Katolikus Pedagógiai Intézet

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE

TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: **2018. október 19. péntek, 10^{00} – 14^{30} óra**

Helyszín: **PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar**

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Feladatok a szerencsejátékok területéről

I. Bevezetés

A szerencsejátékokkal a mindennapi életben találkozunk. A nyeremény beindíthatja a fantáziát, a játék igazi szenvedéllyé válhat. Akinek azonban a matematika a szenvedélye, az eljátszhat másfajta gondolatokkal, erre invitáljuk az olvasót az alábbiakban. A szerencsejátékoknak rengeteg fajtája van, mi kettővel foglalkozunk különböző szempontok szerint. Ismerjük meg ezeket közelebbről!

Lottó

Magyarországon a hagyományos lottó játékban az 1, 2, …, 90 számok közül ötöt kell választani. Ez azt jelenti, hogy egy játékszelvény akkor érvényes, ha a 90 szám közül pontosan öt darabot jelöltek ki. A sorsolás úgy zajlik, hogy egy urnába beteszik az 1, 2, …, 90 számokat egy-egy golyóba rejtve, majd visszatevés nélkül egymás után húznak öt darabot. A húzás sorrendje nem számít, a húzás után általában nagyság szerinti sorrendben közlik a nyerő számokat.

1. Hány érvényes szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy köztük legyen telitalálatos szelvény?

Megoldás:

Az összes lehetséges szelvényt el kell készíteni. Az első kihúzott szám lehet 90 féle, a második 89 féle, a harmadik 88 féle, a negyedik 87 féle, az ötödik 86 féle. Mivel minden húzás csak annyiban befolyásolja az utána következőket, hogy a már kihúzott számot nem lehet újra húzni, viszont a bennmaradók közül bármelyik egyforma eséllyel következhet, ezért eddig a lehetőségek száma $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$. Mivel a húzások sorrendje nem számít, ezért a kapott eredményt el kell osztanunk az öt húzás lehetséges sorrendjeinek számával, azaz 5!=120-szal. Így az eredmény:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\,949\,268.$$

Általánosabban vizsgálva bevezetjük a következő jelölést:

Legyen $L(n,k)$ az a lottó játék, amelyben az 1, 2, …, n számok közül k darabot választanak ki, ahol n és k pozitív egészek, $n \geq k$.

Továbbiakban amennyiben egy szelvényt említünk az $L(n,k)$ játékban, akkor mindig egy érvényesen kitöltött szelvényt értünk ez alatt, tehát az 1, 2, …, n számok közül pontosan k darabot jelöltek meg a szelvényen.

2. Hány szelvény kell az $L(n,k)$ játéban ahhoz, hogy legyen telitalálatos szelvényünk?

Megoldás:

Használhatjuk az 1. feladatban alkalmazott gondolatmenetet, amely éppen azt adja meg, hogy n különböző számból hányféleképpen választható ki k darab, ha a kiválasztás sorrendje nem számít. Ezt $\binom{n}{k}$-val jelöljük, az eredmény:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Totó

A hagyományos totó játékban focimeccsek eredményére lehet tippelni. Három lehetőség van a szerint, hogy a hazai csapat nyer, a vendég csapat nyer, vagy döntetlen lesz az eredmény. Mi egy idealizált totó játékkal foglalkozunk, ahol a lehetséges tippek esélye ugyanakkora. Az érvényesen kitöltött szelvényeken minden mérkőzésre egy tippet adhatunk meg. A lottó játékban látott általánosabb jelölést alkalmazva kapjuk:

Legyen $T(n,k)$ az a totó játék, ahol n darab mérkőzésre tippelhetünk és minden mérkőzés esetén k féle eredmény lehet, ahol n és k pozitív egészek.

3. Hány szelvényt kell kitöltenünk a $T(n,k)$ játékban ahhoz, hogy legyen köztük telitalálatos?

Megoldás:

A telitalálatos szelvényhez ki kell töltenünk az összes lehetséges szelvényt. Minden mérkőzés esetén k lehetséges eredmény van, ezek egymástól függetlenek, így a szükséges szelvények száma k^n. Például amennyiben 13 mérkőzés van és három féle tipp, akkor ez a szám $3^{13} = 1\,594\,323$.

Láthatjuk, hogy a Magyarországon szokásos változatokban nagyon sok lehetséges szelvény van, így egy szelvénnyel játszva nagyon kicsi a telitalálat esélye. Ha azonban más céljaink vannak, akkor érdekes kérdések merülnek fel, ezek világában kalandozunk a következő három fejezetben.

II. Betli

Az előző fejezetben a telitalálattal foglalkoztunk. Ritkán adatik meg az embernek, hogy ilyen szelvénye legyen. Most vizsgáljuk ennek éppen az ellentétét, amikor nincs találat. Az ilyen szelvényt nevezem betli-szelvénynek. A témakört a Városok Viadalában 1996 őszén kitűzött, itt 6-os sorszámmal szereplő feladat ihlette. Ott inverz lottónak nevezték a játékot, én „Betli Benővel" fűszerezve vezetem be, Pósa Lajos táboraiban a Balszerencsések klubjával szerepel. Szóval képzeljük el Betli Benőt, akinek bizony sosincs szerencséje. (Titokban talán büszke is erre.) A szerencsejátékok esetén így az a célja, hogy a sorsolás után felölthesse kedvenc önsajnáló arckifejezését és mutathasson cimboráinak betli-szelvényt.

4. Betli Benő lottózik. Célja, hogy legyen olyan szelvénye, melyen egyetlen találat sincs. Hány szelvényt töltsön ki $L(90,5)$ játék esetén úgy, hogy közöttük biztosan legyen betli-szelvény?

Megoldás:

Öt szelvény még nem elég a biztos betlihez. Ugyanis amennyiben mind az öt szelvényen bekarikázunk egy kijelölt számot, és a kisorsolt öt szám között ott lesznek a bekarikázottak, akkor meghiúsult a betli. Diákjaimnak ezt úgy szoktam magyarázni, hogy képzeljük magunk elé a csintalan Fortuna tündérkét, aki láthatatlanul belekukucskál Betli Benő szelvényeibe, majd azok ismeretében pajkosan tündérkedik a sorsolásnál. Olyan nyerő számokat válogat, hogy Benő szelvényei közül minél többet elrontson. Mármint elrontás alatt itt most azt értjük, hogy a szelvényen lesz kisorsolt nyerő szám.

Hat szelvény már elég, például a következő tippekkel: (1, 2, 3, 4, 5); (6, 7, 8, 9, 10); (11-15); (16-20); (21-25); (26-30). Csak arra kell vigyáznunk, hogy a hat szelvényen 30 különböző szám legyen. Fortuna most nem tudja meghiúsítani a betlit, hiszen csak öt számot választhat, a szelvények pedig diszjunktak.

Tapasztalatom szerint ez a feladat remek lehetőséget teremt némi játékra. Az imént leírt megoldás rövid, könnyen megérthető, de gyakran egészen máshogy indulnak a gyerekek. Mivel tudják, nagyon sokféle szelvény lehet, ezért itt is nagy számot várnak válasznak. Például egy tipikus induló gondolat az, hogy tekintsük az összes szelvényt. Amennyiben ezek között m darabon van nyerő szám, akkor m+1 kitöltése biztosan garantálja a betlit. A IV. fejezetben majd meghatározzuk m értékét. Így a betlihez szükséges szelvények számára kapunk egy jó felső becslést. A magyarországi lottó esetén ennél jóval kisebb felső becslést is javasolhatnak a diákok, például tekintsük az összes olyan szelvényt, amikor az 1,2, …, 10 számok közül kiválasztunk ötöt. Mivel csak öt nyerő szám van, az első tíz szám között biztosan van öt nem nyerő szám és nekünk lesz olyan szelvényünk, ami pont ezt az öt számot tartalmazza. Az így adódó $\binom{10}{5} = 252$ az előzőnél sokkal jobb felső becslés. Amennyiben diákjaink erről az oldalról indulnak, érdemes hagyni őket egy darabig, mert a felső becslések készítése olyan gondolatokat indíthat, amik a későbbiekben még jól jöhetnek. Ha megakadnak ezen az úton, akkor érdemes az alsó becslésre indítani őket, megkérdezni: Szerintetek egy szelvény elég lehet?

