

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: 2018. október 19. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Arány, arányos következtetések, százalékszámítás

I. Mit érdemes tudnunk ebben a témakörben?

1. Törtrész fogalma

- a) Az egész mennyiség ismeretében kiszámítjuk a törtrészt:

54 kg $\frac{1}{9}$ része $54:9 = 6$ kg.

Az M mennyiség $\frac{1}{q}$ -ad része $M:q = \frac{M}{q}$.

2700 Ft-nak az $\frac{5}{9}$ része $2700:9 \cdot 5 = 2700 \cdot \frac{5}{9} = 1500$ Ft.

Az M mennyiség $\frac{p}{q}$ -ad része $\frac{M}{q} \cdot p = M \cdot \frac{p}{q}$.

- b) Ismerjük a törtrészt, kiszámítjuk az egészet:

Ha az autó árának $\frac{1}{5}$ része 820 000 Ft, akkor az autó ára $820\,000 \cdot 5 = 4\,100\,000$ Ft.

Ha az M mennyiség q -ad része A , akkor $M = A \cdot q$.

Ha az út $\frac{2}{5}$ része 16 km, akkor a teljes út hossza $16:2 \cdot 5 = 16:\frac{2}{5} = 16 \cdot \frac{5}{2} = 40$ km.

Ha az M mennyiség $\frac{p}{q}$ -ad része A , akkor $M = A:p \cdot q = A:\frac{p}{q} = A \cdot \frac{q}{p}$.

- c) Egy mennyiségről eldöntjük, hogy hányad része a másinak:

Ha a 280 oldalas könyvből elolvastunk 160 oldalt, akkor a könyv $\frac{160}{280} = \frac{4}{7}$ részét olvastuk el.

Az A mennyiség a B -nek $\frac{A}{B}$ -ed része.

2. Két mennyiség aránya, aránypár

- a) Egy terem két oldalának aránya 12 m: 15 m $= 12:15 = 4:5 = \frac{4}{5}$.

Két mennyiség arányát a hányadosukkal határozzuk meg.

Több mennyiség arányát is megadhatjuk. Ha $a:b:c = 2:4:7$, akkor az a mennyiség fele, a b mennyiség negyede és a c mennyiség hetede egyenlő. Ilyenkor választhatunk úgy egységet (x), hogy $a = 2x$; $b = 4x$; $c = 7x$ összefüggés teljesüljön.

- b) A $14:35 = 2:5$ típusú összefüggéseket aránypárnak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$.

3. Arányos osztás

Ha 35 000 Ft-ot Péter és Pál között 3:4 arányban szeretnénk elosztani, akkor a 35 000 Ft-ot $3 + 4 = 7$ részre osztjuk és Péter kap 3 részt, Pál kap 4 részt.

$35\,000:7 = 5\,000$, Péter kap $3 \cdot 5\,000 = 15\,000$ Ft-ot, Pál kap $4 \cdot 5\,000 = 20\,000$ Ft-ot.

Ha az M mennyiséget $p:q$ arányban osztjuk fel, akkor az egyik rész $\frac{M \cdot p}{p+q}$, a másik pedig $\frac{M \cdot q}{p+q}$.

4. Egyenes arányosság

1 kg alma ára 350 Ft. Ha 2 kg-ot veszünk, akkor 700 Ft-ot, ha 5 kg-ot, akkor 1750 Ft-ot fizetünk. A kifizetett összeg és a vásárolt alma mennyiségének a hányadosa mindig $350 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$. Ha kétszer, háromszor,... annyi almát veszünk, akkor kétszer, háromszor ... annyit fizetünk érte. A fizetett összeg és a vásárolt alma mennyisége egyenesen arányos.

Két mennyiség egyenesen arányos, ha az összetartozó (nullától különböző) értékek hányadosa állandó.

5. Fordított arányosság

Egy kiránduláson az autóbusz költsége 200 000 Ft. Ha a kiránduláson 50 ember vesz részt, akkor egy főre 4 000 Ft jut, ha 40 ember, akkor 5 000 Ft, ha 25 ember, akkor 8 000 Ft lesz egy ember buszköltsége. A résztvevők számának és az egy főre eső buszköltségnek a szorzata mindig 200 000 Ft. Ha kétszer, háromszor,... annyian kirándulnak, akkor feleannyi, harmadannyi ... lesz az egy főre eső buszköltség. Azt mondjuk, hogy a résztvevők száma és a buszköltség között fordított arányosság áll fenn.

Két mennyiség fordítottan arányos, ha az összetartozó értékek szorzata állandó.

6. Alap, százalékláb, százaléktérték

a) A százalék századrészt jelent. Például $32\% = \frac{32}{100} = 0,32$.

b) 4800 Ft-nak a 32% -a 4800 -nak a $\frac{32}{100}$ része, $4800 \cdot 0,32 = 1536$ Ft.

A 4800 Ft-ot alapnak, a 32% -ot százaléklábnak, az 1536 Ft-ot százaléktértéknek nevezzük.

Az M mennyiség p %-a $M \cdot \frac{p}{100}$.

c) Árengedmény

Ha egy 4800 Ft-os pólót 30% árengedménnyel vásárolhatunk meg a nyári vásárban, akkor 70%-ot kell fizetnünk, tehát az akciós ár $4800 \cdot 0,7 = 3360$ Ft.

Ha az M árat $p\%$ -kal leértékelik, akkor az új ár $M \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

d) Áremelés

Ha a 380 Ft-os literenkénti benzinárát 5%-kal emelik, akkor az eredeti ár 105%-át kell fizetnünk, tehát az áremelés után $380 \cdot 1,05 = 399$ Ft/liter lesz a felemelt benzinár.

Ha az M árat $p\%$ -kal emelik, akkor az új ár $M \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

7. Keverékek összeállítása

Ezekben a feladatokban az a lényeges gondolat, hogy az alkotóelemek mennyisége az összeöntés, összekeverés során összességében nem változik. Erre a megmaradó mennyiségre írunk fel egyenletet.

Ld. 9. kidolgozott feladat.

8. Kamatos kamat

A bankba beteszünk 120 000 Ft-ot 5%-os évi kamatra. Év végén ennek az összegnek a 105%-át, $120\,000 \cdot 1,05 = 126\,000$ Ft-ot vehetünk fel. A következő évben már ez az összeg kamatozik. Így például az 5. év végén $120\,000 \cdot 1,05^5 \approx 153\,154$ Ft-ot fog érni a pénzünk.

(Ezt nevezzük kamatos kamatnak.)

Ha M összeg $p\%$ -os évi kamattal kamatozik n évig, akkor az n -edik év végén $M \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ lesz az értéke.

9. Törlesztőrészlet, járadékszámítás

- a) Ha a banktól évi $p\%$ -os kamatra felvett H forintot n év alatt fogjuk törleszteni, akkor a bank évi vagy havi **törlesztőrészletet** kér tőlünk. Ekkor két jelenséget kell figyelembe vennünk: a hitelünk a kamatnak megfelelően évről évre (hónapról hónapra) nő és évente (vagy havonta) a befizetett törlesztőrészlettel csökken. A futamidő végén a tartozásunk 0 Ft lesz.

A 11. kidolgozott feladat megoldása részletezi a törlesztőrészlet kiszámításának módját.

- b) A bankban elhelyezünk H forintot. A pénzünk $p\%$ -kal kamatozik évente. Ebből az összegből évente (havonta) felvehetük egy bizonyos összeget. Mennyi „**járadékot**” kaphatunk akkor, ha pénzünket n év alatt akarjuk felhasználni. (Esetleg lehet maradék is.)

A 12. kidolgozott feladat mutat példát arra, hogyan számolhatjuk ki az éves járadékot.

A 34. feladatban pedig azt láthatjuk, hogy egy erdő növekedése és az éves fakivágás ugyanezt a problémát adja.

Megjegyzés:

A törlesztőrészlet és a járadék kiszámításának elvei azonosak. Leegyszerűsítve a törlesztőrészletet mi fizetjük a banknak, a járadékot a bank fizeti nekünk miközben kamatozik a rendelkezésre álló pénzösszeg

A következő fejezetekben az említett problémakörökre találunk feladatokat. Sokszor több módszert is alkalmaznunk kell a megoldásokban felismerve a matematikai összefüggéseket az adott szövegben.

A **Kidolgozott feladatok** fejezet 12 feladatban mutatja be a legfontosabb feladattípusokat ebben a témakörben.

A **Gyakorló feladatok** fejezet feladatanyaga – 22 feladat – az elmélyítést szolgálja. Ezeket a feladatokat önálló munkára ajánljuk, ezért ebben a fejezetben csak a feladatok szövege szerepel. A feladatok számozása folytatja a kidolgozott feladatok számozását, így könnyebb hivatkozni a feladatokra. A megoldásokat a **Gyakorló feladatok megoldásai fejezetben** adjuk meg.

II. Kidolgozott feladatok

1. Egy iskola vezetése elrendelte, hogy a tanulók nadrágszárának hossza nem lehet kisebb, mint a testmagasságának egyötöde. Samu nadrágszárának ügyében vizsgálat indult, és az etikai bizottság megállapította, hogy ez éppen a megengedett minimum hosszának $\frac{2}{7}$ részével kisebb. Sőt azt is megállapították, hogy ha 3 cm-rel hosszabb lenne az a nadrágszár, akkor még mindig 20% -kal kisebb lenne, mint a minimális megengedett hossz. Milyen magas Samu?

KöMaL 2018. január; K 571

Megoldás:

Samu magassága x cm. Ekkor a nadrágszár megengedett hossza $\frac{x}{5}$ cm. Samu nadrágjának hossza ennek az $\frac{5}{7}$ része, tehát $\frac{x}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{x}{7}$. A további feltétel szerint:

$$\frac{x}{7} + 3 = \frac{x}{5} \cdot \frac{8}{10} = \frac{4x}{25}$$

$$25x + 525 = 28x$$

$$3x = 525$$

$$x = 175$$

Samu 175 cm magas.

Ellenőrzés:

A megengedett nadrághossz $175:5 = 35$ cm. Samu nadrágszárának hossza $35 \cdot \frac{5}{7} = 25$ cm. A 35 cm 80 %-a $35 \cdot 0,8 = 28$ cm, ami valóban 3 cm-rel nagyobb a 25 cm-nél.

