

TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN:

Segédanyagok középiskolai tanárok számára

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE

Összeállította: Horváth Eszter

Kempelen Farkas Gimnázium

Időpont: 2019. november 15. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN:

Segédanyagok középiskolai tanárok számára

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE, 2019

Matematika szakkör a 11. évfolyamon

TARTALOMJEGYZÉK:

I. Kombinatorika	2. oldal
II. Gráfok	7. oldal
III. Hatvány, gyök	13. oldal
IV. Trigonometria	18. oldal
V. Sorozatok	23. oldal
VI. Valószínűségszámítás, statisztika	28. oldal
VII. Feladatlapok	34. oldal

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Matematika szakkör a 11. évfolyamon

A 11. évfolyamon többféle célja is lehet egy szakkörnek. Készülhetünk hétről-hétre a matematikaversenyekre. Ebben az esetben a KöMal feladataiból, régebbi versenyfeladatokból válogathatunk, egy-egy témát áttekinthetünk nehéz feladatokon keresztül, új megoldási módszereket tanulhatunk. Sokszor ezen az évfolyamon a diákok a továbbtanulás szempontjait már fontosabbnak tartják a versenyzésnél. Így lehet a feladatválogatás szempontja az, hogy a tanórán megismert témákat megerősítsük, az emeltszintű érettségi szempontjai szerint rendszerezzük. Ilyenkor a feladatgyűjtemények nehezebb feladatait oldhatjuk meg, amelyek már a tanóra kereteibe nem fértek bele. Válogathatunk az elmúlt évek érettségi feladataiból megmutatva azt, hogy a tanultakat milyen módon kérheti számon az érettségi.

Ilyen szempontok vezettek a szakköri anyag összeállításában. A feladatok először megoldással szerepelnek, a dokumentum végén pedig megoldás nélkül is megtalálhatóak, így nyomtathatók egy-egy szakkörre.

I. Kombinatorika

1. Egy férfi ruhatárában öt kockás ing található, ebből kettő barna, egy kék. Hét barna ingje van, ebből három csíkos. A három kék ing között viszont nincsen csíkos. Ezeken kívül csak nyolc piros ingje van, aminek a fele csíkos. Tudjuk továbbá, hogy három nadrágot hord: egy kék csíkosat, egy barna kockásat, illetve egy szürke csíkosat. Hányféleképpen vehet föl egy nadrágot és egy inget, ha nem vesz kéket barnához és csíkosat kockáshoz?

KöMal 2016. december; C. 1385.

Megoldás:

A feladat feltételei szerint csak barna, kék és piros inge van a férfinak. Így a kockás ingek közül 2 barna, 1 kék és 2 piros. Rögzítsük ezt egy táblázatban:

	kockás	csíkos	más
barna	2		
kék	1		
piros	2		

A hét barna ingről tudjuk, hogy 2 kockás, 3 csíkos. Így van még 2 másféle.

	kockás	csíkos	más
barna	2	3	2
kék	1		
piros	2		

A kék ingekből 1 kockás, nincs köztük csíkos, tehát 2 se nem kockás, se nem csíkos.

	kockás	csíkos	más
barna	2	3	2
kék	1	0	2
piros	2		

A nyolc piros ing fele, azaz 4 csíkos. Tudjuk már, hogy van 2 piros kockás ing is, tehát 2 másféle.

	kockás	csíkos	más
barna	2	3	2
kék	1	0	2
piros	2	4	2

Milyen összeállítás képzelhető el, ha nem vesz kéket barnához és csíkosat kockáshoz?

Ha a kék csíkos nadrágot veszi fel, akkor a táblázatból a barna sor és a kockás oszlop nem megfelelő. Ekkor $2 + 4 + 2 = 8$ lehetőség van.

	kockás	csíkos	más
barna	2	3	2
kék	1	0	2
piros	2	4	2

Ha a barna kockás nadrágot veszi fel, akkor a kék sort és a csíkos oszlopot zárjuk ki. Marad $2 + 2 + 2 = 8$ összeállítás.

	kockás	csíkos	más
barna	2	3	2
kék	1	0	2
piros	2	4	2

A szürke csíkos nadrág a kockás ingeket zárja ki. Ilyen eset $3 + 2 + 2 + 4 + 2 = 13$ van.

	kockás	csíkos	más
barna	2	3	2
kék	1	0	2
piros	2	4	2

Összesen $8 + 8 + 13 = 29$ lehetősége van a férfinak az elveinek megfelelően felvenni egy inget és egy nadrágot.

2. Az Országos Tarka Pénztárat is elérte a gazdasági válság. Február első hete számukra fekete hét volt. A hét mind az öt napján esett a cég részvénye: két nap 5, egy nap 6, és szintén két nap 8 százalékkal. Hányféle sorrendben következhetett ez be a „fekete” héten?

(A) 5 (B) 6 (C) 30 (D) 60 (E) 120

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009; 11.osztály; országos

Megoldás:

Két 5-ös, egy 6-ost és két 8-ast kell sorba rendeznünk. Öt különböző elemet $5!$ féle módon rendezhetünk sorba. A két 5-ös felcserélésével nem kapunk új esetet, ezért minden sorrendet emiatt kétszer számoltunk. Ugyanez igaz a két 8-as felcserélésére is. Ezért $\frac{5!}{2 \cdot 2} = 30$ féle módon történhetett meg a „fekete hét”. A jó válasz a **(C)**.

3. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata és összege is 12?

Emelt szintű érettségi 2019.május 7.

Megoldás:

A 12-t egész számok szorzatára bontjuk először úgy, hogy nem használunk 1-es szorzótényezőt:

$$12 = 2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$$

A számjegyek összege akkor lesz 12, ha néhány 1-es szorzótényezőt hozzáveszünk a tényezőkhöz.

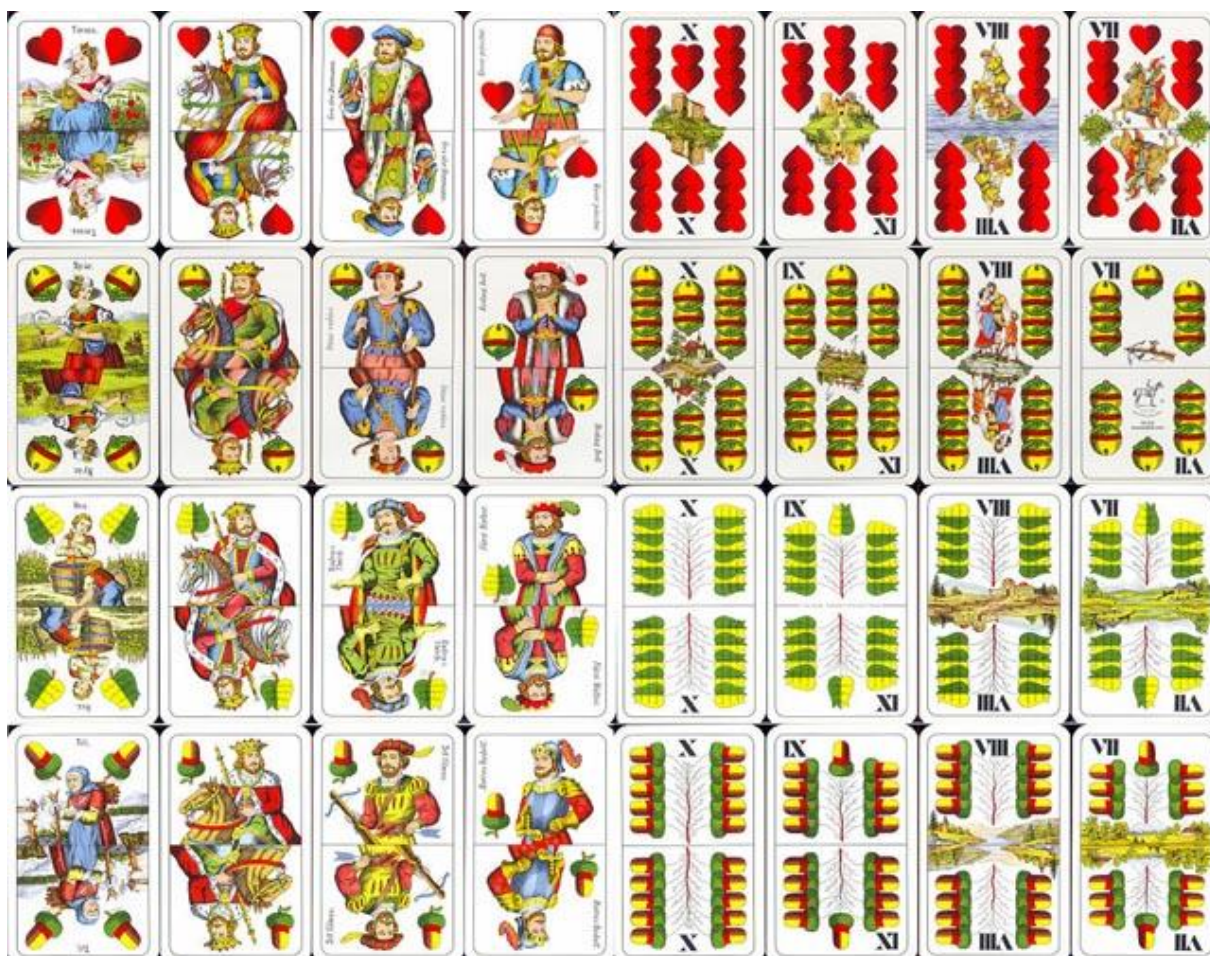
Ha a 6-os és 2-es mellett négy 1-est használunk, akkor a hatost 6 helyre, a 2-est 5 helyre tehetjük, a fennmaradó négy helyre írjuk az 1-eseket. Így $6 \cdot 5 = 30$ esetet kapunk.

Egy 4-est, egy 3-ast és öt 1-est használva a 4-est 7, a 3-ast 6 helyre téve $7 \cdot 6 = 42$ lehetőségünk van.

Az egy 3-as, a két 2-es mellé öt 1-est kell vennünk. A két 2-es helyét $\binom{8}{2}$ féle módon választhatjuk meg, a 3-as 6 helyre kerülhet, az 1-eseket pedig elhelyezzük a maradék helyekre. $\binom{8}{2} \cdot 6 = 168$ esetet kapunk

Összesen $30 + 42 + 168 = 240$ lehetséges szám van.

4. A magyar kártya 32 lapos, négy színben (piros, zöld, tök, makk) 4-4 figurát (ász, király, felső, alsó) és 4-4 számot tartalmaz (VII; VIII; IX; X).



Kihúzzunk a magyar kártyából 5 lapot. Hány olyan eset van, amikor a kihúzott lapok között

- a) mindegyik makk;
- b) nincs király;
- c) pontosan 2 király és 2 hetes van;
- d) pontosan 2 király és 2 piros van;
- e) legalább két zöld van?

Megoldás:

- a) A nyolc makkból 5 lapot húzzunk. Ez $\binom{8}{5} = 56$ lehetőség.
- b) 4 király van, ezért a maradék 28 lapból húzzunk. $\binom{28}{5} = 98280$ eset.
- c) A négy királyból húzzunk kettőt, a négy hetesből húzzunk kettőt, a maradék 24 lapból egyet:
 $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 24 = 864$ lehetőség
- d) Lehet, hogy kihúzzuk a piros királyt. Ekkor a maradék 3 királyból kell még egyet, a maradék 7 pirosból még egyet húznunk. Eddig három kártyánk van – két király és két piros. Két további kártyánk nem lehet király és nem lehet piros. 21 ilyen kártyánk van, ezekből kettőt kell húznunk. Az ilyen esetek száma $3 \cdot 7 \cdot \binom{21}{2} = 4410$.
Ha a kihúzottak között nincs a piros király, akkor 3 királyból kettőt, 7 pirosból kettőt és a többi lapból egyet kell húznunk. Ezt $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot 21 = 2646$ féle módon tehetjük meg.
Összesen $4410 + 2646 = 7056$ féle ilyen húzás lehet.
- e) Öt kártyát $\binom{32}{5}$ féle módon húzhatunk. $\binom{24}{5}$ esetben nincs a kihúzottak között zöld. Egy zöld és négy nem zöld $8 \cdot \binom{24}{4}$ féle módon választható. Minden más esetben legalább két zöldet húzzunk, ezen esetek száma:

$$\binom{32}{5} - \binom{24}{5} - 8 \cdot \binom{24}{4} = 73\,864.$$

5. Egy teniszklub tagjai elhatározzák, hogy minden lehetséges módon párokat alakítanak, majd minden pár minden másik párral játszik pontosan egy mérkőzést. Hány tagja van a teniszklubnak, ha összesen 210 mérkőzésre kerül sor?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2015; 11. osztály megyei

Megoldás:

Ha a teniszklubnak n tagja van, akkor egy párost $\binom{n}{2}$ féle módon, a maradék $(n-2)$ emberből egy újabb párt $\binom{n-2}{2}$ féleképpen választhatunk ki. Minden páros minden párossal játszik, a résztvevők kiválasztásának a sorrendje nem számít. Így $\frac{\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2}}{2}$ mérkőzést játszottak.

$$\frac{\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2}}{2} = 210$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} = 210$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 8 \cdot 210 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad (*)$$

n csak pozitív egész szám lehet, ezért a fenti szorzatból látható, hogy $n = 8$. Tehát 8 tagja van a teniszkлубnak.

