

TOVÁBBKÉPZÉS ANYAGA

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN

Időpont: 2018. október 19. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Matematika szakkör a 10. évfolyamon

Ez az anyag a 10. évfolyamon tanított négy témakörhöz tartalmaz egy-egy szakköri foglalkozáson feldolgozható feladatsort. Az itt látható feladatsorok példát szeretnének mutatni arra, hogyan válogassunk feladatokat. Az adott szakkör célja lehet az órán tanult ismeretek mélyítése, az adott témakörbe tartozó nehezebb ismeretek megismertetése, versenyre való felkészülés, de lehet válogatni érdekes logikai feladatokat is annak illusztrálására, hogy a matematika tud szórakoztatni is.

A feladatok először megoldással szerepelnek. A dokumentum végén pedig megoldás nélkül megtalálhatóak a feladatsorok, így nyomtathatók egy-egy szakkörre.

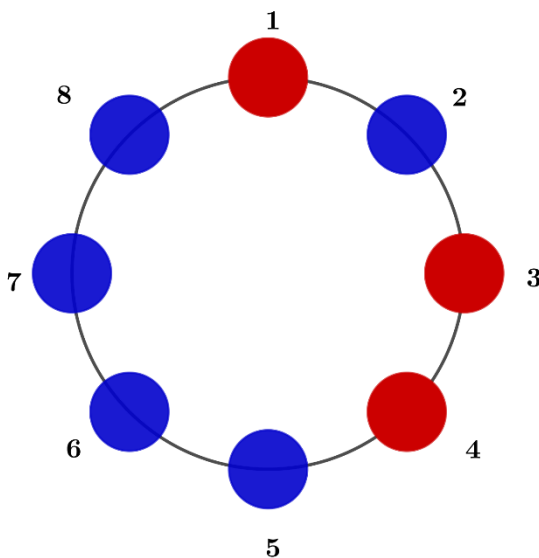
I. Logikai feladatok – gondolkozzunk!

1. Alíznek 8 kulcsa van felfűzve egy karikára. A kulcsok ránézésre megkülönböztethetetlenek és a két oldaluk is egyforma. Alíz, hogy meg tudja a kulcsokat különböztetni, mindegyikre egy-egy színes sapkát húz. Hány színre van szüksége?

KöMal 2007. szeptember; B.4012.

Megoldás:

Két szín elegendő. Számozzuk meg a kulcsokat 1-től 8-ig és húzzunk piros sapkát az első, a harmadik és a negyedik kulcsra, a többire pedig kéket.



Ekkor Alíz tudja, hogy a különálló piros kulcs az 1-es és a két piros sapka közötti egyedülálló kék a 2-es. Így bármelyik kulcsot azonosítani tudja.

2. Egy hatszemélyes dzsipben elöl, hátul 3-3 hely van. Hányféle különböző módon tud 6 különböző magasságú, vezetni tudó ember beülni a dzsipbe, úgy, hogy az első sorban mindenki alacsonyabb legyen a hátsó sorban mögötte ülőnél?

KöMal 2005. március; K.40.

Megoldás I:

A 6 emberből kiválasztunk 2-t. Ezt $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ féle módon tehetjük meg. Ők üljenek a bal oldalra, előre a kisebb, hátra a nagyobb.

A maradék 4 emberből 2-t $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ féle módon választhatunk ki. Őket ültessük középre, előre a kisebbet, hátra a nagyobbat.

A maradék két embert ültessük jobbra egymás mögé nagyság szerint megfelelő sorrendben.

Így $15 \cdot 6 = 90$ lehetőség van.

Megoldás II:

A legnagyobb ember válasszon magának párt. Ezt 5-féle módon teheti meg. Ők jobbra, középre vagy balra ülhetnek be a dzsipbe egymás mögé, előre a kisebb. Ez $5 \cdot 3 = 15$ lehetőség.

A maradék 4 ember közül a legnagyobb 3 másik közül választhat magának párt, és két helyre ülhetnek le. Ez $3 \cdot 2 = 6$ féle módon valósítható meg.

A maradék két ember már csak egyféle módon ülhet be a dzsipbe.

Így $15 \cdot 6 = 90$ lehetőség van.

3. Anna és Balázs szókitalálósat játszik. Anna gondol egy négybetűs értelmes magyar szóra, amit Balázs próbál kitalálni. Ha Balázs tippel egy négybetűs szót, akkor Anna elárulja, hogy az ő szavából hány betű szerepel benne, és közülük hány van jó, illetve rossz helyen. Mi lehetett Anna szava?

Balázs tippjei	Jó betűk száma jó helyen	Jó betűk száma rossz helyen
RÓKA	1	0
OKOS	0	0
IKRA	2	0
RITA	1	1
DANÓ	0	3

KöMal 2015. október; K.474.

Megoldás:

Az IKRA szóban két jó betű van jó helyen. Ez nem lehet a K, mert akkor az OKOS szóban is lenne jó betű. Az R sem lehet a jó betű, mert akkor a RÓKA szóban lenne rossz helyen lévő jó betű. Így az I és az A betű lehet jó helyen az IKRA szóban. Tehát a RÓKA szóban az A betű fordul elő, az R, Ó, K nem lehet a keresett szóban. Ebből arra következtetünk, hogy a DANÓ szóból a D, A, N betűk a jók, de nem a megfelelő helyen szerepelnek. Ezekből a betűkből az IDNA és INDA szavak rakhatók össze, de az IDNA nem értelmes, tehát Anna szava az INDA lehetett.

4. Egy király esélyt ad egy elítéltnak a megmenekülésre. Ehhez az elítéltnak bekötött szemmel három urnából kell egy-egy golyót húznia, majd a három kihúzott golyót egy negyedik urnába helyezik az örök. A negyedik urnából ismét kell egy golyót húznia a bekötött szemű elítéltnak, aki megmenekül, ha ez a golyó fehér. Mekkora a megmenekülés valószínűsége, ha az urnákban a különböző színű golyók száma a következő:

	fehér	piros	fekete
1.urna	2	5	3
2.urna	5	2	3
3.urna	3	3	4

KöMal 2014. november; C.1256.

Megoldás:

Összesen 30 golyó van, mindhárom urnában 10. Mindegyik golyónak egyforma esélye van arra, hogy a végső kihúzott golyó legyen, ez az esély $\frac{1}{30}$. 10 fehér golyó van, így $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ annak a valószínűsége, hogy megmenekül az elítélt.

5. Legfeljebb hány bástyát lehet egy 8×8 -as sakktáblára feltenni úgy, hogy mindegyiket legfeljebb 1 másik üsse?

KöMal 1981. február; F.2296.

Megoldás:

Először próbáljunk egy jó elrendezést találni:

X	X						
		X					
		X					
			X	X			
					X		
					X		
						X	
							X

Ez az elrendezés 10 bástyát tartalmaz. Érezzük, hogy ez elég jól teljesíti a feltételt, lehet, hogy ennél többet nem tudunk elhelyezni. Bebizonyítjuk.

A sakktáblán 8 oszlop és 8 sor van – ezeket a magyarázatban vonalaknak (16 db) fogjuk nevezni. Ha egy vonalban van 2 bástya, akkor ez 3 vonalat foglal le, ezekbe a sorokba, illetve oszlopokba nem tehetünk további bástyát. Ha egy bástyát nem üt másik, akkor ez a bástya 2 vonalat foglal le az alábbi ábra szerint:

X	X						
		X					
		X					
			X	X			
					X		
					X		
						X	
							X

Ha x darab egymást ütő páros és y darab magányos bástya van, akkor $3x + 2y$ vonalat foglalnak le:

$$3x + 2y \leq 16.$$

$2x + y$ darab bástyánk van, ezt becsüljük:

$$2x + y = \frac{2}{3}(3x + 2y) - \frac{1}{3}y < \frac{2}{3} \cdot 16 < 11.$$

Ez azt jelenti, hogy legfeljebb 10 bástya helyezhető el az adott feltételekkel a sakktáblán.

6. Hány lovat helyezhetünk el a 8×8 -as sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást? Mi a helyzet az 5×5 -ös sakktáblán?

KöMaL 1981.január; Gy.1951.

Megoldás:

A ló fehér mezőről feketére, feketéről pedig fehérre ugrik. Az azonos színű mezőkön álló lovak tehát nem üthetik egymást. 32 fehér és 32 fekete mező van, így 32 lovat el tudunk helyezni a sakktáblán a kívánt módon. Vajon van-e ennél jobb elhelyezés?

Nézzük egy kisebb részletét a táblának, vegyünk egy 2×4 -es részletet:

1	2	3	4
3	4	1	2

A mezőket úgy számoztuk meg, hogy az azonos számú mezőkön lévő lovak ütik egymást. Így erre a részletre legfeljebb négy ló tehető le úgy, hogy ne üsse egymást. Ilyen részletekből a 8×8 -as sakktábla kirakható, tehát 32-nél több ló nem helyezhető el a táblán az adott feltételek mellett.

Alkalmazzuk ezeket a gondolatokat az 5×5 -ös táblán. Ekkor a tábla úgy színezhető, hogy 12 fehér és 13 fekete mező legyen rajta, tehát 13 ló elhelyezhető úgy, hogy ne üsse egymást.