2. Anton és Bláziusz az apjuktól örökölték egy földterületet, amelynek $\frac{3}{5}$ része Antonnak jutott. Mindkét fiú csak búzát és kukoricát termelt. Anton a saját területének $\frac{4}{5}$ részét ültette be búzával, míg a két testvér által művelt teljes terület 0,3 részén termett kukorica. Bláziusz a saját területének hányadrészen termelt búzát illetve kukoricát?

ABACUS matematikai lapok; 2017. január; C.1318

Megoldás:

Legyen a teljes terület T . Anton öröksége $\frac{3}{5}T$, ennek $\frac{4}{5}$ részén, azaz $\frac{3}{5}T \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}T$ területen termel búzát.

$0,3T$ területen terem kukorica, így $0,7T$ területen búza. Tehát Bláziusz az egész terület $\frac{7}{10}T - \frac{12}{25}T = \frac{22}{100}T$ területen termel búzát. Az ő területe $\frac{2}{5}T$.

Ez azt jelenti, hogy saját területének $\frac{22}{100}T : \frac{2}{5}T = \frac{22}{100} \cdot \frac{5}{2} = \frac{11}{20}$ részén termel búzát és $\frac{9}{20}$ részén kukoricát.

3. Egy 181π térfogatú csonkakúp alapkörének r és R sugara, valamint az a alkotója között az

$$r:R:a = 4:11:25$$

arány áll fenn.

Határozza meg a sugarak és az alkotó hosszát!

Érettségi-felvételi feladatok 1997. május 20. du.

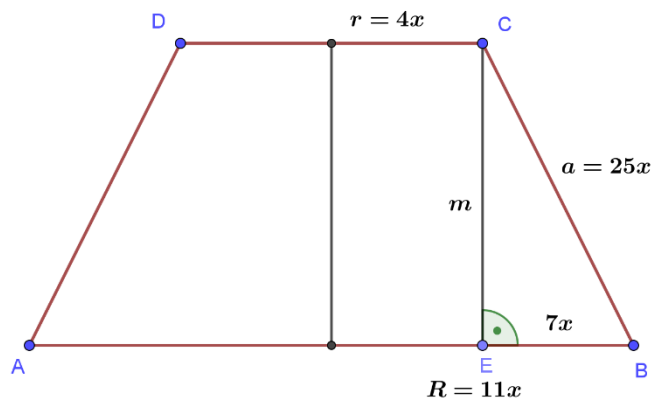
Megoldás:

Az arányoknak megfelelően vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$r = 4x; \quad R = 11x; \quad a = 25x.$$

A csonkakúp térfogatához szükségünk van a magasságra.

A csonkakúpot a tengelyére illesztett síkkal elmetszve ezt az ábrát kapjuk.



$BE = R - r = 7x$. A BCE derékszögű háromszögre felírjuk a Pitagorasz tételt:

$$m^2 + 49x^2 = 625x^2$$

$$m^2 = 576x^2$$

$$m = 24x.$$

A csonkakúla térfogatát kifejezzük x segítségével:

$$V = \frac{m}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)$$

$$181\pi = 8x\pi(121x^2 + 44x^2 + 16x^2)$$

$$181 = 8 \cdot x^3 \cdot 181$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

$$r = 4x = 2; \quad R = 11x = 5,5; \quad a = 25x = 12,5.$$

Tehát a két alapkör sugara 2 és 5,5 hosszúságegység, az alkotó pedig 12,5 hosszúságegység.

4. Dolgozatírás közben Sanyi az órájára pillantva megállapította, hogy a dolgozatírás idejéből ötször annyi telt el, mint amennyi még hátra van. M perc múlva ez az arány már 8. Mennyi az arány újabb M perc elteltével?

KöMaL 1999. április; C 537

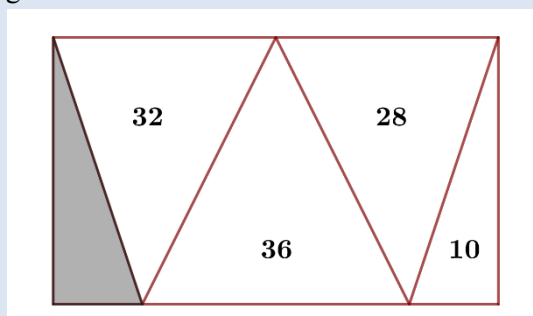
Megoldás:

A dolgozatírás ideje T perc. Amikor ötször annyi idő telt el ebből, mint amennyi még hátra van, akkor a dolgozatírás idejéből $\frac{5}{6}T$ idő telt el, amikor az arány 8. akkor $\frac{8}{9}T$. A feladat feltétele szerint:

$$M = \frac{8}{9}T - \frac{5}{6}T = \frac{16 - 15}{18}T = \frac{1}{18}T.$$

Újabb M perc elteltével $\frac{8}{9}T + \frac{1}{18}T = \frac{17}{18}T$ a kezdéstől eltelt idő és $\frac{1}{18}T$ idő van hátra. Tehát 17-szer annyi idő telt el, mint amennyi hátra van.

5. Az ábrán látható téglalapot öt háromszögre bontottuk. A háromszögekbe írt számok az adott háromszög négyzetcentiméterben mért területét jelentik. Hány négyzetcentiméter az ábrán lévő szürke háromszög területe?

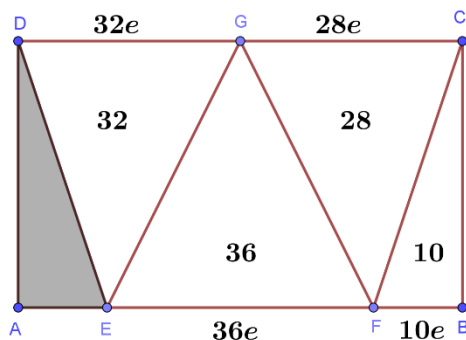


- (A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 18 (E) 20

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007; 9. osztály, megyei forduló

Megoldás:0

Ha két háromszög egyik magassága azonos hosszúságú, akkor a területek aránya megegyezik a magasságokhoz tartozó oldalak arányával.



Így $T_{DEG}:T_{GFC}:T_{FBC}:T_{EFG} = 32:28:10:36 = DG:GC:FB:EF$, hiszen a közös magasság a téglalap BC oldala. Az arányok alapján használjuk a $DG = 32e; GC = 28e; FB = 10e; EF = 36e$ jelölést. A téglalap szemben lévő oldalai egyenlők, $DC = AB = 32e + 28e = 60e$.

Így $AE = 60e - 36e - 10e = 14e$. $T_{AED}:T_{EFG} = AE:EF = 14:36$. Tehát $T_{AED} = 14$ négyzetcentiméter.

A helyes válasz a (C).

6. A lakásom és az iskola közötti utat tízszer gyorsabban teszem meg autóval, mint gyalog. Ha ennek az útnak az egyharmadát gyalog, a többit pedig autóval tenném meg, akkor ehhez 24 percre lenne szükségem. Az út hányad részét tettem meg gyalog, ha 9 perccel hosszabb ideig közlekedtem, mintha csak autóval utaztam volna?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1981; Kezdők, szakközépiskola; II. forduló

Megoldás I:

A sebesség és az út megtételéhez szükséges idő fordítottan arányos, ha a megtett út ugyanakkora. Az autó sebessége tízszer akkora, mint a gyalogosé, így az út megtételéhez az autónak tized annyi idő szükséges. Autóval t percig, gyalog pedig $10t$ percig tart az út.

Az út egyharmada gyalog $\frac{10t}{3}$ perc, a maradék kétharmada autóval $\frac{2t}{3}$ perc:

$$\frac{10t}{3} + \frac{2t}{3} = 4t = 24$$

$$t = 6.$$

Tehát autóval 6 perc, gyalog 60 perc az út.

6 percnyi „autóval megtett” utat a gyalogos 60 perc alatt, azaz 54 perccel több idő alatt teszi meg. A feladat által kért esetben 9 perccel hosszabb az út, azaz az 54 perc hatodával, így az út egy hatodát teszi meg gyalog.

Ellenőrzés:

Az út $\frac{1}{6}$ részét a gyalogos 10 perc alatt teszi meg, az autó a maradék $\frac{5}{6}$ részt 5 perc alatt, tehát valóban összesen 15 percre van szükség ilyen esetben.

Megoldás II:

Azoknak, akik az előző gondolatmenetet kétkedve fogadták, adunk egy másik megoldást is.

A gyalogos sebessége $v \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, az autó sebessége $10 \cdot v \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, az út pedig s méter.

Ha gyalog az út egyharmadát teszi meg, a többit autóval, akkor a szükséges idő 24 perc:

$$\frac{s}{3} + \frac{2s}{10v} = 24.$$

Az egyenletet $30v$ -vel szorozva:

$$10s + 2s = 720v$$

$$12s = 720v$$

$$s = 60v.$$

Tegyük fel, hogy a kért esetben az út x -ed részét teszi meg gyalog:

$$\frac{x \cdot s}{v} + \frac{(1-x) \cdot s}{10v} = \frac{s}{10v} + 9.$$

Használjuk fel, hogy $s = 60v$:

$$60x + (1 - x) \cdot 6 = 15$$

$$60x + 6 - 6x = 15$$

$$54x = 9$$

$$x = \frac{1}{6}.$$

A kért esetben az út $\frac{1}{6}$ részét teszi meg gyalog.

7. Egy folyó partján az A és B város 20 km-re van egymástól. Egy csónak A -ból B -be és vissza 10 óra alatt tette meg az utat. Felfelé 2 km-t tett meg ugyanannyi idő alatt, mint lefelé 3 km-t. Mekkora a folyó sebessége?

Kalmár László Matematikaverseny 2010; 8. osztály, országos döntő

Megoldás:

A feltételek szerint a csónak sebességének aránya felfelé és lefelé haladva a folyón 2:3. Ugyanakkora megtett út esetén a sebesség és az idő fordítottan arányos, így az AB távolság megtételéhez szükséges idő aránya felfelé és lefelé haladva 3:2. Felosztjuk a 10 órát 3:2 arányban:

10: (3 + 2) = 2; az egyik rész $2 \cdot 3 = 6$ óra, a másik rész $2 \cdot 2 = 4$ óra. Tehát a hajó az AB távolságot a folyón felfelé 6 óra alatt, lefelé 4 óra alatt teszi meg. A hajó sebessége felfelé $\frac{20}{6}$ km/h, lefelé $\frac{20}{4} = \frac{30}{6}$ km/h.