Valóban $\binom{8}{2} = 28$ páros van. A második párost $\binom{6}{2} = 15$ féle módon választhatjuk. A mérkőzések száma $\frac{28 \cdot 15}{2} = 210$.

Megjegyzés:

Az egész számok körében a (*) egyenletnek a megoldása a 210 megfelelő szorzatra bontásával adódik, de érdemes meggondolni, hogy ez a negyedfokú egyenlet hogyan oldható meg a valós számok körében. Ha a két szélső és a két középső tényezőt összeszorozzuk:

$$(n^2 - 3n)(n^2 - 3n + 2) = 1680$$

Vezessünk be új ismeretlent, $y = n^2 - 3n$.

Ekkor az $y(y + 2) = 1680$ másodfokú egyenletet kell megoldanunk. A megoldások $y_1 = 40$ és $y_2 = -42$.

Az $n^2 - 3n = 40$ egyenlet megoldásai $n = 8$ és $n = -5$.

Az $n^2 - 3n = -42$ egyenletnek pedig nincs megoldása a valós számok körében.

A feladat szempontjából a pozitív megoldás, $n = 8$ felel meg.

6. Hányféleképpen juthatunk a koordináta-rendszer origójából a $(4; 2)$ pontba, ha 10 lépést teszünk, minden lépésünk egységnyi hosszú és párhuzamos a tengelyek valamelyikével?

OKTV 2012/2013, II. kategória, I. forduló

Megoldás:

Akkor jutunk a $(4; 2)$ pontba, ha az x -tengely irányában 4-gyel többet léptünk pozitív irányba, mint negatív irányba, az y -tengely irányában pedig 2-vel többet pozitív irányba, mint negatívba.

Ha x lépésünk volt az x -tengelyen negatív irányba, akkor $(x + 4)$ -et léptünk pozitív irányba, ha y lépésünk volt az y -tengelyen negatív irányba, akkor $(y + 2)$ -t léptünk pozitív irányba.

$$x + x + 4 + y + y + 2 = 2x + 2y + 6 = 10$$

$$x + y = 2$$

A lehetséges esetek:

x	0	1	2
y	2	1	0

Ha $x = 0; y = 2$, akkor 4-et léptünk jobbra, 4-et fel, 2-t le. A 10 lépésből ki kell választanunk 4-et a jobbra lépésekre, majd a maradék 6-ból 4-et a felfelé lépésekre, a maradék 2 helyen pedig lefelé lépünk. Ezt $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} = 3150$ féleképpen tehetjük meg.

Ha $x = 1; y = 1$, akkor 5-öt léptünk jobbra, 1-et balra, 3-at fel, 1-t le. Erre $\binom{10}{5} \cdot 5 \cdot \binom{4}{3} = 5040$ lehetőségünk van.

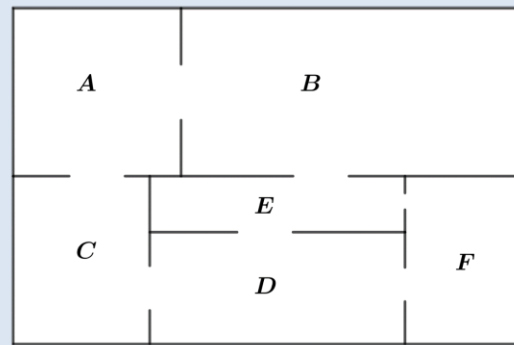
Ha $x = 2; y = 0$, akkor 6-ot léptünk jobbra, 2-t balra, 2-t fel. Most $\binom{10}{6} \cdot \binom{4}{2} = 1260$ esetet kapunk.

Tehát $3150 + 5040 + 1260$ féleképpen juthatunk a $(4; 2)$ pontba.

II. Gráfok

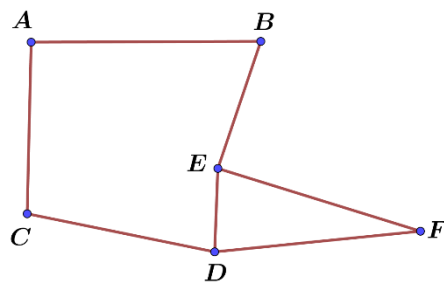
1. Az ábrán egy kis múzeum alaprajzát látjuk. A múzeum termei közötti kapcsolatot gráffal is szemléltethetjük. A gráf pontjai a termek, élei pedig az átjárók a termek között. (Egy él egy átjárót szemléltet két terem között.)

Rajzolja fel a múzeum termeit és átjáróit szemléltető gráfot!



Középszintű érettségi 2019.május 7.

Megoldás:



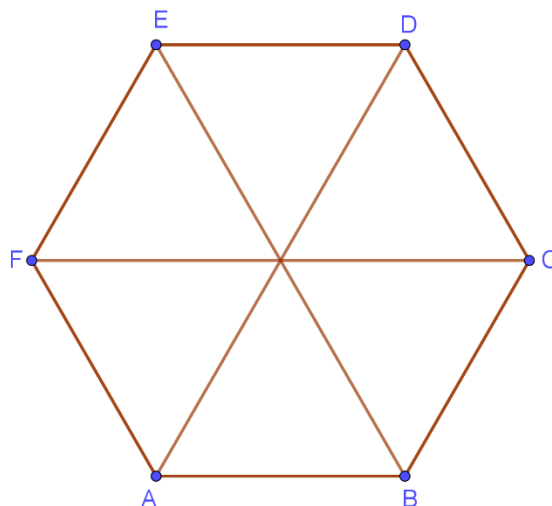
2. a) Van-e olyan 7 főből álló társaság, amelyben mindenki pontosan három embert ismer?
b) Van-e olyan 6 főből álló társaság, amelyben mindenki pontosan három embert ismer?

Megoldás:

- a) A társaságot ábrázoljuk egy gráffal. Az embereknek a pontok felelnek meg. Két embert akkor kötünk össze élel, ha ismerik egymást. Tudjuk, hogy egy gráfban a fokszámok összege az élek számának a kétszerese, tehát páros. Így nem lehet egy gráfban 7 harmadfokú pont.

Nincs ilyen társaság.

- b) Igen van. Egy szabályos hatszög csúcsai jelöljék a társaság tagjait, az ismeretségeket pedig az oldalak és a szemközti csúcsokat összekötő átlók jelzik.



3. a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)!
Válaszait indokolja!

- I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszerű.
- II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.
- III. Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F . Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A -nak legalább annyi ismerőse van, mint B -nek, B -nek legalább annyi ismerőse van, mint C -nek, és így tovább, E -nek legalább annyi ismerőse van, mint F -nek.

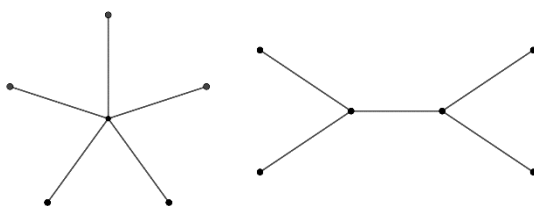
- b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

Emelt szintű érettségi 2014. október 14.

Megoldás:

a)

- I. Az állítás igaz, az ábrán két lehetséges gráf látható:



- II. Az állítás hamis. Egy hatpontú teljes gráfnak $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ éle van. Ehhez vegyünk hozzá egy hetedik pontot, de ne kössük össze a többi ponttal, ez egy izolált pont lesz a gráfban. Ezzel egy ellenpéldát találtunk.
- III. Az állítás hamis. Egy n pontú fagráfnak $n - 1$ éle van. A csúcsok és az élek számának az összege $2n - 1$, ami páratlan.
- b) Az ismeretségeket ábrázoló hatpontú gráfban egy pont fokszerüa legfeljebb 5, ezért a 180-at ezzel a feltétellel kell 6 természetes szám szorzatára bontani. A 180 prímtényezősz felbontása: $5 \cdot 3^2 \cdot 2^2$, ezért két lehetséges szorzatra bontás lehetséges:

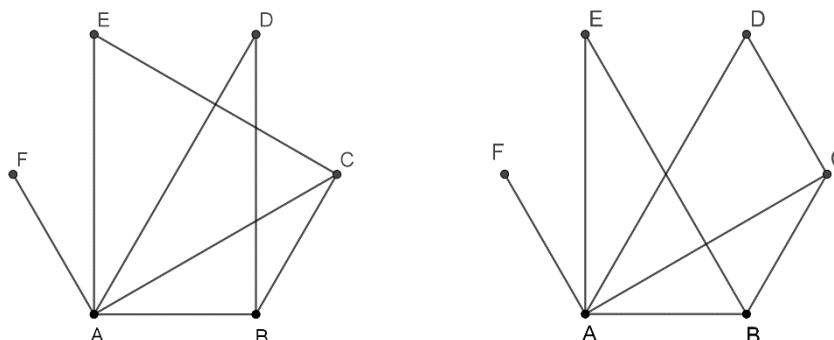
$$5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \text{ vagy } 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1.$$

A második esetet ki kell zárunk, mert egy gráfban a páratlan fokú pontok száma nem lehet páratlan.

Tehát A -nak 5, B -nek 3; C -nek 3; D -nek 2; E -nek 2; F -nek 1 ismerőse van. A ismer mindenkit, F pedig A -n kívül senkit.

Ha B és C nem ismerné egymást, akkor mindketten ismernék D -t és E -t, mert csak így lehetne 3 ismerősük. Ekkor D -nek és E -nek is 3 ismerőse lenne ellentétben a feltételekkel. Tehát B és C ismeri egymást.

Ezek szerint két lehetőségünk van: B ismeri D-t és C ismeri E-t vagy fordítva. A két esetben megfelelő gráf:



4. Több település közötti legkisebb költségű vezetékhálózat tervezésekor először egy teljes gráfot készítettek. Ebben a gráfban minden települést a gráf egy csúcsával, minden vezetékes kapcsolatot a gráf egy-egy élével jelöltek, majd a gráf minden élére ráírták, hogy mennyibe kerülne az adott kapcsolat kiépítése. Ezután egyesével kitörölték a „költséges éleket” úgy, hogy a törlés után megmaradó gráf összefüggő maradjon. A teljes gráf élei kétharmadának törlése után végül egy (a legkisebb költségű hálózatot megadó) fagráfot kaptak.

Hány település szerepelt a tervben?

Emelt szintű érettségi (idegen nyelven) része, 2019. május 7.

Megoldás:

Jelölje $n \geq 2$ a települések számát. Az n pontú teljes gráf éleinek a száma $\frac{n(n-1)}{2}$. Az n pontú fagráf éleinek a száma $n - 1$. A feladat szerint a gráf éleinek az egy harmada marad meg:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n - 1.$$

$n \neq 1$, ezért $(n - 1)$ -gyel oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\frac{n}{6} = 1$$

$$n = 6.$$

Tehát 6 település tartozik a hálózathoz.

Ellenőrzés.

Egy 6 pontú teljes gráfnak $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ éle van, a 6 pontú fagráfnak pedig 5, tehát valóban az élek kétharmadát, 10-et kell elhagyni.

5. Adott n ember között hányféle olyan ismeretségi kapcsolatrendszer lehet, hogy mindenki páratlan sok másikat ismer (az ismeretség kölcsönös)?

OKTV 2013/2014, III. kategória, I. forduló

Megoldás:

Az embereket jelöljük egy gráf pontjaival. Két pontot akkor kötünk össze, ha a két ember ismeri egymást. A pontok fokszáma azt fejezi ki, hogy kinek hány ismerőse van.

A gráfban a fokszámok összege páros. Így ha minden pont fokszáma páratlan, akkor a gráfban páros sok pontnak kell lennie, tehát n páros.