A feladat megoldását követően buzdítsuk diákjainkat, mit lehet kérdezni ezután.

5. $L(n,k)$ játékban az iménti gondolatmenetet mikor alkalmazhatjuk?

Megoldás:

Fortuna tündérke könnyedén elronthat k nyerő szám kihúzásával Benő szelvényei közül éppen k darabot. Amennyiben viszont Benőnek k+1 diszjunkt szelvénye van, akkor már biztosan lesz köztük betli-szelvény. Például lehetnek a szelvények (1,2,…,k); (k+1,k+2,…,2k); …, (k^2+1,…,k^2+k). Ehhez az szükséges, hogy n értéke elég nagy legyen, legalább $k \cdot (k+1) = k^2 + k$.

Érdemes a tanítás során a felmerülő gondolatokra vissza-visszatérni. A diszjunkt szelvények ötlete szerepelt most a 4. és 5. feladatban. Ha később vissza szeretnék erre térni, kérdezhetjük például a következőt. Az $L(4k,k)$ játékban mely k esetén elég k+1 szelvény a betlihez? A jó tanár képes a helyes időzítésre. Így ezt a feladatot sem adhatjuk fel közvetlenül az 5. után, akkor nincs értelme. Ha egy-két nappal később adjuk fel, akkor van!

6. Betli Benő lottózik. Célja, hogy legyen olyan szelvénye, melyen egyetlen találat sincs. Hány szelvényt töltsön ki, ha $L(36,6)$-os játékban játszik?

Városok viadala 1996

Megoldás:

A 4. feladat megoldásában megtanultuk, hogy 6 szelvény nem elég. Az 5. feladatban szereplő feltétel most nem teljesül, nem tudunk 7 darab diszjunkt szelvényt kitölteni. Így azonnal következik, hogy 7 szelvény sem elegendő, hiszen Fortuna első nyerő számként olyan számot választ, ami legalább két szelvényen szerepel, és ezzel legalább két szelvényt el tud rontani. És a többi ötről válaszhat egyet-egyet. Most megmutatjuk, hogy 8 szelvény sem elegendő. Ha van olyan szám, ami legalább három szelvényen szerepel, akkor Fortuna ezt választja, így marad további 5 száma a megmaradt legfeljebb 5 szelvény elrontására. A továbbiakban ezek szerint feltételezhetjük, hogy minden szám legfeljebb két szelvényen szerepel. Fortuna kiválaszt egy számot, jelölje ezt x, ami két szelvényt elront. A megmaradt 6 szelvényen viszont már csak 35 féle szám lehet, hiszen x biztosan nem szerepelhet. Mivel a 6 szelvényen 36 jelölt szám van és ezek csak 35 félék lehetnek, így lesz olyan szám, ami két szelvényen szerepel. Ezt választja Fortuna második számnak. Az első két számmal sikerült négy szelvényt elrontani, a maradék 4 szelvényt a további négy nyerő számmal Fortuna elronthatja.

Most megadunk 9 megfelelő szelvényt. Közülük az első három legyen (1,2,3, 4,5,6); (1,2,3, 7,8,9) és (4,5,6, 7,8,9). Nincs olyan szám, ami mindhármon szerepel, ezért Fortunának legalább két számra szüksége van, amivel ezeket elronthatja. Ezt a három szelvényt három számtrióból építettük, jelölje ezeket $x(1,2,3)$; $y(4,5,6)$ és $z(7,8,9)$. Az első szelvényt az x-y alkotta, a másodikat x-z, a harmadikat y-z. A következő három szelvényünket is ezzel a módszerrel készítjük a 10-18 számokból, ezek: (10,11,12, 13,14,15); (10,11,12, 16,17,18) és (13,14,15, 16,17,18). Még nem használtunk 18 számot, ezek felhasználásával éppen készíthető 3 diszjunkt szelvény: (19,20,21,22,23,24); (25,26,27,28,29,30) és (31,32,33,34,35,36). Számoljuk össze, Fortunának hány szám kell az imént megadott kilenc szelvény elrontásához. Az első háromhoz 2, ugyanígy a következő háromhoz is 2, majd az utolsó háromhoz 3, azaz összesen 7 darab. Ha Benő ezekkel a szelvényekkel játszik, akkor biztosan lesz köztük betli-szelvény, hiszen 6 számmal nem rontható el az összes.

Ez a feladat próbára tehet kisebb-nagyobb diákot egyaránt. Akár órai munkában, akár szakköri foglalkozáson nagyon jól használható és szórakoztató lehet. A Betli-Benő felvezetés mókás és szokatlan volta eleve ad némi motivációt a gondolkodásra. A korábbi feladatokból azonnal adódik a 6-os és 7-es alsó becslés. A diszjunkt szelvényekre való törekvés jegyében természetes gondolat, hogy legyenek az első hat szelvényen hatosával sorban a számok. Innen több felső becslés is alkotható. Ezek közül ha a társaság elakad, megmutatható a hat diszjunkt szelvény mellé a következő 4 szelvény, ami hasonló számtriókból épül: (1,2,3, 7,8,9), (1,2,3, 10, 11,12), (4,5,6, 7,8,9) és (4,5,6, 10,11,12). Ez majdnem a legjobb! Csigázhatjuk tovább diákjainkat, mi lehet az igazi válasz, 8, 9, vagy 10?

Lényegében ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk, és ezért alkalmas lehet gyakorló, házi feladat, vagy ellenőrző kérdésnek, ha $L(100,10)$, vagy $L(16,4)$ játék esetén kérdezzük ugyanezt.

7. Betli Benő totózik. Célja, hogy legyen olyan szelvénye, melyen egyetlen találat sincs. Hány szelvényt töltsön ki, ha csak négy mérkőzésre kell tippelni? (Megjelent az Élet és Tudomány 2003. 3. számában a „Diákoldal” rovatban.)

KöMaL B.3676.

Megoldás:

Ez a feladat nem könnyű. Amennyiben diákjainkat nem mozgatja meg elsőre, akkor érdemes először kevesebb mérkőzéssel kezdeni. A $T(n,3)$ játékban a betlihez szükséges szelvények minimális számát jelölje $b(n)$. Nyilván $b(1)=2$. Két mérkőzés esetén az [11], [22], [*XX*] tippekkel kitöltött szelvények garantálják a betlit, hiszen valamilyen eredménytípus biztosan nem lesz, tehát $b(2)=3$. Egy szelvényt úgy jelölünk, hogy szögletes zárójelben felsoroljuk egymás után a tippeket. Kevesebb, azaz két szelvény pedig nem elég, hiszen előfordulhat, hogy az első mérkőzés éppen az első szelvény, a második pedig a második szelvényen szereplő tipp eredménye lesz. Az n=1 és 2 esettel már meg is vagyunk.

Ha i szelvényt töltünk ki, akkor legalább $\left\lceil\frac{i}{3}\right\rceil$ szelvényen ugyanaz a tipp szerepel az első mérkőzésre. Ha éppen ez az első mérkőzés eredménye, akkor ezen szelvényeink egyike sem lehet betli szelvény. Emiatt a

$$b(n+1)-\left\lceil\frac{b(n+1)}{3}\right\rceil \geq b(n)$$

feltételt kapjuk. Ebből $b(3)\geq5$, $b(4)\geq8$, $b(5)\geq12$, …, $b(13)\geq315$, ami mutatja, hogy a totón nem is annyira egyszerű betlizni, szemben a lottóval, ahol ez a 90/5-ös változatban már hat szelvénnyel könnyen garantálható. Az iménti $b(n)$-re vonatkozó becslés n=3,4,5 esetén éles. Három mérkőzés esetén megfelelő szelvények az [111], [122], [212], [221], és [*XXX*]. Négy mérkőzés esetén egy lehetséges megoldást ad a következő nyolc szelvény: [1111], [11*XX*], [1*X*22], [221*X*], [22*X*1], [*X*122], [*XX*11], [*XXXX*]. Az ellenőrzést az olvasóra bízzuk, ez több eset vizsgálatát jelenti.