Ha a hajó állóvízben mért sebessége v , a folyó sebessége c , akkor a folyón felfelé haladva a sebessége $v - c = \frac{20}{6}$ km/h; lefelé haladva $v + c = \frac{30}{6}$ km/h. A két érték különbsége, $\frac{10}{6}$ km/h, a folyó sebességének kétszerese.

Ezek alapján a folyó sebessége $\frac{5}{6}$ km/h. (A hajó sebessége pedig állóvízben $\frac{25}{6}$ km/h.)

8. Egy sportcipő 15%-kal drágább, mint egy farmernadrág. Hány százalékkal olcsóbb a farmernadrág, mint a sportcipő?

Megoldás:

Ha a farmernadrág ára f forint, akkor a sportcipő ára $1,15f$. Ekkor a farmernadrág ára a sportcipő árának az $\frac{f}{1,15f} = \frac{100}{115} = \frac{20}{23}$ része. $\frac{20}{23} \approx 0,87 = 87\%$, ezért a farmernadrág $\approx 13\%$ -kal olcsóbb, mint a sportcipő.

9. Az egyik élelmiszerboltban kétféle rostos őszibaracklé kapható: az egyik fajtából 1,5 litert töltenek egy dobozba, ennek gyümölcstartalma 50%, a másik 1 literes kiszerelésű és 25%-os gyümölcstartalmú. Saci mindkét fajtából egyet-egyet felbontott, és összeöntötte egy háromliteres kancsóba a vendégeknek. hány százalék a keverék gyümölcstartalma?

(A) 30

(B) $33\frac{1}{3}$

(C) 35

(D) 40

(E) 45

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 11. osztály, megyei forduló

Megoldás:

Az első doboz gyümölcsstartalma 50%, tehát 0,75 liter. A második doboz 25%-os, így 0,25 liter a gyümölcs van benne.

Ha összeöntjük a két dobozt, akkor a 2,5 liter őszibaracklében $0,75 + 0,25 = 1$ liter gyümölcs lesz, így $\frac{1}{2,5} = 0,4 = 40\%$ -os szörpöt kapunk.

(D) a jó válasz.

10. Egy szakács egy vörösboros szószot főz. A szószba a belevaló szilárd (víz-mentes) összetevőkön kívül csak vörösbort önt folyadékként, így a teljes szószmennyiség 12%-a alkohol és 80%-a víz. A szószt addig forralja, amíg az összes alkohol elpárolog belőle, a víz egy részével együtt. A szósz mennyisége felére csökkent a forrás során. A kapott sűrű szósznak hány százaléka víz?

ABACUS matematikai lapok; 2017. november; C.1358

Megoldás:

Ha a szósz mennyisége kezdetben m , akkor $0,12m$ alkoholt, $0,8m$ vizet és $0,08m$ szilárd anyagot tartalmaz. A forralás után a szósz mennyisége $0,5m$ lesz, benne a szilárd anyag mennyisége változatlanul $0,08m$, tehát $0,42m$ víz maradt, ami a 84%-a a $0,5m$ mennyiségű szósznak.

11. 500 000 Ft áruhitelt vettünk fel 3 évre. A hitelintézet évi 20%-os kamatot számított fel. A törlesztést az első hónap végén kezdjük. Mekkora lesz a havi törlesztőrészlet?

Megoldás:

A törlesztőrészletet jelöljük x -el. A havi kamat $\frac{20}{12} = \frac{5}{3}\%$. Az első hónap végén a tartozásunk a felvett hitel $\left(1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{100}\right)$ -szorosa lesz. Bevezetjük a $q = 1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{100} \approx 1,016667$ jelölést.

Az első hónap végén $5\,000\,000 \cdot q$ értékből törlesztünk x Ft-ot, így tartozásunk a második hónap elején $5\,000\,000 \cdot q - x$ Ft.

A tartozásunk a második hónapban hasonlóan kamatozik, $(5\,000\,000 \cdot q - x) \cdot q$ összegből törlesztünk, így a tartozásunk értéke a harmadik hónap végén:

$$(500\,000 \cdot q - x) \cdot q - x = 500\,000 \cdot q^2 - x \cdot q - x.$$

Ugyanígy gondolkozva a 3.év végén, 36 hónap múlva a tartozásunk:

$$500\,000 \cdot q^{36} - x \cdot q^{35} - x \cdot q^{34} - \dots - x \cdot q - x.$$

Akkor törlesztettük a hitelünket, ha ez az összeg 0:

$$500\,000 \cdot q^{36} - x \cdot q^{35} - x \cdot q^{34} - \dots - x \cdot q - x = 0$$

Felhasználjuk a mértani sorozat összegképletét:

$$500\,000 \cdot q^{36} = x \cdot \frac{q^{36} - 1}{q - 1}$$

Helyettesítsük be q közelítő értékét:

$$906\,575 = 48,7881x$$

$$x = 18581.$$

A havi törlesztőrészlet $\approx 18\,600$ Ft lesz.

Megjegyzés:

Érdemes meggondolni, hogyan számolnánk az alábbi feladat esetében:

500 000 Ft áruhitelt vettünk fel 3 évre. A havi törlesztőrészlet 18 600 Ft. A törlesztést az első hónap végén kezdjük. A hitelintézet évi hány százalékos kamatot számított fel?

Ugyanígy gondolkozhatunk, mint az előbb, ezt az összefüggést kapjuk:

$$500\,000 \cdot q^{36} = 18\,600 \cdot \frac{q^{36} - 1}{q - 1}$$

Átrendezve egy 37-edfokú egyenletet kapunk q -ra:

$$500\,000 \cdot q^{36} \cdot (q - 1) = 18\,600 \cdot (q^{36} - 1)$$

Ennek a megoldását csak közelítő módszerekkel kísérlelhetjük meg.

12. Mekkora összeget helyezünk el a bankban évi 6%-os kamatra, ha a következő 10 évben minden év végén 240 000 forintot szeretnénk felvenni erről a betétről?

Megoldás:

M forintot helyezünk el a ciklus elején. Jelöljük a_n -nel az n -edik év végén, a 240 000 forint felvétele után a betétünkön maradt pénzt.

Az első évben kamatozik a betett pénzünk és az év végén felvesszünk 240 000 forintot, így a bankban az első év végén a betétünk értéke:

$$a_1 = M \cdot 1,06 - 240\,000 \text{ forint.}$$

A második évben ez az összeg kamatozik, és ebből veszünk ki újra 240 000 forintot, marad:

$$a_2 = (M \cdot 1,06 - 240\,000) \cdot 1,06 - 240\,000 = M \cdot 1,06^2 - 240\,000 \cdot 1,06 - 240\,000.$$

A 3. év végén:

$$\begin{aligned} a_3 &= (M \cdot 1,06^2 - 240\,000 \cdot 1,06 - 240\,000) \cdot 1,06 - 240\,000 = \\ &= M \cdot 1,06^3 - 240\,000 \cdot 1,06^2 - 240\,000 \cdot 1,06 - 240\,000. \end{aligned}$$

Tovább ugyanígy gondolkodva az n -edik év végén:

$$\begin{aligned} a_n &= M \cdot 1,06^n - 240\,000 \cdot 1,06^{n-1} - \dots - 240\,000 \cdot 1,06 - 240\,000 = \\ &= M \cdot 1,06^n - (240\,000 \cdot 1,06^{n-1} + \dots + 240\,000 \cdot 1,06 + 240\,000). \end{aligned}$$

A mértani sorozat összegképletét használva:

$$a_n = M \cdot 1,06^n - 240\,000 \cdot \frac{1,06^n - 1}{1,06 - 1}.$$

Azt az M értéket keressünk, amire $a_{10} \geq 0$:

$$\begin{aligned} M \cdot 1,06^{10} - 240\,000 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1} &\geq 0 \\ M &\geq \frac{240\,000 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1}}{1,06^{10}} \approx 1\,766\,421. \end{aligned}$$

Tehát ezresekre kerekítve legalább 1 767 000 forintot kell a betétünkben elhelyezni. A 10 év alatt ezért 2 400 000 forintot vehetünk fel.

Megjegyzés:

Érdemes meggondolni, hogyan változik ez az összeg, ha év elején vesszük fel a 240 000 forintot.

Legyen b_n az n -edik év végén a betétünk értéke:

$$b_1 = (M - 240\,000) \cdot 1,06 = M \cdot 1,06 - 240\,000 \cdot 1,06.$$

$$b_2 = (b_1 - 240\,000) \cdot 1,06 = M \cdot 1,06^2 - 240\,000 \cdot 1,06^2 - 240\,000 \cdot 1,06$$

És így tovább:

$$\begin{aligned} b_n &= M \cdot 1,06^n - (240\,000 \cdot 1,06^n + 240\,000 \cdot 1,06^{n-1} + \dots + 240\,000 \cdot 1,06) = \\ &= M \cdot 1,06^n - 240\,000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^n - 1}{1,06 - 1} \end{aligned}$$

Most a $b_{10} \geq 0$ egyenlőtlenség megoldását keressük:

$$\begin{aligned} M \cdot 1,06^{10} - 240\,000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1} &\geq 0 \\ M &\geq \frac{240\,000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1}}{1,06^{10}} \approx 1\,872\,406 \end{aligned}$$

Tehát ezresekre kerekítve legalább 1 873 000 forintot kell a betétünkben elhelyezni ilyen feltételek mellett. Ez az érték 6%-kal magasabb, mintha az év végén vesszük fel a 240 000 forintot.

III. Gyakorló feladatok

13. Sári, Kati és Zsófi ugyanolyan könyvet szeretnének vásárolni. Sári pénzéből azonban hiányzik a könyv árának az $\frac{1}{3}$ része, Kati pénzéből az $\frac{1}{4}$ része, Zsófi pénzéből pedig az $\frac{1}{5}$ része. Ha a könyv 470 Ft-tal olcsóbb lenne, akkor a háromjuk pénzét teljesen elkölthetné éppen három darabot tudnának venni. Hány forintba kerül a könyv?