Az 5×5 -ös tábla nem rakható ki a fenti típusú 2×4 -es részletekkel, így ezzel a gondolatmenettel nem tudjuk megindokolni, hogy több ló elhelyezhető-e a táblán. Számozzuk meg a tábla mezőit az alábbi módon:

1	20	9	14	3
10	15	2	19	24
21	8	25	4	13
16	11	6	23	18
7	22	17	12	5

A számozást 1-től 25-ig követve lóugrásban be tudjuk járni a táblát. Ezért, ha 13-nál több lovat helyezünk el, akkor lesz két olyan ló, amely szomszédos számozású mezőkön lesz, így ezek ütik egymást. Ezzel beláttuk, hogy legfeljebb 13 ló helyezhető el a táblán a feltételeknek megfelelően.

7. Egy csapatversenyen hat fős csapatokban versenyeznek a diákok. A csapatok összeállítása tetszőleges, de két feltételnek eleget kell tenni:

1. minden csapatban legalább két lánynak, és legalább két fiúnak kell lennie,
2. minden csapatban legalább két hetedikesnek és legalább két nyolcadikosnak kell lennie.

Egy három hetedikes lányból, négy nyolcadikos fiúból és két nyolcadikos lányból álló baráti társaság hányféle, a feltételeknek megfelelő csapatot nevezhet?

KöMaL 2011. február; K.283.

Megoldás:

Csak nyolcadikos fiúk vannak, ezért közülük legalább kettőt választanunk kell. Két hetediket is választanunk kell, őket csak a hetedikes lányok közül választhatjuk. Ezzel a feltételek teljesülnek, még két embert tetszőlegesen választhatunk a maradék hetedikes lányból, két nyolcadikos fiúból és két nyolcadikos lányból. Az alábbi táblázat mutatja, hogy milyen összetétele lehet a csapatnak:

	hetedikes lány	nyolcadikos fiú	nyolcadikos lány
A	2	2	2
B	2	3	1
C	3	2	1
D	3	3	0

A eset: A három hetedikes lányból kettőt 3 féleképpen, a négy fiúból kettőt $\binom{4}{2} = 6$ féleképpen választhatók, és ehhez hozzávesszük a két nyolcadikos lányt. Ezt az összeállítást $3 \cdot 6 = 18$ féle módon tehetjük meg.

B eset: Két hetedikes lányt 3 féleképpen, három nyolcadikos fiút 4 féleképpen, egy nyolcadikos lányt 2 féleképpen választhatók. Ez $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ lehetőség.

Hasonlóan:

C eset: $1 \cdot 6 \cdot 2 = 12$ lehetőség.

D eset: $1 \cdot 4 = 4$ lehetőség.

Összesen $18 + 24 + 12 + 4 = 58$ féle módon állítható össze a kívánt összetételben a csapat.

II. Négyzetgyökök

1. Határozzuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát!

$$\sqrt{x^2 - 9} \cdot \sqrt{\frac{3x + 6}{x - 7}} \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

Megoldás:

A valós számok körében csak nemnegatív számok esetében értelmezzük a négyzetgyököket.

- a) Az első tényező esetében

$$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \text{ vagy } x \leq -3.$$

- b) A következő tényezőnél azt is figyelembe vesszük, hogy a nevező nem lehet 0:

$$x \neq 7 \text{ és } \frac{3x + 6}{x - 7} \geq 0$$

Egy tört értéke akkor 0, ha a számlálója 0 és akkor pozitív, ha a számláló és a nevező előjele azonos.

$$\begin{aligned} 3x + 6 &\geq 0 \\ x - 7 &> 0 \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} 3x + 6 &\leq 0 \\ x - 7 &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\geq -2 \\ x &> 7 \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} x &\leq -2 \\ x &< 7 \end{aligned}$$

Tehát

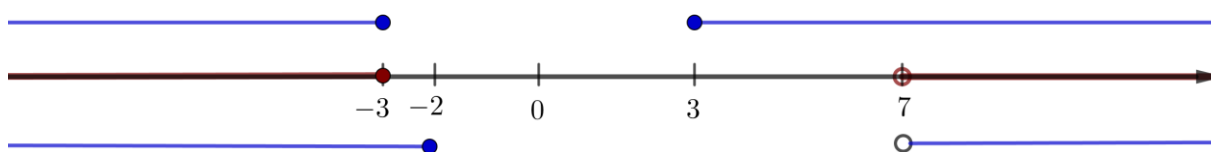
$$x > 7$$

vagy

$$x \leq -2$$

- c) A harmadik tényező esetében a négyzetgyök alatt $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ áll. Egy szám négyzete sohasem lehet negatív, így ez a kifejezés mindig értelmezhető.

A fenti feltételek egyszerre teljesülnek, a megoldást a számegyenesről olvassuk le:



A kifejezés értelmezési tartománya: $x \leq -3$ vagy $x > 7$, azaz $]-\infty; -3] \cup]7; +\infty[$.

2. Számítsuk ki az alábbi kifejezés pontos értékét!

$$\left(\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}} \right)^2 - \sqrt{61 - 4\sqrt{15}}$$

Megoldás:

Számítsuk ki külön a két tagot:

$$\left(\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}} \right)^2 = \sqrt{15} + \sqrt{6} + \sqrt{15} - \sqrt{6} - 2\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{15} - 2\sqrt{(\sqrt{15} + \sqrt{6})(\sqrt{15} - \sqrt{6})} = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{15 - 6} = 2\sqrt{15} - 6. \\
\sqrt{61 - 4\sqrt{15}} &= \sqrt{61 - 2 \cdot 2\sqrt{15}} = \sqrt{60 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{15}} = \sqrt{(2\sqrt{15} - 1)^2} = \\
&= |2\sqrt{15} - 1| = 2\sqrt{15} - 1.
\end{aligned}$$

Most számítsuk ki az eredeti kifejezés értékét:

$$2\sqrt{15} - 6 - (2\sqrt{15} - 1) = -5.$$

3. Számítsuk ki a következő kifejezés értékét, ha $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1966/67. I. forduló, Haladók

Megoldás:

Helyettesítsük be először a négyzetgyökös kifejezésbe x értékét:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x} &= \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}} = \left| \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\
\sqrt{1+x} &= \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}} = \left| \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}+1}{2},
\end{aligned}$$

Így az eredeti kifejezés értéke:

$$\begin{aligned}
&\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}+1}{2}} + \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-\sqrt{3}+1}{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \\
&= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3+6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{9-3} = 1
\end{aligned}$$

4. Hozzuk egyszerűbb alakra!

$$\left(\frac{6}{\sqrt{7}-1} + \frac{12}{\sqrt{7}-2} - \frac{18}{4+\sqrt{7}} \right) \cdot (\sqrt{343}-1)$$

Megoldás:

Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{\sqrt{7}-1} &= \frac{6(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)} = \frac{6(\sqrt{7}+1)}{7-1} = \sqrt{7}+1, \\
\frac{12}{\sqrt{7}-2} &= \frac{12(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \frac{12(\sqrt{7}+2)}{7-4} = 4(\sqrt{7}+2) = 4\sqrt{7}+8,
\end{aligned}$$

$$\frac{18}{4+\sqrt{7}} = \frac{18(4-\sqrt{7})}{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})} = \frac{18(4-\sqrt{7})}{16-7} = 2(4-\sqrt{7}) = 8-2\sqrt{7}.$$

Így az első tényező:

$$\sqrt{7} + 1 + 4\sqrt{7} + 8 - 8 + 2\sqrt{7} = 7\sqrt{7} + 1.$$

Az eredeti kifejezés értéke:

$$(7\sqrt{7} + 1)(\sqrt{343} - 1) = (7\sqrt{7} + 1)(\sqrt{343} - 1) = (\sqrt{343} + 1)(\sqrt{343} - 1) = 343 - 1 = 342.$$

5. Számítsuk ki a kifejezések pontos értékét!

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

b) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{22}+\sqrt{23}} + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$

c) $\frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+3}$

d) $\frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}+\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{21}} + \frac{4}{\sqrt{21}+\sqrt{25}}$

Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív n egész szám esetén:

e) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}} < n$

Igazoljuk, hogy ha n olyan pozitív egész szám, amely 4-gyel osztva 1-et ad maradékkal, akkor:

f) $\frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{4}{\sqrt{n-4}+\sqrt{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}+\sqrt{n+4}} > \frac{\sqrt{n}}{2}$

Megoldás:

a) A nevezőt gyöktelenítjük, így közös nevezőjű törtet kapunk:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \\ & = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} = \\ & = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} = \\ & \quad \sqrt{4}-1 = 1. \end{aligned}$$

b) Az előző módszert alkalmazva:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{22}+\sqrt{23}} + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}} = \\ & = \sqrt{25}-1 = 4. \end{aligned}$$

c) Most is működik a módszer:

$$\frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+3} = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} + \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-1)}{5-1} + \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5} = \sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}=2$$

d) A c) feladat gondolatmenete szerint:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}+\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{21}} + \frac{4}{\sqrt{21}+\sqrt{25}} = \\ & \sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}+\dots+\sqrt{25}-\sqrt{21}=\sqrt{25}-1=4 \end{aligned}$$

e) Az a) és b) feladatok szerint:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}} = \\ & = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \dots + \frac{\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2-1}}{(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2-1})} = \\ & = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \dots + \frac{\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2-1}}{n^2-(n^2-1)} = \\ & \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2-1}=\sqrt{n^2}-1=n-1 < n \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség valóban teljesül.

f) A c) és d) feladat szerint:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{4}{\sqrt{n-4}+\sqrt{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}+\sqrt{n+4}} = \\ & = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{5-1} + \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5} + \dots + \frac{4(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})}{n+4-n} = \\ & = \sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}+\dots+\sqrt{n+4}-\sqrt{n}=\sqrt{n+4}-1. \end{aligned}$$

Az kell belátnunk, hogy

$$\sqrt{n+4}-1 > \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Ez pedig teljesül, mert

$$\sqrt{n+4}-1 = \frac{\sqrt{n+4}}{2} + \frac{\sqrt{n+4}}{2} - 1 > \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 - 1 = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c és d számok pozitívak és

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 2 - \sqrt{3},$$

akkor

$$ad + bc + 2\sqrt{abcd} - \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = 0.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1971/72. I. forduló, Haladók

Megoldás:

Ha a kifejezésből bd -t kiemeljük, akkor a kifejezésben megjelennek a megadott hányadosok:

$$\begin{aligned}
& bd \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}} - \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{b^2 \cdot d^2}} \right) = \\
& = bd \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)\left(\frac{c^2}{d^2} + 1\right)} \right) = \\
& bd \left(2 - \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} - \sqrt{\left((2 - \sqrt{3})^2 + 1\right)\left((2 - \sqrt{3})^2 + 1\right)} \right) \quad (*)
\end{aligned}$$

Átalakítjuk a zárójelben lévő kifejezést:

$$4 - 2\sqrt{3} + 2 \cdot (2 - \sqrt{3}) - \left((2 - \sqrt{3})^2 + 1\right) = 4 - 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - (4 - 4\sqrt{3} + 4) = 0.$$

A (*) kifejezés egyik tényezője 0, így a szorzat is nulla. Ezzel beláttuk az állítást.