Vegyünk egy tetszőleges $n - 1$ pontú gráfot. P legyen az n -edik pont és kössük össze a gráf azon pontjaival, amelyeknek a fokszáma páros. Ezeknek a pontoknak a fokszáma ezután páratlan lesz. A páratlan fokszámú pontok ezen tulajdonságát nem rontottuk el. $n - 1$ páratlan, így benne a páratlan fokú pontok száma páros. Összesen páratlan számú pont van, tehát a páros fokszámú pontok száma páratlan. Ekkor teljesül, hogy P -ből páratlan számú él indul ki.

Ez a módszer azt mutatja, hogy minden $n - 1$ pontú gráfból, ha n páros, tudunk olyan n pontú gráfot készíteni, amelyben minden pont fokszáma páratlan.

Hány $n - 1$ pontú gráfot tudunk készíteni? Az $n - 1$ pontból 2 pontot $\binom{n-1}{2}$ féle módon lehet kiválasztani. Minden pontpár esetében két lehetőség van: vagy van köztük él, vagy nincs. Tehát a lehetőségek száma $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2}_{\binom{n-1}{2}} = 2^{\binom{n-1}{2}}$.

Beláttuk: Ha n páratlan, akkor nincs megfelelő ismeretségi kapcsolatrendszer, ha n páros, akkor $2^{\binom{n-1}{2}}$ ilyen van.

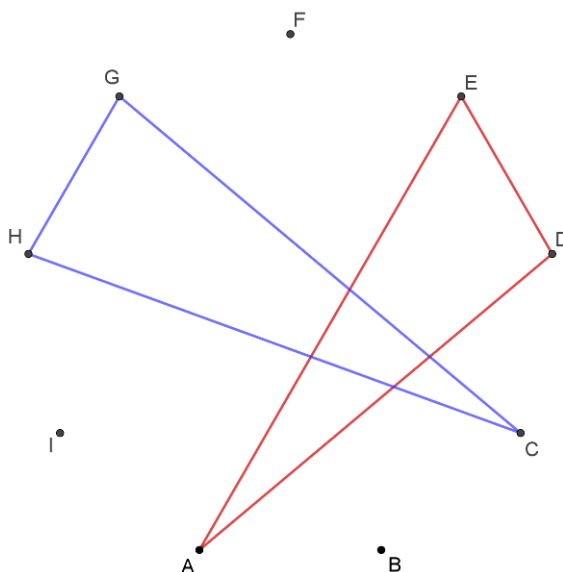
6. Kilenc színész háromfős helyzetgyakorlatokat játszik. Legkevesebb hány gyakorlatra van szükség ahhoz, hogy bármelyik két színész szerepeljen közösen?

KöMal 2018. május; C. 1487.

Megoldás:

A feladatot szemléltessük egy kilencpontú gráffal, amelynek a pontjai a színészeket jelölik. Ha két színész együtt szerepel, akkor kössük össze az őket ábrázoló pontot egy éllel. Egy helyzetgyakorlatnak egy háromszög felel meg a gráfban.

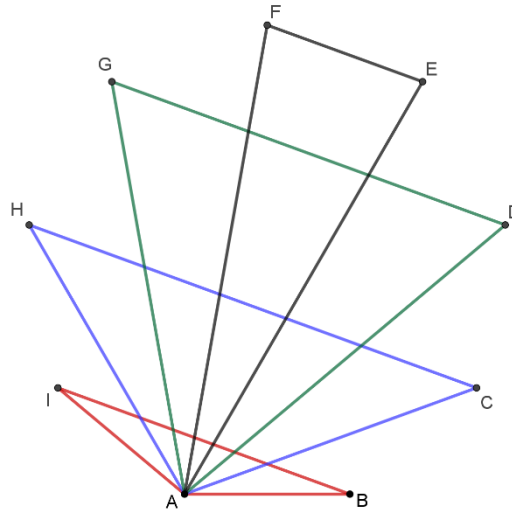
Ezen az ábrán például A, D, E illetve C, G, H játszott helyzetgyakorlatot.



Két színészt a kilenc közül $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ féle módon választhatunk ki. Ha bármely két színész szerepelt közösen, akkor a gráfban van legalább 36 él. Egy helyzetgyakorlat esetében 3 élt húzunk be, így legalább 12 háromszögnek kell lennie.

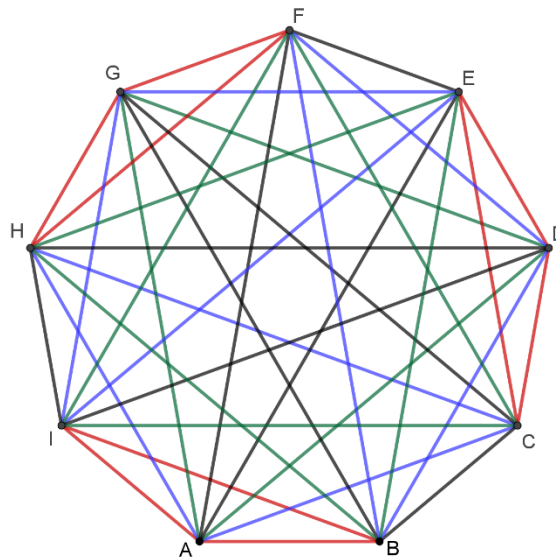
Próbáljuk meg a kilencpontú teljes gráfot 12 olyan háromszögből összeállítani, amelyeknek nincs közös oldala. Egy csúcsból 8 él indul ki, ezt 4 háromszög 2-2 oldalának kell választanunk.

Ekkor az A csúcsához tartozó színész 4 helyzetgyakorlatban játszott és mind a 8 színésztársával játszott valamikor. Induljunk el egy csúcsból szép „szimmetrikusan”:



Az AGD pontok „szabályos háromszöget” alkotnak, ezért próbáljuk meg azonos módon, „szimmetrikusan” folytatni ezekben a pontokban a háromszögek berajzolását. Majd a hiányzó élekből berajzoljuk a BEH és CFI pontokat összekötő szabályos háromszöget. Ezzel a kilenc pont mindegyike „azonos” módon szerepel a konstrukcióban.

Szerencsénk van, megkaptunk egy megfelelő teljes gráfot:

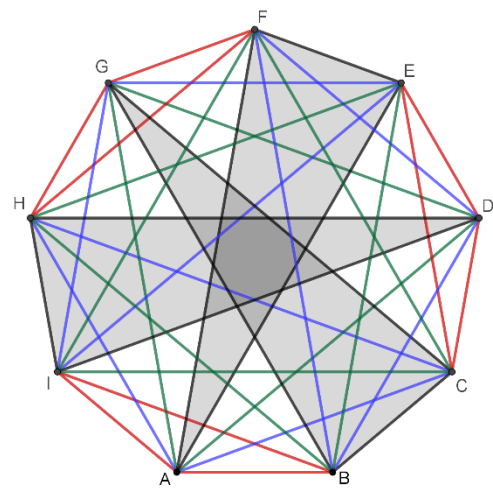
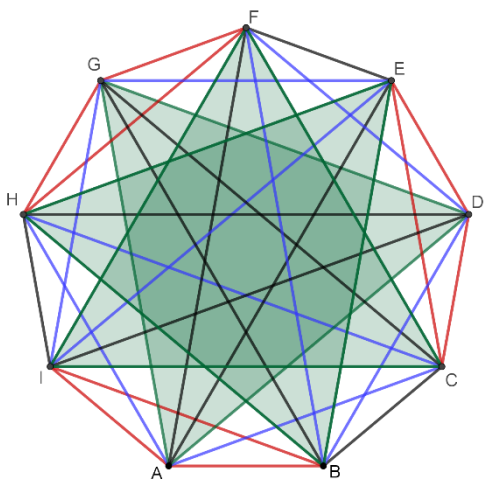
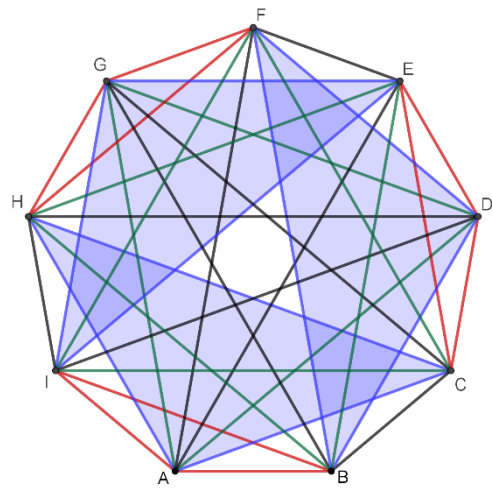
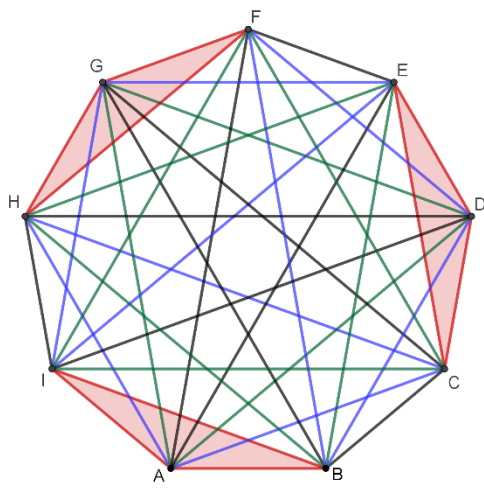


Így 12 helyzetgyakorlat elegendő ahhoz, hogy mindenki mindenkivel szerepeljen.

A következő oldalon áttekinthetően kiemeljük a háromfős helyzetgyakorlatokat.

Megjegyzés:

A feladat megoldása nem azt mondja, hogy „levezettük” a lehetséges konstrukciót, csupán megmutatja, hogyan próbálkozhatunk egy lehetséges előállítás megalkotásában.



III. Hatvány, gyök

1. Milyen számjegyre végződik a $2017^{2018} - 2018^{2019} + 2019^{2020}$

Megoldás:

Egy hatvány végződése csak az alap utolsó számjegyének hatványaitól függ. A 7 hatványainak utolsó jegyei: 7; 9; 3; 1; 7; 9; ..., tehát egy négyes periódus ismétlődik. 2018 négyes maradéka 2, ezért 2017^{2018} végződése 9.

A 8 hatványai esetében ez az ismétlődő periódus: 8; 4; 2; 6. 2019 négyvel osztva 3-at ad maradékul, így 2018^{2019} utolsó számjegye 2.

A 9 hatványai páratlan kitevő esetén 9-re, páros kitevő esetén 1-re végződnek. Tehát 2019^{2020} 1-re végződik.

$9 - 2 + 1 = 8$, így $2017^{2018} - 2018^{2019} + 2019^{2020}$ utolsó számjegye 8.

2. Melyik az a legnagyobb prímszám, amellyel az

$$5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$$

összeg minden pozitív n esetén osztható?

Pótírásbeli érettségi-felvételi, 2001. június 5.

Megoldás:

Ha $n = 1$, akkor $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} = 161 = 7 \cdot 23$. Csak a 7 és a 23 prímszám jöhet számításba. Megmutatjuk, hogy a kifejezés minden pozitív n esetén osztható 23-mal.

Alakítsuk át a kifejezést:

$$\begin{aligned} 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} &= 5 \cdot 25^n + 2^4 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n = 5 \cdot 25^n + 18 \cdot 2^n = \\ &= 5 \cdot (25^n - 2^n) + 23 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy ha a, b egész számok, n természetes szám, akkor $a^n - b^n$ osztható $(a - b)$ -vel. Ez alapján $5 \cdot (25^n - 2^n)$ osztható $25 - 2 = 23$ -mal. Ha ehhez hozzáadunk $23 \cdot 2^n$ -t, akkor 23-mal osztható kifejezést kapunk.

Megjegyzés:

A 23-mal való oszthatóságot teljes indukcióval is bizonyíthatjuk.

3. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$$\sqrt[3]{4^{-1}}; 2^{-\frac{2}{5}}; \sqrt{8^{-3}}; \sqrt[5]{2^{-4}}; 16^{-\frac{1}{3}}$$

Megoldás:

Mindegyik számot írjuk fel 2 hatványaként, használjuk a törtekitevős hatvány definícióját:

$$\sqrt[3]{4^{-1}} = ((2^2)^{-1})^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}; \quad 2^{-\frac{2}{5}}; \quad \sqrt{8^{-3}} = ((2^3)^{-3})^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{9}{2}};$$

$$\sqrt[5]{2^{-4}} = 2^{-\frac{4}{5}}; \quad 16^{-\frac{1}{3}} = (2^4)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}}$$

A kitevőket rendezzük növekvő sorrendbe:

$$-\frac{9}{2} (= -4,5) < -\frac{4}{3} < -\frac{4}{5} (= -0,8) < -\frac{2}{3} (= 0, \dot{6}) < -\frac{2}{5}$$

Az $x \rightarrow 2^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért:

$$\sqrt{8^{-3}} < 16^{-\frac{1}{3}} < \sqrt[5]{2^{-4}} < \sqrt[3]{4^{-1}} < 2^{-\frac{2}{5}}$$

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$3 \cdot 4^x + 4^{x+1} = 896$$

Középszintű érettségi 2019. május 7. (13. feladat része)

Megoldás:

$$3 \cdot 4^x + 4 \cdot 4^x = 896$$

$$7 \cdot 4^x = 896$$

$$4^x = 128$$

$$2^{2x} = 2^7$$

$$2x = 7$$

$$x = 3,5$$

Ellenőrzés:

$$3 \cdot 4^{3,5} + 4^{4,5} = 3 \cdot 2^7 + 2^9 = 3 \cdot 128 + 512 = 896$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$$

Emelt szintű érettségi 2014. október 14 (1. feladat része)

Megoldás:

$$(5^2)^{\lg x} = (5^{\lg x})^2 = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$$

$$(5^{\lg x})^2 - 4 \cdot 5^{\lg x} - 5 = 0$$

Ez az egyenlet $5^{\lg x}$ -ben másodfokú. A másodfokú egyenlet gyökei 5 és -1 .

Ha $5^{\lg x} = 5$, akkor $\lg x = 1$; $x = 10$.

Az 5 hatványai nem lehetnek negatívak, ezért az $5^{\lg x} = -1$ egyenletnek nincs megoldása.

Ellenőrzés:

Bal oldal: $25^{\lg 10} = 25^1 = 25$

Jobb oldal: $5 + 4 \cdot 5^{\lg 10} = 5 + 4 \cdot 5 = 25$

6. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$5x + 8 \cdot \sqrt{xy} + 5y = 113$$

$$(2\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) = 56$$

egyenletrendszert!

OKTV 2016/2017, I. kategória, I. forduló

Megoldás:

A négyzetgyökök miatt az egyenlet $x, y \geq 0$ valós számokra van értelmezve.

Átalakítjuk az első egyenletet:

$$5(x + y) + 8 \cdot \sqrt{xy} = 113 \quad (1)$$

A második egyenletben felbontjuk a zárójeleket és rendezzük:

$$2x + 4\sqrt{xy} + \sqrt{xy} + 2y = 56$$

$$2(x + y) + 5\sqrt{xy} = 56 \quad (2)$$

Vezessünk be új ismeretleneket: $a = x + y; b = \sqrt{xy}$.

$$\begin{cases} 5a + 8b = 113 \\ 2a + 5b = 56 \end{cases}$$

Megoldva az egyenletrendszert:

$$a = 13; b = 6$$

Az x, y értékét az alábbi egyenletrendszerből kapjuk meg:

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ \sqrt{xy} &= 6 \Rightarrow xy = 36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 13 - x \\ x(13 - x) &= 36 \end{aligned}$$

Innen a megoldások: $x_1 = 4; y_1 = 13 - x_1 = 9$ és $x_2 = 9; y_2 = 13 - x_2 = 4$.

7. Az $\begin{cases} x^{x-y} = y^2 \\ y^{x-y} = x^6 y^4 \end{cases}$ egyenletrendszernek a pozitív valós számok halmazán van olyan megoldása, amelyre:

(A) $x < \frac{1}{2}$

(B) $x < 1$

(C) $x > 1$

(D) $y < 1$

(E) $y > 2$

Bolyai Matematika Csapatverseny 2018., 11. osztály, területi forduló

Megoldás:

Szorozzuk össze a két egyenletet:

$$(xy)^{x-y} = x^6 y^6 = (xy)^6$$

A feladat feltétele szerint $xy > 0$. Ilyen esetben a két azonos alapú hatvány akkor lehet egyenlő, ha az alap 1 vagy a kitevők egyenlők.

a) Ha $xy = 1$, akkor az $x^{x-y} = y^2$ egyenlet így alakítható:

$$x^{x-\frac{1}{x}} = x^{-2}$$

Most is két eset lehet:

- az alap 1, tehát $x_1 = 1$ és $y_1 = 1$. Ezek nem szerepelnek a felsorolt esetek között.
- a kitevők egyenlők:

$$x - \frac{1}{x} = -2$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Innen a pozitív számok körében egy megoldást kapunk

$$x_2 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \approx 2,41$$

Ez alapján **(A)**; **(B)**; **(E)** igaz.

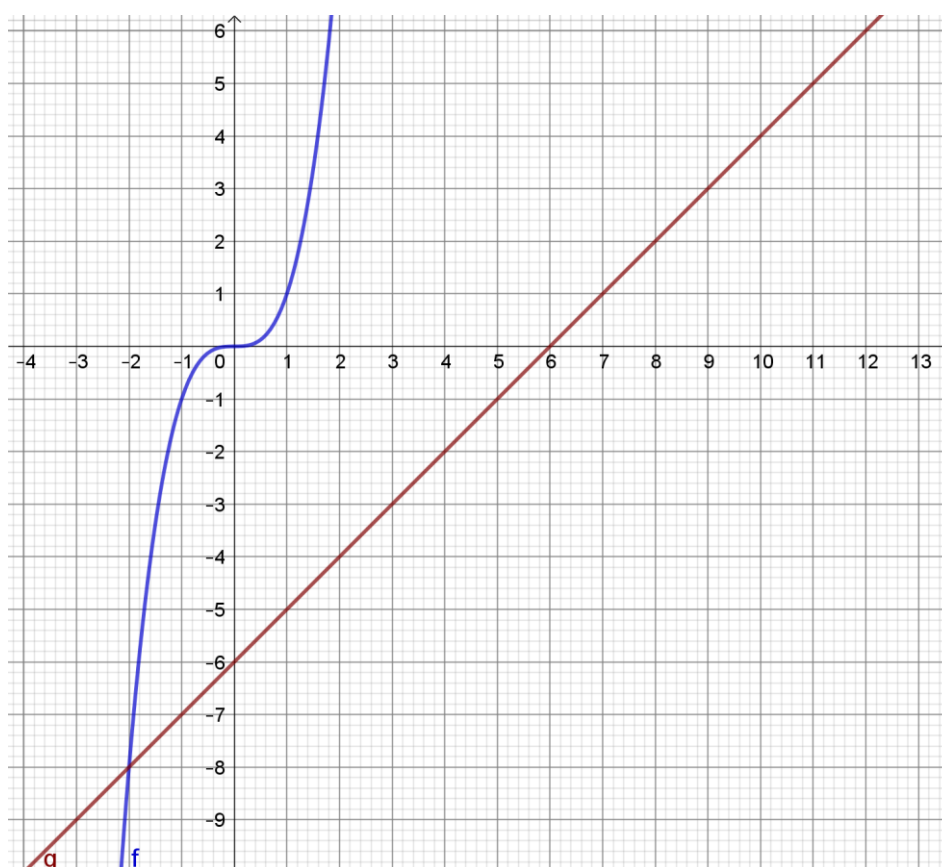
b) Ha $x - y = 6$, akkor az eredeti egyenletrendszerből az $x, y > 0$ feltétel mellett azt kapjuk, hogy

$$x^6 = y^2 \Rightarrow y = x^3$$

Az $x - y = 6$ feltételt használva:

$$x - x^3 = 6 \Rightarrow x^3 = x - 6$$

A harmadfokú egyenlet megoldásához célszerű grafikus megoldást használni



Az egyenletnek csak az $x = -2$ a megoldása. Mi most a pozitív számok körében oldjuk meg az egyenletet, tehát ebből az esetből nem kapunk megoldást.

Tehát jó megoldások **(A)**; **(B)**; **(E)**.

Megjegyzés:

A harmadfokú $x^3 = x - 6$ egyenlet megoldható így is:

Nullára rendezzük: $x^3 - x + 6 = 0$. Az egész számok körében keressük először a megoldást, ami csak a 6 osztói ($\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$) közül kerülhet ki. Behelyettesítéssel látható, hogy -2 megoldás. Ennek tudatában szorzattá alakítjuk az $x^3 - x + 6$ kifejezést:

$$\begin{aligned}x^3 - x + 6 &= x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 3x + 6 = \\&= x^2(x + 2) - 2x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

Ez a kifejezés akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

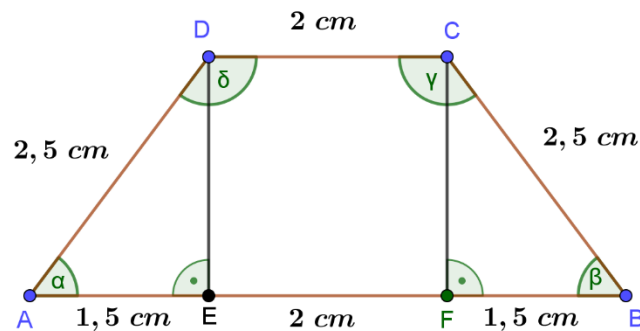
Ha $x + 2 = 0$, akkor $x = -2$. Az $x^2 - 2x + 3 = 0$ egyenletnek pedig nincs megoldása.

IV. Trigonometria

1. Az ABCD húrtrapéz oldalainak hossza: $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 2,5 \text{ cm}$, $CD = 2 \text{ cm}$ és $DA = 2,5 \text{ cm}$.
 - a) Számítsa ki a trapéz szögeit!
 - b) Határozza meg az ABC és ACD háromszögek területének arányát!

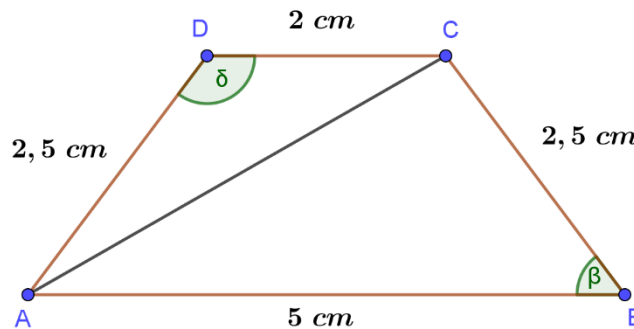
Középszintű érettségi 2016. május 3. (14.feladat része)

Megoldás:



A DE és CF magasságokat behúzva $EF = 2 \text{ cm}$, $AE = FB = 1,5 \text{ cm}$. Az AED derékszögű háromszögből $\cos \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$; $\alpha = 53,13^\circ$. α és δ kiegészítő szögek, ezért $\delta = 126,87^\circ$. A szimmetria miatt $\beta = 53,13^\circ$, $\gamma = 126,87^\circ$.

- a) Két oldalból és a közbezárt szögből számítsuk ki a háromszögek területét:



$$T_{ABC\Delta} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \beta}{2} = \frac{5 \cdot 2,5 \cdot \sin \beta}{2}$$

$$T_{ACD\Delta} = \frac{AD \cdot DC \cdot \sin \delta}{2} = \frac{AD \cdot DC \cdot \sin(180^\circ - \beta)}{2} = \frac{2,5 \cdot 2 \cdot \sin \beta}{2}$$

A két háromszög területének aránya:

$$\frac{T_{ABC\Delta}}{T_{ACD\Delta}} = \frac{5}{2}$$

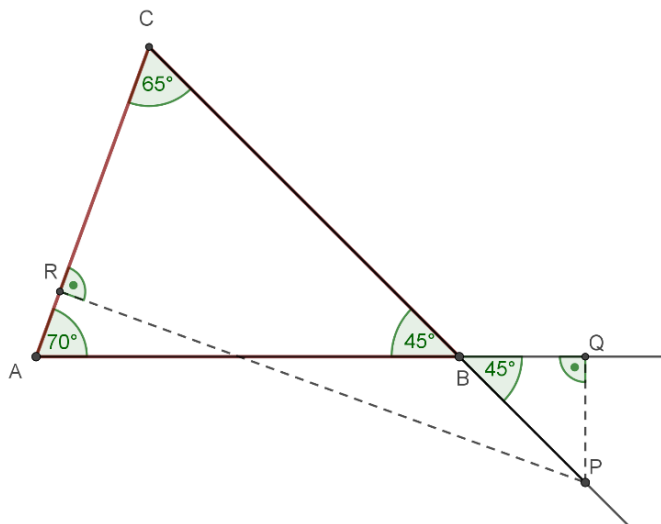
Megjegyzés:

A b) kérdésre így is megadhatjuk a választ:

Az $ABC\Delta$ és az $ACD\Delta$ magassága egyenlő (CF), ezért a területük aránya megegyezik az alapok arányával: $5:2$.