ABACUS matematikai lapok; 2006. november; C.745

14. Egy asztalon van 5 erszény, mindegyikben valamennyi pénz. Az elsőből kivesszük a benne lévő pénz ötödét, és a másodikba tesszük. Ezután a másodikból vesszük ki a benne lévő pénz ötödrészét, és a harmadikba tesszük, és így tovább. Utoljára az ötödik erszényben lévő pénz ötödét vettük ki, és az első erszénybe tettük. Így végül mindegyik erszényben 1600 Ft lesz. Mennyi pénz volt eredetileg az erszényekben?

Kalmár László Matematikaverseny 2010; 7. osztály, országos döntő

15. Az internetről egy 1,5 MB-os fájlt töltünk le a számítógépünkre. A művelet során a program a letöltés addigi átlagos sebessége alapján folyamatosan megbecsüli a még hátralévő időt. A képernyőre pillantva azt látjuk, hogy a fájlunk pontosan a felét már letöltötte a program, s ekkor a műveletből hátralévő időt pontosan 2 percre becsüli. Ezután bármely t idő elteltével azt tapasztaljuk, hogy (a hálózat leterheltsége miatt) még mindig 2 percet ír ki a program a fájl letöltéséből hátralévő időként. Adjuk meg t függvényeként a fájl már letöltött részének méretét.

KöMaL 2003. november; C 736

16. Hamupipőkének egy zsák lencsével összekevert babot kellett szétválasztania. A lencse és a bab tömegének az aránya 2:3 volt. Hamupipőke mostohájának úgy tűnt, hogy kevés a lencse, ezért még 2 kg lencsét a zsákba szórt. Így a lencsének a babhoz való aránya annyi lett, mint amennyi a bab aránya volt a lencséhez.

Végül hány kg lencsét és hány kg babot kellett Hamupipőkének szétválasztania?

Varga Tamás Matematikaverseny 1994/95., 7.osztály, 3.forduló

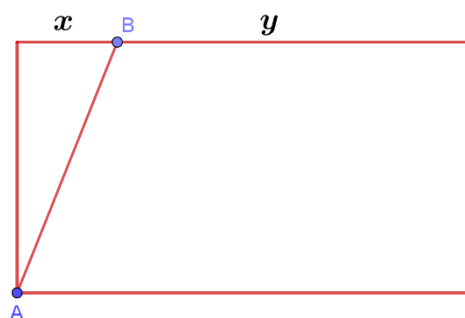
17. Három réten tehenek legelnek, a rétek területének aránya 4:5:6. Az első, legkisebb réten 6 tehén 12 napig tud legelni, a másodikon 7 tehén 20 napig. A harmadik, legnagyobb réten hány napig tud legelni 12 tehén?

Mindhárom réten kezdetben egyforma magas volt a fű, a réteken egyforma gyorsan, egyenletesen nő a fű, és a tehenek megeszik mindazt a fűvet, ami a réten volt, amikor odaérkeztek, és azt is, ami addig nőtt, amíg ott legeltek.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2015/16; Kezdők I-II. kategória; II. forduló

Kezdők III. kategória; I. forduló

18. Az ábrán látható téglalapot az AB szakasz két olyan részre osztja, amelyek területének aránya 2:9. Mennyi az x és y szakaszok hosszúságának aránya?



- (A) 2:9 (B) 2:7 (C) 4:7 (D) 4:9 (E) 5:9

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009; 9. osztály, megyei forduló

19. Pistiék lakásában 23 fokos a levegő hőmérséklete. Pisti este 9 órakor véletlenül lekapcsolta a lakásfűtésüket. Amikor szülei észrevették, visszakapcsolták, de csak a lekapcsolást követő napon este 6 órakor lett ismét 23 fok a lakásban. Ha nincs fűtés, akkor három óránként fél fokot csökken a hőmérséklet, ha van fűtés, akkor kétóránként 1 fokot emelkedik. Mikor kapcsolták vissza a fűtést Pisti szülei?

ABACUS matematikai lapok; 2013. december; C.1145

20. Két autóbusz indul ugyanabban az időpontban ugyanazon az úton, az egyik Piripócsról Nekeresdre, a másik ellenkező irányban, Nekeresdről Piripócsra. A buszok sebessége állandó, az arányuk 6:5, az a gyorsabb, amelyik Piripócsról indul. Az út mentén minden kilométernél van egy kilométerkő. Megérkezéskor a buszok pontosan 30 percig várakoznak, majd ugyanazon az útvonalon indulnak vissza, így közlekednek egész nap a két város közt oda-vissza. Másodszor a 156-os kilométerkőnél találkoznak, harmadszor pedig a 128-asnál. Hányadik kilométerkőnél lehetett az első találkozás? Hányadik kilométerkőnél lehet a piripócsi buszmegálló?

OKTV 2017/2018, II. kategória; I. forduló

21. Egy képkereskedésben a képek keretének ára egyenesen arányos a bennük lévő festmények értékével. A kereskedő annak érdekében, hogy bizonyos képek ára közötti különbséget csökkentse, felcserél egymással két-két keretet. Az egyik esetben az a kép, amely ötször annyiba került, mint a másik, kereteik felcserélése után már csak háromszor annyiba kerül. Hogyan módosul a „Téli táj” és a „Falu rossza” c. képek árának aránya, ha kereteik felcserélése előtt a „Téli táj” kilencszer annyiba került, mint a „Falu rossza”?

KöMaL 2001. december; C 650

22. Egy eredetileg 112 000 forintba kerülő hűtőszekrényt egy akció keretében 95 200 forintért árulnak. Hány százalékkal alacsonyabb az akciós ár az eredeti árnál? Megoldását részletezze!

Középszintű érettségi 2018. május 8.

23. Egy kereskedő egy terméket 20%-os árengedménnyel árul, és a beszerzési árhoz képest még így is 20%-os a haszna. Hány százalékos volt a haszna az áreszállítás előtt?

ABACUS matematikai lapok; 2013. szeptember; C.1124

24. András és Ferenc egy szakasz hosszát becsléssel állapítja meg. Ha András 10 %-al kevesebbre becsüli, úgy eltalálja a pontos értéket. Ha Ferenc becslése 10%-al több lenne, akkor ő is eltalálná a pontos értéket.

A két becslés melyikénél lesz a hiba abszolút értéke kisebb?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1979; Kezdők; I. forduló

25. Egy árleszállítási akcióban egy eredetileg 4 200 000 Ft-os autót 2 310 000 Ft-ért adtak el. Ugyanabban az akcióban (ugyanennyi százalékos engedménnyel) egy másik autót 146 000 Ft-tal kevesebért adtak el, mint a teljes árának $\frac{3}{5}$ része. Hány forintba került eredetileg ez utóbbi autó?

KöMaL 2007. december; K 147

26. A televízió műsorában közvetítik az országos választások szavazatainak feldolgozását. A választásokat minden körzetben az a jelölt nyeri, aki ott a legtöbb szavazatot kapta. Bejelentik, hogy egy adott körzetben, ahol 3 jelölt indult, a szavazatok 60 % -ának feldolgozása után a kiértékelt szavazatok az A, B, C jelöltek között 80%, 15%, 5% arányban oszlanak meg.

- a) Állíthatjuk-e biztosan, hogy az A jelölt megnyerte a választást?
- b) Állíthatjuk-e biztosan, hogy a C jelölt nem nyerheti meg a választást?
- c) Hány százalékát kellett volna feldolgozni az adatoknak ahhoz, hogy a megadott arányú szavazatállás mellett biztosan állíthassuk, hogy az A jelölt megnyerte a választást?

ABACUS matematikai lapok; 2002. szeptember; C.518

27. Anna két évre $p\%$ -os évi kamatra pénzt ad kölcsön. Kata megkérdezi tőle, hogy mekkora a p ? Anna válasza: „ha 11%-kal kevesebb kamatot kértem volna, akkor 21%-al több pénzt kellett volna kölcsönadnom, hogy két év múlva ugyanakkora összeget kapjak vissza, mint a jelenlegi feltételek mellett”. Számítsa ki p értékét!

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok 1999. június 14. de.

28. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

- a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette!

A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a. Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

- b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette!

Emelt szintű érettségi 2018. május 8. (A feladat egy része)

29. A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékbán helyezte el az A Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)

- a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott?

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

- b) Hány százalékos volt a *B* Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel?
- c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.)

Középszintű érettségi 2008. május 6.

30. Egy arany-ezüst ötvözet 75%-a arany. Ez az ötvözet 190%-kal értékesebb, mint a fordított összetételű (25% arany, 75% ezüst) ötvözet.

- a) Az arany egységára hányszorosa az ezüst egységárának?
- b) Hány %-kal kisebb az ezüst egységára az aranyénál?

Érettségi-felvételi feladatok 1997.május 21. de.

31. Egy tartályba egy csapon át 600 liter/perc sebességgel 30%-os szörp ömlik. Háromnegyed óra múlva egy másik csapot is megnyitnak, ezen 40 %-os szörp folyik be, 800 liter/perc sebességgel. Mennyi idő múlva lesz a tartályban a szörp 35 %-os?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1984; Kezdők; I. forduló

32. Egy edényben egy liter bor, egy másikban egy liter víz van. Az első edényből átöntünk egy decilitert a másodikba, összekeverjük, majd a keverékből egy decilitert visszaöntünk az első edénybe.

Számítsuk ki az első edényben lévő bor mennyiségének határértékét, ha a fenti eljárást végtelen sokszor ismétljük! (Az egyes átöntések során tökéletes keveredést tételezünk fel, és az eljárás során nincs folyadékvesztés.)

OKTV 1978/1979, általános tantervű osztályok, II. forduló

33. Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják).

- a) Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én?
(A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.)
- b) Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.)

Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

Emelt szintű érettségi 2013. május 7.

34. Egy erdő faállománya az év elején $32\,000\text{ m}^3$, ami évi 2 %-kal nő. Mennyit vághatunk ki belőle évente az év végén, minden évben ugyanannyit, ha azt akarjuk, hogy a 30. év végén $40\,000\text{ m}^3$ legyen a faállomány?

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok 1999. június 14. du.

IV. Gyakorló feladatok megoldásai

13. Sári, Kati és Zsófi ugyanolyan könyvet szeretnének vásárolni. Sári pénzéből azonban hiányzik a könyv árának az $\frac{1}{3}$ része, Kati pénzéből az $\frac{1}{4}$ része, Zsófi pénzéből pedig az $\frac{1}{5}$ része. Ha a könyv 470 Ft-tal olcsóbb lenne, akkor a háromjuk pénzét teljesen elkölthetné éppen három darabot tudnának venni. Hány forintba kerül a könyv?