Megjegyzés:

Ha a feladat feltételét $a = (2 - \sqrt{3})b$, $c = (2 - \sqrt{3})d$ formában írjuk fel és behelyettesítjük, akkor ugyanilyen módon kaphatjuk meg az állítást.

7. Milyen x természetes szám esetén lesz az alábbi kifejezések értéke természetes szám?

a) $\sqrt{x^2 + 22}$

b) $\sqrt{4x^2 - 11}$

Megoldás:

a) Legyen $\sqrt{x^2 + 22} = n$, ahol n természetes szám. Ekkor

$$x^2 + 22 = n^2$$

$$n^2 - x^2 = (n + x)(n - x) = 22.$$

$n + x$ biztos, hogy pozitív, ezért a 22-t két pozitív egész szám szorzatára bontjuk, ahol $n + x$ a nagyobb tényező. Két lehetőségünk van:

$$n + x = 22$$

$$n - x = 1$$

vagy

$$n + x = 11$$

$$n - x = 2$$

Ezeknek az egyenletrendszereknek nincs egész megoldása, ezért az a) esetben nincs megfelelő x .

b) Legyen $\sqrt{4x^2 - 11} = n$, ahol n természetes szám. Keressük x -et, amelyre teljesül:

$$4x^2 - 11 = n^2$$

$$4x^2 - n^2 = (2x + n)(2x - n) = 11$$

Most a 11-et bontjuk fel két pozitív egész szám szorzatára:

$$2x + n = 11$$

$$2x - n = 1$$

A két egyenletet összeadva: $4x = 12 \Rightarrow x = 3$, ekkor $n = 5$. Valóban $\sqrt{4 \cdot 3^2 - 11} = 5$.

Tehát $x = 3$ esetén lesz természetes szám a négyzetgyökös kifejezés.

8. Adottak az $n = \overline{abcabc}$ és $m = \overline{d00d}$ alakú hatjegyű, illetve négyjegyű természetes számok, ahol a, b, c és d nem feltétlenül különböző számjegyeket jelöl.

- a) Mutassa meg, hogy $\sqrt{n}$ nem természetes szám!
- b) Határozza meg azokat az (n, m) számpárokat, ahol $n = \overline{abcabc}$ és $m = \overline{d00d}$ alakú természetes számok, továbbá igaz, hogy $\sqrt{n+m} \in \mathbb{N}$!

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2011/2012. I. forduló, Haladók, II. kategória

Megoldás:

- a) $n = \overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$. $\sqrt{n}$ csak akkor lehet természetes szám, ha n négyzetszám. Minden négyzetszám prímtényezősz felbontásában a prímszámok páros kitevővel szerepelnek, ezért $\overline{abc}$ osztható 7-tel, 11-gyel, 13-mal, tehát 1001-gyel is. De $\overline{abc}$ háromjegyű szám, így nem osztható 1001-gyel, tehát $\sqrt{n}$ nem lehet természetes szám.

- b) $\sqrt{n+m} = \sqrt{1001(\overline{abc} + d)}$. Az a) rész gondolatmenete szerint $1001(\overline{abc} + d) = 1001^2 \cdot k^2$, ahol k természetes szám. Tehát $\overline{abc} + d = 1001 \cdot k^2$. $\overline{abc} \leq 999$ és $d \leq 9$, ezért $\overline{abc} + d \leq 1008$. Tehát csak $k = 1$ lehetséges, $\overline{abc} + d = 1001$. Az alábbi táblázat mutatja a lehetséges megoldásokat:

$\overline{abc}$	d	n	m
999	2	999999	2002
998	3	998998	3003
997	4	997997	4004
996	5	996996	5005
995	6	995995	6006
994	7	994994	7007
993	8	993993	8008
992	9	992992	9009

9. Határozzuk meg azokat a racionális (x, y) számpárokat, amelyekre

$$x(\sqrt{3} - 4) + 2y(\sqrt{12} + 5) = 6$$

Megoldás:

$$x(\sqrt{3} - 4) + 2y(2\sqrt{3} + 5) = \sqrt{3}(x + 4y) + (10y - 4x) = 6$$

Tudjuk, hogy $\sqrt{3}$ irracionális szám. Ezért az előbbi egyenletben $x + 4y = 0$. Ha ez nem így lenne, akkor felírhatnánk, hogy

$$\sqrt{3} = \frac{6 - 10y + 4x}{x + 4y},$$

és ebből az következne, hogy $\sqrt{3}$ racionális szám. Ekkor $10y - 4x = 6$ is teljesül.

A fenti feltételekből:

$$x = -4y$$

$$10y - 4 \cdot (-4y) = 6$$

$$y = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$$

$$x = -\frac{12}{13}.$$

III. Másodfokú függvények, egyenletek, egyenletrendszerek

1. Határozzuk meg azon a és b valós számokat, amelyekre igaz, hogy a és b is gyöke az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2015/2016. I. forduló, Haladók, I. kategória

Megoldás:

Az egyenletnek gyökei a és b , helyettesítsük be ezeket az értékeket:

$$a^2 + a^2 + b = 0$$

$$b^2 + ab + b = 0$$

Az első egyenletből kifejezzük b -t és behelyettesítjük a másodikba:

$$b = -2a^2$$

$$4a^4 - 2a^3 - 2a^2 = 2a^2(2a^2 - a - 1) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha az egyik tényezője nulla, ezért:

$$a = 0 \quad \text{vagy} \quad 2a^2 - a - 1 = 0$$

A másodfokú egyenlet gyökei: $a = 1$; $a = -\frac{1}{2}$.

Ha $a = 0$, akkor $b = 0$. Az $x^2 = 0$ egyenletnek a 0 valóban megoldása.

Ha $a = 1$, akkor $b = -2$. Az $x^2 + x - 2 = 0$ egyenletnek az 1 és a -2 megoldása.

Ha $a = -\frac{1}{2}$, akkor $b = -\frac{1}{2}$. Az $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ egyenletnek a $-\frac{1}{2}$ megoldása.

Tehát három megoldásunk van:

$$a = 0 \quad \text{és} \quad b = 0$$

$$a = 1 \quad \text{és} \quad b = -2$$

$$a = -\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad b = -\frac{1}{2}.$$

2. Mi a legkisebb értéke a következő kifejezésnek?

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1970/1971. I. forduló, Haladók

Megoldás:

Szorozzuk össze az első és utolsó illetve a két középső tényezőt:

$$f(x) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6).$$

Alkalmazzuk az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ azonosságot:

$$f(x) = (x^2 + 5x)^2 - 36.$$

Egy szám négyzete sohasem lehet negatív, így:

$$f(x) = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq 0 - 36 = -36.$$

A legkisebb érték a -36 , amit akkor vesz fel a függvény, amikor

$$x^2 + 5x = x(x + 5) = 0.$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Tehát a függvény a minimumát $x = 0$ és $x = -5$ értékekre veszi fel, a minimum értéke -36 .

3. Melyik összefüggés áll fenn az $mx^2 - 2x - m + 2 = 0$ egyenlet gyökeinek S összege és P szorzata között, ha m nullától különböző valós szám?

(A) $S = P - 1$ (B) $S = P$ (C) $S = P + 1$ (D) $S = 2P$ (E) $P = 2S$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007, 10. osztály megyei forduló

Megoldás:

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján

$$S = \frac{2}{m}; \quad P = \frac{-m + 2}{m} = \frac{2}{m} - \frac{m}{m} = \frac{2}{m} - 1.$$

Tehát $S = P + 1$, így a (C) válasz a helyes.

4. Az m paraméter függvényében adjuk meg az

$$mx + 4 = |x^2 - 10x + 21|$$

egyenlet megoldásainak számát.