2. Az ABC háromszögben $BAC \angle = 70^\circ$; $ABC \angle = 45^\circ$. A CB oldal B -n túli meghosszabbításának egyik pontja P , amely az AB oldalegyenestől 3 cm, az AC oldalegyenestől 13 cm távolságra van. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát!

Megoldás:



A háromszög harmadik szöge 65° . $QBP \angle = ABC \angle = 45^\circ$, mert csúcsszögek. A QBP derékszögű háromszögből $BP = \frac{QP}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,24$ cm. A CRP derékszögű háromszögből

$CP = \frac{13}{\sin 65^\circ} \approx 14,34$ cm. Így $BC = CP - BP \approx 10,1$ cm.

A másik két oldalt szinusz-tétellel számoljuk ki:

$$AB = \frac{\sin 65^\circ}{\sin 70^\circ} \cdot BC \approx 9,74 \text{ cm},$$

$$AC = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 70^\circ} \cdot BC \approx 7,6 \text{ cm}.$$

Megjegyzés:

Érdekes a feladatot paraméteresen is megoldani. Ha a háromszög szögei a szokásos betűzéssel: α ; β ; γ ; $PQ = q$; $PR = r$, akkor

$$BC = \frac{r}{\sin \gamma} - \frac{q}{\sin \beta}$$

$$AB = BC \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \alpha} - \frac{q \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$AC = BC \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{r \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} - \frac{q}{\sin \alpha}.$$

3. Mennyivel egyenlő a $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$ összeg?

(A) 0 (B) 1 (C) 1,5 (D) 2 (E) Az előzőek közül egyik sem.

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2011; 11.osztály; országos

Megoldás:

Használjuk fel a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggést:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = \\
& = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 4 \cos^2 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 4 \sin^2 x} = \\
& = \sqrt{1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x + 4 \sin^2 x} = \\
& = \sqrt{(1 + \cos^2 x)^2} + \sqrt{(1 + \sin^2 x)^2} = \\
& = 1 + \cos^2 x + 1 + \sin^2 x = 2 + \cos^2 x + \sin^2 x = 3.
\end{aligned}$$

A jó válasz az (E).

4. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{\sin 2x + \sin y} + |\operatorname{tg} y - z| = 0$$

Megoldás.

Egy szám négyzete, négyzetgyöke és abszolút értéke sohasem lehet negatív. Így a bal oldal csak akkor lehet nulla, ha mindhárom tag nulla.

Ha $\cos x + \frac{1}{2} = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, akkor $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ekkor $\sin 2x_1 = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 4k\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\sin 2x_2 = \sin\left(-\frac{4\pi}{3} + 4k\pi\right) = +\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A $\sin 2x + \sin y = 0$ összefüggésből $\sin y = -\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ha $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, akkor $y_1 = \frac{\pi}{3} + 2l\pi$ vagy $y_2 = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

Ha $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, akkor $y_3 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$ vagy $y_4 = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi$.

Tehát $z = \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{3}$.

Fontoljuk meg, hogy a megfelelő számhármassokat hogyan állítjuk össze:

$$\begin{aligned}
& x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; y = \frac{\pi}{3} + 2l\pi; z = \sqrt{3}; \\
& x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; y = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi; z = -\sqrt{3}; \\
& x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; y = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi; z = -\sqrt{3}; \\
& x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; y = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi; z = \sqrt{3}; \quad k, l \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

5. Tegyük fel, hogy $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ és $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 8$. Igazoljuk, hogy

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)^2 \geq \frac{289}{8}!$$

OKTV 1981/1982, szakközépiskolásoknak, II. forduló

Megoldás:

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2 \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \\
&= \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} + 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + 2 \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \\
&= \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} + 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (*)
\end{aligned}$$

Az adott feltételek mellett $\operatorname{tg} \alpha$ és $\operatorname{tg} \beta$ pozitív, így alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget az alábbi formában:

$$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \leq \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} = 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \leq 16$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \geq \frac{1}{16}.$$

A négyzetes közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}{2}} \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} = 4$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta \geq 32.$$

A (*) kifejezést ezekkel az értékekkel becsülhetjük:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} + 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} &\geq 32 + 32 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 + 2 \cdot 32 \cdot \frac{1}{16} = \\
&= 36 + \frac{32}{256} = 36 \frac{1}{8} = \frac{289}{8}.
\end{aligned}$$

6. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 85^\circ = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 80^\circ$$

KöMal 2003. január; B. 3610.

Megoldás:

Szögfüggvények szorzatát fel tudjuk írni összeg alakban is:

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

Alkalmazzuk ezt az azonosságot és használjuk fel, hogy $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$:

$$2 \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 25^\circ = \cos 10^\circ - \cos 60^\circ$$

$$2 \cdot \sin 85^\circ \cdot \sin 60^\circ = \cos 25^\circ - \cos 145^\circ = \cos 25^\circ + \cos 35^\circ$$

$$2 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos 20^\circ - \cos 60^\circ$$

$$2 \cdot \sin 80^\circ \cdot \sin 75^\circ = \cos 5^\circ - \cos 155^\circ = \cos 5^\circ + \cos 25^\circ$$

A bizonyítandó állítás négyszerese így írható a fentiek használatával:

$$(\cos 10^\circ - \cos 60^\circ)(\cos 25^\circ + \cos 35^\circ) = (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)(\cos 5^\circ + \cos 25^\circ)$$

Bontsuk fel zárójeleket, rendezzük a kapott egyenlőséget:

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 35^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 25^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 35^\circ =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 20^\circ \cdot \cos 5^\circ + \cos 20^\circ \cdot \cos 25^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 5^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 25^\circ \\
&\quad \cos 10^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 35^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 35^\circ = \\
&\quad = \cos 20^\circ \cdot \cos 5^\circ + \cos 20^\circ \cdot \cos 25^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 5^\circ
\end{aligned}$$

A koszinuszok szorzatát így tudjuk összeggé alakítani:

$$2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

Alkalmazzuk először a baloldalt, majd a jobb oldal kétszeresének átalakítására:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot (\cos 25^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 35^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 35^\circ) = \\
&= \cos 35^\circ + \cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 25^\circ - \cos 95^\circ - \cos 25^\circ =
\end{aligned}$$

Vonjunk össze és használjuk fel, hogy $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$:

$$= \cos 35^\circ + \cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 85^\circ \quad (1)$$

És a jobb oldal:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot (\cos 20^\circ \cdot \cos 5^\circ + \cos 20^\circ \cdot \cos 25^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 5^\circ) = \\
&= \cos 25^\circ + \cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 5^\circ - \cos 65^\circ - \cos 55^\circ \quad (2)
\end{aligned}$$

Az (1) és (2) kifejezés akkor egyenlő, ha:

$$\begin{aligned}
&\cos 35^\circ + \cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 85^\circ = \\
&= \cos 25^\circ + \cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 5^\circ - \cos 65^\circ - \cos 55^\circ \\
&\cos 35^\circ + \cos 85^\circ = \cos 25^\circ + \cos 5^\circ - \cos 65^\circ - \cos 55^\circ
\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot \cos \frac{85^\circ + 35^\circ}{2} \cdot \cos \frac{85^\circ - 35^\circ}{2} = \cos 25^\circ + \cos 5^\circ - 2 \cdot \cos \frac{65^\circ + 55^\circ}{2} \cdot \cos \frac{65^\circ - 55^\circ}{2} \\
&2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 25^\circ = \cos 25^\circ + \cos 5^\circ - 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 5^\circ
\end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy $\cos 60^\circ = 0,5$:

$$\cos 25^\circ = \cos 25^\circ + \cos 5^\circ - \cos 5^\circ$$

Ez utóbbi állítás igaz. A lépéseink megfordíthatóak voltak, ezért az eredeti állítás igaz.

Megjegyzés:

A feladat megoldása után látható, hogyan tehető a feladat megoldása „szebbé”:

A bizonyítandó állítást 8-cal szorozzuk és nullára rendezzük:

$$8 \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 85^\circ - 8 \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 80^\circ = 0.$$

Próbáljuk meg most a megoldásban szereplő átalakításokat!

V.Sorozatok

1. Egy szöcske úgy ugrál a számegyenesen, hogy az egymást követő ugrásaival felváltva a nagyobb és a kisebb irányába ugrik. Az első ugrásával a nagyobb számok irányába ugrik 1 egységgel. Ezután minden ugrása 1 egységgel hosszabb, mint az előző ugrás hossza. Melyik számtól kezdte a szöcske az ugrálást, ha a 2009. ugrásával a 0-ra érkezett?

(A) – 2009 (B) – 1005 (C) – 1004 (D) 2009 (E) 4018

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009; 11. osztály; megyei

Megoldás:

Jelöljük a_n -nel azt a számot, ahová az n -edik lépés után jut a szöcske, és legyen p ahonnan indul. A lépések hosszát előjelesen használjuk annak megfelelően, hogy pozitív vagy negatív irányban történik: $+1; -2; +3; -4; +5 \dots$ Ezt használva:

$$a_1 = p + 1; a_2 = p - 1; a_3 = p + 2; a_4 = p - 2;$$

Az a sejtésünk, hogy $a_{2n-1} = p + n; a_{2n} = p - n$.

Teljes indukcióval tudjuk bizonyítani ezt a sejtést.

$n = 1; n = 2$ -re igaz az állítás.

Feltételezzük, hogy igaz $2n - 1$ -re és $2n$ -re:

$$a_{2n-1} = p + n; a_{2n} = p - n$$

Bizonyítjuk $2n + 1$ -re és $2n + 2$ -re:

A $2n + 1$ -edik lépés $2n + 1$, ezért $a_{2n+1} = a_{2n} + 2n + 1 = p - n + 2n + 1 = p + n + 1$.

A $2n + 2$ -edik lépés $-2n - 2$, így $a_{2n+2} = a_{2n+1} - 2n - 2 = p + n + 1 - 2n - 2 = p - n - 1$.

Ezzel beláttuk a sejtést.

Tehát $a_{2009} = p + 1005$. Ez akkor lesz 0, ha $p = -1005$.

A szöcske a -1005 számtól kezdett ugrálni. A jó válasz (B).

2. Az a_n sorozat elemeire teljesül, hogy $a_1 = 1337$, továbbá hogy $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$ minden n pozitív egész számra. Határozzuk meg a_{2004} értékét!

KöMaL 2004. február; B.3703.

Megoldás:

Használjuk a rekurzív összefüggést néhány lépésben:

$$a_{2004} = 1002 - a_{1002}$$

$$a_{1002} = 501 - a_{501}$$

$$a_{501} = a_{500} = 250 - a_{250}$$

$$a_{250} = 125 - a_{125}$$

$$a_{125} = a_{124} = 62 - a_{62}$$

$$a_{62} = 31 - a_{31}$$

$$a_{31} = a_{30} = 15 - a_{15}$$

$$a_{15} = a_{14} = 7 - a_7$$

$$a_7 = a_6 = 3 - a_3$$

$$a_3 = a_2 = 1 - a_1$$

$$a_1 = 1337$$

Ez alapján.

$$a_{2004} = 1002 - 501 + 250 - 125 + 62 - 31 + 15 - 7 + 3 - 1 + 1337 = 2004.$$

3. Az a_n sorozatot ($n \in \mathbb{Z}^+$) így értelmezzük: ha $1 \leq n \leq 5$, akkor $a_n = n^2$, minden más esetben $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Mennyi lehet a_{2019} ?

(A) 4 (B) 16 (C) 17 (D) 22 (E) az előzőek egyike sem

Bolyai Matematika Csapatverseny 2019, 11. osztály, körzeti forduló

Megoldás:

A rekurzív szabály csak $n \geq 6$ esetén használható. Nem ismerjük $a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ értékét, így a sorozat nincs egyértelműen meghatározva. $a_{2019}; a_{2018}; a_{2017}; a_{2016}; a_{2015}$ értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk.

$$a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 9; a_4 = 16; a_5 = 25$$

A további tagokhoz pedig használhatjuk a rekurzív képzési szabályt „visszafelé” ebben a formában $n \geq 6$ értékekre:

$$a_n = a_{n+5} + a_{n+1} - a_{n+4}.$$

Tehát a jó válaszok: (A); (B); (C); (D), mert a_{2019} értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk.