ABACUS matematikai lapok; 2006. november; C.745

Megoldás I:

Legyen a könyv ára x forint. Ekkor Sárinak $\frac{2}{3}x$ forintja, Katinak $\frac{3}{4}x$ forintja, Zsófinak $\frac{4}{5}x$ forintja van, ez összesen $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = \frac{40+45+48}{60}x = \frac{133}{60}x$ forint. A feladat szerint:

$$\frac{133}{60}x = 3(x - 470)$$

$$\frac{133}{60}x = 3x - 1410$$

$$\frac{47}{60}x = 1410$$

$$x = 1800$$

A könyv 1800 forintba kerül.

Ellenőrzés:

Sárinak 1200 forintja, Katinak 1350 forintja, Zsófinak 1440 forintja van, ami összesen 3990 forint.

Ha a könyv 470 forinttal olcsóbb lenne, azaz 1330 forintba kerülne, akkor a 3990 forintból valóban három darabot lehetne venni.

Megoldás II:

A könyv árának $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ része hiányzik a három lány pénzéből. Ez a feltételek szerint $3 \cdot 470 = 1410$ forint. Így a könyv ára $1410 : \frac{47}{60} = 1800$ forint.

14. Egy asztalon van 5 erszény, mindegyikben valamennyi pénz. Az elsőből kivesszük a benne lévő pénz ötödét, és a másodikba tesszük. Ezután a másodikból vesszük ki a benne lévő pénz ötödrészét, és a harmadikba tesszük, és így tovább. Utoljára az ötödik erszényben lévő pénz ötödét vettük ki, és az első erszénybe tettük. Így végül mindegyik erszényben 1600 Ft lesz. Mennyi pénz volt eredetileg az erszényekben?

Kalmár László Matematikaverseny 2010; 7. osztály, országos döntő

Megoldás:

Gondolkozzunk visszafelé. Az ötödik lépésben az ötödik erszényből a benne lévő összeg ötödét kivettük és az elsőbe tettük. Ezek szerint az ötödik erszényben az utolsó lépés előtti pénz $4/5$ -e van, tehát az $1/5$ rész 400 Ft. Így az utolsó lépés előtt az erszényekben:

$$1600 - 400 = 1200 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 + 400 = 2000 \text{ Ft volt.}$$

Hasonlóan gondolkozva a negyedik lépés előtt:

$$1200 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 + 400 = 2000 \text{ Ft}; \quad 2000 - 400 = 1600 \text{ Ft.}$$

A harmadik lépés előtt:

$$1200 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 + 400 = 2000 \text{ Ft}; \quad 2000 - 400 = 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}.$$

A második lépés előtt:

$$1200 \text{ Ft}; \quad 1600 + 400 = 2000 \text{ Ft}; \quad 2000 - 400 = 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad .$$

Az első lépés előtt (Itt az 1200 Ft a $\frac{4}{5}$ rész!):

$$1200 + 300 = 1500 \text{ Ft}; \quad 2000 - 300 = 1700 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad 1600 \text{ Ft}; \quad .$$

Tehát az első erszéyben eredetileg 1500 Ft; a másodikban 1700 Ft, a harmadik, negyedik és ötödik erszéyben pedig 1600 Ft volt.

15. Az internetről egy 1,5 MB-os fájlt töltünk le a számítógépünkre. A művelet során a program a letöltés addigi átlagos sebessége alapján folyamatosan megbecsüli a még hátralévő időt. A képernyőre pillantva azt látjuk, hogy a fájlnek pontosan a felét már letöltötte a program, s ekkor a műveletből hátralévő időt pontosan 2 percre becsüli. Ezután bármely t idő elteltével azt tapasztaljuk, hogy (a hálózat leterheltsége miatt) még mindig 2 percet ír ki a program a fájl letöltéséből hátralévő időként. Adjuk meg t függvényeként a fájl már letöltött részének méretét.

KöMaL 2003. november; C 736

Megoldás:

A t időt a fájl felének letöltésekor kezdjük mérni, $t \geq 0$:

A fájl x -ed részét $t+2$ perc alatt tölti le a számítógép. Eddig a letöltés átlagos sebessége $\frac{x}{t+2}$ volt. Még $(1-x)$ -ed rész van hátra. A gép a letöltési időt 2 percre becsüli, így erre a részre az átlagos letöltési sebesség $\frac{1-x}{2}$.

Tehát:

$$\frac{x}{t+2} = \frac{1-x}{2}$$

$$2x = t+2 - (t+2)x$$

$$(t+4)x = t+2$$

$$x = \frac{t+2}{t+4}$$

A fájl mérete 1,5 MB, tehát t perckor $f(t) = \frac{t+2}{t+4} \cdot 1,5$ MB a letöltött rész mérete.

Megjegyzés:

Bátorító, hogy 198 perc alatt (a felének letöltése után!) a fájl 99% -át letölthetjük. A reményt nem szabad feladni, hiszen ennek a függvénynek a végtelenben 1 a határértéke:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+2}{t+4} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{t}}{1 + \frac{4}{t}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

16. Hamupipőkének egy zsák lencsével összekevert babot kellett szétválasztania. A lencse és a bab tömegének az aránya 2:3 volt. Hamupipőke mostohájának úgy tűnt, hogy kevés a lencse, ezért még 2 kg lencsét a zsákba szórt. Így a lencsének a babhoz való aránya annyi lett, mint amennyi a bab aránya volt a lencséhez.

Végül hány kg lencsét és hány kg babot kellett Hamupipőkének szétválasztania?

Varga Tamás Matematikaverseny 1994/95., 7.osztály, 3.forduló

Megoldás:

Használjuk fel a lencse és a bab arányát, kezdetben a lencse mennyisége $2x$, a bab mennyisége $3x$. A mostoha ezt megváltoztatja, $2x + 2$ kg lencse és $3x$ kg bab lesz és ezek aránya:

$$(2x + 2) : 3x = 3 : 2$$

Írjuk fel ezt az aránypárt tört alakban és rendezzük az egyenletet:

$$\frac{2x + 2}{3x} = \frac{3}{2}$$

$$(2x + 2) \cdot 2 = 3 \cdot 3x$$

$$4x + 4 = 9x$$

$$5x = 4$$

$$x = 0,8 \Rightarrow 2x + 2 = 3,6 \text{ és } 3x = 2,4.$$

Hamupipőkének 3,6 kg lencsét és 2,4 kg babot kellett szétválogatnia.

17. Három réten tehenek legelnek, a rétek területének aránya 4:5:6. Az első, legkisebb réten 6 tehén 12 napig tud legelni, a másodikon 7 tehén 20 napig. A harmadik, legnagyobb réten hány napig tud legelni 12 tehén?

Mindhárom réten kezdetben egyforma magas volt a fű, a réteken egyforma gyorsan, egyenletesen nő a fű, és a tehenek megeszik mindazt a fűvet, ami a réten volt, amikor odaérkeztek, és azt is, ami addig nőtt, amíg ott legeltek.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2015/16; Kezdők I-II. kategória; II. forduló

Kezdők III. kategória; I. forduló

Megoldás:

A területek aránya azt jelenti, hogy a három rét 4, 5 illetve 6 egységnyi területből áll. Egy egységnyi területen kezdetben lévő fű mennyiségét jelöljük t -vel, így a három réten kezdetben $4t$; $5t$; $6t$ mennyiségű fű van. (A három réten a tehenek egyszerre kezdenek legelni.)

Jelöljük az egy egységnyi területen 1 nap alatt növekvő fű mennyiségét a -val. 1 tehén 1 nap alatt b mennyiségű fűvet eszik meg.

12 nap alatt $48a$ mennyiségű fű nő az első réten, így a 6 tehén $4t + 48a$ mennyiségű fűvet eszik meg 12 nap alatt:

$$4t + 48a = 6 \cdot 12b$$

$$t + 12a = 18b.$$

A második réten 20 nap alatt $100a$ fű nő, a 7 tehén $5t + 100a$ mennyiségű fűvet eszik meg 20 nap alatt:

$$5t + 100a = 7 \cdot 20b$$

$$t + 20a = 28b.$$

Az alábbi egyenletrendszerből t -t és a -t fejezzük ki b -vel:

$$\begin{cases} t + 12a = 18b \\ t + 20a = 28b \end{cases}$$

$$8a = 10b$$

$$a = 1,25b$$

$$t = 18b - 12 \cdot 1,25b = 3b$$

Ez azt jelenti, hogy a t mennyiség 3 tehén egy napi adagja és ezen a területegységen naponta 1,25 tehén számára nő fű.

Ha a harmadik területet 12 tehén n nap alatt legeli le, akkor:

$$6t + 6na = n \cdot 12b.$$

Felhasználjuk a t -re és a -ra kapott összefüggéseket:

$$6 \cdot 3b + 6n \cdot 1,25b = 12nb$$

$$18 + 7,5n = 12n$$

$$18 = 4,5n$$

$$n = 4.$$

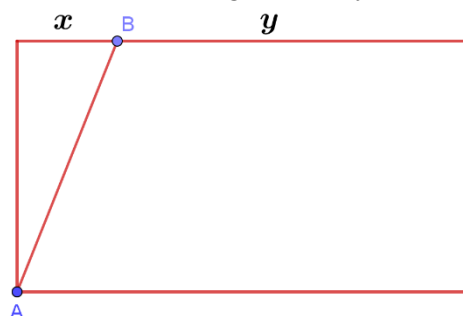
A harmadik réten 4 napig tud legelni 12 tehén.

Megjegyzés:

Ellenőrzésképpen ezt gondoljuk végig egyenlet nélkül is. A $t = 3b$ és $a = 1,25b$ összefüggések azt jelentik, hogy 1 egységnyi területen 3 tehén 1 napi adagja van kezdetben és 1,25 tehén 1 napi adagja nő naponta.

Így kezdetben 18 tehén 1 napi adagja van a harmadik réten. Naponta $6 \cdot 1,25 = 7,5$ tehénnek 1 napra elegendő fű nő és 12 tehén eszik, így naponta $12 - 7,5 = 4,5$ tehén 1 napi adagjával fogy a legelőn lévő fű mennyisége, tehát $18 : 4,5 = 4$ nap alatt fogy el a harmadik legelőn a fű.