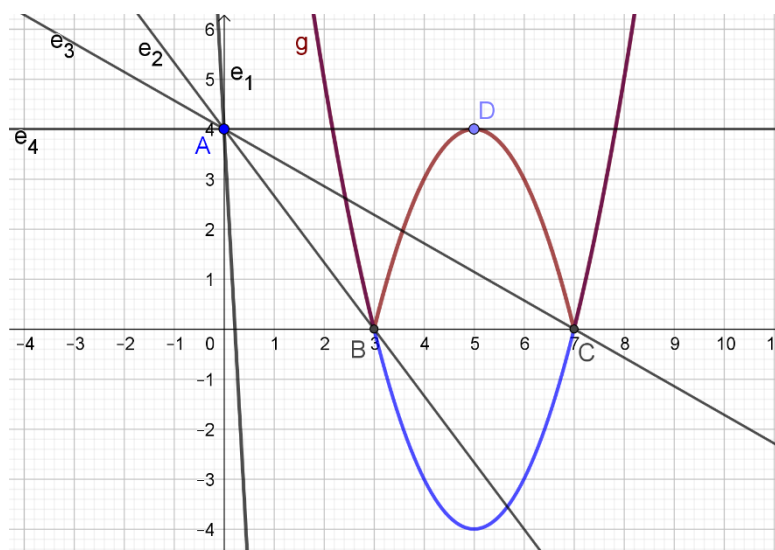
KöMaL 2014. november; B.4665.

Megoldás:

A feladatot oldjuk meg grafikusan.

$$f(x) = x^2 - 10x + 21 = x^2 - 10x + 25 - 4 = (x - 5)^2 - 4.$$

Ezt a függvényt ábrázoljuk, és vesszük az abszolút értékét. Az ábrán ezt $g(x)$ jelöli:



Az abszolút érték az $y = x^2 - 10x + 21$ és $y = -x^2 + 10x - 21$ egyenletű parabolák megfelelő darabjaiból áll.

Az $e(x) = mx + 4$ függvény grafikonja egy egyenes, amely áthalad az $A(0; 4)$ ponton és az m a meredeksége. Forgassuk az egyenest a $(0; 4)$ pont körül és figyeljük a megoldások számát.

Meghatározzuk azokat az egyeneseket, amelyek áthaladnak a $(0; 4)$ ponton és érintik az $f(x)$ függvényt. Ekkor a parabolának és az egyenesnek egy pontja van, az $x^2 - 10x + 21 = mx + 4$ egyenletnek egy megoldása. Ez akkor teljesül, ha az $x^2 - (10 + m)x + 17 = 0$ egyenletnek a diszkriminánsa 0:

$$D = (10 + m)^2 - 68 = 0$$

$$m = -10 \pm \sqrt{68}$$

A grafikonról látható, hogy a $g(x)$ függvény grafikonját csak az $m_1 = -10 - \sqrt{68}$ meredekségű egyenes fogja érinteni (e_1). (A másik egyenes az x -tengely alatti részt érinti.)

Hasonló módon vizsgálva a $-f(x)$ függvény esetében keressük azokat az m értékeket, amelyekre a $-x^2 + 10x - 21 = mx + 4$ egyenletnek egy megoldás lesz.

$$x^2 + (m - 10)x + 25 = 0$$

$$D = (m - 10)^2 - 100 = 0$$

$$m = 0 \text{ vagy } m = 20.$$

Az ábráról látható, hogy csak az $m_4 = 0$ meredekségű egyenes érinti a $g(x)$ függvény grafikonját is (e_4).

A közös pontok szempontjából még szerepe van az A és B pontokon átmenő e_2 egyenesnek, amelynek a meredeksége $m_2 = -\frac{4}{3}$ és az A és C pontokon átmenő e_3 egyenesnek, amelynek a meredeksége $m_3 = -\frac{4}{3}$.

Most már számba vehetjük az egyenlet megoldásainak a számát:

Ha $m < -10 - \sqrt{68}$, akkor 2 megoldás van, ha $m = -10 - \sqrt{68}$, akkor 1 megoldást kapunk.

Ha $-10 - \sqrt{68} < m < -\frac{4}{3}$, akkor nincs megoldás, ha $m = -\frac{4}{3}$, akkor 1 megoldás van.

Ha $-\frac{4}{3} < m < -\frac{4}{7}$, akkor 2 megoldás, ha $m = -\frac{4}{7}$, akkor 3 megoldás, ha $-\frac{4}{7} < m < 0$, akkor 4 megoldás, ha $m = 0$, akkor 3 megoldás, ha $m > 0$, akkor 2 megoldás adódik.

5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{y} = 2 \\ 2\sqrt{x} + y = 2 \end{cases}$$

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2017/2018. I. forduló, Haladók, II. kategória

Megoldás:

A négyzetgyökök csak nemnegatív számok esetében van értelmezve, ezért $x \geq 0, y \geq 0$. A két egyenlet bal oldala egyenlő egymással:

$$x + 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + y$$

$$x - y = 2(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \quad (*)$$

Ha $x = y$, akkor ez az egyenlet teljesül. Az első egyenletbe ezt visszahelyettesítve:

$$x + 2\sqrt{x} - 2 = 0.$$

Ez $\sqrt{x}$ -ben másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai:

$$\sqrt{x} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$\sqrt{x}$ nemnegatív, ezért csak a $\sqrt{x} = -1 + \sqrt{3}$ felel meg a feltételeknek.

$$\text{Ekkor } x = y = (-1 + \sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Ha $x \neq y$, akkor $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ -el eloszthatjuk a (*) egyenletet:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$$

$$\sqrt{y} = 2 - \sqrt{x}$$

Ezt behelyettesítjük az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe:

$$x + 4 - 2\sqrt{x} = 2$$

$$x - 2\sqrt{x} + 2 = 0$$

Ez az egyenlet is $\sqrt{x}$ -ben másodfokú egyenlet, de ennek nincs megoldása a valós számok körében.

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = y = 4 - 2\sqrt{3}$.

6. Egy kilövőállványról függőlegesen felfelé egy rakétát. A rakéta t másodperc múlva $h(t) = -5t^2 + 60t + 30$ méter magasan van.

- Milyen magas a kilövő állvány?
- Milyen magasan van a rakéta a kilövés után 1 másodperccel? Mikor lesz még ugyanilyen magasan?
- Milyen magasra repül a rakéta?
- Mennyi idő múlva ér földet?

Megoldás:

- Az induláskor a magasság a kilövőállvány magasságával egyezik meg, tehát $h(0) = 30$ méter magas a kilövőállvány.
- $h(1) = -5 + 60 + 30 = 85$ méter magasan van 1 másodperccel a kilövés után.

Keressük azt a t -t, amikor $h(t) = -5t^2 + 60t + 30 = 85$.

$$-5t^2 + 60t - 55 = 0$$

$$t^2 - 12t + 11 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásai $t = 1$ és $t = 11$. Tehát 11 másodperc múlva lesz a rakéta még 85 méter magasan.

- A $h(t)$ függvény maximumát keressük.

$$h(t) = -5(t^2 - 12t) + 30 = -5(t - 6)^2 + 5 \cdot 36 + 30 = -5(t - 6)^2 + 210$$

$-5(t - 6)^2 \leq 0$, ezért $h(t)$ maximuma 210, amit $t = 6$ esetén vesz fel. Tehát a rakéta az indulás után 6 másodperccel 210 méter magasságig emelkedik.

- Akkor ér földet, amikor $h(t) = 0$.

$$-5t^2 + 60t + 30 = 0$$

$$t^2 - 12t - 6 = 0$$

$$t = 6 \pm \sqrt{42}$$

Csak a pozitív megoldásnak van jelentése, így $t \approx 12,5$ másodperc múlva ér földet a rakéta.

7. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek minimuma van, melynek értéke $-a$. Az $f(x)$ függvényre bármely x érték esetén $f(x) = f(1-x)$ teljesül. Adjuk meg az $f(x)$ függvény zérushelyeit!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2010/2011. II. forduló, Haladók, II. kategória

Megoldás:

$f(x) = f(1-x)$ minden x -re teljesül, ezért

$$ax^2 + bx + c = a(1-x)^2 + b(1-x) + c$$

$$ax^2 + bx + c = a(1-2x+x^2) + b - bx + c$$

$$2(a+b)x = a+b$$

Ez $x = 1$ -re is teljesül, tehát $a+b=0$, $b=-a$, $f(x) = ax^2 - ax + c$.

Ekkor teljesül a feladat feltétele:

$$f(1-x) = a(1-x)^2 - a(1-x) + c = a(1-2x+x^2) - a + ax + c = ax^2 - ax + c = f(x).$$

Vizsgáljuk meg a függvény minimumát:

$$f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a + c$$

Ha ennek a függvénynek minimuma van, akkor $a > 0$, a minimumhely $x = \frac{1}{2}$, a minimum értéke $c - \frac{1}{4}a$. A feladat szerint $c - \frac{1}{4}a = -a$, azaz $c = -\frac{3}{4}a$.

$$f(x) = ax^2 - ax - \frac{3}{4}a = a\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) = 0$$

Azokat az x értéket keressük, ahol

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0,$$

tehát az $f(x)$ függvény zérushelyei $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$.

8. Oldjuk meg az $x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y$ kétismeretlenes egyenletet.

KöMaL 2013. december; C.1198.

Megoldás:

Alakítsuk át az egyenlet egyes részeit teljes négyzetté kiegészítéssel. Ehhez még az az ötlet is jól jön, hogy „szívesen” látjuk a $2xy$ kifejezést. Tehát az egyenletet szorozzuk be 2-vel és rendezzük nullára:

$$2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y - 2xy + 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 0$$

Egy szám négyzete sohasem lehet negatív, ezért a három tag összege csak úgy lehet nulla, ha minden tag nulla.

Így az egyenlet megoldása $x = 1; y = 1$.