8. Keressünk minél jobb alsó és első becslést az előző feladatban szereplő *b*(n) értékére.

Megoldás?

Igen, jól látja a tisztelt olvasó! A megoldás után nem kettőspont, hanem kérdőjel van. Ez nem véletlen, hiszen a feladat meglehetősen nyitott, sokféle becslés adható, mi is mutatunk párat.

Kezdjük az alsó becslésekkel. Ezek közül a legegyszerűbb az $n<b(n)$, ugyanis Fortuna sorban veszi az *n* szelvényt és úgy befolyásolja a mérkőzéseket, hogy az első eredménye éppen az első szelvény első tippje legyen, a második eredménye a második szelvény második tippje és így tovább.

Ennél rafináltabb alsó becslést láttunk az előző feladat megoldásánál, ami nagyságrendileg azt jelentette, hogy $b(n)$ értékének legalább 3/2 szerese lesz $b(n+1)$, azaz $b(n)$ értéke *n* függvényében legalább exponenciálisan nő, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq b(n)$.

Felső becslést is több módszerrel készíthetünk. Azonnal adódó felső becslés a $b(n) \leq 2^n$, az *x* tippet nem használva elkészítjük az összes 1 vagy 2 számokat tartalmazó szelvényeket. Nyilván minden mérkőzésnél lesz az 1, 2 közül hibás tipp, így a 2^n szelvény közt lesz betli-szelvény.

Ezt a durva becslést egy kicsit javíthatjuk, ha az egyik szelvény a csupa *x*, a többin pedig kitöltjük az összes olyan 1 vagy 2 számokat tartalmazó tipposzlopot, ami páros sok 1-est tartalmaz. Ilyenből 2^{n-1} darab szelvény van, hiszen szabadon választhatjuk az 1 vagy 2 közül az első n-1 tippet, míg az utolsó tippet a páros sok 1-re vonatkozó feltétel egyértelműen meghatározza. Ebből

$$b(n) \leq 1 + 2^{n-1}.$$

Fortuna kénytelen elrontani az *x*-ekkel kitöltött szelvényt, ezért az egyik mérkőzés eredménye döntetlen lesz. A többi *n*-1 mérkőzésre a konstrukciónk miatt viszont van éppen 2^{n-1} megfelelő szelvényünk.

Az egyik diák, Homonnay Bálint javasolta a következő felső becslést. Vegyük észre, hogy $b(s+t) \leq b(s) \cdot b(t)$. A szelvényeinken gondolatban húzzunk egy vonalat az első *s* darab tipp után. Vegyük a $b(s)$-re adott konstrukciót és annak minden szelvényét másoljuk fel $b(t)$ darab példányban az első *s* tippet használva. Most tekintsük a $b(t)$-re adott konstrukciót. Vegyük az azonosan kezdődő $b(t)$ darab szelvényünket és ezek fennmaradó t helyére írjuk be a $b(t)$ szerinti konstrukciót. Ezt folytatva azt kapjuk, hogy $b(s)$ miatt lesz az első s mérkőzés eredményét figyelve betlivel kezdődő $b(t)$ darab szelvényünk, amik második *t* mérkőzésében is lesz $b(t)$ definíciója szerint betli. Ezt most szemléltetjük az $s=t=2$ esetben. $b(2)=3$, a hozzá tartozó konstrukció [11], [22], [XX]. Ebből $b(4) \leq 9$ adódik, a hozzá tartozó alábbi 9 szelvény alapján:

[11 11], [11 22], [11 *XX*], [22 11], [22 22], [22 *XX*], [*XX* 11], [*XX* 22], [*XX XX*],

9. Határozzuk meg L(90,5) és T(13,3) esetén, hogy egyetlen szelvényt kitöltve mekkora a betli esélye.

Megoldás:

A lottó esetén az összes szelvény száma $\binom{90}{5}$, ez kerül a nevezőbe. A számlálóban szerepel azon szelvények száma, amiken nincs nyerő szám. A 85 nem nyerő szám közül $\binom{85}{5}$ féleképpen választhatunk ki 5-öt, így lottó esetén a betli esélye $\frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0.746$. Ez kb ¾, azaz egy rendszeres lottózó a havi négy szelvényéből háromszor betlizik, egyszer viszont lesz találata.

A totó esetén az összes szelvény száma 3^{13}, a betlizéshez pedig mérkőzésenként két lehetőségünk van, így a keresett valószínűség $\frac{2^{13}}{3^{13}} \approx 0{,}005$. Ez meglehetősen kicsi szám, azaz vaktában totózva is várhatóan lesz néhány megfelelő tippünk. Nem véletlen, hogy kevés jó tippre a játékban nem is fizetnek nyereményt.

10. Betli Benő lottózik. Célja, hogy legyen olyan szelvénye, melyen egyetlen találat sincs. Hány szelvényt töltsön ki $L(10,5)$ játék esetén úgy, hogy közöttük biztosan legyen betli-szelvény?

Megoldás:

A figyelmes olvasó talán észrevette, hogy a „Betli” alfejezet nyitófeladatától ez a zárófeladat egyetlen karakterben különbözik. Nem 90, hanem csupán 10 számból húznak. A feladat célja kettős: egyrészt ebben a formában egy levezető könnyed probléma; másrészt rávilágít arra, hogy L(n,k) játékot vizsgálva n és k függvényében más gondolatokat igénylő, eltérő nehézségű feladatokhoz jutunk. Például rögzített k=5 esetén n=10-re és n>29-re kapunk választ, a többi n=11,12,…,29 kutatási területként nyitott maradt. A kis bevezető után jöjjön akkor a 10. feladatra a válasz.

A 10 számból 5 nyerőt húznak ki, azaz éppen 5 nem nyerő szám van. A nyerő és nem nyerő számok helyzete szimmetrikus, így a betlihez éppen annyi szelvény kell, mint a telitalálathoz, azaz kérdésünkre a válasz $\binom{10}{5} = 252$.

III. Jobb ma egy veréb

A szerencsejátékok esetében a vágyálom a telitalálat elérése. Azok számára, akiknek az előző fejezet betli célja nem mozgatta meg a fantáziáját, most mást kínálunk. Azt számoljuk, legalább hány szelvény kell, ha megelégszünk a telitalálatnál kevesebbel is. Meglepetésként két feladattal kezdünk, melyek első ránézésre olyan távol állnak a témától, mint Monte Carlo Las Vegastól.

11. Egy 52×28-as téglalapba 100 egységkört rajzoltunk. Igazoljuk, hogy rajzolható még egy egységkör a téglalapba úgy, hogy ez nem metsz bele sem a téglalap oldalaiba, sem az eddig megrajzolt körökbe.

Megoldás:

Keressünk helyet a 101. kör középpontjának. Ez nem lehet a téglalap oldalaihoz közelebb, mint 1. A téglalap oldalai tehát letiltják azokat a pontokat, melyeknek a kerülettől való távolsága legfeljebb 1. Ez a tiltott rész egy sáv a kerület mentén, területe 52×28–50×26=156.

A már elhelyezett 100 kör egyikét vizsgáljuk. Ehhez sem lehet a 101. kör középpontja közelebb, mint 1. Egy ilyen már megrajzolt kör tehát letiltja azokat a pontokat, melyeknek a körtől való távolsága legfeljebb 1. Ez a tiltott rész egy 2 sugarú kör. A 100 kör összes tiltott területe 400π. Esetleg a tiltott területek fedhetik egymást.

Nézzük meg maradt-e a téglalap belsejében nem tiltott rész. Ha a tiltott összterület kisebb a téglalap területénél, akkor készen vagyunk. A téglalap területe 52×28=1456. A tiltott rész összterülete 400π+156<1413. Mivel 1456>1413 ezért még kényelmesen elhelyezhető a 101. kör középpontja, azaz még egy kör.