18. Az ábrán látható téglalapot az AB szakasz két olyan részre osztja, amelyek területének arány 2:9. Mennyi az x és y szakaszok hosszúságának aránya?



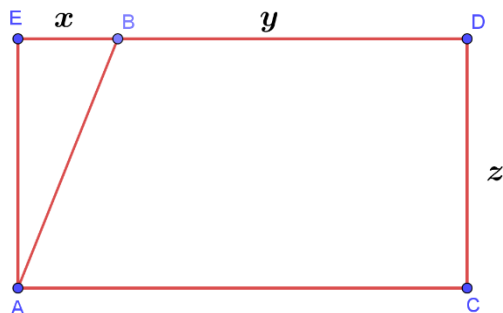
(A) 2:9

(B) 2:7

(C) 4:7

(D) 4:9

(E) 5:9

Megoldás I:

A téglalap DC oldalát jelöljük z -vel. Az ABE háromszög területe $\frac{x \cdot z}{2}$; az $ACDB$ trapéz területe $\frac{(x+y+y) \cdot z}{2}$. Felírjuk az adott arányt és rendezzük az egyenletet:

$$\frac{x \cdot z}{2} : \frac{(x + y + y) \cdot z}{2} = \frac{x}{x + 2y} = \frac{2}{9}$$

$$9x = 2x + 4y$$

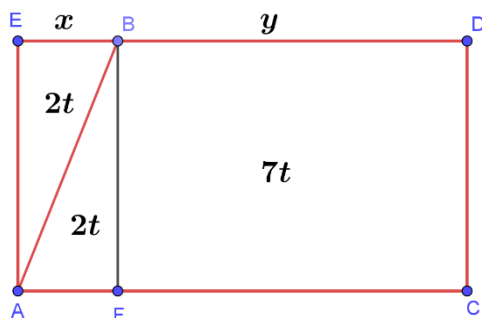
$$7x = 4y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{7}$$

Ezek szerint (C) a jó válasz.

Megoldás II:

Egyszerűbb megoldást kapunk, ha az arány jelentését közvetlenül használjuk. Az ABE háromszög és az $ACDB$ trapéz területének aránya 2: 9, ezért ezeket a területeket jelölhetjük $2t$ -vel és $9t$ -vel. Az AE oldallal párhuzamost húzunk a B ponton keresztül, így keletkezik az $AFBE$ téglalap, aminek a



területét az AB szakasz felezi, tehát az AFE háromszög területe is $2t$, az $FCDB$ téglalap területe $7t$. Az x és y aránya megegyezik az $AFBE$ és $FCDB$ téglalapok területének arányával, hiszen az FB oldaluk közös:

$$x : y = 4t : 7t = 4 : 7.$$

(C) a helyes válasz.

19. Pistiék lakásában 23 fokos a levegő hőmérséklete. Pisti este 9 órakor véletlenül lekapcsolta a lakásfűtésüket. Amikor szülei észrevették, visszakapcsolták, de csak a lekapcsolást követő napon este 6 órakor lett ismét 23 fok a lakásban. Ha nincs fűtés, akkor három óránként fél fokot csökken a hőmérséklet, ha van fűtés, akkor kétóránként 1 fokot emelkedik. Mikor kapcsolták vissza a fűtést Pisti szülei?

Megoldás:

A feladat szerint hat óra alatt hűl a hőmérséklet 1 fokkal és két óra alatt emelkedik 1 fokkal. Így háromszor annyi ideig csökkent a hőmérséklet, mint amennyi ideig melegedett a lakás. Este 9 óra és másnap este 6 óra között 21 óra van. Ennek $\frac{3}{4}$ részében hűlt a lakás, ami $21 \cdot \frac{3}{4} = 15\frac{3}{4}$ óra. 9 órától éjfélig 3 óra telik el, így másnap 12 óra 45 perckor kapcsolták vissza a szülők a fűtést.

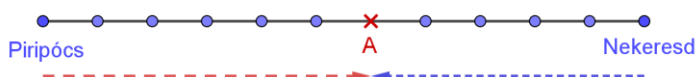
20. Két autóbusz indul ugyanabban az időpontban ugyanazon az úton, az egyik Piripócsról Nekeresdre, a másik ellenkező irányban, Nekeresdről Piripócsra. A buszok sebessége állandó, az arányuk 6:5, az a gyorsabb, amelyik Piripócsról indul. Az út mentén minden kilométernél van egy kilométerkő. Megérkezéskor a buszok pontosan 30 percig várakoznak, majd ugyanazon az útvonalon indulnak vissza, így közlekednek egész nap a két város közt oda-vissza. Másodszor a 156-os kilométerkőnél találkoznak, harmadszor pedig a 128-asnál.
- Hányadik kilométerkőnél lehetett az első találkozás? Hányadik kilométerkőnél lehet a piripócsi buszmegálló?

OKTV 2017/2018, II. kategória, I. forduló

Megoldás:

A buszok sebességének aránya 6:5, ezért azonos idő alatt a buszok által megtett utak aránya is 6:5.

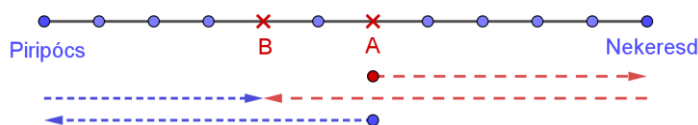
1. találkozás



Az első találkozásig a két autóbusz a Piripócs és Nekeresd közötti utat (s) együttesen teszi meg, a megtett utak aránya 6:5. Így célszerű ezt a távolságot 11 egységnek tekinteni: $s = 11e$. A találkozás Piripóctól $6e$ távolságra történt (A pont).

A második találkozásig az ábrán látható módon az autóbuszok $2s$ utat tesznek meg összesen.

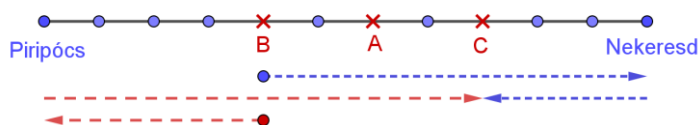
2. találkozás



Mindkettő 30 percet várakozott, ezért ezt figyelmen kívül hagyhatjuk, mindkét busz ugyanannyi ideig haladt, az általuk megtett utak aránya most is 6:5, tehát a gyorsabb $12e$, a lassabb $10e$ utat tett meg, Piripóctól $4e$ távolságra találkoztak (B pont).

A második és harmadik találkozás között ugyancsak $2s$ utat tettek meg 6:5 arányban a buszok, azaz $12e$ -t és $10e$ -t. Így Piripóctól $7e$ távolságra találkoztak (C pont):

3. találkozás



A második találkozásnál, a B pontban van a 156-os kilométerkő, a harmadik találkozásnál, a C pontban van a 128-as kilométerkő. Tehát $4e = 156 - 128 = 28$ km, $e = 7$ km. Ezek alapján az első találkozás a $128 + 2 \cdot 7 = 142$ -os kilométerkőnél lehetett, a piripócsi buszmegálló pedig a $156 + 4 \cdot 7 = 184$ -es kilométerkőnél van.

21. Egy képlereskedésben a képek keretének ára egyenesen arányos a bennük lévő festmények értékével. A kereskedő annak érdekében, hogy bizonyos képek ára közötti különbséget csökkentse, felcserél egymással két-két keretet. Az egyik esetben az a kép, amely ötször annyiba került, mint a másik, kereteik felcserélése után már csak háromszor annyiba kerül. Hogyan módosul a „Téli táj” és a „Falu rossza” c. képek árának aránya, ha kereteik felcserélése előtt a „Téli táj” kilencszer annyiba került, mint a „Falu rossza”?

KöMaL 2001. december; C 650

Megoldás:

Eredetileg a keret ára legyen k -szorosa a kép árának.

Az első esetben az első kép ára legyen $5x$, a keret ára $5kx$, a másik kép ára x , a keret ára kx .

Ha felcseréljük a kereteket, akkor:

$$\frac{5x + kx}{x + 5kx} = \frac{5 + k}{1 + 5k} = 3$$

$$5 + k = 3 + 15k$$

$$14k = 2$$

$$k = \frac{1}{7}.$$

Tehát eredetileg a keret ára hetede a kép árának.

A második esetben „Téli táj” ára $9y$, a kereté $\frac{9}{7}y$, A „Falu rossza” ára y , a kereté $\frac{1}{7}y$.

Felcserélve a kereteket a megfelelő arány:

$$\frac{9y + \frac{1}{7}y}{y + \frac{9}{7}y} = \frac{9 + \frac{1}{7}}{1 + \frac{9}{7}} = \frac{\frac{64}{7}}{\frac{16}{7}} = 4,$$

tehát ebben az esetben a „Téli táj” ára négyszer annyiba kerül, mint a „Falu rossza”.

22. Egy eredetileg 112 000 forintba kerülő hűtőszekrényt egy akció keretében 95 200 forintért árulnak. Hány százalékkal alacsonyabb az akciós ár az eredeti áránál? Megoldását részletezze!

Középszintű érettségi 2018. május 8.

Megoldás:

Az akciós ár az eredeti ár $95\,200 : 112\,000 = 0,85$ része, tehát 85%-a. Ez alapján 15%-al alacsonyabb az akciós ár az eredetinél.

23. Egy kereskedő egy terméket 20%-os árengedménnyel árul, és a beszerzési árhoz képest még így is 20%-os a haszna. Hány százalékos volt a haszna az árleszállítás előtt?

ABACUS matematikai lapok; 2013. szeptember; C.1124

Megoldás:

Jelöljük a beszerzési árat x Ft-al. Az árendedmény után $1,2x$ Ft-ért adta az árut a kereskedő, mert még ekkor is 20% haszna volt. Ez 80%-a az eredeti árnak, ami így $0,2x:0,8 = 1,5x$ Ft. Tehát eredetileg 50%-os haszna volt.

24. András és Ferenc egy szakasz hosszát becsléssel állapítja meg. Ha András 10 %-al kevesebbre becsüli, úgy eltalálja a pontos értéket. Ha Ferenc becslése 10%-al több lenne, akkor ő is eltalálná a pontos értéket.