9. Történt egyszer egy matematikaórán, hogy egy diák az $(a + 2b - 3)^2$ négyzetre emelést rosszul végezte el, és $a^2 + 4b^2 - 9$ lett az eredménye. Tanára kérésére ellenőrzésképpen behelyettesített a és b helyére egy-egy természetes számot. A behelyettesítés után az eredmény helyesnek bizonyult. Mely számokat helyettesíthette a tanuló?

KöMal 2004. szeptember; C.772.

Megoldás:

$$(a + 2b - 3)^2 = a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b = a^2 + 4b^2 - 9$$

egyenlőségnek kell teljesülnie.

$$4ab - 6a - 12b + 18 = 0$$

$$2ab - 3a - 6b + 9 = 0$$

$$a(2b - 3) = 6b - 9$$

b természetes szám, ezért $2b - 3 \neq 0$, tehát oszthatunk vele.

$$a = 3$$

Ekkor b tetszőleges természetes szám lehet.

10. Mennyi az $x^3 + y^3$ kifejezés értéke, ha $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}$, ahol x és y egész számok?

- (A) 5 (B) 19 (C) 50 (D) 28
(E) Ezekből az adatokból nem lehet meghatározni.

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007, 10. osztály megyei forduló

Megoldás:

Emeljük négyzetre az egyenletet. A négyzetgyök értelmezése miatt ezt $x + y\sqrt{2} \geq 0$ feltétellel tehetjük meg:

$$17 - 12\sqrt{2} = x^2 + 2y^2 + 2xy\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ irracionális szám, ezért ez az összefüggés csak úgy teljesülhet, ha

$$17 = x^2 + 2y^2$$

$$-12 = 2xy \Rightarrow xy = -6.$$

Ha ez nem teljesülne, akkor $\sqrt{2}$ kifejezhető lenne olyan tört alakjában, amelynek számlálója és nevezője is egész szám, tehát $\sqrt{2}$ racionális szám lenne.

$$x = -\frac{6}{y}$$

$$x^2 + 2y^2 = \frac{36}{y^2} + 2y^2 = 17$$

$$2y^4 - 17y^2 + 36 = 0$$

Az egész számok körében csak $y^2 = 4$ lehetséges. Tehát $y_1 = -2$; $y_2 = +2$, az ezekhez tartozó x értékek: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$. A $x + y\sqrt{2} \geq 0$ feltétel csak az első esetben teljesül, így

$$x^3 + y^3 = 3^3 + (-2)^3 = 19.$$

A jó válasz a (B).

IV. Geometria

1. Legyen a, b és c egy háromszög három oldalának hossza. Bizonyítsuk be, hogy

$$3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + ac + bc)$$

Mikor áll fenn az egyenlőtlenség?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2016/2017. II. forduló, Haladók, II.kategória

Megoldás:

Alakítsuk át először az első egyenlőtlenséget:

$$3(ab + ac + bc) \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$0 \leq a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

Ha az egyenlőtlenséget beszorozzuk kettővel, akkor újra kétszeres szorzatokat kapunk, amiből az az ötletünk adódik, hogy érdemes teljes négyzeteket keresni a kifejezésben:

$$0 \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2$$

$$0 \leq (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$$

Egy szám négyzete mindig nagyobb vagy egyenlő mint 0, ezért a három tag összege is mindig nagyobb vagy egyenlő mint 0. Megfordítható lépéseket végeztünk, ezért az eredeti egyenlőtlenség is igaz. Egyenlőség csak akkor teljesül, ha $a = b = c$, tehát a háromszög szabályos.

Az eddigi gondolatmenetben nem használtuk ki azt, hogy a három szám egy háromszög három oldala.

A második egyenlőtlenséget is alakítsuk át:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc < 4ab + 4ac + 4bc$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc < 0$$

Itt megvannak a kétszeres szorzatok, az oldalak négyzetét jó lenne mindkét oldalhoz hozzáadni, hogy újra teljes négyzeteket kapjunk:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc < a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 < a^2 + b^2 + c^2 \quad (*)$$

Ebből a formából a háromszögegyenlőtlenség juthat eszünkbe:

$$|a - b| < c$$

Mindkét oldal pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$(a - b)^2 < c^2$$

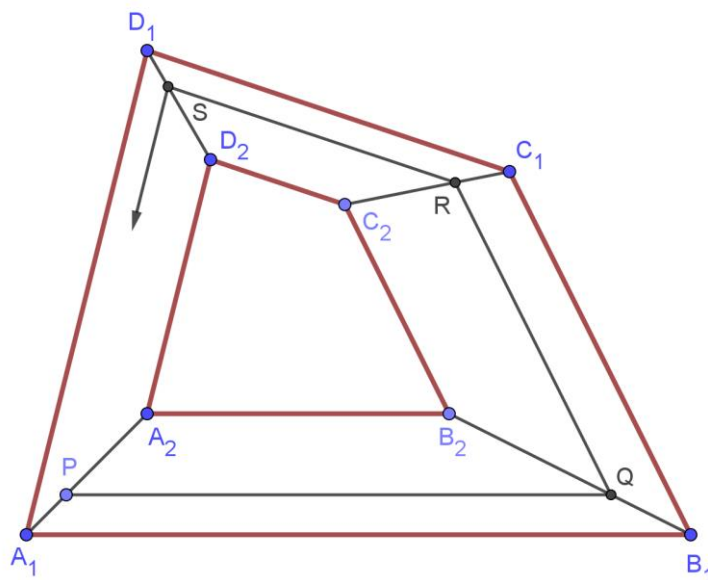
Hasonlóan

$$(a - c)^2 < b^2$$

$$(b - c)^2 < a^2$$

A három egyenlőtlenséget összeadva megkapjuk a (*) egyenlőtlenséget. Lépéseink megfordíthatók voltak, ezzel beláttuk a bizonyítandó állítás második felét.

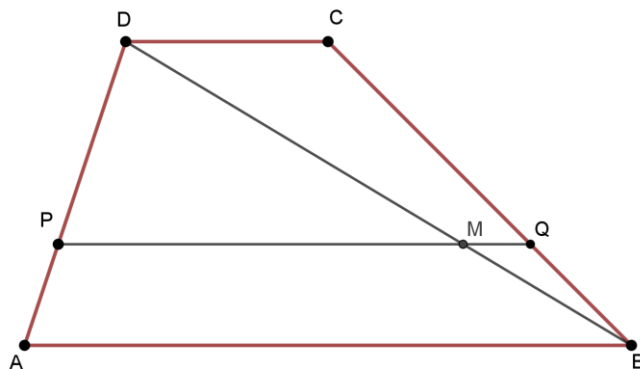
2. Az ábrán látható két négyszög egy-egy oldala párhuzamos. Kössük össze a megfelelő csúcsokat. Az A_1A_2 összekötő vonal egy tetszés szerinti pontja P . P pontból párhuzamost húzunk az A_1B_1 oldallal, ez a Q pontban metszi a B_1B_2 szakaszt. Hasonlóan keletkeznek az R és S pontok, $QR \parallel B_1C_1$ és $RS \parallel C_1D_1$. Bizonyítsuk be, hogy az S pontból induló, D_1A_1 egyenessel párhuzamos egyenes átmegy a P ponton!



Megoldás:

Először egy segédállítást bizonyítunk:

Ha az $ABCD$ trapézban PQ párhuzamos AB -vel, akkor a P illetve Q pont a trapéz szárait azonos arányban osztják.



Behúzzuk a BD átlót. A PQ szakasz és a BD átló metszéspontja M . Az ADB -ben a párhuzamos szelők tétele szerint $AP:PD = BM:MD$. A DBC -re ugyanígy igaz, hogy $BM:MD = BQ:QC$. Tehát: $AP:PD = BQ:QC$.

Ezt a gondolatot alkalmazva az $A_1B_1B_2A_2$ trapézra kapjuk az $A_1P:PA_2 = B_1Q:QB_2$ összefüggést. Az $B_1B_2C_2C_1$ trapézban $B_1Q:QB_2 = C_1R:RC_2$, a $C_1D_1D_2C_2$ trapézban $C_1R:RC_2 = D_1S:SD_2$. Ebből következik, hogy $A_1P:PA_2 = D_1S:SD_2$.

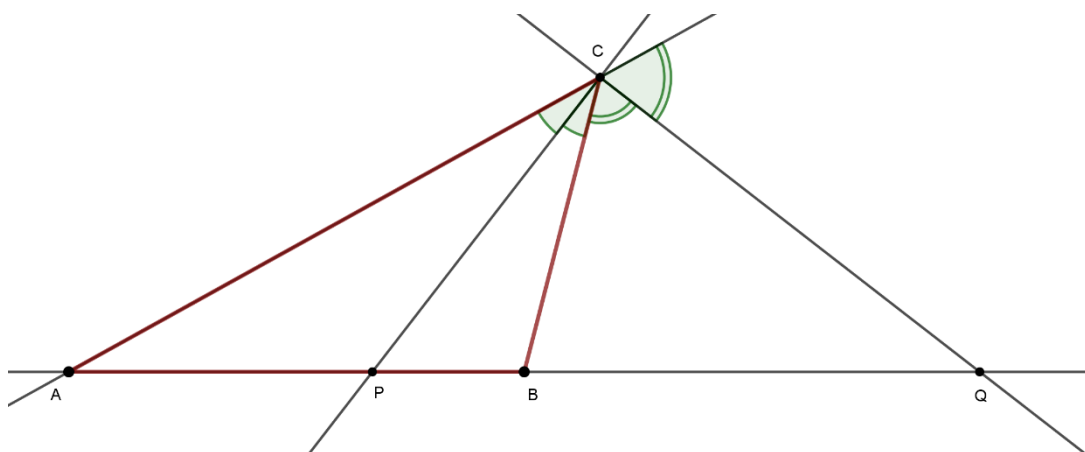
Ha az R ponton keresztül párhuzamost húzunk a D_1A_1 oldallal, akkor az a A_1A_2 szakaszt ez az egyenes olyan X pontban fogja metszeni, amelyre $A_1X:XA_2 = D_1S:SD_2$. Egy, ilyen P pont van, azaz az X pont megegyezik a P ponttal. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

3. Az ABC háromszög oldalainak a hossza: $AB = 9\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$.

- Hol metszi a C csúsból induló belső és külső szögfelező az AB oldalt.
- Hol vannak a síkban azok a pontok, amelyeknek az A és B pontoktól mért távolságának az aránya $2:1$?
- Hol vannak a síkban azok a pontok, amelyeknek az A és B pontoktól mért távolságának az aránya $p:q$, ahol p, q pozitív valós számok?