Ez a feladat kilógni látszik a sorból. Későbbiekben ugyanilyen gondolatmenetet látunk majd, csak a „távolság” fogalma lesz más. Itt a természetes, már megszokott körülmények között jobban megértjük a dolgok „környezetét”, amit most tiltottnak neveztünk.

12. Bergengócia rendőrfőnöke a titkos akció három változatára készítette fel embereit. Ezek fedőneve: HANDABANDA, RONDAGOMBA, BAMBABOLHA. A központ egy sms üzenetben jelzi, mely terv lép életbe. A rendőrfőnök gondolt arra, hogy a központ ügyeletese nagy izgalmában esetleg n betűt rosszul írhat s erre felhívta embereinek figyelmét is. Legfeljebb hány hibára számított a főnök? Megadhatott volna rövidebb fedőneveket?

Megoldás:

Két azonos számú betűből álló szó esetén nevezzük a két szó távolságának azt a számot, ahányszor az ugyanannyiadik betűik különböznek. Például a MÉZ és ÉSZ szavak távolsága 2, mert az első és második betűik különböznek. Ha két szó távosága 1, akkor egyetlen hiba esetén bajban vagyunk, ha éppen a különböző betűt írták hibásan. Kicsit jobban meglep bennünket, hogy még 2 távolság esetén is baj lehet. Legyen például a két fedőnév MÉZ és ÉSZ. Ha az ÉÉZ, vagy MSZ üzenetet kapjuk a központtól, akkor látjuk ugyan, hogy valahol hiba volt, de nem tudjuk melyik akció is indul. Ha tehát két szó távolsága 2, akkor van olyan szó, amely mindkettőtől 1 távolságra van.

Az akciócsoportot nem szabad zavarba hozni. Ha n hiba lehetséges, akkor a HANDABANDA fedőnévtől legfeljebb n távolságra levő szavak között nem lehet olyan, amelyik valamely másik fedőnévtől is legfeljebb n távolságra van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy a szavak terében a fedőnevek n sugarú gömbjei diszjunktak kell legyenek. Ezek szerint bármely két fedőnév távolsága legalább $2n+1$ kell legyen. Nézzük most meg a fedőnevek páronkénti távolságait:

$$\begin{matrix} haNDAbandA \\ roNDAgombA \end{matrix} = 6; \quad \begin{matrix} bambAbOlhA \\ rondAgOmbA \end{matrix} = 7; \quad \begin{matrix} hAndABandA \\ bAmbABolhA \end{matrix} = 6.$$

Ezek szerint n maximális értéke 2 lehet, a főnök legfeljebb 2 hibára számított.

Viszont legfeljebb 2 hiba esetén 5 távolságú szavak megfelelnek a célnak. Választhatták volna a következő fedőneveket: CSODA, ÓCEÁN, MIÉRT. Kedves tanítványom, Bakonyi Ákos javasolta a talán kevésbé fantáziadús, de annál praktikusabb három fedőnevet: AAAAA, BBBBB, CCCCC. Talán így a központ ügyeletesének is sikerül majd hibátlanul beütni az sms üzenetet.

13. Hány totószelvényre van szükségünk, ha négy mérkőzésre tippelhetünk és célunk legalább három találat elérése.

Bergengóc példatár 2. 225-ös feladat.

Megoldás:

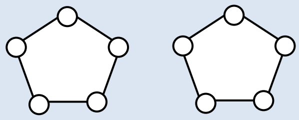
Ennek a feladatnak részletes megoldását és hozzá fűzött értékes megjegyzéseket olvashat az érdeklődő a „Bergengóc példatár 2.” c. könyvben a 225-ös feladatnál. (271-276. oldalak)

Most arra szeretnénk csupán rámutatni, hogyan illeszkedik ez a feladat a fejezet anyagába. Minden totószelvényt tekinthetünk egy 4 betűs szónak, melynek minden betűje 0, 1, vagy X. Ezen szavak között is értelmezhetünk távolságot a 12. feladat mintájára. Egy szó –azaz egy kitöltött szelvény- esetén megelégszünk legalább 3 találattal, tehát a szótól legfeljebb 1 távolságra levő szavak alkotják egy szó „1 sugarú gömbjét”. Például az [122X] szelvény „gömbje”: [122X], [222X], [X22X], [112X], [1X2X], [121X], [12XX], [1221], [1222]. Egy „gömbben” tehát 9 szó van.

Összesen 81 szó van. Az a kérdés, vajon sikerül-e ezeket 9 diszjunkt gömbben elhelyezni? Ehhez az kell, hogy a kitöltött kilenc szelvény, azaz a kilenc szó közti páronkénti távolság mindenhol legalább 3 legyen. Ez megvalósítható például a következő kilenc szelvénnyel: [112X], [1X11], [12X2], [X112], [$XXXX$], [X221], [21X1], [2X22], [221X].

A feladat játékos felvezetéssel a modern matematika egy izgalmas területére vezetett. A kódelméletben járatos olvasó észrevehette, hogy itt éppen egy perfekt kódot adtunk meg.

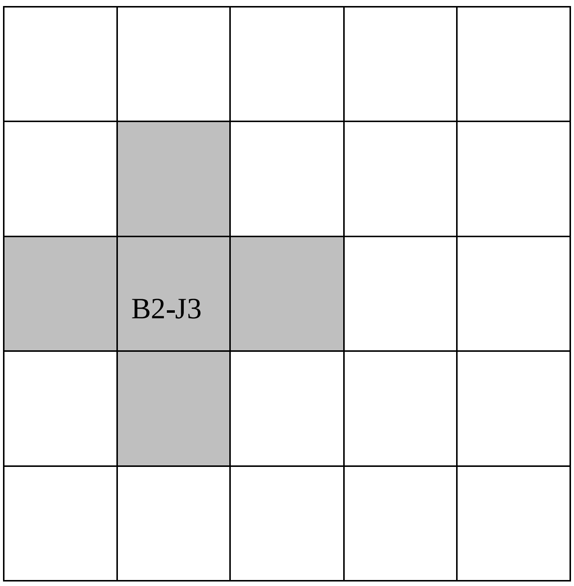
14. Figyelem, figyelem!!! Itt az új szerencsejáték! Jelöljön be mindkét ötszögön egy-egy csúcsot. Kisorsolnak majd ötszögenként egy-egy csúcsot. A főnyeremény azé, aki eltalálja mindkettőt, vagy majdnem. Ez utóbbi esetben az egyiket el kell találni, a másikon pedig a bejelölt mezőnek és a kisorsoltnak szomszédosnak kell lennie. Hány szelvényt töltsünk ki, hogy biztos mienk legyen a főnyeremény?



Megoldás (kezdet):

Mivel ez a szerencsejáték mindenkinek új, egy sorsolást érdemes rögtön rendezni. Ha elég sok ember játszik, meg lehet sejteni, hogy mekkora eséllyel nyerhetünk egy szelvénnyel.

A bal oldali ötszög csúcsait jelölje a kör mentén sorban B1, B2, B3, B4, B5, a jobb oldaliakat J1, …, J5. Vízszintesen számoljuk a B, függőlegesen a J ötszögön levő eredményt. Nézzük meg például, hogy a B2-J3 szelvénnyel mikor nyerünk. A telitalálaton kívül még nyerő szelvény lesz a B1-J3, B2-J2, B2-J4, B3-J3.



Most is értelmezhetünk távolságot, sőt ezt most szemléltetjük is. Vegyünk két szelvényt és mindkét „koordinátánál” vizsgáljuk meg az elérést, ezeket pedig adjuk össze. Mivel az ötszög kerülete mentén tekintjük az eltérést, így az koordinátánként legfeljebb 2 lehet. Gyakorlásként beágyazunk a feladat megoldásának közepébe egy újat:

15. (a) Mekkora távolságra van egymástól a B3-J4 és B2-J1 szelvény?

(b) Hány szelvény van a B3-J4 szelvénytől legfeljebb 4 távolságra?