Például, ha $a_{2019} = 4$, akkor legyen $a_{2018} = a_{2017} = a_{2016} = a_{2015} = 0$.

Ekkor:

$$a_{2014} = a_{2019} + a_{2015} - a_{2018} = 4 + 0 - 0 = 4$$

$$a_{2013} = a_{2018} + a_{2014} - a_{2017} = 0 + 4 - 0 = 4$$

$$a_{2012} = a_{2017} + a_{2013} - a_{2016} = 0 + 4 - 0 = 4$$

$$a_{2011} = a_{2016} + a_{2012} - a_{2015} = 0 + 4 - 0 = 4$$

Azt gondolnánk, hogy mindig 4. De nem így van:

$$a_{2010} = a_{2015} + a_{2011} - a_{2014} = 0 + 4 - 4 = 0$$

$$a_{2009} = a_{2014} + a_{2010} - a_{2013} = 4 + 0 - 4 = 0$$

$$a_{2008} = a_{2013} + a_{2009} - a_{2012} = 4 + 0 - 4 = 0$$

$$a_{2007} = a_{2012} + a_{2008} - a_{2011} = 4 + 0 - 4 = 0$$

Innentől kezdve újra négy darab 4-es, majd négy darab 0 jön és így tovább...

$$a_{2006} = a_{2011} - a_{2007} - a_{2010} = 4 - 0 - 0 = 4 \dots$$

Megjegyzés:

Mi lenne, ha a rekurziós feltétel $n \geq 1$ esetén igaz lenne. (Feltételezem, hogy a versenyzők nagy számban így hibáztak.) Számítsuk ki a sorozat néhány tagját. Az az érzésünk, hogy a sorozat ismétlődni fog.

$$a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 9; a_4 = 16; a_5 = 25$$

A további tagokhoz használjuk a rekurzív képzési szabályt ebben a formában:

$$\begin{aligned} a_{n+5} &= a_{n+4} - a_{n+1} + a_n \\ a_6 &= a_5 - a_2 + a_1 = 25 - 4 + 1 = 22 \\ a_7 &= a_6 - a_3 + a_2 = 22 - 9 + 4 = 17 \\ a_8 &= a_7 - a_4 + a_3 = 17 - 16 + 9 = 10 \\ a_9 &= a_8 - a_5 + a_4 = 10 - 25 + 16 = 1 \\ a_{10} &= a_9 - a_6 + a_5 = 1 - 22 + 25 = 4 \\ a_{11} &= a_{10} - a_7 + a_6 = 4 - 17 + 22 = 9 \\ a_{12} &= a_{11} - a_8 + a_7 = 9 - 10 + 17 = 16 \\ a_{13} &= a_{12} - a_9 + a_8 = 16 - 1 + 10 = 25 \end{aligned}$$

Láthatóan ettől kezdve a tagok ismétlődnek. A sorozat nyolc számot ismét periodikusan:

$$a_{n+8} = a_n$$

2019 nyolccal osztva 3-at ad maradékul, így $a_{2019} = a_3 = 9$. Tehát (E) lenne a jó válasz.

4. Határozzuk meg azokat az n pozitív egészeket, amelyekre

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$$

négyszetszám.

KöMal 2018. március; B.4945.

Megoldás:

A kifejezést mértani sorozatok összegére tudjuk bontani, a mértani sorozatok összegképletét használva zárt alakban tudjuk megadni:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \\ 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} &= 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^n - 2 \\ 2^2 + \dots + 2^{n-1} &= 2^2 \cdot \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} = 2^n - 2^2 \\ 2^3 + \dots + 2^{n-1} &= 2^3 \cdot \frac{2^{n-3} - 1}{2 - 1} = 2^n - 2^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Az utolsó tagra is igaz:

$$2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1}$$

Ezeket az egyenleteket összeadva kapjuk a feladatban szereplő kifejezést:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} &= n \cdot 2^n - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = n \cdot 2^n - \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= (n - 1) \cdot 2^n + 1 \end{aligned}$$

Azt keressük, hogy milyen k egész szám esetén áll fenn:

$$(n - 1) \cdot 2^n + 1 = k^2$$

$$(n - 1) \cdot 2^n = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$$

Ha $n = 1$, akkor $(n - 1) \cdot 2^n + 1 = 1$, ami négyzetszám. Ha $n \geq 2$, akkor $(n - 1) \cdot 2^n$ pozitív és

$$(n - 1) \cdot 2^n = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1).$$

$k + 1$ és $k - 1$ különbsége 2. Az $(n - 1) \cdot 2^n$ szorzat páros, így a két tényező mindegyikének párosnak kell lennie, de csak az egyik lehet 4-gyel osztható. Ebből következik, hogy az egyik tényező legalább 2^{n-1} , a másik viszont legfeljebb $2 \cdot (n - 1)$. Így

$$2^{n-1} \leq k + 1 = (k - 1) + 2 \leq 2(n - 1) + 2 = 2n.$$

A $2^{n-1} \leq 2n$ feltétel csak kis pozitív egész számokra teljesül, mert a 2-hatványok gyorsan nőnek.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $n \geq 5$ természetes szám esetén $2^{n-1} > 2n$.

Ha $n = 5$:

$$2^4 = 16 > 2 \cdot 5 = 10.$$

Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 5$ természetes szám esetén $2^{n-1} > 2n$.

Bizonyítunk $n + 1$ -re. $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2 \cdot 2n > 2n + 2 = 2(n + 1)$. Tehát az állításunk valóban igaz.

Nézzük meg, hogy $n < 5$ esetében mikor lesz a kifejezés négyzetszám.

Ha $n = 1; 2; 3; 4$ akkor $(n - 1) \cdot 2^n + 1 = 1; 5; 17; 49$. Tehát $n = 1$ és $n = 4$ esetén kapunk négyzetszámot.

5. Egy papírlapra felírtuk a pozitív egész számokat n -től $2n$ -ig. Azt vettük észre, hogy páros számok összege 2013-mal nagyobb, mint a felírt páratlan számok összege.

Mettől meddig írtuk fel a számokat?

OKTV 2012/2013, I. kategória, döntő

Megoldás I:

Ha n páros, akkor:

A felírt páros számok: $n; n + 2; n + 4; \dots; 2n$, a páratlan számok $n + 1; n + 3; \dots; 2n - 1$. Két számtani sorozatot kaptunk. Az elsőnek $\frac{n+2}{2}$ tagja van, a másíknak $\frac{n}{2}$.

A számtani sorozat összegképletét használva a páros számok összege: $\frac{(n+2n) \cdot \frac{n+2}{2}}{2} = \frac{3n(n+2)}{4}$,

a páratlan számok összege: $\frac{(n+1+2n-1) \cdot \frac{n}{2}}{2} = \frac{3n^2}{4}$.

Keressük azt az n -et, amelyre:

$$\frac{3n(n+2)}{4} - \frac{3n^2}{4} = 2013$$

$$\frac{6n}{4} = 2013$$

$$n = 1342.$$

Ha n páratlan, akkor:

A páros számok: $n + 1; n + 3; \dots; 2n$. Összesen $\frac{n+1}{2}$ szám, amelyek összege: $\frac{(n+1+2n) \cdot \frac{n+1}{2}}{2} = \frac{(3n+1)(n+1)}{4}$.

$\frac{n+1}{2}$ darab páratlan szám van: $n; n + 2; \dots; 2n - 1$, ezek összege $\frac{(n+2n-1) \cdot \frac{n+1}{2}}{2} = \frac{(3n-1)(n+1)}{4}$.

Most az alábbi egyenlet megoldását keressük:

$$\frac{(3n+1)(n+1)}{4} - \frac{(3n-1)(n+1)}{4} = 2013$$

$$\frac{2(n+1)}{4} = 2013$$

$$n = 4025$$

Tehát 1342-től 2684-ig vagy 4025-től 8050-ig adtuk össze a számokat.

Megoldás II:

Nem szükséges a páros és a páratlan számokat összeadnunk, ahhoz, hogy a különbségüket megkapjuk. Használjuk fel azt, hogy két szomszédos egész szám különbsége 1.

Ha n páros, akkor a különbség:

$$\underbrace{2n - (2n - 1)}_1 + \underbrace{(2n - 2) - (2n - 3)}_1 + \dots + n = \frac{n}{2} \cdot 1 + n = \frac{3n}{2} = 2013 \Rightarrow n = 1342.$$

Ha n páratlan, akkor a különbség:

$$\underbrace{2n - (2n - 1)}_1 + \underbrace{(2n - 2) - (2n - 3)}_1 + \dots + \underbrace{(n + 1) - n}_1 = \frac{n + 1}{2} = 2013 \Rightarrow n = 4025.$$

Tehát 1342-től 2684-ig vagy 4025-től 8050-ig adtuk össze a számokat.

6. Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.

- a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám?
- b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik?

Középszintű érettségi 2006. február 21.

Megoldás:

- a) Ezek a számok számtani sorozatot alkotnak, a differencia 2.

A sorozat első tagját jelöljük a_1 -gyel. Ekkor $a_{55} = a_1 + 54 \cdot 2 = a_1 + 108$. Az 55 szám összege:

$$\frac{(a_1 + a_1 + 108) \cdot 55}{2} = 3905$$

$$(a_1 + 54) \cdot 55 = 3905$$

$$a_1 = 17$$

$$a_{55} = 17 + 108 = 125$$

Az első összeadott páratlan szám a 17, az ötvenötödik a 125.

- b) A számnak ötre kell végződnie. Az első ilyen a 25, de ebben csak az 5 fordul elő prímtényezőként. A következő a $35 = 5 \cdot 7$, ami megfelel a feltételeknek.

7. Egy mértani sorozat első eleme és hányadosa egész szám. Az első három elem összege 21, az n -edik és az azt megelőző két elem összege 336. Írja fel a mértani sorozat első n elemét!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 2000. május 22.

Megoldás:

A sorozat első eleme a_1 , a hányadosa q .

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = a_1(1 + q + q^2) = 21$$

$$\frac{a_n}{q^2} + \frac{a_n}{q} + a_n = \frac{a_n}{q^2}(1 + q + q^2) = \frac{a_1q^{n-1}}{q^2}(1 + q + q^2) = a_1q^{n-3}(1 + q + q^2) = 336$$

Az egyenletek egyik oldala sem nulla, így eloszthatjuk a második egyenletet az elsővel:

$$q^{n-3} = 16.$$

q egész szám, ezért a 16-ot írjuk fel hatvány alakban. $16 = 16^1 = (\pm 4)^2 = (\pm 2)^4$.

Ha $q = 16$, akkor $n = 4$. Ekkor $a_1(1 + 16 + 16^2) = 21$ lenne, de ez nem ad a_1 -re egész megoldást.

Ha $q = 4$, akkor $n = 5$. $a_1(1 + 4 + 4^2) = 21$, azaz $a_1 = 1$. Ekkor a sorozat első öt eleme 1, 4, 16, 64, 256. Ezek valóban megoldások: $1 + 4 + 16 = 21$; $16 + 64 + 256 = 336$.

Ha $q = -4$, akkor $n = 5$. $a_1(1 - 4 + 4^2) = 21$ lenne, de ekkor a_1 nem egész szám.

Ha $q = 2$, akkor $n = 7$. $a_1(1 + 2 + 2^2) = 21$, tehát $a_1 = 3$. Ekkor a sorozat első hét eleme: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192. Ezekre a számokra is teljesülnek a feladat feltételei.

Ha $q = -2$, akkor $n = 7$. $a_1(1 - 2 + 2^2) = 21$, tehát $a_1 = 7$. Ekkor a sorozat első hét eleme: 7, -14, 28, -56, 112, -224, 448. Ezek a számok is teljesítik a feltételeket.

VI. Valószínűségszámítás, statisztika

1. Egy véletlen kísérlet során két szabályos dobókockával dobunk egyszerre. Ezt a kísérletet többször egymás után elvégezzük. Egy-egy dobás után mindig feljegyezzük a két dobott szám összegét, és ezt az összeget tekintjük a kísérlet kimenetelének.

Az első kilenc kísérlet után ezeket az összegeket jegyeztük fel: 9, 3, 5, 4, 11, 6, 9, 6, 10.

- a) Számítsa ki a kilenc számból álló adatsokaság terjedelmét, mediánját, átlagát és szórását!

Legyen az A esemény az, hogy a kísérlet kimenetele 4-nél nagyobb, de 9-nél kisebb.

- b) Adja meg az A esemény relatív gyakoriságát az első kilenc kísérlet után!

- c) Számítsa ki az A esemény valószínűségét!