A két becslés melyikénél lesz a hiba abszolút értéke kisebb?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1979; Kezdők; I. forduló

Megoldás I:

Legyen a pontos érték L , az András által becsült érték A , a Ferenc által becsült érték F .

Ha András 10%-al kevesebbet becsült volna, akkor a pontos értéket kapta volna:

$$0,9A = L$$

$$A = L:0,9 = \frac{10}{9}L.$$

Ez azt jelenti, hogy András hibája a valós érték $\frac{1}{9}$ -e.

Ha Ferenc becslése 10%-kal több lenne, akkor kapná meg a pontos értéket:

$$1,1F = L$$

$$F = L:1,1 = \frac{10}{11}L.$$

Tehát Ferenc becslésének a hibája a pontos érték $\frac{1}{11}$ -e.

Így Ferenc hibájának abszolút értéke a kisebb.

Megoldás II:

Gondolkozzunk egyenletek nélkül!

Ha András becslése 100%, akkor a pontos érték 90%, tehát a hiba a pontos érték $\frac{1}{9}$ -e.

Ha Ferenc becslése 100%, akkor a pontos érték 110%, tehát a hiba a pontos érték $\frac{1}{11}$ -e.

Tehát Ferenc hibájának abszolút értéke a kisebb.

25. Egy árleszállítási akcióban egy eredetileg 4 200 000 Ft-os autót 2 310 000 Ft-ért adtak el. Ugyanebben az akcióban (ugyanennyi százalékos engedménnyel) egy másik autót 146 000 Ft-tal kevesebért adtak el, mint a teljes árának $\frac{3}{5}$ része. Hány forintba került eredetileg ez utóbbi autó?

KöMaL 2007. december; K 147

Megoldás:

$2\,310\,000:4\,200\,000 = 0,55$, tehát az akcióban az eredeti ár 55%-áért árulták a kocsikat. $\frac{3}{5} = 60\%$, így a kocsi árának 5%-a lesz 146 000 Ft. Az autó $146\,000 \cdot 20 = 2\,920\,000$ forintba került eredetileg.

26. A televízió műsorában közvetítik az országos választások szavazatainak feldolgozását. A választásokat minden körzetben az a jelölt nyeri, aki ott a legtöbb szavazatot kapta. Bejelentik, hogy egy adott körzetben, ahol 3 jelölt indult, a szavazatok 60 % -ának feldolgozása után a kiértékelt szavazatok az A, B, C jelöltek között 80%, 15%, 5% arányban oszlanak meg.

- Állíthatjuk-e biztosan, hogy az A jelölt megnyerte a választást?
- Állíthatjuk-e biztosan, hogy a C jelölt nem nyerheti meg a választást?
- Hány százalékat kellett volna feldolgozni az adatoknak ahhoz, hogy a megadott arányú szavazatállás mellett biztosan állíthassuk, hogy az A jelölt megnyerte a választást?

ABACUS matematikai lapok; 2002. szeptember; C.518

Megoldás:

- Az eddig összeszámolt szavazatok alapján A az összes szavazatok $60 \cdot 0,8 = 48\%$ -át, B a $60 \cdot 0,15 = 9\%$ -át és C a $60 \cdot 0,05 = 3\%$ -át már megkapta. Ha a maradék 40%-ot B kapná, akkor 49%-al megelőzné A -t. Így nem mondhatjuk biztosan, hogy A nyert.
- C legfeljebb $3 + 40 = 43\%$ -ot szerezhethet, így A -t biztosan nem tudja megelőzni, tehát ő biztosan nem nyerhet.
- Ha a szavazatok $p\%$ -át dolgozták fel, akkor A a szavazatok $0,8p$, B a $0,15p$ százalékát kapta eddig meg biztosan. Még $100 - p$ százalékot kaphatnak a jelöltek. A akkor nyerhet, ha a jelenlegi szavazatainak száma több, mint amit B a legjobb esetben is kaphat, azaz:

$$0,8p > 0,15p + 100 - p$$

$$1,65p > 100$$

$$p > 60 \frac{20}{33} \% \approx 60,61\%$$

Ilyen feldolgozottság esetén már biztos, hogy A nyer.

27. Anna két évre $p\%$ -os évi kamatra pénzt ad kölcsön. Kata megkérdezi tőle, hogy mekkora a p ? Anna válasza: „ha 11%-kal kevesebb kamatot kértem volna, akkor 21%-al több pénzt kellett volna kölcsönadnom, hogy két év múlva ugyanakkora összeget kapjak vissza, mint a jelenlegi feltételek mellett”. Számítsa ki p értékét!

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok 1999. június 14. de.

Megoldás:

Anna x forintot ad kölcsön. Két év múlva évi $p\%$ -os kamattal $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ lesz az értéke.

Ha 21%-al több pénzt adna kölcsön – $1,21x$ forintot – $(p - 11)\%$ -os kamatra, akkor ennek értéke két év múlva $1,21 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{p-11}{100}\right)^2$ forint lenne. Azt a p értéket keressük, amelyre:

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1,21 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{p-11}{100}\right)^2$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1,21 \cdot \left(1 + \frac{p-11}{100}\right)^2$$

Négyzetgyököt vonunk. A kifejezések pozitívak, így nem kell abszolútértéket vennünk:

$$1 + \frac{p}{100} = 1,1 \cdot \left(1 + \frac{p - 11}{100}\right)$$

$$100 + p = 1,1 \cdot (100 + p - 11)$$

$$0,1p = 2,1$$

$$p = 21.$$

Tehát Anna 21%-os kamatra adta kölcsön a pénzét.

28. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

- a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette!

A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a. Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

- b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette!

Emelt szintű érettségi 2018. május 8. (A feladat egy része)

Megoldás:

- a) A 70 figura kétheted részét, 20 darabot, Dóri készített. A maradékot fele-fele arányban Blanka és Csenge, így ők 25-25 figurát készítettek.

Két figurát $\binom{70}{2}$ féleképpen választhatunk ki (az összes eset száma).

Dóri figuráiból kettőt $\binom{20}{2}$ féleképpen, Blanka illetve Csenge figuráiból kettőt $\binom{25}{2}$ féle módon választhatunk. Így a kedvező esetek száma $\binom{20}{2} + 2 \cdot \binom{25}{2}$.

Annak a valószínűsége, hogy a két kiválasztott figurát ugyanaz a lány készítette:

$$\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{\binom{20}{2} + 2 \cdot \binom{25}{2}}{\binom{70}{2}} = \frac{190 + 2 \cdot 300}{2415} = \frac{158}{483} \approx 0,327.$$

- b) Blanka $25 \cdot 0,4 = 10$, Csenge $25 \cdot 0,6 = 15$, Dóri $20 \cdot 0,3 = 6$ karácsonyfát készített, összesen 31 karácsonyfa készült.

Annak a valószínűsége, hogy Blanka édesanyja által megvett karácsonyfát Blanka készítette:

$$\frac{10}{10 + 15 + 6} = \frac{10}{31} \approx 0,323.$$

29. A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékbán helyezte el az A Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)

- a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott?

A Nagy család a B Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

- b) Hány százalékos volt a *B* Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel?
- c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.)

Középszintű érettségi 2008. május 6.

Megoldás:

- a) A felvehető összeg $700\,000 \cdot 1,06^2 = 786\,520$ forint.
- b) Ha a kamatláb az első évben $x\%$, a második évben $(x + 3)\%$ volt, akkor a második év végén felvehető összeg:

$$800\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{x+3}{100}\right) = 907\,200$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{x+3}{100}\right) = 1,134$$

$$\frac{100+x}{100} \cdot \frac{103+x}{100} = 1,134$$

$$(100+x) \cdot (103+x) = 11340$$

$$10300 + 103x + 100x + x^2 = 11340$$

$$x^2 + 203x - 1040 = 0$$

A másodfokú egyenlet két gyöke: $x_1 = 5$ és $x_2 = -208$. A feladat szempontjából csak a pozitív megoldás jöhet számításba.

A *B* bankban az első évben 5%-os volt a kamat.

- c) Ha y forintot kellett volt fizetniük, akkor

$$y \cdot 1,04^2 = 907\,200$$

$$y = \frac{907\,200}{1,04^2} \approx 838\,757.$$

A Nagy családnak $\approx 838\,757$ forintot kellett volna fizetnie két évvel korábban.

30. Egy arany-ezüst ötvözet 75%-a arany. Ez az ötvözet 190%-kal értékesebb, mint a fordított összetételű (25% arany, 75% ezüst) ötvözet.

- a) Az arany egységára hányszorosa az ezüst egységárának?
- b) Hány %-kal kisebb az ezüst egységára az aranyénál?

Érettségi-felvételi feladatok 1997.május 21. de.

Megoldás:

- a) Legyen az arany egységára a Ft/g, az ezüst egységára e Ft/g. Az ötvözet tömege legyen m g. Az első ötvözetben $0,75m$ arany van, aminek az ára $0,75m \cdot a$, az ötvözet ezüsttartalma $0,25m$, ennek ára $0,25m \cdot e$. A teljes ötvözet ára $0,75m \cdot a + 0,25m \cdot e$.

Hasonlóan számolva a második ötvözet ára $0,25m \cdot a + 0,75m \cdot e$. A feladat feltétele szerint:

$$0,75m \cdot a + 0,25m \cdot e = 2,9 \cdot (0,25m \cdot a + 0,75m \cdot e).$$

Egyszerűsítsünk $0,25m$ -mel:

$$3a + e = 2,9 \cdot (a + 3e)$$

$$3a + e = 2,9a + 8,7e$$

$$0,1a = 7,7e$$

$$\frac{a}{e} = 77.$$

Tehát az arany egységára 77-szerese az ezüst egységárának.

- b) Kifejezzük az arany és az ezüst egységárának különbségét az ezüst egységárával:

$$a = 77e$$

$$a - e = 76e$$

Ezt viszonyítjuk az arany egységárához:

$$\frac{a - e}{a} = \frac{76e}{77e} = \frac{76}{77} \approx 0,987 = 98,7\%.$$

Az ezüst egységára 98,7%-kal kisebb az aranyénál.

31. Egy tartályba egy csapon át 600 liter/perc sebességgel 30%-os szörp ömlik. Háromnegyed óra múlva egy másik csapot is megnyitnak, ezen 40 %-os szörp folyik be, 800 liter/perc sebességgel. Mennyi idő múlva lesz a tartályban a szörp 35 %-os?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1984; Kezdők; I. forduló

Megoldás I:

A megadott százalékok térfogatszázalékot jelentenek.