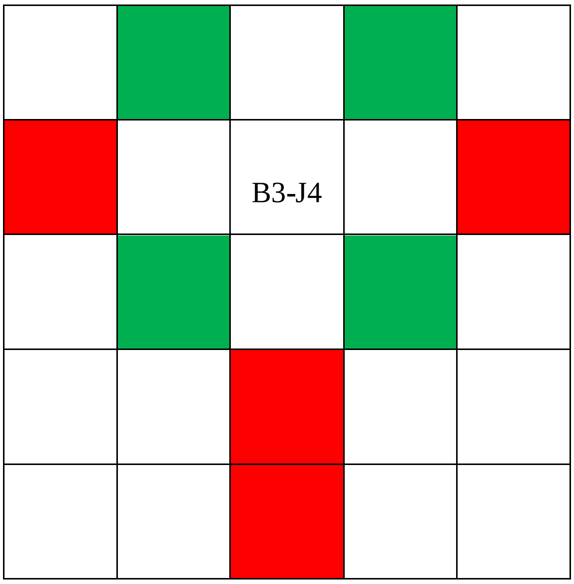
(c) Hány szelvény van a B3-J4 szelvénytől pontosan kettő távolságra?

Megoldás:

(a) Az első koordinátánál egy a távolság, a másodiknál kettő, így a két szelvény távolsága ezek összegeként 3.

(b) Egyetlen koordinátánál legfeljebb kettő lehet a távolság, összesen legfeljebb 4, azaz minden szelvényre teljesül, hogy a B3-J4-től legfeljebb 4 távolságra van. Mivel 25 szelvény van, így a kérdésre 25 a válasz. Ha a diákoknak nagyon szokatlan lenne ez a távolság fogalom, megkérdezhetjük ezt a kérdést 3 távolsággal is. Akkor 21 a válasz.

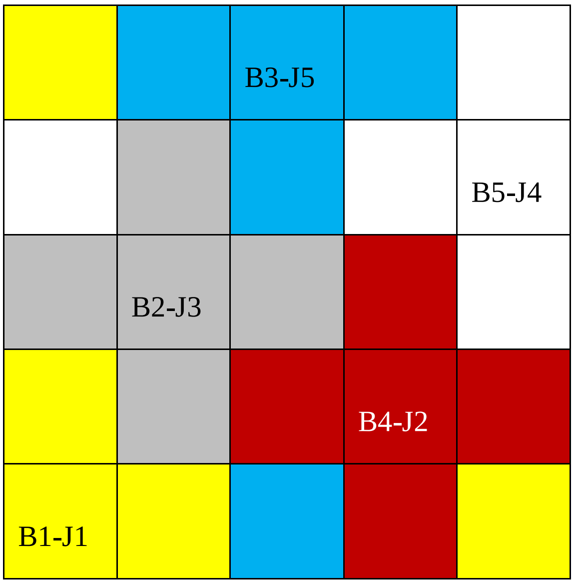
(c) Pontosan kettő távolságot kapunk, ha koordinátánként 2 és 0, vagy 1 és 1 az eltérés. Az első esetben 4 ilyen van, ezek pirossal jelölve: B3-J2, B3-J1, B1-J4, és B5-J4. A másodikban négy ilyen szelvény van, ezek: B2-J3, B2-J5, B4-J3, B4-J5. Összesen tehát a válasz 8.



Megoldás (a 14-es feladat megoldásának befejezése):

Az alábbiakban láthatjuk ennek a játéknak az eseményterét „térképezve”. Összesen 25 eredmény lehet, jó lenne ezeket ötös csoportokban 5 szelvénnyel lefedni. Némi próbálkozás után ez sikerül is a következő szelvényekkel: B1-J1, B2-J3, B3-J5, B4-J2, B5-J4.

Feltüntettük benne a megadott szelvények 1 sugarú környezetét, hiszen ezt jelenti a főnyeremény elnyerése. Vízszintesen számoljuk a B, függőlegesen a J ötszögön levő eredményt:



Hajdani hűséges tanítványom, Antal Péter, megjegyezte, hogy ez a feladat a tórusz parkettázásáról szól. Valóban a fenti térkép a tórusz egy térképe, hiszen az alsó és felső széleket összeillesztve egy hengert kapunk, majd ennek peremeit összeillesztve létrejön a tórusz. Talán egy úszógumi gyártó vállalat nemsokára ilyen mintával rukkol majd elő. Elmerenghetünk rajta, hogy ezek szerint a 13. feladatban a 4 dimenziós mod 3 feletti affin teret sikerült „parkettázni”, sajnos ez azonban nekünk nem olyan vizuális élmény, mint a tórusz esetében.

A 13. és 14. feladat remek lehetőséget teremt további játékra. A 13-as feladatban apró változtatással ismételhetjük a kérdést, ha T(3,3) játékot játszunk, ez könnyed gyakorló feladat lesz. Az érdeklődő kutató más n és k értékekre is kereshet megoldást az általános T(n,k) játékban majdnem telitalálatra vadászva. A 14-es feladat egyszerűbb változatában a szelvényen egyetlen sokszög szerepel. Itt további kutatómunkát jelenthet, ha a szelvényen n darab k-szöget helyezünk el. Most térjünk rá a majdnem telitalálatos totóról a lottóra.

16. Legalább hány szelvényt kell kitölteni, ha az L(7,3) játékban célunk legalább 2 találat elérése?

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy négy szelvény elegendő. Legyen az első szelvény az (1,2,3), a második a (4,5,6). Ha Fortuna tündérke el szeretné rontani a kedvünket, és ezen két szelvény egyikén sincs legalább két találat, akkor az 1,2,3 és a 4,5,6 számok között is csak egy-egy nyerő szám lehet, továbbá a 7 biztosan nyerő szám. Legyen a következő két szelvényünk az (1,2,7) és az (1,3,7). Ha az első két szelvény közt még nem volt jó, akkor ez utóbbi kettő valamelyikén már lesz legalább két találat.

Most igazoljuk, hogy három szelvény nem elegendő. Indirekt érvelést alkalmazunk. Tegyük fel, van három megfelelő szelvény, jelölje ezeket A, B, és C. A szelvényeken összesen 9 szám van a lehetséges 7 fajtából. Valamelyik szám legfeljebb egyszer szerepel. Nézzük, melyik szám szerepel a legkevesebbszer, feltehető, hogy ez az 1-es. Most két esetet nézünk végig a szerint, hogy az 1-es nincs egyik szelvényen sem, vagy rajta van az egyiken.

Ha az 1-es nem szerepel egyiken sem, akkor a maradék hat számot látjuk a három szelvényen, ezek közt is lesz olyan, ami legfeljebb egy szelvényen van rajta, legyen ez a 2. Ha a 2 sem szerepel szelvényeinken, akkor az 1,2,3 nyerőszámok esetén nem lehet legalább két találat. Ha a 2 szerepel egy szelvényen, jelölje ezt *A*, akkor a megmaradt öt szám közt van olyan, ami *A*-n nem szerepel. Legyen ez *x* és ekkor az 1,2,*x* nyerőszámok esetén nincs legalább két találatunk.

Ha az 1-es egy szelvényen szerepel, akkor jelölje ezt *A*. A további hat szám között van 4, ami az *A* szelvényen nem szerepel. Ezek között is lesz olyan szám, ami pontosan egy szelvényen szerepel, jelölje a számot *x*, a szelvényt *B*. Amennyiben az *A* és B szelvényeken nem szereplő számok egyike *y*, akkor az 1,*x*,*y* nyerőszámok esetén nincs két találatunk.

Az esetvizsgálat nem volt túl hosszadalmas, de mégis vágyakozhatunk frappánsabb érvelésre. Ehhez adunk most további útmutatást. Tekintsük a 7 számot egy gráf csúcsainak. Ha két szám ugyanazon a szelvényen szerepel, akkor fusson köztük él. Mivel három szelvényt töltöttünk ki, így a gráfba rajzoltunk 3 darab háromszöget. Amennyiben a komplementer gráfban találunk háromszöget, akkor annak csúcsaiban álló számokat nyerőszámnak választva nem lesz legalább két találatunk. A 7 pontú gráfba 9 élet húztunk, ezek közt lehet átfedés. Összesen 21 él van, azaz a komplementer gráfban legalább 12 él van. A Turán tétel alapján egy 7 pontú gráfban 12 élet csak egyféleképpen helyezhetünk el úgy, hogy ne legyen köztük háromszög: egy teljes páros gráfban 3 és 4 pontú osztályokkal. A 4 pontú osztály 6 éle azonban nem fedhető a szelvények két háromszögével. A Turán tétel az általánosabb *L*(*n*,3) játék esetén is segítségünkre lehet annak meghatározásában, legalább hány szelvény kell ahhoz, hogy köztük legyen legalább két találatos. Az *L*(*n*,k) játékban legalább *k*-1 találathoz szükséges szelvények száma további kutatási területnek maradt.