Középszintű érettségi (idegen nyelven) 2019. május 7.

Megoldás:

- a) A számokat felírjuk növekvő sorrendben: 3; 4; 5; 6; 6; 9; 9; 10; 11.

A legnagyobb és legkisebb szám különbsége 8, tehát az adatsokaság terjedelme 8.

A középső szám a 6, ezért a medián 6.

Az átlag: $\frac{3+4+5+6+6+9+9+10+11}{9} = 7$.

A szórás: $\sqrt{\frac{(7-3)^2+(7-4)^2+(7-5)^2+2\cdot(7-6)^2+2\cdot(7-9)^2+(7-10)^2+(7-11)^2}{9}} = \frac{8}{3} \approx 2,67$

- b) A 4-nél nagyobb és 9-nél kisebb számok: 5; 6; 6, azaz három darab.

A relatív gyakoriság $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

- c) Az alábbi táblázat mutatja a két kockadobás lehetséges értékeit és azok összegét:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Az összes eset 36. A kedvező eseteket a kék szín jelzi, ezek száma 20.

Az A esemény valószínűsége: $\frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 0,556$.

2. András és Balázs kosárra dobásban méri össze erejét. Annak a valószínűsége, hogy András a kosárba talál 0,7; míg Balázs 0,4 valószínűséggel dob kosarat.

Egy játszmában mindegyikük egyszer dob. Ha András talál és Balázs nem, akkor András nyer. Ha Balázs talál és András nem, akkor Balázs nyer. Minden más esetben a játszma döntetlen.

Mennyi a valószínűsége, hogy két egymás utáni játszma mindegyike döntetlen lesz?

OKTV 2007/2008, I. kategória, I. forduló

Megoldás:

András $1 - 0,7 = 0,3$ valószínűséggel, Balázs $1 - 0,4 = 0,6$ valószínűséggel véti el a dobást.

Egy játszma akkor lesz döntetlen, ha vagy mindketten kosarat dobnak vagy mindketten hibáznak.

Annak a valószínűsége, hogy mindkettő betalál, $0,7 \cdot 0,4 = 0,28$, hiszen a két dobás egymástól független. Ugyanígy annak a valószínűsége, hogy egyik sem dob kosarat, $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$. Így a játszma $0,28 + 0,18 = 0,46$ valószínűséggel lesz döntetlen.

Két egymás utáni játszma független esemény ezért annak a valószínűsége, hogy mindkettő döntetlen, $0,46 \cdot 0,46 = 0,2116$.

3. Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

- a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk?
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz!

Emelt szintű érettségi 2007. október 25.

Megoldás:

- a) A hat dobás mindegyike hatféle lehet, ezért az összes eset száma 6^6 . Ha különböző számokat dobunk, akkor az első kockával 6-félét, a másodikkal 5-félét, $\dots$, a hatodikkal 1-félét dobhatunk, tehát a kedvező esetek száma $6!$. A keresett valószínűség: $\frac{6!}{6^6} = 0,015$.

- b) Ekkor 34-et, 35-öt vagy 36-ot dobunk.

$$34 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 4 = 6 + 6 + 6 + 6 + 5 + 5.$$

Az első eset 6-féle módon jöhet létre, mert a négyes 6 helyre kerülhet. A második lehetőségénél azt a két helyet kell kiválasztanunk a hatból, ahová az ötösök kerülnek. Ezt $\binom{6}{2} = 15$ -féle módon tehetjük meg.

Tehát 34-et 21 különböző módon dobhatunk.

$$35 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 5. \text{ Az ötöst 6 helyre tehetjük, ilyen eset 6 van.}$$

$$36 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6. \text{ Ez 1 eset.}$$

A kedvező esetek száma $21 + 6 + 1 = 28$, az összes eset száma 6^6 .

$$\frac{28}{6^6} = 0,0006 \text{ valószínűséggel lesz a dobott számok összege legalább 34.}$$

4. Magyar kártyából öt lapot húzva melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy az öt lap azonos színű vagy annak, hogy van köztük négy azonos szám vagy figura?

KöMal 2015. március; C.1284.

Megoldás:

A magyar kártya 32 lapot tartalmaz. A kártyák színe 4-féle: piros, zöld, tök, makk. Minden színben négy szám: VII; VIII; IX; X és négy figura: alsó, felső, király, ász van. (Ld 3. oldal 4. feladat)

Öt lapot $\binom{32}{5}$ féle módon húzhatunk. Az összes eset száma mindkét esetben ennyi.

Ha öt azonos színű lapot húzunk, akkor ez 4-féle színben történhet meg, és a 8 azonos színű lapból kell ötöt kiválasztanunk. Ekkor a kedvező esetek száma $4 \cdot \binom{8}{5} = 224$.

Ha 4 azonos számot vagy figurát húztunk, akkor mind a négy színből húztunk. Ezt 8-féle módon tehetjük meg. Az ötödik lapot pedig a maradék 28 lapból kell választani. Ilyen esetben a kedvező esetek száma $8 \cdot 28 = 224$.

Tehát a két esetben mind a kedvező esetek száma, mind az összes eset száma azonos, tehát a valószínűség is azonos ($\approx 0,00111$).

5. Egy 30 fős osztályban a karácsonyi ajándékozásról sorsolással döntenek. Minden diák nevét felírják egy papírra, majd a 30 papírdarabot egy sapkába teszik. Névsor szerinti sorrendben mindenki kihúz egy papírt a sapkából és a rajta szereplő embernek készít ajándékot. Elképzelhető, hogy valaki saját magát ajándékozza meg.

Az ajándékozás úgy történik, hogy először jelentkeznek azok, akik magukat húzták, majd a többi diák közül a legfiatalabb diák átadja ajándékát az általa húzott embernek, és innentől aki éppen megkapja az ajándékát, az lesz a soron következő ajándékot átadó ember. Ha valahol elakad a sor, azaz olyan diák kapja az ajándékot, aki már a sajátját átadta, de még nem mindenki adta át illetve kapta meg az ajándékát, akkor az utóbbiak közül a legfiatalabb újra kezdi.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy osztályban hat egymást követő év karácsonyi ajándékozása során lesz legalább egy olyan év, amelyben senki nem húzza magát és a sor sem akad el? (Az osztálylétszám minden évben ugyanannyi.)

OKTV 2007/2008, II. kategória, II. forduló

Megoldás:

Nézzük meg, hogy egy év esetében mi a valószínűsége annak, hogy nem akad el a sor és nem húzza senki önmagát.

Az első ember 30 féle nevet húzhat, a következő 29-et, a következő 28-t, ..., Így 30! féle húzási sorrend lehet.

Ha nem akad el a sor ajándékozás közben, és senki nem húzza önmagát, akkor a diákok a húzásainak megfelelően körbe állhatnak, és mindenki pl. a jobb szomszédját ajándékozza. Ekkor a legfiatalabb 29 embernek adhatja az ajándékát, a következő 28-nak, a következő 27-nek, ... az utolsó pedig a legfiatalabbnak. Ez 29! lehetőség.

Ezek alapján $\frac{29!}{30!} = \frac{1}{30}$ valószínűséggel körbeér az ajándékozás. Tehát $\frac{29}{30}$ valószínűséggel pedig elakad.

Az egyes években történő húzások egymástól függetlenek, ezért $\left(\frac{29}{30}\right)^6$ valószínűséggel hat éven keresztül megakad a húzás.

Tehát $1 - \left(\frac{29}{30}\right)^6 \approx 0,184$ valószínűséggel legalább egy évben senki nem húzza önmagát és nem akad el a sor.

6. Egy 1 milliárd lakosú országban egy olcsó AIDS teszt bevezetését tervezik. Tudjuk, hogy kb. minden ezredik ember fertőzött. Kiderült, hogy a betegek 99,9%-ánál pozitív, viszont sajnos az egészségesek 0,1%-ánál is pozitív eredményt ad a teszt. Ilyen paraméterek mellett elvetették a használatát. Egy matematikus azt javasolta, hogy végezzék el kétszer egymás után a vizsgálatot, és ha mindkettő pozitív, csak akkor küldjék orvoshoz a páciens. Így már bevezethető lett a teszt. A következő kérdésekkel arra keressük a választ, hogy mi ennek a magyarázata.

- a) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha az első teszt pozitív.
- b) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha mind a két teszt pozitív.

OKTV 2008/2009, II. kategória, II. forduló

Megoldás I:

- a) Az 1 milliárd emberből 1 000 000 a beteg, 999 000 000 egészséges. A teszt a betegek közül 999 000-nél lesz pozitív, az egészségesek közül 999 000-nél jelez hibásan.

Tehát 999 000 + 999 000 pozitív teszt közül 999 000 jelez valóban betegséget. Annak a valószínűsége, hogy beteg valaki:

$$\frac{999\,000}{2 \cdot 999\,000} = 0,5 = 50\%.$$

Érthető, hogy ilyen módon nem vezethető be a teszt.

- b) Az 1 000 000 betegen elvégezve a két tesztet $1\,000\,000 \cdot 0,999^2 = 998001$ esetben kapunk két pozitív tesztet. A 999 000 000 egészséges emberen $999\,000\,000 \cdot 0,001^2 = 999$ lesz a kétszeres pozitív teszt. Összesen $998001 + 999 = 999000$ esetben jelez mindkétszer betegséget a teszt, ebből 998001 a valóban beteg. Tehát most annak a valószínűsége, hogy helyesen jelzi a betegséget a teszt:

$$\frac{998001}{999000} = 0,999 = 99,9\%.$$

Ilyen eredményességgel már bevezethető lehet a teszt.

Megoldás II:

A feladatban szereplő adatokkal nem azt tudjuk mondani, hogy pontosan 1 000 000 beteg van, eggyel sem több vagy kevesebb, hanem azt, hogy ebben az országban annak a valószínűsége, hogy egy ember beteg, 0,1%. A tesztről is jobb így fogalmazni: a betegeknél 99,9% valószínűséggel mutatja ki az AIDS-t, az egészségeseknél 0,1% valószínűséggel jelez hibásan betegséget.

Itt egy feltételes valószínűsége vagyunk kíváncsiak: Mi a valószínűsége annak, hogy valaki beteg, ha az elvégzett teszt pozitív. A_1 legyen az az esemény, hogy valaki beteg, A_2 pedig az, hogy valaki egészséges. A_1, A_2 teljes eseményrendszer. B jelölje azt az eseményt, hogy a teszt pozitív.

Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0,001$, $P(A_2) = 0,999$, $P(B|A_1) = 0,999$, $P(B|A_2) = 0,001$.

- a) Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi a valószínűsége annak, hogy valaki beteg, ha egy elvégzett teszt pozitív, tehát $P(A_1|B) = ?$

A Bayes-tétel szerint:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{0,999 \cdot 0,001}{0,999 \cdot 0,001 + 0,001 \cdot 0,999} = 0,5.$$

Tehát nem érdemes alkalmazni a tesztet.

- b) Ebben az esetben B_1 jelölje azt az eseményt, hogy az első teszt pozitív, B_2 azt, hogy a második. A kérdés $P(A_1|B_1 \cdot B_2)$ értéke. B_1 és B_2 független események, ezért $P(B_1 \cdot B_2|A_1) = 0,999^2$, $P(B_1 \cdot B_2|A_2) = 0,001^2$.

Újra alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$\begin{aligned} P(A_1|B_1 \cdot B_2) &= \frac{P(B_1 \cdot B_2|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B_1 \cdot B_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(B_1 \cdot B_2|A_2) \cdot P(A_2)} = \\ &= \frac{0,999^2 \cdot 0,001}{0,999^2 \cdot 0,001 + 0,001^2 \cdot 0,999} = 0,999. \end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy alkalmazható lehet a teszt.

VII. Feladatlapok

I. Kombinatorika

1. Egy férfi ruhatárában öt kockás ing található, ebből kettő barna, egy kék. Hét barna ingje van, ebből három csíkos. A három kék ing között viszont nincsen csíkos. Ezeken kívül csak nyolc piros ingje van, aminek a fele csíkos. Tudjuk továbbá, hogy három nadrágot hord: egy kék csíkosat, egy barna kockásat, illetve egy szürke csíkosat. Hányféleképpen vehet föl egy nadrágot és egy inget, ha nem vesz kéket barnához és csíkosat kockáshoz?

KöMal 2016. december; C. 1385.

2. Az Országos Tarka Pénztárat is elérte a gazdasági válság. Február első hete számukra fekete hét volt. A hét mind az öt napján esett a cég részvénye: két nap 5, egy nap 6, és szintén két nap 8 százalékkal. Hányféle sorrendben következhetett ez be a „fekete” héten?