Megoldás:

- Alkalmazzuk a szögfelezőtételt. a belső és a külső szögfelezőre is:



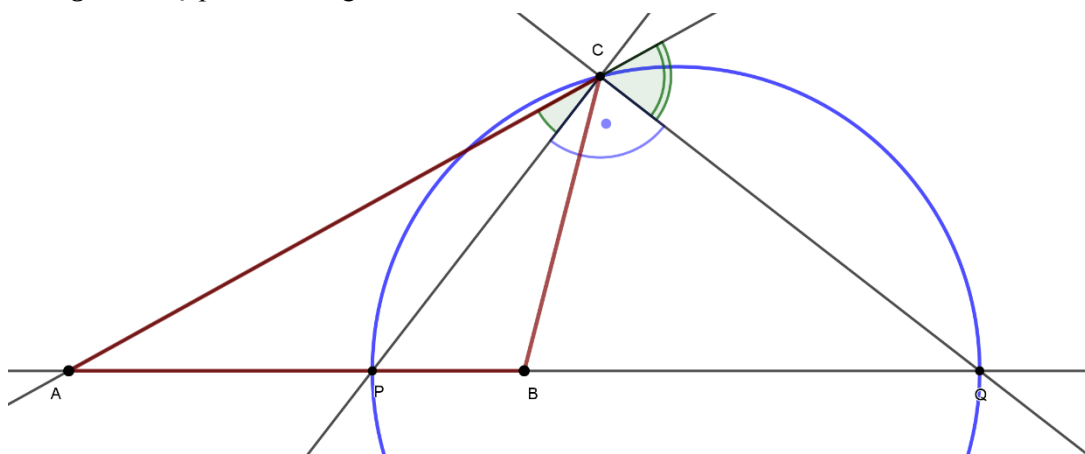
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{és} \quad AP + PB = 9$$

Így $AP = 6\text{ cm}$, $PB = 3\text{ cm}$.

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{és} \quad AQ - QB = 9$$

Innen $AQ = 18\text{ cm}$, $BQ = 9\text{ cm}$.

- Ha a C pontra $AC:BC = 2:1$, akkor az ilyen ABC háromszögek belső és külső szögfelezői mindig a P és Q pontokon fognak átmenni.



A belső és külső szögfelezők szöge 90° , ezért a C pont rajta van a PQ szakasz Thalész-körén. Ha az ABC pontok nem alkotnak háromszöget, azaz C az AB egyenesen van, akkor a P és Q pontok

lesznek az AB egyenes megfelelő pontjai. Így ehhez a ponthalmazhoz az átmérő két végpontja is hozzátartozik. Megmutatható, hogy a körvonal minden pontja hozzátartozik a ponthalmazhoz.

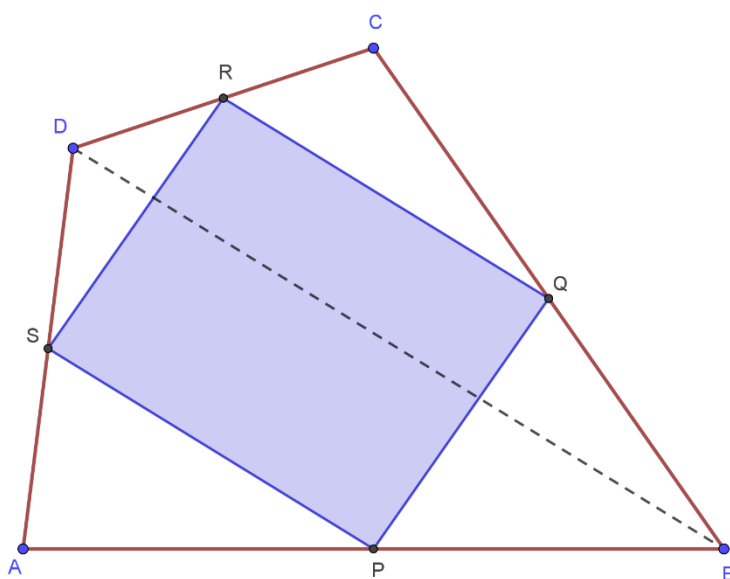
- c) Ha $p:q = 1$, akkor a keresett pontok az AB szakasz szakaszfelezőjén vannak, Ha $p:q \neq 1$, akkor a b) részben látható módon keressük meg az AB szakaszon azt a P pontot, amelyre $AP:PB = p:q$ és az AB szakasz meghosszabbításán azt a Q pontot, amelyre $AQ:QB = p:q$. A keresett pontok a PQ szakasz Thalész-körén vannak, a ponthalmazhoz a P és Q pontok is hozzátartoznak.

Ezt a kört az AB szakasz $p:q$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körének nevezzük.

4. Az $ABCD$ és az $EFGH$ konvex négyszög oldalfelező pontjai egybeesnek. Igazoljuk, hogy a két négyszög egyenlő területű.

KöMal 2014. január; C.1204.

Megoldás:



Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjai $P; Q; R; S$. Ha az A pontból az ABD háromszöget felére kicsinyítjük, akkor az APS háromszöget kapjuk. Hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának a négyzetével, ezért

$$T_{APS\Delta} = \frac{1}{4} T_{ABD\Delta}.$$

Hasonlóan

$$T_{CQR\Delta} = \frac{1}{4} T_{CBD\Delta}.$$

Tehát

$$T_{APS\Delta} + T_{CQR\Delta} = \frac{1}{4} T_{ABCD}.$$

Ugyanígy láthatjuk be, hogy

$$T_{BPQ\Delta} + T_{DSR\Delta} = \frac{1}{4} T_{ABCD}.$$

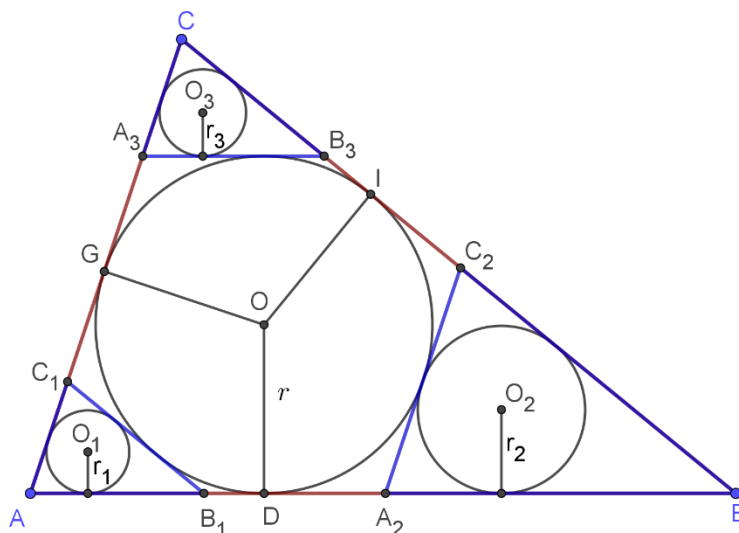
Ha a négy kis háromszöget elhagyjuk a négyszögből, akkor a négyszög területének a felét hagyjuk el, a maradék területe a négyszög területének a fele lesz.

Ha az $EFGH$ négyszög oldalfelező pontjai is a $P; Q; R; S$ pontok, akkor mind a két négyszög területe $2T_{PQRS}$, tehát egyenlő.

5. Egy háromszögbe írt kör sugara r . A körnek az oldalakkal párhuzamosan húzott érintői egy-egy kisebb háromszöget vágnak le az eredeti háromszögből. Bizonyítsuk be, hogy a kis háromszögekbe írt körök sugarának összege szintén r .

KöMaL 2008. január; B.4054.