17. Hány szelvényt kell kitölteni a T(13,3) játékban, ha célunk legalább 5 találat elérése?

Megoldás:

A feladat megoldása a skatulya elv alkalmazásának egy klasszikus példája. Elegendő ugyanis három szelvény: legyen az elsőn minden tipp 1-es, a másodikon minden tipp 2-es, a harmadikon minden tipp *X*. A skatulya elv értelmében valamelyik fajta tippből legalább 5 lesz, így valamely szelvényünk éppen megfelel céljainknak. Kettő szelvény nem elegendő, hiszen tekintve bármely mérkőzés esetén a két szelvényen szereplő tippjeinket, előfordulhat, hogy az eredmény olyan lesz, amely ezek közt nem szerepel. Így még az is elképzelhető, hogy két szelvény esetén egyetlen egy találatunk sem lesz.

18. Hány szelvényt kell kitöltenünk az L(6,3) játékban, ha célunk legalább 2 találatos szelvény?

Megoldás:

Természetesen egyetlen szelvény nem elegendő. Előfordulhat, hogy egyetlen szelvénnyel játszva éppen a ki nem választott számokat húzzák ki, így nem lesz találatunk. Két szelvény viszont elég! Legyen az egyik az (1,2,3), a másik a (4,5,6). Az összes lehetséges számot két részre osztottuk, valamelyikből biztos lesz legalább két nyerő szám!

A fejezetet lezáró két feladat jóval könnyebb, mint az előtte levők, ez most szándékos didaktikai fogás volt részemről. A Turán tételt nem ismerő diákok talán éppen a 18-as segítségével érthetik meg a 16-os feladatban szereplő ötletet. Használjuk az ott bevezetett gráfos gondolatot. Legalább két találat esetén ügyes fogás, ha a nyerő számokat két részre osztjuk és szelvényeink mindkét részben lefedik az összes élt. Mivel biztosan lesz két szám ugyanazon részben, ezért lesz legalább két találatunk. Az már egy másik kérdés, hogy mikor fedhető optimálisan a két rész.

Az *L*(*n*,3) játékban a legalább két találat eléréséhez vezet, ha az 1,2,…,*n* számokat két részre osztjuk, egy *k* és egy *n*-*k* elemű részre. A két részt most tekintsük két teljes gráfnak, szelvényeinket pedig háromszögeknek. A teljes gráfokat szeretnénk háromszögekből felépíteni. Optimális esetben ezen háromszögeknek nincs közös éle. Hogy ez mikor lehetséges, annak tárgyalása túlmutat ezen anyag keretein, de a vonatkozó eredményt közöljük: ha k>1, akkor a k pontú teljes gráf akkor és csak akkor építhető fel diszjunkt háromszögekből, ha k hatos maradéka 1, vagy 3. Gyakorlásként megpróbálhatjuk az L(14,3) játékot, itt legalább 14 szelvényre van szükség ahhoz, hogy köztük legyen legalább 2 találatos.

IV. Valószínűség

A fejezetet indító három feladat nem szerencsejátékos. Ezek előkészítik a 22. feladatot, amely talán előkészítés nélkül nehéznek bizonyulna.

19. Számháromszögeket készítünk: $1;\quad \begin{matrix}11\\2\end{matrix};\quad \begin{matrix}111\\22\\3\end{matrix};\quad \ldots$ Az n-dik ilyen háromszög első sorában n darab 1-es, az alatta levő sorban eggyel kevesebb 2-es, az alatta levő sorban eggyel kevesebb 3-as, …, a legalsó sorban egy darab n-es szám áll. Határozzuk meg n függvényében a számháromszögben álló számok összegét.

Megoldás:

<u>Első megoldás</u>: Az első néhány számháromszögben a számok összege 1, 4, 10, 20, 35. Nézzük meg mit kapunk, ha nem soronként adjuk össze a számokat, hanem a számháromszög másik oldala mentén. Jelölje az n–hez tartozó összeget $s(n)$. Így a következőt kapjuk az első öt esetben:

$s(1)=1=1$

$s(2)=4=1+(1+2)$

$s(3)=10=1+(1+2)+(1+2+3)$

$s(4)=20=1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)$

$s(5)=35=1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)$

Ezek alapján általánosan a következőt kapjuk:

$s(n)= 1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\ldots..+(1+2+3+4+\ldots..+n)$.

Használjuk ki, hogy az $1+2+3+4+\ldots..+n$ összeg kifejezhető $n(n+1)/2$ alakban, továbbá felhasználjuk a négyzetszámok összegére vonatkozó formulát:

$$s(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Második megoldás: Vegyük észre, hogy binomiális együtthatókat szeretnénk összeadni. Ezek jól ismertek a Pascal háromszögből:

$$s(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}.$$

Alkalmazzuk először, hogy $\binom{2}{2}=\binom{3}{3}$, majd többször egymás után a következő azonosságot: $\binom{s}{k}+\binom{s}{k+1}=\binom{s+1}{k+1}$. Az egyszerűség kedvéért n=4-re mutatjuk be a módszert:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=\overline{\binom{3}{3}+\binom{3}{2}}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=\overline{\binom{4}{3}+\binom{4}{2}}+\binom{5}{2}=\overline{\binom{5}{3}+\binom{5}{2}}=\binom{6}{3}.$$

Pontosan ugyanígy kapjuk, hogy :

$$s(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}.$$

Ezt a módszert többen zokni-szabálynak nevezik, mert a Pascal háromszögben a szóban forgó binomiális együtthatók egy „zokni” alakjában helyezkednek el.

Harmadik megoldás: Most adjuk össze soronként a számháromszöget. Ekkor:

(1) $s(n)=1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$.

Az előző megoldás szerint ez pontosan annyi, ahányféleképpen az 1, 2, …, n+2 közül 3-at kiválaszthatunk. Számoljuk most ezt meg a szerint, hogy a kiválasztott számok közül a középső mekkora. Legkisebb 2 lehet, ekkor nála kisebbet csak egy szám közül választhatunk, nála nagyobbat n közül. Ez éppen az (1)-es összeg első tagja. Ha a középső szám 3. akkor nála kisebb 2 féle lehet, nála nagyobb n–1 féle, ez éppen (1)-ben a második tag és így tovább. A történet vége, hogy a középső szám éppen n+1, ekkor nála kisebb n féle lehet, nála nagyobb csak egy. Ez lesz az utolsó tag.

20. Határozzuk meg minél ügyesebben a következő összeg értékét:

$$\binom{3}{3}\binom{8}{4}+\binom{4}{3}\binom{7}{4}+\binom{5}{3}\binom{6}{4}+\binom{6}{3}\binom{5}{4}+\binom{7}{3}\binom{4}{4}=?$$

Megoldás:

Alkalmazzuk az előző feladat harmadik megoldásában bemutatott trükköt. E szerint a keresett összeg éppen azt mondja meg, hányféleképpen választhatunk ki 8 számot az 1, 2, 3, … , 12 számok közül. Ez egyrészt a jól ismert $\binom{12}{8}$.

Másrészt számoljunk úgy, hogy a negyedik legnagyobb elem értéke szerint megyünk sorba. Ez legkisebb 4 lehet, ekkor nála kisebb 3 szám közül 3-at kell választani, a nála nagyobb 8 közül pedig 4-et. Így kapjuk a kérdéses összeg első tagját: $\binom{3}{3}\binom{8}{4}$.