(A) 5 (B) 6 (C) 30 (D) 60 (E) 120

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009; 11. osztály; országos

3. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata és összege is 12?

Emelt szintű érettségi 2019. május 7.

4. A magyar kártya 32 lapos, négy színben (piros, zöld, tök, makk) 4-4 figurát (ász, király, felső, alsó) és 4-4 számot tartalmaz (VII; VIII; IX; X).

Kihúzunk a magyar kártyából 5 lapot. Hány olyan eset van, amikor a kihúzott lapok között

- a) mindegyik makk;
 - b) nincs király;
 - c) pontosan 2 király és 2 hetes van;
 - d) pontosan 2 király és 2 piros van;
 - e) legalább két zöld van?
5. Egy teniszkлуб tagjai elhatározzák, hogy minden lehetséges módon párokat alakítanak, majd minden pár minden másik párral játszik pontosan egy mérkőzést. Hány tagja van a teniszkлубnak, ha összesen 210 mérkőzésre kerül sor?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2015; 11. osztály megyei

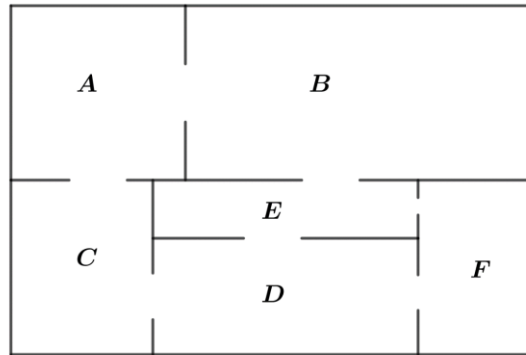
6. Hányféleképpen juthatunk a koordináta-rendszer origójából a $(4; 2)$ pontba, ha 10 lépést teszünk, minden lépésünk egységnyi hosszú és párhuzamos a tengelyek valamelyikével?

OKTV 2012/2013, II. kategória, I. forduló

II. Gráfok

1. Az ábrán egy kis múzeum alaprajzát látjuk. A múzeum termei közötti kapcsolatot gráffal is szemléltethetjük. A gráf pontjai a termek, élei pedig az átjárók a termek között. (Egy él egy átjárót szemléltet két terem között.)

Rajzolja fel a múzeum termeit és átjáróit szemléltető gráfot!



Középszintű érettségi 2019.május 7.

2. a) Van-e olyan 7 főből álló társaság, amelyben mindenki pontosan három embert ismer?
b) Van-e olyan 6 főből álló társaság, amelyben mindenki pontosan három embert ismer?

3. a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)!
Válaszait indokolja!

- I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú.
- II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.
- III. Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F . Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A -nak legalább annyi ismerőse van, mint B -nek, B -nek legalább annyi ismerőse van, mint C -nek, és így tovább, E -nek legalább annyi ismerőse van, mint F -nek.

- b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

Emelt szintű érettségi 2014.október 14.

4. Több település közötti legkisebb költségű vezetékhálózat tervezésekor először egy teljes gráfot készítettek. Ebben a gráfban minden települést a gráf egy csúcsával, minden vezetékes kapcsolatot a gráf egy-egy élével jelöltek, majd a gráf minden élére ráírták, hogy mennyibe kerülne az adott kapcsolat kiépítése. Ezután egyesével kitörölték a „költséges éleket” úgy, hogy a törlés után megmaradó gráf összefüggő maradjon. A teljes gráf élei kétharmadának törlése után végül egy (a legkisebb költségű hálózatot megadó) fagráfot kaptak.

Hány település szerepelt a tervben?

Emelt szintű érettségi (idegen nyelven) része, 2019. május 7.

5. Kilenc színész háromfős helyzetgyakorlatokat játszik. Legkevesebb hány gyakorlatra van szükség ahhoz, hogy bármelyik két színész szerepeljen közösen?

KöMal 2018. május; C. 1487.

6. Adott n ember között hányféle olyan ismeretségi kapcsolatrendszer lehet, hogy mindenki páratlan sok másikat ismer (az ismeretség kölcsönös)?

OKTV 2013/2014, III. kategória, I. forduló

III. Hatvány, gyök

1. Milyen számjegyre végződik a $2017^{2018} - 2018^{2019} + 2019^{2020}$

2. Melyik az a legnagyobb prímszám, amellyel az

$$5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$$

összeg minden pozitív n esetén osztható?

Pótírásbeli érettségi-felvételi, 2001. június 5.

3. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$$\sqrt[3]{4^{-1}}; 2^{-\frac{2}{5}}; \sqrt{8^{-3}}; \sqrt[5]{2^{-4}}; 16^{-\frac{1}{3}}$$

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$3 \cdot 4^x + 4^{x+1} = 896$$

Középszintű érettségi 2019. május 7. (13. feladat része)

5. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$$

Emelt szintű érettségi 2014. október 14 (1. feladat része)

6. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$5x + 8 \cdot \sqrt{xy} + 5y = 113$$

$$(2\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) = 56$$

egyenletrendszert!

OKTV 2016/2017, I. kategória, I. forduló

7. Az $\begin{cases} x^{x-y} = y^2 \\ y^{x-y} = x^6 y^4 \end{cases}$ egyenletrendszernek a pozitív valós számok halmazán van olyan megoldása, amelyre:

(A) $x < \frac{1}{2}$

(B) $x < 1$

(C) $x > 1$

(D) $y < 1$

(E) $y > 2$

Bolyai Matematika Csapatverseny 2018., 11. osztály, területi forduló

IV. Trigonometria

1. Az ABCD húrtrapéz oldalainak hossza: $AB = 5$ cm, $BC = 2,5$ cm, $CD = 2$ cm és $DA = 2,5$ cm.

a) Számítsa ki a trapéz szögeit!

b) Határozza meg az ABC és ACD háromszögek területének arányát!

Középszintű érettségi 2016. május 3. (14.feladat része)

2. Az ABC háromszögben $\angle BAC = 70^\circ$; $\angle ABC = 45^\circ$. A CB oldal B-n túli meghosszabbításának egyik pontja P, amely az AB oldalegyenestől 3 cm, az AC oldalegyenestől 13 cm távolságra van. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát!

3. Mennyivel egyenlő a $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$ összeg?

(A) 0 (B) 1 (C) 1,5 (D) 2 (E) Az előzőek közül egyik sem.

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2011; 11.osztály; országos

4. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{\sin 2x + \sin y} + |\operatorname{tg} y - z| = 0$$

5. Tegyük fel, hogy $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ és $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 8$. Igazoljuk, hogy

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)^2 \geq \frac{289}{8}!$$

OKTV 1981/1982, szakközépiskolásoknak, II. forduló

6. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 85^\circ = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 80^\circ$$

KöMaL 2003. január; B. 3610.

V.Sorozatok

1. Egy szöcske úgy ugrál a számegyenesen, hogy az egymást követő ugrásaival felváltva a nagyobb és a kisebb irányába ugrik. Az első ugrásával a nagyobb számok irányába ugrik 1 egységnyi. Ezután minden ugrása 1 egységgel hosszabb, mint az előző ugrás hossza. Melyik számtól kezdte a szöcske az ugrálást, ha a 2009. ugrásával a 0-ra érkezett?

(A) – 2009 (B) – 1005 (C) – 1004 (D) 2009 (E) 4018

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009; 11. osztály; megyei

2. Az a_n sorozat elemeire teljesül, hogy $a_1 = 1337$, továbbá hogy $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$ minden n pozitív egész számra. Határozzuk meg a_{2004} értékét!

KöMal 2004. február; B.3703.

3. Az a_n sorozatot ($n \in \mathbb{Z}^+$) így értelmezzük: ha $1 \leq n \leq 5$, akkor $a_n = n^2$, minden más esetben $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Mennyi lehet a_{2019} ?

(A) 4 (B) 16 (C) 17 (D) 22 (E) az előzőek egyike sem

Bolyai Matematika Csapatverseny 2019, 11. osztály, körzeti forduló

4. Határozzuk meg azokat az n pozitív egészeket, amelyekre

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$$

négyzetszám.

KöMal 2018. március; B.4945.

5. Egy papírlapra felírtuk a pozitív egész számokat n -től $2n$ -ig. Azt vettük észre, hogy páros számok összege 2013-mal nagyobb, mint a felírt páratlan számok összege.

Mettől meddig írtuk fel a számokat?

OKTV 2012/2013, I. kategória, döntő

6. Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.

- a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám?
b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik?

Középszintű érettségi 2006. február 21.

7. Egy mértani sorozat első eleme és hányadosa egész szám. Az első három elem összege 21, az n -edik és az azt megelőző két elem összege 336. Írja fel a mértani sorozat első n elemét!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 2000. május 22.

VI. Valószínűségszámítás, statisztika

1. Egy véletlen kísérlet során két szabályos dobókockával dobunk egyszerre. Ezt a kísérletet többször egymás után elvégezzük. Egy-egy dobás után mindig feljegyezzük a két dobott szám összegét, és ezt az összeget tekintjük a kísérlet kimenetelének.

Az első kilenc kísérlet után ezeket az összegeket jegyeztük fel: 9, 3, 5, 4, 11, 6, 9, 6, 10.

- a) Számítsa ki a kilenc számból álló adatsokaság terjedelmét, mediánját, átlagát és szórását!

Legyen az A esemény az, hogy a kísérlet kimenetele 4-nél nagyobb, de 9-nél kisebb.

- b) Adja meg az A esemény relatív gyakoriságát az első kilenc kísérlet után!

- c) Számítsa ki az A esemény valószínűségét!

Középszintű érettségi (idegen nyelven) 2019. május 7.

2. András és Balázs kosárra dobásban méri össze erejét. Annak a valószínűsége, hogy András a kosárba talál 0,7; míg Balázs 0,4 valószínűséggel dob kosarat.

Egy játszmában mindegyikük egyszer dob. Ha András talál és Balázs nem, akkor András nyer. Ha Balázs talál és András nem, akkor Balázs nyer. Minden más esetben a játszma döntetlen.

Mennyi a valószínűsége, hogy két egymás utáni játszma mindegyike döntetlen lesz?

OKTV 2007/2008, I. kategória, I. forduló

3. Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

- a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk?

- b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz!

Emelt szintű érettségi 2007. október 25.

4. Magyar kártyából öt lapot húzva melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy az öt lap azonos színű vagy annak, hogy van köztük négy azonos szám vagy figura?

KöMal 2015. március; C.1284.

5. Egy 30 fős osztályban a karácsonyi ajándékozásról sorsolással döntenek. Minden diák nevét felírják egy papírra, majd a 30 papírdarabot egy sapkába teszik. Névsor szerinti sorrendben mindenki kihúz egy papírt a sapkából és a rajta szereplő embernek készít ajándékot. Elképzelhető, hogy valaki saját magát ajándékozza meg.

Az ajándékozás úgy történik, hogy először jelentkeznek azok, akik magukat húzták, majd a többi diák közül a legfiatalabb diák átadja ajándékát az általa húzott embernek, és innentől aki éppen megkapja az ajándékát, az lesz a soron következő ajándékot átadó ember. Ha valahol elakad a sor, azaz olyan diák kapja az ajándékot, aki már a sajátját átadta, de még nem mindenki adta át illetve kapta meg az ajándékát, akkor az utóbbiak közül a legfiatalabb újra kezdi.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy osztályban hat egymást követő év karácsonyi ajándékozása során lesz legalább egy olyan év, amelyben senki nem húzza magát és a sor sem akad el? (Az osztálylétszám minden évben ugyanannyi.)

OKTV 2007/2008, II. kategória, II. forduló

6. Egy 1 milliárd lakosú országban egy olcsó AIDS teszt bevezetését tervezik. Tudjuk, hogy kb. minden ezredik ember fertőzött. Kiderült, hogy a betegek 99,9%-ánál pozitív, viszont sajnos az egészségesek 0,1%-ánál is pozitív eredményt ad a teszt. Ilyen paraméterek mellett elvetették a használatát. Egy matematikus azt javasolta, hogy végezzék el kétszer egymás után a vizsgálatot és ha mindkettő pozitív, csak akkor küldjék orvoshoz a páciens. Így már bevezethető lett a teszt. A következő kérdésekkel arra keressük a választ, hogy mi ennek a magyarázata.
- a) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha az első teszt pozitív.
 - b) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha mind a két teszt pozitív.

OKTV 2008/2009, II. kategória, II. forduló