f(x) \geq g(x)$, ezért a keresett területet úgy kapjuk, hogy az $f(x)$ grafikonja „alatti” területből kivonjuk a $g(x)$ grafikonja „alatti” területet.



Nevesítve

$$T = \int_{-5}^{-1} \sqrt{x+5} dx - \int_{-3}^{-1} (x+3) dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x+5)^3} \right]_{-5}^{-1} - \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-3}^{-1} = \frac{16}{3} - 0 - \left(-\frac{5}{2} + \frac{9}{2} \right) = \frac{10}{3}$$

5. Határozzuk meg az alábbi görbék által közbezárt síkidomok területét!

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ és $g(x) = 2x^2 + 9x - 5$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ és $g(x) = 3x - 3$

c) $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \sqrt{3} \cos x$ által közbezárt síkidomnak az $x \in [0; 2\pi]$ tartományba eső zárt része

Megoldás:

- a) $f(x)$ és $g(x)$ metszéspontjait a $2x^2 + 9x - 5 = 3x^2 + 5x - 2$ egyenlet megoldásai adják. Rendezve $x^2 - 4x + 3 = 0$, megoldásai $x = 1$ és $x = 3$. A görbék által közbezárt területet a két függvény különbségének a metszéspontok között vett határozott integráljának abszolút értéke adja (így nem kell foglalkoznunk külön azzal, hogy melyik függvény értékei nagyobbak a másikonál a vizsgált intervallumon).

$$\int_1^3 (3x^2 + 5x - 2 - (2x^2 + 9x - 5)) dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x \right]_1^3 = -\frac{4}{3}$$

Tehát a keresett terület nagysága ennek abszolútértéke, vagyis $\frac{4}{3}$.

- b) $f(x)$ és $g(x)$ metszéspontjait a $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 3x - 3$ egyenlet megoldásai adják. Rendezve $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$, azaz $x(x^2 - 3x + 2) = 0$, ennek megoldásai $x = 0$, $x = 1$ és $x = 2$. A görbék által közbezárt területet a két függvény különbségének metszésponttól metszéspontig vett határozott integráljai abszolút értékének összege adja (így nem kell foglalkoznunk külön azzal, hogy melyik függvény értékei nagyobbak a másikonál a vizsgált intervallumokon). A két függvény különbsége: $x^3 - 3x^2 + 2x$, tehát a terület:

$$\left| \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{4} - 1 + 1 - 0 \right| + \left| 4 - 8 + 4 - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) \right| = \frac{1}{2}$$

- c) $f(x)$ és $g(x)$ metszéspontjait a $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ egyenlet megoldásai adják. Rendezve $\tan x = \sqrt{3}$, megoldásai az $x \in [0; 2\pi]$ tartományon $x = \frac{\pi}{3}$ és $x = \frac{4\pi}{3}$. Egy vázlatrajz készítésével látható, hogy a vizsgált tartományon $\sin x \geq \sqrt{3} \cos x$ teljesül, tehát a keresett terület:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) dx = \left[-\cos x - \sqrt{3} \sin x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = 4.$$

6. Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának x tengely körüli forgatásával kapott forgástestek térfogatát!

a) $y = 3 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{2}{3}}, (0 \leq x \leq 2)$ b) $y = \sin x, (0 \leq x \leq \pi)$ c) $y = x\sqrt{x-2}, (2 \leq x \leq 4)$

Megoldások:

$$\text{a) } V = \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \pi \frac{9}{2^{\frac{4}{3}}} \cdot \int_0^2 x^{\frac{4}{3}} dx = \pi \frac{9}{2^{\frac{4}{3}}} \cdot \left[\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \right]_0^2 = \frac{54}{7} \pi$$

$$\text{b) } V = \pi \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \cdot \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \pi \cdot \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\text{c) } V = \pi \int_2^4 f^2(x) dx = \pi \cdot \int_2^4 x^2(x-2) dx = \pi \cdot \int_2^4 (x^3 - 2x^2) dx = \pi \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{68}{3} \pi$$

A IV. fejezetben kitűzött feladatok megoldása

1. Határozzuk meg a parciális integrálás módszere segítségével az alábbi integrálokat!

$$\text{a) } \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$\text{b) } \int_0^1 x^2 \sqrt{x+3} dx$$

$$\text{c) } \int_0^2 x e^x dx$$

Megoldás:

$$\text{a) } \int_0^{\pi} x \sin x dx = [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = \pi - 0 + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$$

$$\text{b) } \int_0^1 x^2 \sqrt{x+3} dx = \left[x^2 \cdot \frac{2}{3} (x+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{2}{3} (x+3)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{16}{3} - 0 - \frac{4}{3} \int_0^1 x \cdot (x+3)^{\frac{3}{2}} dx$$

A kapott integrált újra parciális integrálással számolva:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(x+3)^{\frac{3}{2}} dx &= \left[x \cdot \frac{2}{5} (x+3)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{5} (x+3)^{\frac{5}{2}} dx = \frac{64}{5} - 0 - \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} (x+3)^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \\ &= \frac{64}{5} - \frac{512}{35} + \frac{108}{35} \sqrt{3} = \frac{108}{35} \sqrt{3} - \frac{64}{35} \end{aligned}$$

Ezt a korábban kapott kifejezésbe visszahelyettesítve:

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{x+3} dx = \frac{16}{3} - 0 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{108}{35} \sqrt{3} - \frac{64}{35} \right) = \frac{272}{35} - \frac{144\sqrt{3}}{35}$$

$$\text{c) } \int_0^2 x e^x dx = [x e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - 0 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 - 1$$

2. Határozzuk meg a helyettesítéssel integrálás módszerével az alábbi integrálokat!

$$\text{a) } \int_1^5 x \sqrt{2x-1} dx$$

$$\text{b) } \int_{-1}^0 9900 x^{98} \cdot (x^{99} + 1)^{100} dx$$

Megoldás:

- a) Helyettesítsünk: $\sqrt{2x-1} = y$, $x = \frac{y^2+1}{2}$, $dx = \frac{1}{2} \cdot 2y dy = y dy$. Ha x megy 1-től 5-ig, akkor y megy 1-től 3-ig.

$$\int_1^5 x \sqrt{2x-1} dx = \int_1^3 \frac{y^2+1}{2} \cdot y^2 dy = \frac{1}{2} \int_1^3 (y^4 + y^2) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{243}{5} + \frac{27}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{428}{15}$$

- b) Helyettesítsünk: $x^{99} = y$, $dx = 99x^{98} dy$. Ha x megy -1 -től 0-ig, akkor y is -1 -től 0-ig megy.

$$\int_{-1}^0 9900x^{98} \cdot (x^{99} + 1)^{100} dx = \int_{-1}^0 100(x^{99} + 1)^{100} 99x^{98} dx = \int_{-1}^0 100(y + 1)^{100} dy = \frac{100}{101} \left[(y + 1)^{101} \right]_{-1}^0 = \frac{100}{101}$$