Ha a negyedik legnagyobb az 5, akkor a nála kisebb 4 szám közül 3-at kell választani, a nála nagyobb 7 közül pedig 4-et. Így kapjuk a kérdéses összeg második tagját: $\binom{4}{3}\binom{7}{4}$.

Ezt folytatjuk, végül a a negyedik legnagyobb az 8, akkor a nála kisebb 7 szám közül 3-at kell választani, a nála nagyobb 4 közül pedig 4-et. Így kapjuk a kérdéses összeg utolsó tagját. Tehát:

$$\binom{3}{3}\binom{8}{4}+\binom{4}{3}\binom{7}{4}+\binom{5}{3}\binom{6}{4}+\binom{6}{3}\binom{5}{4}+\binom{7}{3}\binom{4}{4}=\binom{12}{8}=\binom{12}{4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=495.$$

Szándékosan írtam mindkét feladatban inkább kis konkrét számokra az összeget. Így kevésbé riasztó és könnyebben átlátható a diákoknak. Később fel fogják ismerni majd az általános alak mögött rejlő, most előkészített gondolatot. Az előző két feladatban szereplő azonosságok tömör általánosabb alakja:

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1},\text{ illetve }\sum_{i=0}^{k-s}\binom{d+i}{d}\binom{k-i}{s}=\binom{d+k+1}{d+s+1}.$$

21. Igazoljuk a következő azonosságot: $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

Megoldás:

Ebben a feladatban semmi különösebb érdekesség nincs. Írjuk fel először $\binom{n}{k}$-t, és nézzük meg figyelmesen. A könnyebb szemléltetés kedvéért most is egy konkrét példán mutatom meg, mi is történik. Legyen n=9, k=4, ekkor: $\binom{9}{4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$. A nevezőből kiemeljük a 4-et, a számlálóból pedig először az első, aztán az utolsó tagot: $\binom{9}{4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{9}{4}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{9}{4}\cdot\binom{8}{3}$,

$$\binom{9}{4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{6}{4}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{6}{4}\cdot\binom{9}{3}.$$

Pontosan ugyanígy kapjuk az általános esetben is, hogy :

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Maga a feladat így nem túl lélekemelő, de a következő, jóval nehezebb példa megoldását készíti elő. Érdemes kombinatorikus igazolást is keresni!

22. Az $L(90,5)$ lottó játékban mekkora a negyedik legnagyobb szám várható értéke?

2002. OKTV III.kategória első forduló 5. példa. Javasolta Kiss Géza Tanár Úr.

Első megoldás:

A várható értéket szépen esetvizsgálattal számoljuk ki a klasszikus úton, közben felhasználjuk majd az előző feladatokban megtanultakat.

A negyedik legnagyobb szám legkisebb lehetséges értéke a 4. Mekkora a valószínűsége, hogy egy szelvényen a 4 legyen a negyedik legnagyobb szám? Jó eset, ha kijelöljük a 4-et, továbbá a nála kisebb 3 szám közül kijelölünk 3 számot, a nála nagyobb 86 szám közül kiválasztunk 1-et. Az összes esethez mind a 90 közül választunk ki 5-öt. Eddig ez:

$$\frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}}.$$

Most haladunk tovább. Mekkora a valószínűsége, hogy egy szelvényen az 5 legyen a negyedik legnagyobb szám? Jó eset, ha kijelöljük az 5-öt, továbbá a nála kisebb 4 szám közül kijelölünk 3 számot, a nála nagyobb 85 szám közül kiválasztunk 1-et. Az összes esethez mind a 90 közül választunk ki 5-öt. Ugyanígy haladjunk tovább! A legutolsó esetben a negyedik legnagyobb szám a 89, a nála kisebb 88 szám közül kijelölünk 3 számot, a nála nagyobb 1 szám közül kiválasztunk 1-et. A kérdéses várható érték a következő lesz:

$$(1)\quad \frac{4\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{86}{1}+5\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{85}{1}+6\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{84}{1}+7\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{83}{1}+\ldots+89\cdot\binom{88}{3}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{90}{5}}.$$

Foglalkozzunk a számlálóval. Először bővítünk $\frac{4}{4}$-del, majd az előző feladatban igazolt azonosság segítségével átalakítjuk:

$$4\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{86}{1}+5\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{85}{1}+6\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{84}{1}+7\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{83}{1}+\ldots+89\cdot\binom{88}{3}\cdot\binom{1}{1}=$$

$$4\cdot\left(\frac{4}{4}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{86}{1}+\frac{5}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{85}{1}+\frac{6}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{84}{1}+\frac{7}{4}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{83}{1}+\ldots+\frac{89}{4}\cdot\binom{88}{3}\cdot\binom{1}{1}\right)=$$

$$4\cdot\left(\binom{4}{4}\cdot\binom{86}{1}+\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}+\binom{6}{4}\cdot\binom{84}{1}+\binom{7}{4}\cdot\binom{83}{1}+\ldots+\binom{89}{4}\cdot\binom{1}{1}\right).$$

A kapott eredmény a 20. feladat segítségével jól átlátható. Ez nem más mint az 1, 2, … , 91 számok közül kiválasztani 6-ot! Így jelentősen egyszerűsödik (1):

$$\frac{4\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{86}{1}+5\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{85}{1}+6\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{84}{1}+7\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{83}{1}+\ldots+89\cdot\binom{88}{3}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{90}{5}}=\frac{4\cdot\binom{91}{6}}{\binom{90}{5}}=$$

$$=\frac{4\cdot\frac{91\cdot90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{2\cdot91}{3}=60\frac{2}{3}.$$

A feladatot megoldottuk, a keresett várható érték 182/3.

Második megoldás:

Csóka Endrétől hallottam a következő gondolatmenetet. Vegyünk egy kört és rajta egy szabályos 91 szög csúcsait. Sorsoljunk ki ezek közül 6-ot, ezeket kijelöljük. A kijelölt csúcsok közül kisorsolunk egyet. Legyen ez a 0 és innentől kezdve megszámozzuk az összes csúcsot 1-től 90-ig. A további öt kijelölt csúcs lesz az öt kihúzott lottószám. A kérdés az, hogy a 0 és a negyedik kijelölt közötti ív várhatóan milyen hosszú lesz. Szerencsére a matematikában demokrácia uralkodik, bármely két szomszédos kijelölt csúcs között átlagosan ugyanakkora lesz a távolság, mégpedig éppen 91/6. Ebből 4-et véve megkapjuk a feladat kérdésére a választ.

23. Az $L(n,k)$ játékban mekkora a valószínűsége, hogy éppen m találatunk lesz?

Megoldás:

Az összes eset száma nyilván $\binom{n}{k}$, ez kerül majd a nevezőbe. A jó esetek számához tekintsük először a k darab nyerő számot, ezek közül kell választani m darabot, erre $\binom{k}{m}$ lehetőségünk van. Ettől függetlenül a nem nyerő n-k szám közül kell választani k-m darabot, erre $\binom{n-k}{k-m}$ lehetőségünk van. Ezek szorzata kerül a számlálóba, a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{k}{m}\binom{n-k}{k-m}}{\binom{n}{k}}.$$

Zárjuk a feladatsort tüzijátékszerűen két feladattal, melyekben több apró kérdést teszünk fel a szokásos magyar totó T(13,3) és lottó L(90,5) játékok esetén. A feladatok önmagukban is jól használhatók órán, szakkörön és inspirálhatnak további kérdéseket.

24. Totózunk, 13 mérkőzés eredményére lehet tippelni a szokásos 1,2,*X* tippekkel.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő tipposzlopon lesz *X*?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő tipposzlopon lesz *X* és 1 is?

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő tipposzlopon lesz egymás mellett két azonos eredmény?

(d) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő tipposzlopon páros sok 2-es lesz?

Megoldás:

Az összes lehetséges tipposzlop száma 3^{13}. Minden esetben ez kerül majd a nevezőbe.