Megoldás:



Az oldalak párhuzamossága miatt a keletkező kis háromszögek hasonlóak az ABC háromszöghöz. Hasonló háromszögekben a megfelelő szakaszok aránya egyenlő. A magasságokat és a beírt körök sugarát fogjuk összehasonlítani. Az oldalakat és a hozzájuk tartozó magasságokat a szokásos módon jelöljük: a, b, c, m_a, m_b, m_c . A háromszög területe legyen t .

$$\frac{r_1}{r} = \frac{m_a - 2r}{m_a} = 1 - \frac{2r}{m_a} \quad \Rightarrow \quad r_1 = r \left(1 - \frac{2r}{m_a} \right)$$

$$\frac{r_2}{r} = \frac{m_b - 2r}{m_b} = 1 - \frac{2r}{m_b} \quad \Rightarrow \quad r_2 = r \left(1 - \frac{2r}{m_b} \right)$$

$$\frac{r_3}{r} = \frac{m_c - 2r}{m_c} = 1 - \frac{2r}{m_c} \quad \Rightarrow \quad r_3 = r \left(1 - \frac{2r}{m_c} \right)$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = r \left(3 - \frac{2r}{m_a} - \frac{2r}{m_b} - \frac{2r}{m_c} \right) \quad (*)$$

A magasságokat fejezzük ki az oldalakkal és a területtel:

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2} \quad \Rightarrow \quad m_a = \frac{2t}{a}$$

$$\frac{1}{m_a} = \frac{a}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{2r}{m_a} = \frac{ar}{t}$$

Hasonlóan:

$$\frac{2r}{m_b} = \frac{br}{t} \quad ; \quad \frac{2r}{m_c} = \frac{cr}{t}$$

Ezek alapján:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r \left(3 - \frac{ar}{t} - \frac{br}{t} - \frac{cr}{t} \right) = r \left(3 - \frac{r(a+b+c)}{t} \right)$$

Ismert, hogy a terület kifejezhető a beírt kör sugarával és a kerülettel:

$$t = \frac{a+b+c}{2} \cdot r.$$

A fenti egyenlet így alakítható:

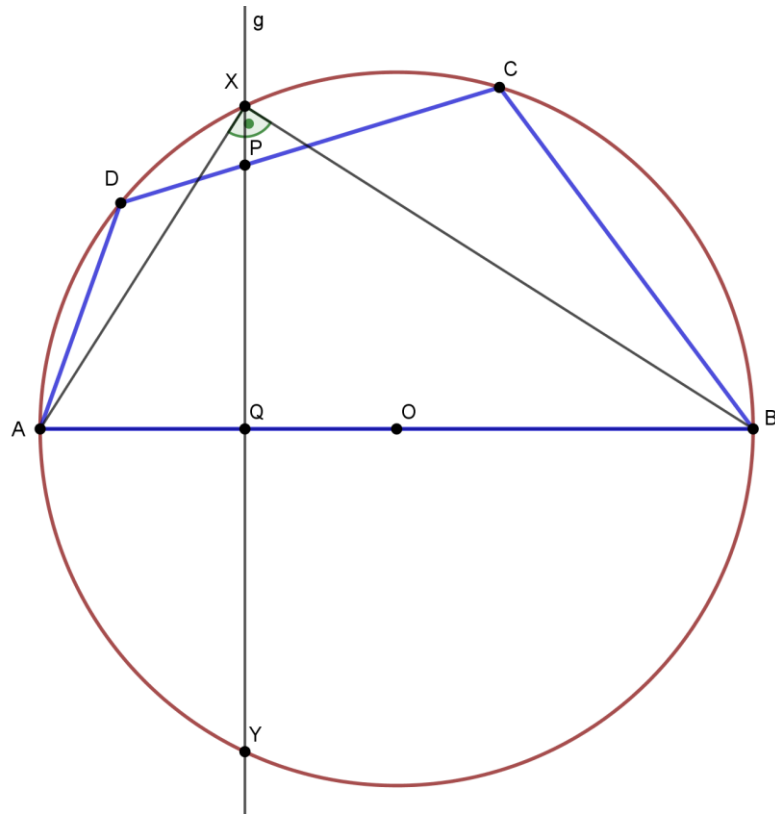
$$r_1 + r_2 + r_3 = r \left(3 - \frac{2t}{t} \right) = r$$

Ezzel az állítást beláttuk.

6. Az AB átmérőjű félkörbe egy $ABCD$ négyszöget írunk úgy, hogy a C és D csúcsok a félköríven vannak. Legyen P a CD oldal tetszőleges belső pontja, Q pedig a P merőleges vetülete az AB átmérőn. Bizonyítsa be, hogy

$$AQ \cdot QB - CP \cdot PD = PQ^2!$$

Megoldás:



A PQ egyenes a körvonalat az X és Y pontban metszi. A Thalész-tétel miatt az AXB háromszög derékszögű. A magasságtétel alapján:

$$AQ \cdot QB = XQ^2.$$

A szelőtétel alapján:

$$DP \cdot PC = XP \cdot PY$$

Így a bizonyítandó állítás helyett az $XQ^2 - XP \cdot PY = PQ^2$ összefüggést bizonyítjuk.

Az ábra alapján.

$$XQ = QP + PX$$

$$PY = PQ + QY$$

Szimmetria miatt $QY = QX = QP + PX$, így $PY = 2PQ + PX$.

Tehát

$$\begin{aligned} XQ^2 - XP \cdot PY &= (QP + PX)^2 - XP \cdot (2PQ + PX) = \\ &= QP^2 + PX^2 + 2QP \cdot PX - 2XP \cdot PQ - XP^2 = QP^2 \end{aligned}$$

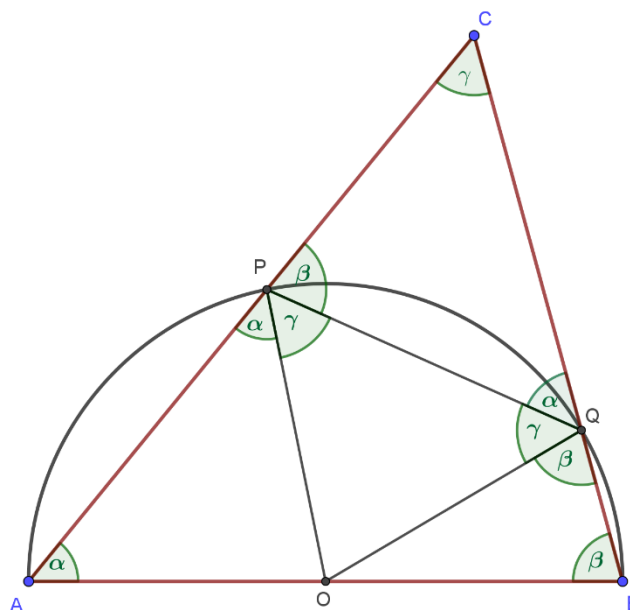
Tehát az állítás valóban igaz.

7. Az ABC háromszög AB oldalának Thalész-köre az AC oldalt a P , a BC oldalt a Q pontban metszi. Mekkora az ACB szög, ha a PQ szakasz felezi az ABC háromszög területét?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1996/1997. II. forduló, Haladók, II. kategória

Megoldás:

Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, a P és Q pontoknál lévő külső szögek egyenlők a velük nem szomszédos belső szögekkel, $\angle CPQ = \beta$; $\angle CQP = \alpha$.



Az ABC és a PQC háromszögek szögei páronként egyenlők, ezért hasonlóak. A hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg, a PQC háromszög területe fele az ABC háromszög területének, így

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow PQ = \sqrt{2} \frac{AB}{2}$$

O a Thalész-kör középpontja, ezért $AO = OP = OQ = \frac{AB}{2}$. ezek alapján az OPQ háromszög oldalainak az aránya $1:1:\sqrt{2}$, azaz egyenlőszárú derékszögű háromszög, $\angle POQ = 90^\circ$.

Az $AOP\Delta$ egyenlő szárú, az alapon fekvő szögei egyenlők, tehát $\angle AOP = 180^\circ - 2\alpha$. Hasonlóan $\angle BOQ = 180^\circ - 2\beta$. $\angle AOB = 180^\circ$, tehát

$$\angle POQ = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta) = 180^\circ - 2\gamma.$$

$$180^\circ - 2\gamma = 90^\circ.$$

$$\gamma = 45^\circ.$$

$$\angle ACB = 45^\circ.$$

V.Feladatlapok

1. feladatlap

1. Alíznek 8 kulcsa van felfűzve egy karikára. A kulcsok ránézésre megkülönböztethetetlenek és a két oldaluk is egyforma. Alíz, hogy meg tudja a kulcsokat különböztetni, mindegyikre egy-egy színes sapkát húz. Hány színre van szüksége?

KöMal 2007. szeptember; B.4012.

2. Egy hatszemélyes dzsipben elől, hátul 3-3 hely van. Hányféle különböző módon tud 6 különböző magasságú, vezetni tudó ember beülni a dzsipbe, úgy, hogy az első sorban mindenki alacsonyabb legyen a hátsósorban mögötte ülőnél?

KöMal 2005. március; K.40.

3. Anna és Balázs szókitalálósat játszik. Anna gondol egy négybetűs értelmes magyar szóra, amit Balázs próbál kitalálni. Ha Balázs tippel egy négybetűs szót, akkor Anna elárulja, hogy az ő szavából hány betű szerepel benne, és közülük hány van jó, illetve rossz helyen. Mi lehetett Anna szava?

Balázs tippjei	Jó betűk száma jó helyen	Jó betűk száma rossz helyen
RÓKA	1	0
OKOS	0	0
IKRA	2	0
RITA	1	1
DANÓ	0	3

KöMal 2015. október; K.474.

4. Egy király esélyt ad egy elítéltnak a megmenekülésre. Ehhez az elítéltnak bekötött szemmel három urnából kell egy-egy golyót húznia, majd a három kihúzott golyót egy negyedik urnába helyezik az örök. A negyedik urnából ismét kell egy golyót húznia a bekötött szemű elítéltnak, aki megmenekül, ha ez a golyó fehér. Mekkora a megmenekülés valószínűsége, ha az urnákban a különböző színű golyók száma a következő:

	fehér	piros	fekete
1.urna	2	5	3
2.urna	5	2	3
3.urna	3	3	4

KöMal 2014. november; C.1256.

5. Legfeljebb hány bástyát lehet egy 8×8 -as sakktáblára feltenni úgy, hogy mindegyiket legfeljebb 1 másik üsse?

KöMal 1981. február; F.2296.