Az első csap megnyitása után t perccel lesz a szörp 35 %-os.

Az első csapon keresztül t perc alatt $600 \cdot t$ liter folyik be, az ebben lévő „tisztá szörp” mennyisége $600 \cdot t \cdot 0,3 = 180 \cdot t$ liter.

A második csap 45 perccel rövidebb ideig működik, ezalatt $800 \cdot (t - 45)$ liter jut a tartályba, amiben $800 \cdot (t - 45) \cdot 0,35 = 320 \cdot (t - 45)$ liter „tisztá szörp” van.

Összesen $600 \cdot t + 800 \cdot (t - 45)$ liter lesz a tartályban, és a benne lévő szörp mennyisége $180 \cdot t + 320 \cdot (t - 45)$ liter. Ez a keverék akkor lesz 35%-os, ha

$$(600 \cdot t + 800 \cdot (t - 45)) \cdot 0,35 = 180 \cdot t + 320 \cdot (t - 45)$$

$$(1400t - 36\,000) \cdot 0,35 = 180t - 14\,400$$

$$490t - 12600 = 180t - 14\,400$$

$$10t = 1\,800$$

$$t = 180$$

180 perc = 3 óra, tehát az első csap megnyitása után 3 órával lesz a tartályban 35%-os szörp.

Ellenőrzés:

Az első csapon keresztül 180 perc alatt $600 \cdot 180 = 108\,000$ liter kerül a tartályba, ennek szörptartalma $108\,000 \cdot 0,3 = 32\,400$ liter.

A második csapon át $180 - 45 = 135$ perc alatt $135 \cdot 800 = 108\,000$ liter folyik a tartályba, amiben $108\,000 \cdot 0,4 = 43\,200$ liter szörp van.

A 216 000 liter folyadékban 75 600 liter szörp van. A tartályban ez alapján $\frac{75\,600}{216\,000} \cdot 100 = 35\%$ -os szörp van.

Megoldás II:

Ha 30%-os és 40 %-os szörpből 35%-os szörp lesz, akkor egyenlő mennyiségben kevertük össze a kétféle szörpöt. 45 perc alatt az első csapon keresztül $45 \cdot 600 = 27\,000$ liter ömlött a tartályba. Ezt kell kiegyenlítenie a második csapnak. 1 perc alatt 200 literrel több áramlik a második csapon keresztül a tartályba, mint az elsőn, így $27\,000 : 200 = 135$ perc alatt „hozza be a lemaradását” a második csap. Tehát az első csap megnyitása után $45 + 135 = 180$ perc = 3 óra alatt lesz a tartályban 35%-os szörp.

32. Egy edényben egy liter bor, egy másikban egy liter víz van. Az első edényből átöntünk egy decilitert a másodikba, összekeverjük, majd a keverékből egy decilitert visszaöntünk az első edénybe.

Számítsuk ki az első edényben lévő bor mennyiségének határértékét, ha a fenti eljárást végtelen sokszor ismétljük! (Az egyes átöntések során tökéletes keveredést tételezünk fel, és az eljárás során nincs folyadékvesztés.)

OKTV 1978/1979, általános tantervű osztályok; II. forduló

Megoldás:

Az első edényben az n -edik lépés után lévő bor mennyisége legyen b_n , ezt $1 - b_n$ liter víz egészíti ki 1 literre. A második edényben ekkor $1 - b_n$ liter bor és b_n liter víz van, hiszen a bor és a víz mennyisége összesen mindig 1 liter.

Kezdetben $b_0 = 1$.

$n+1$. lépés:

Az első edényből minden alkotórész $\frac{1}{10}$ -ét átöntjük, így az első edényben $\frac{9}{10}b_n$ bor marad. A második edényben $1 - \frac{9}{10}b_n$ bor (hiszen összesen 1 liter van) és $1,1 - \left(1 - \frac{9}{10}b_n\right) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}b_n$ liter víz van, hiszen most a második edényben 1,1 liter folyadék van. Ennek az $\frac{1}{11}$ -ed részét öntjük vissza. Így:

$$b_{n+1} = \frac{9}{10}b_n + \frac{1}{11} \cdot \left(1 - \frac{9}{10}b_n\right) = \frac{1}{11} + \frac{9}{10}b_n \left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{9}{10}b_n \frac{10}{11}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{11} + \frac{9}{11}b_n.$$

Ezt a rekurzív képletet alkalmazva, felhasználva, hogy $b_0 = 1$:

$$b_1 = \frac{1}{11} + \frac{9}{11}b_0 = \frac{1}{11} + \frac{9}{11},$$

$$b_2 = \frac{1}{11} + \frac{9}{11}b_1 = \frac{1}{11} + \frac{9}{11} \cdot \left(\frac{1}{11} + \frac{9}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \cdot \frac{9}{11} + \left(\frac{9}{11}\right)^2,$$

$$b_3 = \frac{1}{11} + \frac{9}{11}b_2 = \frac{1}{11} + \frac{9}{11} \cdot \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11} \cdot \frac{9}{11} + \left(\frac{9}{11}\right)^2\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \cdot \frac{9}{11} + \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^3,$$

Látható, hogy:

$$b_n = \frac{1}{11} \left(1 + \frac{9}{11} + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{11}\right)^{n-1}\right) + \left(\frac{9}{11}\right)^n.$$

(Aki nem hiszi, lássa be teljes indukcióval!)

Használjuk a mértani sor összegképletét:

$$b_n = \frac{1}{11} \cdot 1 \cdot \frac{\left(\frac{9}{11}\right)^n - 1}{\frac{9}{11} - 1} + \left(\frac{9}{11}\right)^n = \frac{1}{11} \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{11}\right)^n}{\frac{2}{11}} + \left(\frac{9}{11}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{9}{11}\right)^n}{2} + \left(\frac{9}{11}\right)^n$$

$$b_n = \frac{1 + \left(\frac{9}{11}\right)^n}{2}.$$

$\left|\frac{9}{11}\right| < 1$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{11}\right)^n = 0$, tehát a keresett valószínűség:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{9}{11}\right)^n}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

33. Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják).

a) Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én?
(A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.)

b) Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.)

Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

Emelt szintű érettségi 2013. május 7.

Megoldás:

- a) A március 1-én felvett hitel $365 - 31 - 28 = 306$ napig kamatozik, az október 1-én felvett pedig $31+30+31=92$ napig.

A napi kamatláb $\frac{8}{365}\%$, így a két hitel után a kamat:

$$40\,000 \cdot \frac{8}{365} \cdot \frac{1}{100} \cdot 306 + 40\,000 \cdot \frac{8}{365} \cdot \frac{1}{100} \cdot 92 \approx 3489$$

Tehát a bank évvégén 3489 forintot tőkésít.

- b) Legyen a törlesztőrészlet évente x forint, az n -edik év végén a tartozás a_n .

Az 1. évben az 1 000 000 forint kamatozott és évvégén Ádám befizette a törlesztőrészletet:

$$a_1 = 1\,000\,000 \cdot 1,08 - x$$

A második évben ez az összeg kamatozott:

$$a_2 = (1\,000\,000 \cdot 1,08 - x) \cdot 1,08 - x = 1\,000\,000 \cdot 1,08^2 - 1,08 \cdot x - x$$

Ugyanígy határozhatjuk meg az n -edik év végi állapotot:

$$\begin{aligned} a_n &= 1\,000\,000 \cdot 1,08^n - 1,08^{n-1}x - \dots - 1,08^2 \cdot x - 1,08 \cdot x - x = \\ &= 1\,000\,000 \cdot 1,08^n - (1,08^{n-1}x + \dots + 1,08^2 \cdot x + 1,08 \cdot x + x) \end{aligned}$$

A mértani sorozat összegképlete alapján:

$$a_n = 1\,000\,000 \cdot 1,08^n - x \cdot \frac{1,08^n - 1}{1,08 - 1}.$$

Azt az x értéket keressük, amire $a_{10} = 0$:

$$\begin{aligned} 1\,000\,000 \cdot 1,08^{10} &= x \cdot \frac{1,08^{10} - 1}{0,08} \\ x &= \frac{1\,000\,000 \cdot 1,08^{10} \cdot 0,08}{1,08^{10} - 1} \approx 149\,029 \approx 149\,000. \end{aligned}$$

Tehát Ádám éves törlesztőrészlete ezresre kerekítve 149 000 forint.

34. Egy erdő faállománya az év elején $32\,000\,m^3$, ami évi 2 %-kal nő. Mennyit vágunk ki belőle évente az év végén, minden évben ugyanannyit, ha azt akarjuk, hogy a 30. év végén $40\,000\,m^3$ legyen a faállomány?

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok 1999. június 14. du.

Megoldás:

Ha $x\,m^3$ -t vágunk ki, akkor az első év végén a faállomány:

$$a_1 = 32\,000 \cdot 1,02 - x.$$

A második évben ez nő 2%-kal, tehát a második év végén:

$$a_2 = (32\,000 \cdot 1,02 - x) \cdot 1,02 - x = 32\,000 \cdot 1,02^2 - 1,02 \cdot x - x.$$

Ugyanígy gondolkozva az n -edik év végén a faállomány:

$$a_n = 32\,000 \cdot 1,02^n - 1,02^{n-1}x - \dots - 1,02^2 \cdot x - 1,02 \cdot x - x =$$

$$= 32\,000 \cdot 1,02^n - (1,02^{n-1}x + \dots + 1,02^2 \cdot x + 1,02 \cdot x + x).$$

Alkalmazzuk a mértani sorozat összegképletét:

$$a_n = 32\,000 \cdot 1,02^n - x \cdot \frac{1,02^n - 1}{1,02 - 1} = 32\,000 \cdot 1,02^n - x \cdot \frac{1,02^n - 1}{0,02}$$

Azt az x -et keressük, amelyre $a_{30} = 40\,000$:

$$32\,000 \cdot 1,02^{30} - x \cdot \frac{1,02^{30} - 1}{0,02} = 40\,000$$

$$57\,963,57 - 40,57x = 40\,000$$

$$x \approx 442,8.$$

Tehát $442,8\,m^3$ fát vághatunk ki évente.