(a) Számoljunk komplementer módszerrel. Ha nincs *X*, akkor minden tipp 2 féle lehet, így ezek száma 2^{13}. A kérdéses valószínűség tehát

$$1-\frac{2^{13}}{3^{13}}$$

(b) Tudjuk, hogy 2^{12} azon szelvények száma, amiken nincs *X* és hasonlóan ugyanennyi, amiken nincs 1-es. Ezeknek a metszetében egyetlen szelvény van, amin minden tipp 2. Így a keresett valószínűség

$$\frac{3^{13}-2^{13}-2^{13}+1}{3^{13}}$$

(c) Ha nincs két szomszédos azonos eredmény, akkor az elsőt szabadon választhatjuk, ez 3 féle lehet. Ezt követően mindig két lehetőség marad, így a kérdéses valószínűség $1-\frac{3\cdot 2^{12}}{3^{13}}$.

(d) Megadunk két gondolatmenetet is. Az első a 2-esek száma szerint veszi sorra az eseteket. Kiválasztjuk, mely mérkőzés eredménye legyen a 2-es, a többi eredmény pedig lehet 1 vagy X, azaz 2 lehetőségünk is van mindegyiknél. Lehet 0 darab 2-es, ilyenből 2^{13} lehetséges tipposzlop van. Lehet 2 darab, ilyenből $\binom{13}{2}\cdot 2^{11}$ van. Lehet 4 darab, ilyenből $\binom{13}{4}\cdot 2^{9}$ van. Így tovább haladva a keresett valószínűség

$$\frac{2^{13}+\binom{13}{2}\cdot 2^{11}+\binom{13}{4}\cdot 2^{9}+\binom{13}{6}\cdot 2^{7}+\binom{13}{8}\cdot 2^{5}+\binom{13}{10}\cdot 2^{3}+\binom{13}{12}\cdot 2}{3^{13}}$$

Másik érvelésünk a következő. n mérkőzés esetén a páros sok 2-est tartalmazó szelvények számát jelölje $a(n)$, a páratlan sok 2-est tartalmazó szelvények számát jelölje $b(n)$. Kis n-re ezeket könnyű áttekinteni, az értékek $a(1)=2$, $b(1)=1$; $a(2)=5$, $b(2)=4$. Most teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $a(n)=b(n)+1$. Az indukció kezdő lépésével $n=1$-re már végeztünk is. Az indukciós lépés előkészítéseként gondoljuk meg, hogy kaphatjuk meg $a(n)$ és $b(n)$ ismeretében $a(n+1)$ és $b(n+1)$ értékét. $a(n+1)$-et megkapjuk, egyrészt ha az első n mérkőzés során páros sok 2-es volt és az utolsó mérkőzés 1, vagy X, másrészt ha az első n mérkőzés során páratlan sok 2-es volt és az utolsó mérkőzés 2-es. Így $a(n+1)=2a(n)+b(n)$. Hasonló érveléssel kapjuk, hogy $b(n+1)=2b(n)+a(n)$. Ezzel az indukciós lépést is megkaptuk, hiszen ha $a(n)–b(n)=1$, akkor $a(n)-b(n)=a(n+1)–b(n+1)=1$. Mivel $a(n)+b(n)=3^n$, ezért a keresett valószínűség

$$\frac{3^{13}+1}{2\cdot 3^{13}}.$$

Tanulságos összevetni a két gondolatmenet eredményét és algebrai úton is igazolni, hogy ezek egyenlők.

25. Lottózunk, az 1,2,…,90 számok közül választanak ki 5 nyerő számot.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő számok közt lesz az 1?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő számok közt lesz az 1 vagy a 2?

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy ha a nyerő számok közt lesz az 1, akkor a 2 is?

(d) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő számok közt nincsenek szomszédos számok?

(e) Mekkora a valószínűsége, hogy minden nyerő szám páros?

(f) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő számok összege páros?

(g) Mekkora a valószínűsége, hogy a nyerő számok közt több a páros, mint a páratlan?

Megoldás:

Az összes szelvény száma $\binom{90}{5}$, ez kerül majd a nevezőbe.

(a) Az 1 nyerő, a többi 4 nyerő számot 89 szám közül választhatjuk, így a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}.$$

(b) Az imént kapott eredményből következik, hogy ugyanígy járhatunk el, ha a 2 nyerő szám. Ha az 1 és a 2 is nyerő, akkor a többi 3 számot 88-ból választhatjuk, így a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{89}{4}+\binom{89}{4}-\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

Ugyanezt számolhatjuk a komplementer módszerrel is, az összesből azt kell kivonnunk, amikor az 1 és 2 közül egyik sem szerepel, így az 5 nyerő számot 88 közül választhatjuk. Ebből a gondolatmenetből az eredmény ugyanannyi, csak más alakban adódik:

$$1-\frac{\binom{88}{5}}{\binom{90}{5}}.$$

(c) Ennek az eseménynek a komplementere az, hogy az 1 nyerő szám, de a 2 nem, így a maradék 4 nyerő szám 88 féle lehet, az eredmény

$$1-\frac{\binom{88}{4}}{\binom{90}{5}}$$

(d) Ha egymás mellé leírjuk az 1,2,..,90 számokat és a nyerő számokat pirossal, a többit zölddel bekarikázzuk, akkor az esetek megszámolását indítsuk azzal, hogy magunk elé képzelünk 85 zöld karikát. Pirosak nem kerülhetnek egymás mellé, így azok csak két zöld közé, vagy a zöld karikák valamely végére kerülhetnek. Van két vég és a 85 zöld karika között 84 hely, így az 5 piros számára 86 hely adódik. A kérdéses valószínűség tehát

$$\frac{\binom{86}{5}}{\binom{90}{5}}$$

(e) A nyerő számokat 45 szám közül választhatjuk, így a válasz

$$\frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}}$$

(f) Megadunk két gondolatmenetet. Az elsőben a szerint nézzük az eseteket, hogy hány páros van a kihúzott számok között. Páros sok páratlannak kell lennie, azaz 0,2,4 páratlant húzunk a 45 páratlan szám közül és mindegyiknél rendre 5,3,1 párosat húzunk az ugyancsak 45 páros közül Így az eredmény

$$\frac{\binom{45}{0}\binom{45}{5}+\binom{45}{2}\binom{45}{3}+\binom{45}{4}\binom{45}{1}}{\binom{90}{5}}$$

A másik gondolatmenet trükkös. Szelvényeinket állítsuk párba. A számegyenes 1,2,…,90 pontjain kijelöljük az 5 választott számot, majd ezt középpontosan tükrözzük a 90 pont középpontjára, a 45.5-re. Így például az 1, 4, 10, 34, 77 szelvény párja a 90, 87, 81, 57, 14 lesz. Mivel az *x* szám tükrözéséből 91-*x* lesz ezért minden szám paritást vált. Így minden szelvénynek a párja olyan, hogy azon éppen ellentétes a számok összegének paritása. Mivel a középpont nem egész, ezért nem lehet olyan szelvény, aminek önmaga lenne a párja. Így a feladatra válaszként az ½-et kaptuk.

(g) Ismét két utat mutatunk. Ha több a páros, akkor ezek száma lehet 3,4 vagy 5. Az eseteket sorra véve, a válasz

$$\frac{\binom{45}{5}\binom{45}{0}+\binom{45}{4}\binom{45}{1}+\binom{45}{3}\binom{45}{2}}{\binom{90}{5}}$$

Másik érvelésünk az (f) –ben látott tükrözést használja. Minden szelvényt párba állítottuk egy másikkal úgy, hogy amennyiben az egyiken a páros-páratlan arány n:k, akkor a párján éppen k:n. Így láthatjuk, hogy ugyanannyi szelvényen van több páros, mint amennyin több páratlan, ezért a valószínűség újra ½.

A szerencsejátékok rengeteg matematikai kérdést vetnek fel, ezekből válogattunk ízelítőt. Remélem az olvasó talált magának új ötleteket, szép gondolatmeneteket és sikerült a téma iránti érdeklődést ez által is fokozni. A kérdéseken kicsit változtatva, új problémákat felvetve bátran tovább lehet lépni, ehhez kívánok sok fantáziát és jó fejtörést!

Budapest, 2018 szeptemberében Dobos Sándor