6. Hány lovat helyezhetünk el a 8×8 -as sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást? Milyen helyzet az 5×5 -ös sakktáblán?

KöMal 1981.január; Gy.1951.

7. Egy csapatversenyen hat fős csapatokban versenyeznek a diákok. A csapatok összeállítása tetszőleges, de két feltételnek eleget kell tenni:

1. minden csapatban legalább két lánynak, és legalább két fiúnak kell lennie,

2. minden csapatban legalább két hetedikesnek és legalább két nyolcadikosnak kell lennie.

Egy három hetedikes lányból, négy nyolcadikos fiúból és két nyolcadikos lányból álló baráti társaság hányféle, a feltételeknek megfelelő csapatot nevezhet?

KöMaI 2011. február; K.283.

2. feladatlap

1. Határozzuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát!

$$\sqrt{x^2 - 9} \cdot \sqrt{\frac{3x + 6}{x - 7}} \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

2. Számítsuk ki az alábbi kifejezés pontos értékét!

$$\left(\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}} \right)^2 - \sqrt{61 - 4\sqrt{15}}$$

3. Számítsuk ki a következő kifejezés értékét, ha $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1966/67. I. forduló, Haladók

4. Hozzuk egyszerűbb alakra!

$$\left(\frac{6}{\sqrt{7}-1} + \frac{12}{\sqrt{7}-2} - \frac{18}{4+\sqrt{7}} \right) \cdot (\sqrt{343} - 1)$$

5. Számítsuk ki a kifejezések pontos értékét!

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

b) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{22}+\sqrt{23}} + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$

c) $\frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+3}$

d) $\frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}+\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{21}} + \frac{4}{\sqrt{21}+\sqrt{25}}$

Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív n egész szám esetén:

e) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}} < n$

Igazoljuk, hogy ha n olyan pozitív egész szám, amely 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, akkor:

f) $\frac{4}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{4}{\sqrt{n-4}+\sqrt{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}+\sqrt{n+4}} > \frac{\sqrt{n}}{2}$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c és d számok pozitívak és

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 2 - \sqrt{3},$$

akkor

$$ad + bc + 2\sqrt{abcd} - \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = 0.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1971/72. I. forduló, Haladók

7. Milyen x természetes szám esetén lesz az alábbi kifejezések értéke természetes szám?

a) $\sqrt{x^2 + 22}$

b) $\sqrt{4x^2 - 11}$

8. Adottak az $n = \overline{abcabc}$ és $m = \overline{d00d}$ alakú hatjegyű, illetve négyjegyű természetes számok, ahol a, b, c és d nem feltétlenül különböző számjegyeket jelöl.

c) Mutassa meg, hogy $\sqrt{n}$ nem természetes szám!

d) Határozza meg azokat az (n, m) számpárokat, ahol $n = \overline{abcabc}$ és $m = \overline{d00d}$ alakú természetes számok, továbbá igaz, hogy $\sqrt{n + m} \in \mathbb{N}$!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012. I. forduló, Haladók, II. kategória

9. Határozzuk meg azokat a racionális (x, y) számpárokat, amelyekre

$$x(\sqrt{3} - 4) + 2y(\sqrt{12} + 5) = 6$$

3. feladatlap

1. Határozzuk meg azon a és b valós számokat, amelyekre igaz, hogy a és b is gyöke az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek!

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2015/2016. I. forduló, Haladók, I. kategória

2. Mi a legkisebb értéke a következő kifejezésnek?

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$$

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 1970/1971. I. forduló, Haladók

3. Melyik összefüggés áll fenn az $mx^2 - 2x - m + 2 = 0$ egyenlet gyökeinek S összege és P szorzata között, ha m nullától különböző valós szám?

(A) $S = P - 1$ (B) $S = P$ (C) $S = P + 1$ (D) $S = 2P$ (E) $P = 2S$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007, 10. osztály megyei forduló

4. Az m paraméter függvényében adjuk meg az

$$mx + 4 = |x^2 - 10x + 21|$$

egyenlet megoldásainak számát.

KöMal 2014. november; B.4665.

5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{y} = 2 \\ 2\sqrt{x} + y = 2 \end{cases}$$

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2017/2018. I. forduló, Haladók, II. kategória

6. Egy kilövőállványról függőlegesen felfőnik egy rakétát. A rakéta t másodperc múlva $h(t) = -5t^2 + 60t + 30$ méter magasan van.

- a) Milyen magas a kilövő állvány?
b) Milyen magasan van a rakéta a kilövés után 1 másodperccel? Mikor lesz még ugyanilyen magasan?
c) Milyen magasra repül a rakéta?
d) Mennyi idő múlva ér földet?
7. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek minimuma van, melynek értéke $-a$. Az $f(x)$ függvényre bármely x érték esetén $f(x) = f(1 - x)$ teljesül. Adjuk meg az $f(x)$ függvény zérushelyeit!

Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2010/2011. II. forduló, Haladók, II. kategória

8. Oldjuk meg az $x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y$ kétismeretlenes egyenletet.

KöMal 2013. december; C.1198.

9. Történt egyszer egy matematikaórán, hogy egy diák az $(a + 2b - 3)^2$ négyzetre emelést rosszul végezte el, és $a^2 + 4b^2 - 9$ lett az eredménye. Tanára kérésére ellenőrzésképpen behelyettesített a és b helyére egy-egy természetes számot. A behelyettesítés után az eredmény helyesnek bizonyult. Mely számokat helyettesíthette a tanuló?

KöMal 2004. szeptember; C.772.

10. Mennyi az $x^3 + y^3$ kifejezés értéke, ha $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}$, ahol x és y egész számok?

(A) 5 (B) 19 (C) 50 (D) 28

(E) Ezekből az adatokból nem lehet meghatározni.

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2007, 10. osztály megyei forduló

4. feladatlap

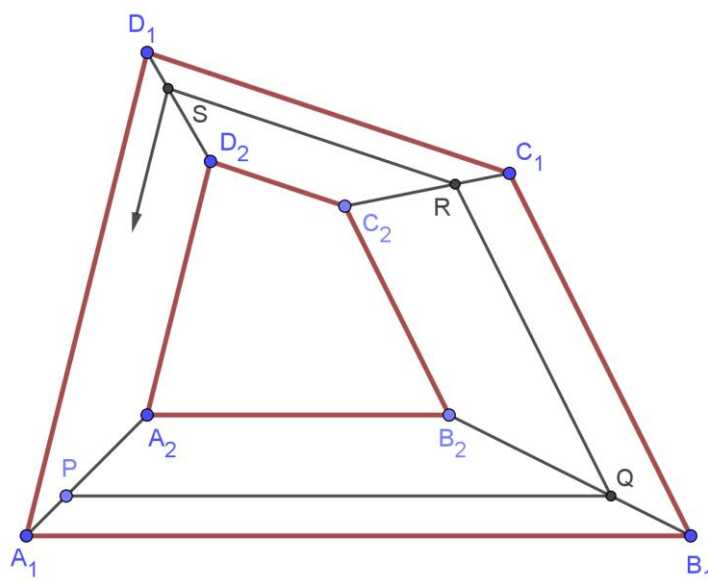
1. Legyen a, b és c egy háromszög három oldalának hossza. Bizonyítsuk be, hogy

$$3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + ac + bc)$$

Mikor áll fenn az egyenlőtlenség?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2016/2017. II. forduló, Haladók, II. kategória

2. Az ábrán látható két négyszög egy-egy oldala párhuzamos. Kössük össze a megfelelő csúcsokat. Az A_1A_2 összekötő vonal egy tetszés szerinti pontja P . P pontból párhuzamost húzunk az A_1B_1 oldallal, ez a Q pontban metszi a B_1B_2 szakaszt. Hasonlóan keletkeznek az R és S pontok, $QR \parallel B_1C_1$ és $RS \parallel C_1D_1$. Bizonyítsuk be, hogy az S pontból induló, D_1A_1 egyenessel párhuzamos egyenes átmegy a P ponton!



3. Az ABC háromszög oldalainak a hossza: $AB = 9\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$.
- Hol metszi a C csúcsból induló belső és külső szögfelező az AB oldalt.
 - Hol vannak a síkban azok a pontok, amelyeknek az A és B pontoktól mért távolságának az aránya $2:1$?
 - Hol vannak a síkban azok a pontok, amelyeknek az A és B pontoktól mért távolságának az aránya $p:q$, ahol p, q pozitív valós számok?
4. Az $ABCD$ és az $EFGH$ konvex négyszög oldalfelező pontjai egybeesnek. Igazoljuk, hogy a két négyszög egyenlő területű.

KöMal 2014. január; C.1204.

5. Egy háromszögbe írt kör sugara r . A körnek az oldalakkal párhuzamosan húzott érintői egy-egy kisebb háromszöget vágnak le az eredeti háromszögből. Bizonyítsuk be, hogy a kis háromszögekbe írt körök sugarának összege szintén r .

KöMal 2008. január; B.4054.

6. Az AB átmérőjű félkörbe egy $ABCD$ négyszöget írunk úgy, hogy a C és D csúcsok a félköríven vannak. Legyen P a CD oldal tetszőleges belső pontja, Q pedig a P merőleges vetülete az AB átmérőn. Bizonyítsa be, hogy

$$AQ \cdot QB - CP \cdot PD = PQ^2!$$

7. Az ABC háromszög AB oldalának Thalész-köre az AC oldalt a P , a BC oldalt a Q pontban metszi. Mekkora az ACB szög, ha a PQ szakasz felezi az ABC háromszög területét?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1996/1997. II. forduló, Haladók, II.kategória